

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Digitaltechnik

Digitale Schaltfunktionen und Normalformtheoreme

Motivation

Schaltalgebra: - zulässige Interpretation der *Huntingtonschen Axiome*
- Basis für die formale Entwicklung binärer Digitalerschaltungen

Schaltfunktion: - 2^n Zuordnungen $X_j \rightarrow f_j$ (X_j **Belegung**, f_j zugeordnete **Funktionswert**)
- Begriffe: Nullstellenmenge N, Einsstellenmenge E, Redundanzmenge R



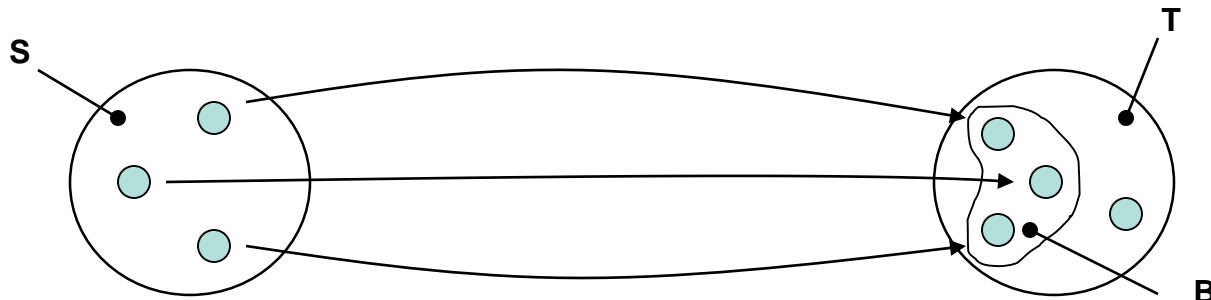
Anwendungen von Schaltfunktionen



Wichtig: **Kompakte Darstellungstechniken** und **formale Konstruktionsvorschriften**
für beliebige **Schaltfunktionen** (unabhängig von n)

Arten von Funktionen:

→ Injektion: **Eineindeutige Abbildung** von S in T

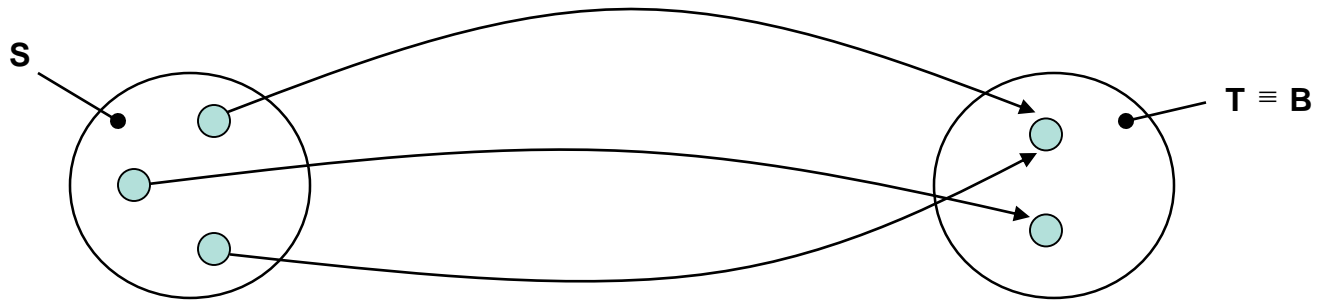


Jedem Element aus S wird genau
ein Element aus T zugeordnet.

Die Bildmenge ist Teilmenge der Zielmenge ($B \subset T$).

Arten von Funktionen

→ Surjektion: **Eindeutige Abbildung** von S auf T

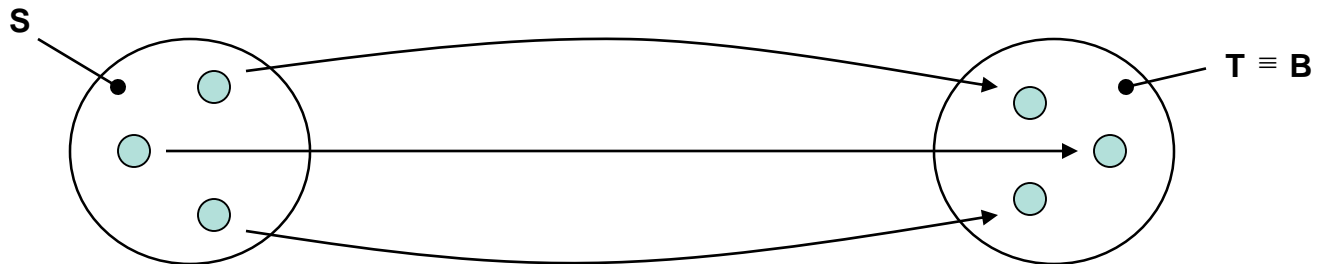


Verschiedene Elemente aus S können
denselben Elementen aus T zugeordnet sein.

Bild- und Zielmenge sind identisch (**B ≡ T**).

Arten von Funktionen

→ Bijektion: **Eineindeutige Abbildung** von S auf T



Funktion, die sowohl **Eigenschaften** der **Injektion**
als auch der **Surjektion** aufweist.

Bild- und Zielmenge sind identisch (**B ≡ T**).

Funktionsbegriff

Funktionsbegriff: stellt offensichtlich **Beziehung** zwischen beiden **Mengen S** und **T** her

- **allgemein:** jede **eindeutige Relation** kann als **Funktion** aufgefasst werden

→ Funktion ist **Spezialfall der Relation**

- **Definition einer Funktion** (verschiedene Weisen):

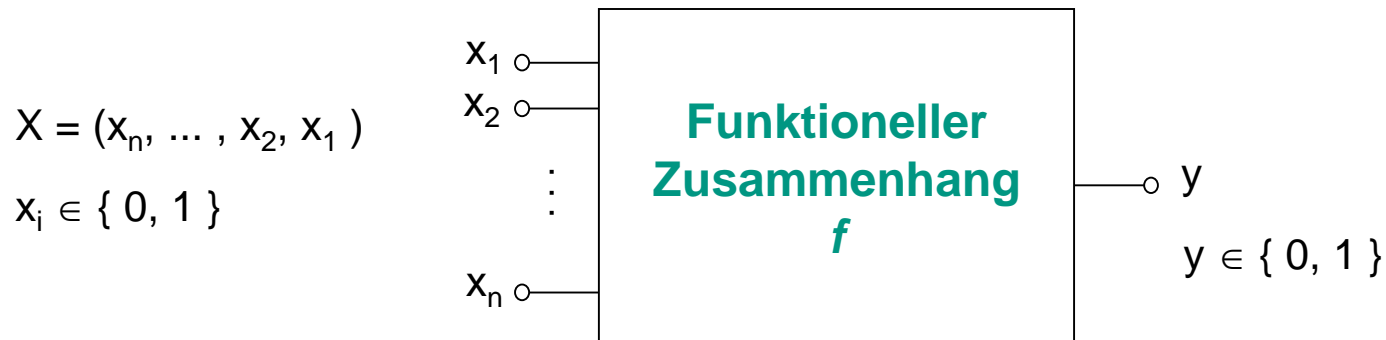
- durch **Angabe aller Paare (s,t)**, welche die Funktion festlegen (aufwendig!!!)

- **Kurznotation:** z.B. $y = x!$

- Sei **S = { 0, 1 }ⁿ** das n-fache **kartesische Produkt** der Menge { 0, 1 } und **T = { 0, 1 }**

- **Definition einer Schaltfunktion** (s ist das Argument, t der Funktionswert):

Angabe **aller Paare (s, t)** mit **s ∈ { 0, 1 }ⁿ** (= **Belegung**) und **t ∈ { 0, 1 }**



Allgemein:

Schaltfunktion lässt sich schreiben als: $y = f(X) = f(x_n, \dots, x_2, x_1)$

mit x_n, \dots, x_1 **unabhängige** Variablen, **y abhängige** Variable der Funktion

- **Beispiel:** **f** sei diejenige **Funktion**, die genau dann den Wert **y = 1** annimmt, wenn die Belegung von (a_3, a_2, a_1) eine **ungerade Anzahl** von **Einsen** aufweist

Abbildungsvorschrift:

$(a_3 \ a_2 \ a_1)$	f	y
(0, 0, 0)	→	0
(0, 0, 1)	→	1
(0, 1, 0)	→	1
(0, 1, 1)	→	0
(1, 0, 0)	→	1
(1, 0, 1)	→	0
(1, 1, 0)	→	0
(1, 1, 1)	→	1

Funktionsdarstellung:

j_0	a_3	a_2	a_1	y
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Klassen von Schaltfunktionen

häufig gilt: **nicht allen Belegungen** kann/muss ein **Funktionswert zugeordnet** werden

- solche Zuordnungen: → **Redundanz-** oder **Freistellen** der Funktion

→ Kennzeichnung: $X_j \rightarrow -$ (sogenanntes *don't care*)

→ **Stelle** kann **wahlweise** mit **1** oder **0 belegt** werden

Ziffer	j_0	a_3	a_2	a_1	a_0	y
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0
2	2	0	0	1	0	0
3	3	0	0	1	1	1
4	4	0	1	0	0	0
5	5	0	1	0	1	0
6	6	0	1	1	0	1
7	7	0	1	1	1	0
8	10	1	0	0	0	0
9	11	1	0	0	1	1
Pseudo-tetraden	12	1	0	1	0	-
	13	1	0	1	1	-
	14	1	1	0	0	-
	15	1	1	0	1	-
	16	1	1	1	0	-
	17	1	1	1	1	-

Also: 3 Teilmengen von Belegungen:

- **Nullstellenmenge** $N = \{ X_j \mid X_j \rightarrow 0 \}$

- **Einsstellenmenge** $E = \{ X_j \mid X_j \rightarrow 1 \}$

- **Redundanzmenge** $R = \{ X_j \mid X_j \rightarrow - \}$

Beispiel: **Funktion mit Freistellen**

→ Funktion für BCD Zahlen,
wobei Eingangskombinationen,
die Pseudotetraden entsprechen,
mit Freistellen belegt werden

Reale technische Anwendungen:

→ Freistellen überwiegen häufig gegenüber 0- / 1-Stellen

→ Man definiert daher **zwei Hauptklassen** von **Funktionen**:

- eine **vollständig definierte Schaltfunktion**:

→ ordnet **allen Belegungen X_j** einen
Funktionswert aus $f_j \in \{0, 1\}$ zu

- eine **unvollständig definierte Schaltfunktion**:

→ ordnet **mindestens einer Belegung X_j**
keinen Funktionswert aus $f_j \in \{0, 1\}$ zu

→ wegen $|\{0, 1\}| = 2^n$ gilt:

bei **unvollständigen Schaltfunktionen** lässt sich aus jeweils zwei
Teilmengen die **fehlende dritte Teilmenge bestimmen**

Neben tabellarischer Darstellung: es existieren **graphisch orientierte Darstellungen**

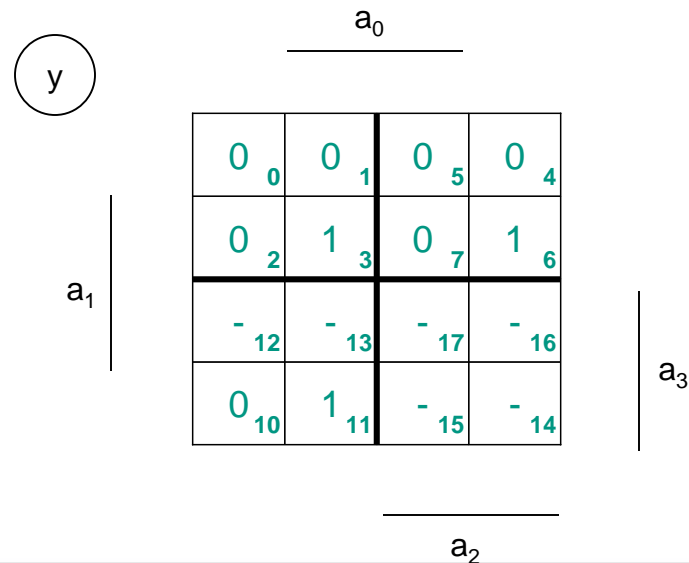
→ **Tafelmethoden** (sogenannte **KV-Diagramme**),

vor über 100 Jahren von Karnaugh und Veitch vorgeschlagen

→ **Nachteile** von **KV-Diagrammen** bei **Werten $n > 4$** (unübersichtlichen Darstellung!)

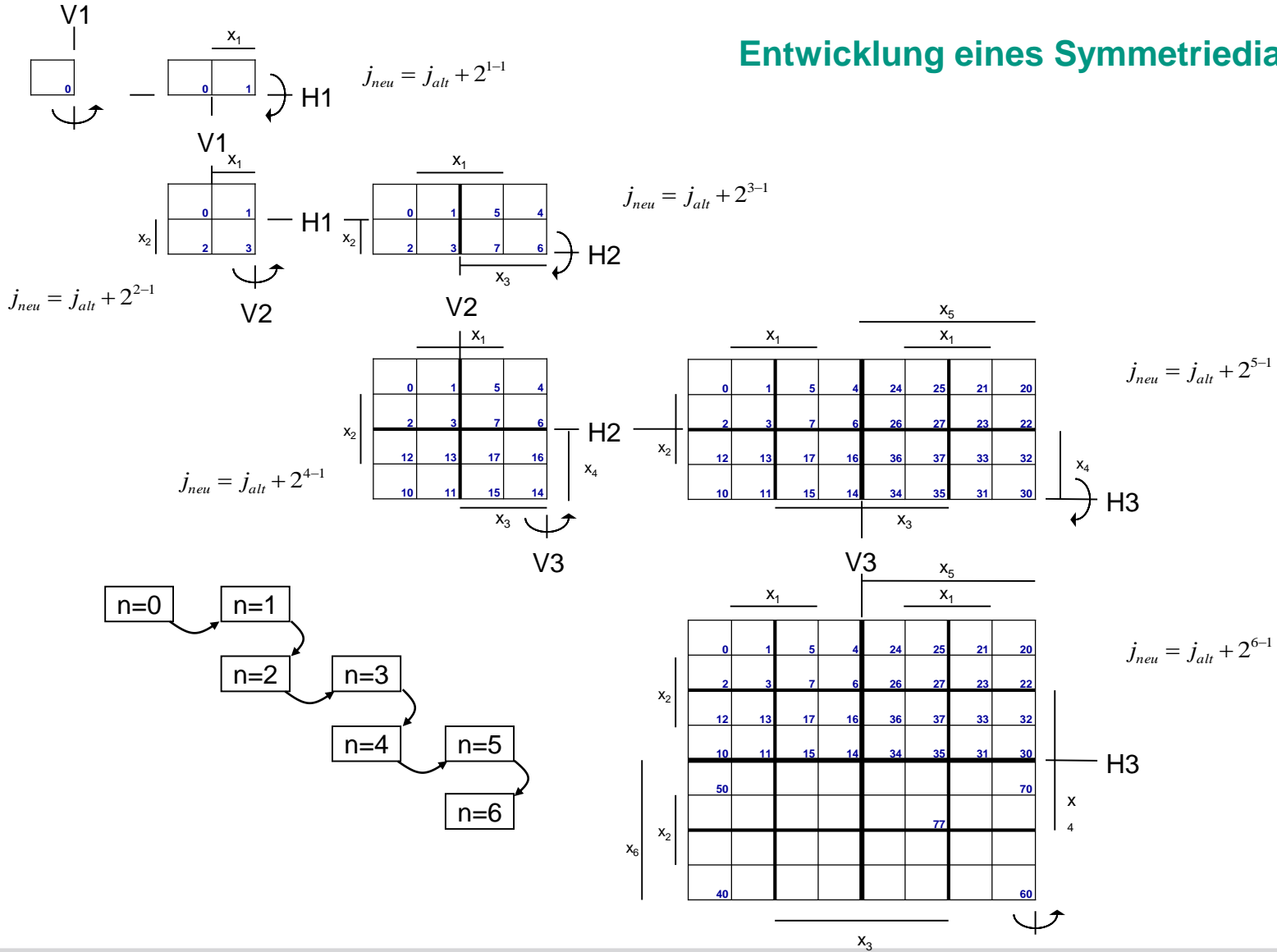
- **Prof. Lipp** hat KV-Diagramme mittels einer **neuen Symmetrierelation**
auf **beliebiges n erweitert**

Beispiel: Darstellung einer **Schaltfunktion** mittels **Symmetriediagramm**



Symmetriediagramme

Entwicklung eines Symmetriediagramms



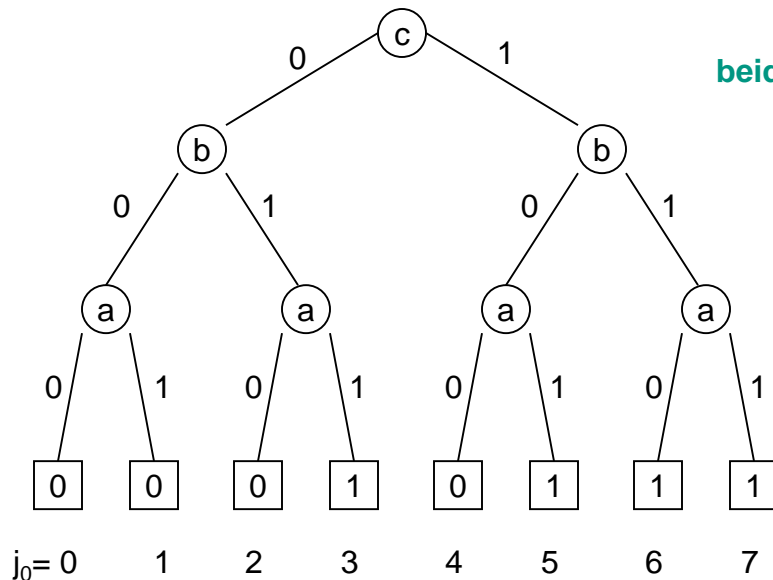
Spezifikation / Schaltfunktionen: **Funktionstabelle** stellt bei großen Werten von n **keine** besonders **effiziente Darstellungstechnik** dar, da die Spaltenzahl mit n , die **Zeilenzahl** jedoch mit 2^n wächst

→ Neben bereits vorgestellten Methoden Funktionen darzustellen:

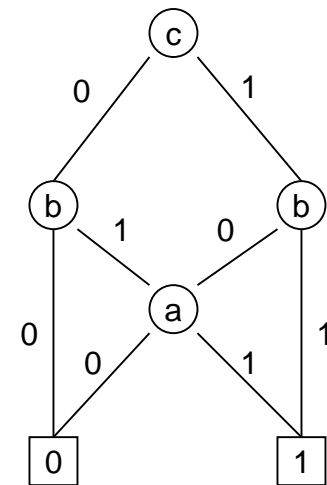
es existieren **weitere Möglichkeiten** zur Darstellung in Form **spezieller Graphen**

- z.B. **Binary Decision Diagrams (BDDs)**

Beispiel für die Darstellung mittels BDD:



beide Darstellungen: repräsentieren die **gleiche Funktion**



Binary Decision Diagrams (BDDs)

- **Funktionen** lassen sich **kanonisch** (eindeutig) darstellen
 - diese Eigenschaft von BDDs lässt für **Äquivalenzprüfungen** von **Funktionen** ausnutzen → **Isomorphie-Test**
- **darüber hinaus:** es existieren eine Reihe von Verfahren, welche die **rechnergestützte Verarbeitung** von in BDD-Form dargestellten Funktionen effizient ermöglichen

Schaltfunktionen

Eigenschaft: Anzahl möglicher Funktionen (MF) wächst explosionsartig!
→ Zahl einzelner Bildungsvorschriften und Namen zu groß!

Gesucht: Grundsätzliche Konstruktionsvorschrift für Schaltfunktionen
(unabhängig von n) ?

Ziel: Anbindung an schaltalgebraische Notation: Axiome + Regeln anwendbar

Beispiele:

$$n = 0 \quad \text{MF} = 2$$

$$n = 1 \quad \text{MF} = 4$$

$$n = 2 \quad \text{MF} = 16$$

$$n = 3 \quad \text{MF} = 256$$

·
·

$$n = 10 \quad \text{MF} = 2^{1024} \approx 10^{308}$$

Mögliche Schaltfunktionen bei n=2

n = 2: MF = 16 $y = f(x_2, x_1)$

x_2	x_1	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_{10}	y_{11}	y_{12}	y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}	y_{17}
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
			neg. Disjunktion	(neg. Implikation)		neg. Implikation		Antivalenz	neg. Konjunktion	Konjunktion	Äquivalenz		Implikation		(Implikation)	Disjunktion	

Eigene Symbole und Namen:

y_{10} :	&	Konjunktion, UND-Verknüpfung,	AND
y_{16} :	V	Disjunktion, ODER-Verknüpfung,	OR
y_7 :	$\bar{\&}$	neg. Konjunktion, neg. UND-Verknüpfung,	NAND (NOT AND)
y_1 :	\bar{V}	neg. Disjunktion, neg. ODER-Verknüpfung,	NOR (NOT OR)
y_6 :	\neq	Antivalenz	XOR
y_{11} :	\equiv	Äquivalenz	
y_{13} :	\rightarrow	Implikation, x_2 impliziert x_1 , $x_2 \rightarrow x_1$ (analog: y_{15} : x_1 impliziert x_2 , $x_1 \rightarrow x_2$)	

Herleitung der Normalformtheoreme

Besondere Funktionen: **Konjunktion** und **Disjunktion**

- *Null-* und *Einsstellenmenge* teilen sich extrem auf, jeweils in: **1** zu **2ⁿ-1** Belegungen

Konjunktion: $y = f(x_1, x_2) \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 = x_2 = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ **Disjunktion:** $y = f(x_1, x_2) \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

- entsprechen den Operatoren der **Schaltalgebra** (Serien- und Parallelschaltungen)

→ Anbindung dieser Schaltfunktionen an das axiomatische Gebäude!

Symmetriediagramme:

n = 2

Konjunktion

$$y = x_2 \& x_1$$

		<u>x₁</u>	
		0	1
x ₂	0	0	1
	0	2	1

Disjunktion

$$y = x_2 \vee x_1$$

		<u>x₁</u>	
		0	1
x ₂	0	1	1
	1	2	1

n = 3

$$y = x_3 \& x_2 \& x_1$$

		<u>x₁</u>			
		0	1	5	4
x ₂	0	0	1	0	
	0	2	0	3	
		<u>x₃</u>			

$$y = x_3 \vee x_2 \vee x_1$$

		<u>x₁</u>			
		0	1	5	4
x ₂	0	1	1	1	
	1	2	1	3	
		<u>x₃</u>			

Herleitung der Normalformtheoreme

Gesucht: Grundsätzliche Konstruktionsvorschrift für **Schaltfunktionen** (unabh. von n) ?

→ **Bauprinzip** in Anlehnung an die **Reihenentwicklung** in der Mathematik

- geeignete (bspw. orthogonale) **Basisfunktionen** $b_k(x)$ und **Koeffizienten** A_k

$$y = f(x) = A_0 \cdot b_0(x) + A_1 \cdot b_1(x) + \dots + A_{N-1} \cdot b_{N-1}(x) = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cdot b_k(x)$$

Frage: gibt es Basisfunktionen und geeignete Koeffizienten für beliebige **Schaltfunktionen** ?

Notwendig: **Konjunktion** / **Disjunktion** -> Funktionswert **1** (**0**) **beliebiger Belegung** zuordnen können

n = 3: **Konjunktion:** $y = x_3 \& x_2 \& x_1$

	x_1			
y	0 ₀	0 ₁	0 ₅	0 ₄
x_2	0 ₂	0 ₃	1 ₇	0 ₆
	x_3			

Modifikation der Konjunktion



Beliebige Einstelle: $y = ?$

	x_1			
y	0 ₀	0 ₁	0 ₅	1 ₄
x_2	0 ₂	0 ₃	0 ₇	0 ₆
	x_3			

**Abbildung
der
Belegung**

$$y = x_3 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_1$$

Herleitung der Normalformtheoreme

Ergebnis: **Belegungsabbildung** -> beliebige Eins- / Nullstelle für jede Belegung

→ **Minterm**- und **Maxterm**funktionen

Allgemein gilt für n = beliebig:

$$y = \ddot{x}_n \& \ddot{x}_{n-1} \& \dots \& \ddot{x}_2 \& \ddot{x}_1 \quad \ddot{x} = \begin{cases} x & \text{für } 1 \\ \bar{x} & \text{für } 0 \end{cases}$$

$$y = \ddot{x}_n \vee \ddot{x}_{n-1} \vee \dots \vee \ddot{x}_2 \vee \ddot{x}_1 \quad \ddot{x} = \begin{cases} \bar{x} & \text{für } 1 \\ x & \text{für } 0 \end{cases}$$

$$m_j = \ddot{x}_n \& \dots \& \ddot{x}_1 \quad \text{Minterm(funktion)}$$

$$M_j = \ddot{x}_n \vee \dots \vee \ddot{x}_1 \quad \text{Maxterm(funktion)}$$

$$m_j \& m_k = 0 \quad M_j \vee M_k = 1 \quad j \neq k, 0 \leq j, k \leq 2^n - 1$$

$$\bar{m}_j = M_j \quad \bar{M}_j = m_j$$

$$m_j \& M_j = 0 \quad m_j \vee M_j = 1$$

Beispiel: $n = 2$

$$m_0 = \bar{x}_2 \& \bar{x}_1, \quad m_1 = \bar{x}_2 \& x_1,$$
$$m_2 = x_2 \& \bar{x}_1, \quad m_3 = x_2 \& x_1$$

$$m_1 \& m_2 = \bar{x}_2 \& x_1 \& x_2 \& \bar{x}_1 = 0$$

Herleitung der Normalformtheoreme

Gesucht: Grundsätzliche Konstruktionsvorschrift für Schaltfunktionen (unabh. von n)
 → Verwendung orthogonaler **Minterm**- und **Maxterm**basisfunktionen ?

Mögliche Funktion:

Disjunktion
 aller
 Minterme



$n = 3$:

y	=	m_0	\vee	m_1	\vee	m_2	\vee	m_3	\vee	m_4	\vee	m_5	\vee	m_6	\vee	m_7	x_3	x_2	x_1	j_0
1		1		0		0		0		0		0		0		0	0	0	0	0
1		0		1		0		0		0		0		0		0	0	0	1	1
1		0		0		1		0		0		0		0		0	0	1	0	2
1		0		0		0		1		0		0		0		0	0	1	1	3
1		0		0		0		0		1		0		0		0	1	0	0	4
1		0		0		0		0		0		1		0		0	1	0	1	5
1		0		0		0		0		0		0		1		0	1	1	0	6
1		0		0		0		0		0		0		0		1	1	1	1	7

Herleitung der Normalformtheoreme

Erweiterung: Einführung von **Koeffizienten A_j** für **Minterm-** und **Maxtermbasisfunktionen**
 → beliebige Funktionsdarstellung

Reihenentwicklung:

Gewichtung
 der Basisfunktionen m_j
 mit $A_j \in \{0, 1\}$



n = 3:

	$y = A_0 \& m_0 \vee A_1 \& m_1 \vee A_2 \& m_2 \vee A_3 \& m_3 \vee A_4 \& m_4 \vee A_5 \& m_5 \vee A_6 \& m_6 \vee A_7 \& m_7$								x_3	x_2	x_1	j_0	
A_0	A_0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_1	0	A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
A_2	0	0	A_2	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2
A_3	0	0	0	A_3	0	0	0	0	0	0	1	1	3
A_4	0	0	0	0	A_4	0	0	0	0	1	0	0	4
A_5	0	0	0	0	0	A_5	0	0	0	1	0	1	5
A_6	0	0	0	0	0	0	A_6	0	0	1	1	0	6
A_7	0	0	0	0	0	0	0	A_7	0	1	1	1	7

Normalformen einer Schaltfunktion → kanonische Formen

Disjunktive Normalform (DNF): $y = (f_{2^n-1} \& m_{2^n-1}) \vee (f_{2^n-2} \& m_{2^n-2}) \vee \dots \vee (f_1 \& m_1) \vee (f_0 \& m_0)$

oder kürzer
$$y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \& m_j)$$

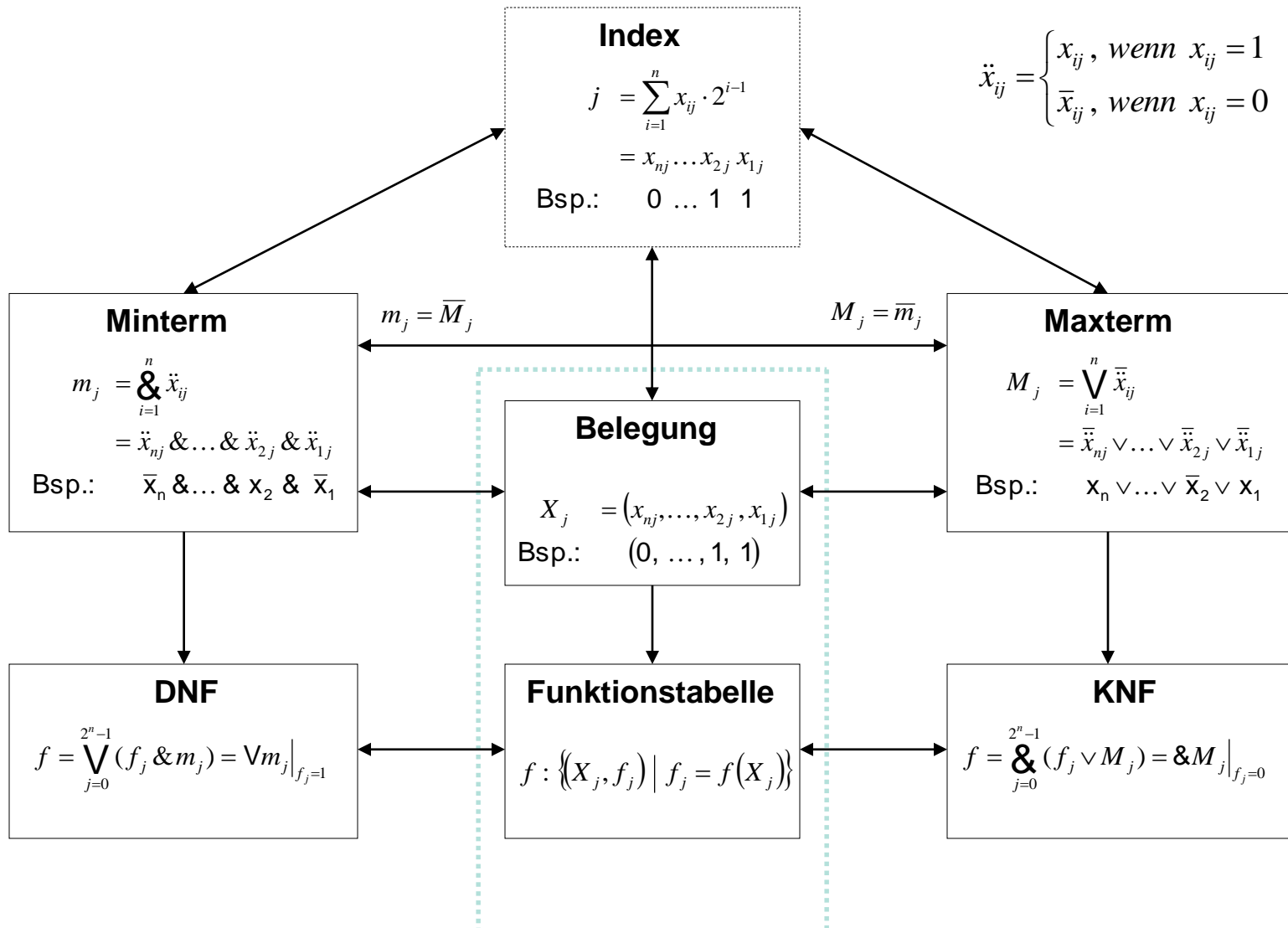
Konjunktive Normalform (KNF): $y = (f_{2^n-1} \vee M_{2^n-1}) \& (f_{2^n-2} \vee M_{2^n-2}) \& \dots \& (f_1 \vee M_1) \& (f_0 \vee M_0)$

oder kürzer
$$y = \big\&_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)$$

→ nur mit den **3 Grundverknüpfungen** (Operatoren) **Konjunktion**, **Disjunktion** und **Negation** ist es möglich **jede beliebige Schaltfunktion** darzustellen

→ **[&, ∨, −]** ist ein **Basissystem** der Schaltalgebra

Beziehungen zwischen den Begriffen

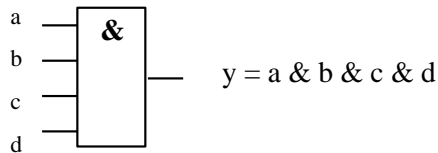


Notwendig: für jeden Operatortyp eine passende technische Realisierung

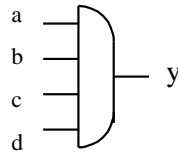
→ Schaltglieder (Gatter) für **Konjunktion**, **Disjunktion** und **Negation**

Schaltzeichen nach der neuen Norm (DIN 40900):

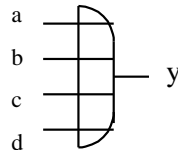
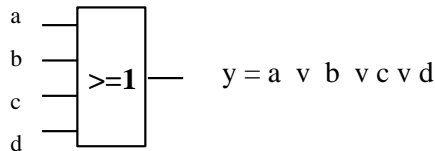
UND-Glied :



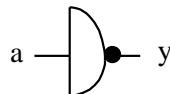
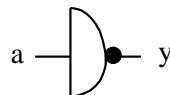
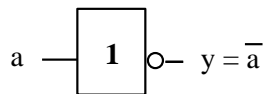
(Zum Vergleich alte Norm)



ODER-Glied :

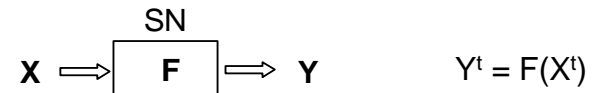


Negationsglied:



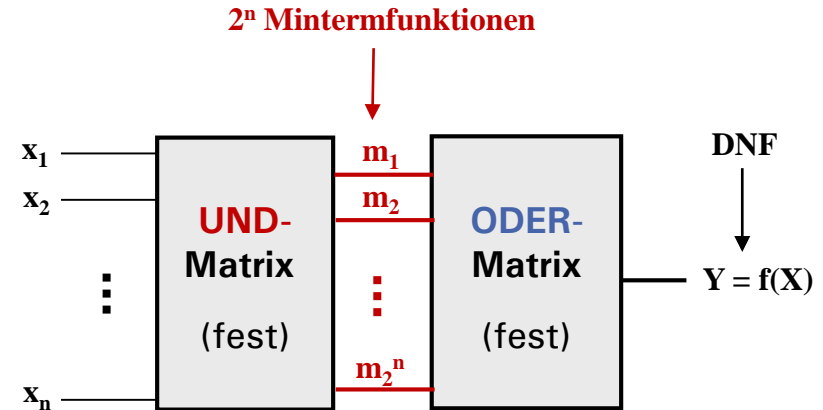
Definition: Schaltnetz (angelehnt an DIN IEC 748)

Ein **Schaltnetz** ist eine Digitalschaltung, in der es für jede mögliche Kombination von digitalen Signalen an den Eingängen eine - und nur eine - Kombination von digitalen Signalen an den Ausgängen gibt:

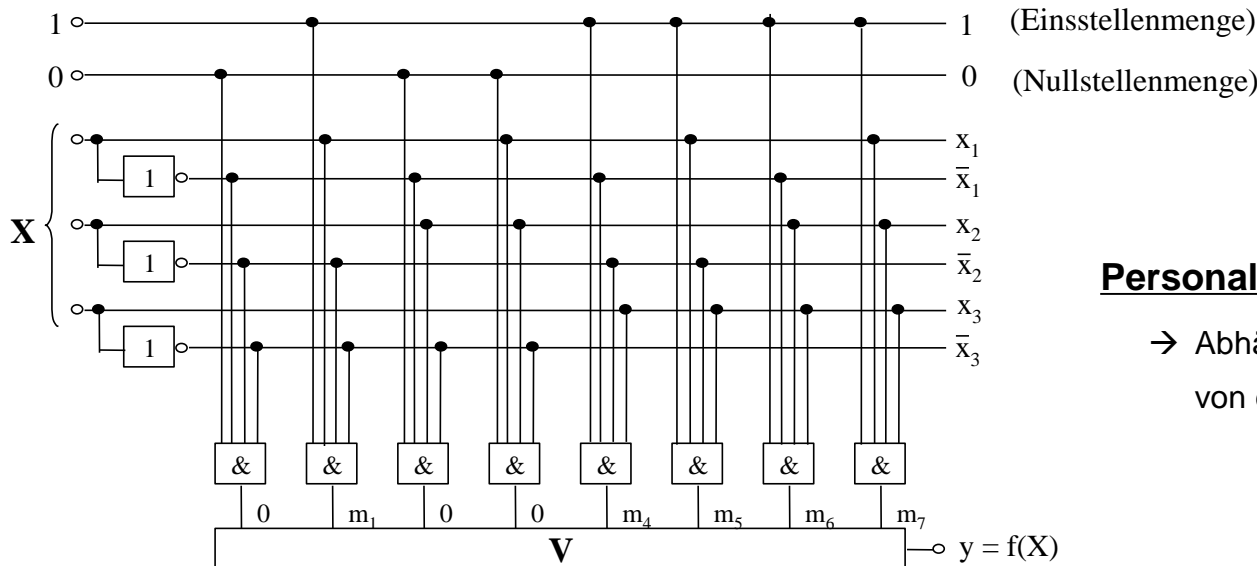


Normalformorientierte Strukturen:

- > DNF als Beispiel
- > 2^n UND-Glieder in der 1. Stufe und ein bzw. mehrere ODER-Glieder in der 2 Stufe
- > **Beispiel 1: ULA (Universal Logic Array)**



Beispiel: $y = m_1 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$

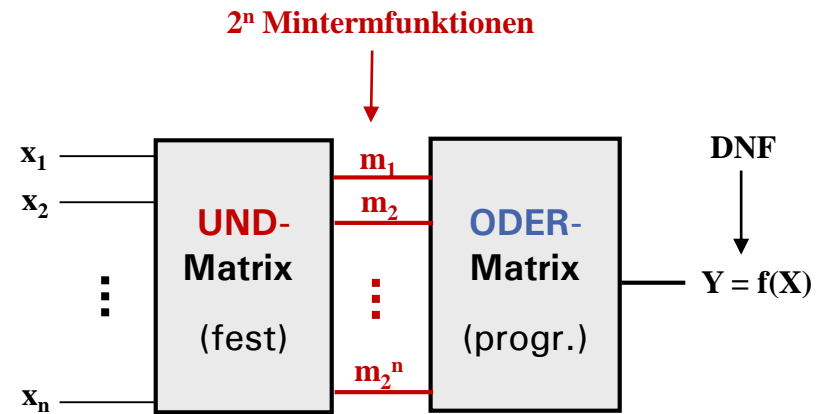


Personalisierung (Programmierung):

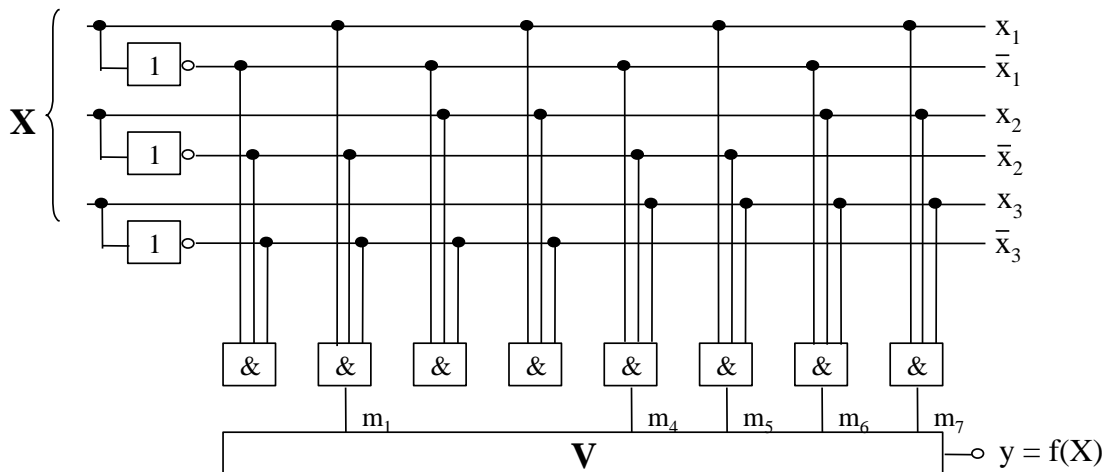
→ Abhängigkeit des Funktionswertes f_j von einem **Minterm** m_j wird festgelegt

Normalformorientierte Strukturen:

-> **Beispiel 2: ROM (Read Only Memory)**



Beispiel: $y = m_1 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$



**Personalisierung
erfolgt in der 2. Stufe**

Es gilt:

Normalformtheoreme und der **Hauptsatz der Schaltalgebra**

→ zeigen die **eindeutige Darstellbarkeit** beliebiger Schaltfunktionen
mittels der **3 Grundverknüpfungen** *Konjunktion*, *Disjunktion*, *Negation*

→ **daher:** man bezeichnet diese **3 Verknüpfungen** **[&, ∨, −]**
als ein **Basissystem der Schaltalgebra**

→ **weiterhin:** -es existieren **weitere Basissysteme**
-lassen sich mittels der **De Morgan'schen Theoreme**
vom ersten Basissystem **ableiten:**

$$\overline{x_2 \vee x_1} = \overline{x_2} \& \overline{x_1} \quad \text{bzw.} \quad \overline{x_2 \& x_1} = \overline{x_2} \vee \overline{x_1}$$

Basissysteme der Schaltalgebra

Also:

- Neben dem bereits vorgestellten Basissystem mit 3 Verknüpfungen [$\&$, \vee , $\bar{}$] existieren **Basissysteme** mit **zwei** oder gar **einem Operator**

Beispiel: Herleitung von **Basissystemen** mit 2 Verknüpfungen [$\&$, $\bar{}$] bzw. [\vee , $\bar{}$] ausgehend von **DNF** bzw. **KNF**

$$y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \& m_j)$$

bzw.

$$y = \big\&_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)$$

$$y = \overline{\overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \& m_j)}}$$

bzw.

$$y = \overline{\overline{\big\&_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)}}$$

$$y = \overline{\big\&_{j=0}^{2^n-1} (f_j \& m_j)}$$

bzw.

$$y = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)}$$

$$y = \overline{\big\&_{j=0}^{2^n-1} (\overline{f_j} \vee \overline{m_j})}$$

bzw.

$$y = \overline{\bigvee_{j=0}^{2^n-1} (\overline{f_j} \& \overline{M_j})}$$

Basissysteme der Schaltalgebra

Weiterhin: **DNF** realisiert nur **Minterme** $f_j = 1$ und **KNF** nur **Maxterme** $f_j = 0$

man erhält :

$\overline{f_j} = 0$ $\overline{f_j} \vee \overline{m_j} = \overline{m_j}$ $y = \& \overline{m_j} \Big _{f_j=1}$	und	$\overline{f_j} = 1$ $\overline{f_j} \& \overline{M_j} = \overline{M_j}$ $y = \overline{\vee} \overline{M_j} \Big _{f_j=0}$
--	-----	---

Also: man erhält **zwei neue Basissysteme** mit jeweils nur einer **einzigsten Verknüpfung**,

denn: $[\&]$ und $[\overline{\vee}]$ bilden ebenfalls Basissysteme der Schaltalgebra

wobei: Negationen einzelner Variablen werden mit Konstanten 0 / 1 dargestellt:

$$x = x \& 1 \quad (\text{Regel 5b})$$

$$x = x \vee 0 \quad (\text{Regel 5a})$$

$$\overline{x} = \overline{x \& 1}$$

$$\overline{x} = \overline{x \vee 0}$$

- Beispiele digitaler Bausteine
- Entwicklungssatz der Schaltalgebra
- Minimierungsverfahren für komplexe Schaltfunktionen
- Technische Realisierung von Schaltgliedern
- Weitere praktische Anwendungen