

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

# Digitaltechnik

## Entwicklungssatz der Schaltalgebra

## Normalformtheoreme

- Ermöglichen eine **eindeutige** (*kanonische*) **Darstellung** jeder **beliebigen Schaltfunktion**
- Schaltfunktionen sind **allein** durch **3 logische Operationen** realisierbar **Und**, **Oder** und **Negation**
- Der **Boole'sche Entwicklungssatz** ist eine formelle Methode zur gezielten **Umwandlung** jedes **beliebigen schaltalgebraischen Ausdrucks** in eine der beiden Normalformen (KNF bzw. DNF)  
→ **Ergebnis:** eine der kanonischen **Darstellungen KNF** bzw. **DNF**

## Minterme

- **Terme  $m_i$**  → für **genau eine Belegung** wird der **Wert '1'** angenommen  
→ "orthogonale Basisfunktionen" zur **Bildung der DNF**
- "Projektion" von Einstellen auf beliebige Positionen  
im Symmetriediagramm
- "**Auswahl**" der richtigen **Funktionswerte** in **DNF**  
→ **Einstellenmenge**

Minterme		$f(x_2, x_1)$
$m_0$	$\bar{x}_2 \ \& \ \bar{x}_1$	$f(0,0)$
$m_1$	$\bar{x}_2 \ \& \ x_1$	$f(0,1)$
$m_2$	$x_2 \ \& \ \bar{x}_1$	$f(1,0)$
$m_3$	$x_2 \ \& \ x_1$	$f(1,1)$

## Maxterme

- **Terme  $M_i$**  → für **genau eine Belegung** wird der Wert **‘0’** angenommen  
→ “orthogonale Basisfunktionen“ für **Bildung der KNF**
- “Projektion“ von Nullstellen auf beliebige Positionen im Symmetriediagramm
- **“Auswahl“** der richtigen **Funktionswerte** in **KNF**  
→ **Nullstellenmenge**

Maxterme		$f(x_2, x_1)$
$M_0$	$x_2 \vee x_1$	$f(0,0)$
$M_1$	$x_2 \vee \overline{x_1}$	$f(0,1)$
$M_2$	$\overline{x_2} \vee x_1$	$f(1,0)$
$M_3$	$\overline{x_2} \vee \overline{x_1}$	$f(1,1)$

# DNF (Disjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in DNF-Form:** besteht aus mehreren *disjunktiv* verknüpften ( $\rightarrow$  Oder-Funktion) **Termen**, die aus *konjunktiv* verknüpften ( $\rightarrow$  Und-Funktion) **Literalen** bestehen

## Beispiele:

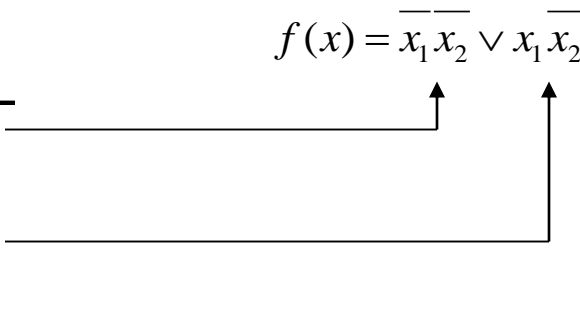
$$f(x) = (x_1 \& x_2 \& x_3) \vee (x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \& x_2 \& \overline{x_3}) = x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$$

$$f(x) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \& x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

- Also: **DNF** listet **alle Belegungen**, die den **Funktionswert '1'** erzeugen sollen, einzeln auf

$x_1$	$x_2$	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(x) = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_2}$$


# KNF (Konjunktive Normalform)

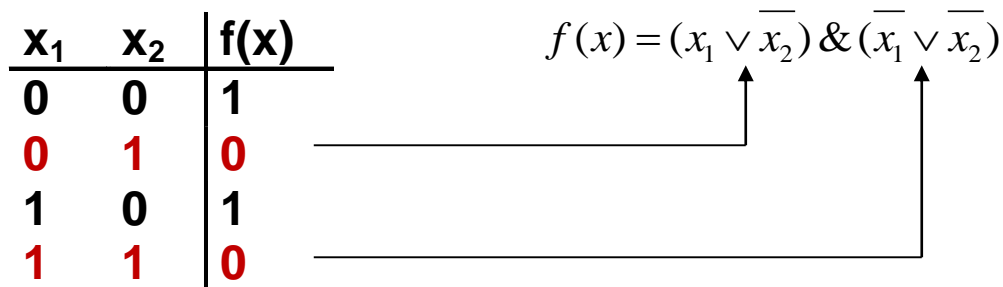
- **Schaltfunktion in KNF-Form:** besteht aus mehreren *konjunktiv* verknüpften **Termen**, die aus *disjunktiv* verknüpften **Literalen** bestehen

**Beispiel:** 
$$f(x) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

- **Also:** bei der **KNF** entspricht **jeder Term** von *disjunktiv* verknüpften **Literalen** einer **“invertierten Belegung”** mit **Funktionswert ‘0’**  
→ Tritt diese Wertkombination auf, so wird der entsprechende Term ‘0’ und der komplette Schaltfunktionswert wird auch ‘0’

$x_1$	$x_2$	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(x) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$



# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Der **Entwicklungssatz** ist eine formale Methode eine **Funktion**  $f(x_n, \dots, x_3, x_2, x_1)$  in eine **DNF** (oder KNF) umzuwandeln

- Die **Entwicklung der Funktion f nach der Variablen  $x_i$**

→ Aufteilung in **zwei Fälle**:  $x_i = 1$  und  $x_i = 0$

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) &= [x_i \& f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \vee [\bar{x}_i \& f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \\ &= [x_i \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{x}_i \& f \Big|_{x_i=0}] \end{aligned}$$

- Oder für eine KNF:

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) &= [x_i \vee f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \& [\bar{x}_i \vee f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \\ &= [x_i \vee f \Big|_{x_i=0}] \& [\bar{x}_i \vee f \Big|_{x_i=1}] \end{aligned}$$

## Beweis der beiden Fälle:

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i = 1, \dots, x_1) &= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{1} \& f \Big|_{x_i=0}] \\ &= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [0 \& f \Big|_{x_i=0}] \\ &= f \Big|_{x_i=1} \vee 0 \\ &= f \Big|_{x_i=1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i = 0, \dots, x_1) &= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{0} \& f \Big|_{x_i=0}] \\ &= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [1 \& f \Big|_{x_i=0}] \\ &= 0 \vee f \Big|_{x_i=0} \\ &= f \Big|_{x_i=0} \end{aligned}$$



# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- $f|_{x_i=1}$  und  $f|_{x_i=0}$  werden als **Restfunktionen** oder **Kofaktoren** bezeichnet
- der nach  $x_i$  entwickelte Ausdruck lässt sich nach den weiteren Variablen entwickeln

## Beispiel einer Funktion mit zwei Variablen:

$$\begin{aligned}y = f(x_2, x_1) &= x_1 \& f(x_2, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(x_2, 0) \\ &= x_2 \& [x_1 \& f(1, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(1, 0)] \vee \\ &\quad \bar{x}_2 \& [x_1 \& f(0, 1) \vee \bar{x}_1 \& f(0, 0)]\end{aligned}$$

Entwicklung nach  $x_1$

Entwicklung nach  $x_2$

$$\begin{aligned}&= x_2 \& x_1 \& f(1, 1) \vee x_2 \& \bar{x}_1 \& f(1, 0) \vee \bar{x}_2 \& x_1 \& f(0, 1) \vee \bar{x}_2 \& \bar{x}_1 \& f(0, 0)] \\ &= \underbrace{m_3 \& f_3 \vee m_2 \& f_2 \vee m_1 \& f_1 \vee m_0 \& f_0}_{3} \\ &= \bigvee_{j=0}^3 (m_j \& f_j)\end{aligned}$$

Minterme

DNF