

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker
becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Digitaltechnik

Minimierung digitaler Schaltfunktionen (Teil 2)

Formale algebraische Minimierung

→ Das Nelson/Petrick-Verfahren

- sehr **leistungsfähiges algebraisches** Verfahren
- **Nelson-Verfahren:** Bestimmung der **Menge aller Primimplikanten**
(bzw. Primimplikaten)
- **Petrick-Verfahren:** Bestimmung der **kostenminimalen Auswahl** von **Primimplikanten** zur **Einsstellenüberdeckung**
(bzw. Primimplikaten zur Nullstellenüberdeckung)
Alternativ: **graphisch mit Überdeckungstabelle**
+ Regeln zur Abarbeitung/Vereinfachung

Ergebnis: **kostenminimaler algebraischer Ausdruck** der zu realisierenden **digitalen Schaltfunktion**

Nelson-Verfahren:

→ **Bestimmung aller Primimplikanten zur Bildung einer disjunktive Minimalform DMF** (dual dazu: alle Primimplikate für KMF)

1) alle Freistellen werden zu **Einstellen** verfügt: **Einstellenergänzung f^E**

→ Bildung einer **Nullblocküberdeckung** für die **Einstellenergänzung f^E**
der gegebenen (unvollständigen) **Schaltfunktion**: $\tau_0 = \{B_{01}, B_{02}, \dots, B_{0r}\}$

2) Aufstellen eines schaltalgebraischen Ausdrucks (KNF bzw. KMF) für die **Einsvervollständigung f^E** : $f^E = W_{01} \& W_{02} \& \dots \& W_{0r}$

3) Schrittweises Ausdistribuierten des **Ausdrucks $f^E = W_{01} \& W_{02} \& \dots \& W_{0r}$** aus 2)

+ Umformen und Streichen überflüssiger Termanteile bzw. Terme

-> Anwendung von **Distributiv-** und **Absorptionsgesetze**

-> aus der konjunktiven Form die **gewünschte disjunktive Form**

4) Streichen aller im 3. Schritt gefundenen **Terme**, die **nur Freistellen** überdecken

Nelson-Verfahren:

Beispiel:

- Man nehme eine **Nullblocküberdeckung**:

$$f^E = (\overline{x_1} \vee x_2) \& (\overline{x_1} \vee x_3)$$

	x_1			
	1	0	0	1
x_2	-	0	1	-
	x_3			

- Durch **Ausdistribuierten** + **Umformung** erhält man:

$$\begin{aligned}
 f^E &= (\overline{x_1} \vee x_2) \& (\overline{x_1} \vee x_3) \\
 &= \overline{x_1} \overline{x_1} \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_2 x_3 \\
 &= \overline{x_1} \vee \overline{x_1} x_3 \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_2 x_3 \\
 &= \overline{x_1} \vee \overline{x_1} x_2 \vee x_2 x_3 \\
 &= \overline{x_1} \vee x_2 x_3 \\
 &= \overline{x_1} \vee (x_2 \& x_3)
 \end{aligned}$$

Distributivgesetz

Regel R7

Absorption (R11)

Absorption (R11)

	x_1			
	1	0	0	1
x_2	-	0	1	-
	x_3			

Überdeckungsproblem (oder Auswahlproblem)

- Bei dem **Nelson-Verfahren** erfolgte nur die Ermittlung **aller Primterme**
- Weiterhin gesucht: **optimale Auswahl** der **Primterme**
 - eine **Auswahl** von **Primtermen**, die **alle Einstellen** (Nullstellen) der gewünschten Funktion berücksichtigt wird **Überdeckung** genannt
- Lösung: graphische **Auswahl** der **Primterme** mit **Überdeckungstabelle**
 - für **jeden Primterm** wird angegeben, **welche Einstellen** (bzw. Nullstellen) er **überdeckt**
 - zur **Bewertung** wird eine Spalte mit **Kosten c_k** angefügt
 - **Überdeckungstabelle** wird mit Hilfe bestimmter Regeln abgearbeitet (vereinfacht) -> **Kernermittlung** + **Dominanzregeln**
 - **algebraische Behandlung** der **optimalen Auswahl** von **Primtermen** auch möglich:
 - Bildung und Auswertung des **Petricks-Ausdrucks**!
- Ergebnis: **kostenminimale Überdeckung der Schaltfunktion**

Überdeckungsproblem:

Beispiel:

Diagram illustrating a 4x4 grid representing a covering problem. The grid is labeled with variables x_1, x_2, x_3, x_4 and contains binary values (0 or 1) and dashes (-) indicating the presence or absence of a covering element.

— x_1 —			
1 0	0 1	0 5	1 4
1 2	- 3	- 7	0 6
1 12	- 13	- 17	1 16
0 10	1 11	0 15	1 14
— x_3 —			

Vertical labels: x_2 (left), x_4 (right)

k	PI	j							p_i	c_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	$x_4 x_2$					x		x	p_1	c_1
2	$\overline{x_3} x_2$		x			x			p_2	c_2
3	$x_4 x_3 \overline{x_1}$						x	x	p_3	c_3
4	$\overline{x_4} x_3 x_1$				x				p_4	c_4
5	$\overline{x_4} x_2 x_1$	x		x					p_5	c_5
6	$x_4 x_3 x_1$	x	x						p_6	c_6
7	$x_3 x_2 x_1$			x			x		p_7	c_7

Überdeckungsproblem:

Kernermittlung:

- Wenn eine **Einstelle** (Nullstelle) nur durch einen **einzigsten Primterm abgedeckt** wird, nennt man den **Primimplikanten** (Primimplikaten) **Kernimplikant** (*Kernimplikat*)
- **Kernimplikanten** (Kernimplikate) **müssen** auf jeden Fall in die **Überdeckungslösung** aufgenommen werden
- **Spalten von Einstellen** (Nullstellen) in der **Überdeckungstabelle**, die von **Kernimplikanten** (Kernimplikaten) **abgedeckt** werden, können **gestrichen** werden, und müssen in der weiteren Abarbeitung nicht mehr berücksichtigt werden

Kernermittlung und Vereinfachung der Überdeckungstabelle

Beispiel:

k	PI	j							p_i	c_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	$x_4 x_2$					x		x	p_1	c_1
2	$\overline{x_3} x_2$		x			x			p_2	c_2
3	$x_4 x_3 \overline{x_1}$						x	x	p_3	c_3
4	$\overline{x_4} \overline{x_3} \overline{x_1}$				x				p_4	c_4
5	$\overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1}$	x		x					p_5	c_5
6	$x_4 x_3 x_1$	x	x						p_6	c_6
7	$x_3 x_2 x_1$			x			x		p_7	c_7

Dominanzregeln und Ihre Anwendung (1)

Spaltendominanzregeln:

■ Spaltendominanz in der **Überdeckungstabelle**:

i_1	i_2	
X	X	p_1
		p_2
X	X	p_3
X		p_4
X		p_5

i_1	i_2	
X	X	p_1
		p_2
X	X	p_3
X		p_4
X		p_5

■ Wenn die Spalte i_2 durch einen der Terme p_1 oder p_3 *überdeckt* wird, so wird dadurch auch i_1 überdeckt

also: Einstelle der Spalte i_1 ist durch p_1 oder p_3 auch realisiert

■ Man sagt: ("Vektor" i_1) **dominiert** ("Vektor" i_2) und schreibt: $i_1 \geq i_2$

■ **Dominierende Spalten** (hier: i_1) können **gestrichen** werden

Dominanzregeln und Ihre Anwendung (2)

Zeilendominanzregeln:

■ Zeilendominanz in der **Überdeckungstabelle**:

i_1	X	X	X	X	p_1	c_1
i_2		X			p_2	c_2
...						
i_k	X		X	X	p_k	c_k

i_1	X	X	X	X	p_1	c_1
i_2		X			p_2	c_2
...						
i_k	X		X	X	p_k	c_k

■ Wenn eine **Zeile i_2** ($\cong$ **Primterm p_2**) nur **Spalten** ($\cong$ **Einstellen**) **überdeckt**, die auch von einer **anderen Zeile i_1** ($\cong$ **Primterm p_1**) **überdeckt** werden

→ i_2 wird von i_1 *dominiert*: $i_2 \leq i_1$, und

es gilt: $(\text{Kosten } c_1) \leq (\text{Kosten } c_2)$

→ die Zeile i_2 kann gestrichen werden

Überdeckungsproblem:

- Um die **optimale Überdeckung** der **Schaltfunktion** durch eine **optimale Auswahl von Primtermen** zu ermitteln kann das Problem durch die **vorgestellten Regeln graphisch vereinfacht** bzw. **komplett gelöst** werden

Allgemeine Vorgehensweise:

- 1) **Kerne** bestimmen und **Streichen aller überdeckten Spalten** ($\cong$ Einstellen)
(“leergewordene“ Zeilen können auch gestrichen werden)
- 2) **Spaltendominanzen** finden und **dominierende Spalten streichen**
- 3) **Zeilendominanzen** finden und **dominierte Zeilen streichen**, nach Möglichkeit (-> **Kosten c_i beachten!**)
- 4) Schritte **1-3 wiederholen**, bis **Überdeckungstabelle nicht mehr reduzierbar**
→ **keine** Kerne und Dominanzen mehr (ggf. noch zyklische Resttabelle auflösen)

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem):

Petrick-Verfahren:

- Das **Petrick-Verfahren** ist eine **algebraische Methode**
 - dient zur **Bestimmung kostenminimaler Lösungen** von **Überdeckungsproblemen**
- Es kann **direkt nach** dem **Nelson-Verfahren** zur **kostenminimalen Auswahl** von **Primtermen** verwendet werden
- **Spaltendominanzen** und **Zeilendominanzen** können **algebraisch** mit Hilfe des **Petrick-Verfahrens** in Form von **Absorptionsregeln** bzw. **Ausdistribuierten abgearbeitet** bzw. **bewiesen** werden
- **Petrick-Verfahren** wird bei **zyklischen Resttabellen** verwendet

Petrick-Ausdruck (PA):

- Der **Petrick-Ausdruck** ist **algebraische Beschreibung** der **Überdeckungsbedingungen**

→ ob der **Primterm k** zur **Lösung** gehört, wird mit der bool'schen

Präsenzvariable (Auswahlvariable) **p_k** angegeben

-> **$p_k = 0$** => **Primterm k ist nicht in Lösung enthalten**

-> **$p_k = 1$** => **Primterm k ist Bestandteil der Lösung**

→ zur Überdeckung jeder Einsstelle **muss** mindestens ein Primterm zur Lösung gehören, der diese Stelle überdeckt

- **Petrick-Ausdruck** besteht daher aus **Termen** von **disjunktiv verknüpften** **Präsenzvariablen**

→ für **jede Einsstelle** der Tabelle enthält der **PA einen Term**

→ **in jedem Term** muss **mindestens eine Präsenzvariable** den Wert '1' haben

- Diese **Terme** werden **konjunktiv** zum **Petrick-Ausdruck verknüpft**

→ **der Petrick-Ausdruck muss immer eins liefern!**

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

Beispiel:

k	PI	j							p_i	C_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	$x_4 x_2$					x		x	p_1	C_1
2	$\overline{x_3} x_2$		x			x			p_2	C_2
3	$x_4 x_3 \overline{x_1}$						x	x	p_3	C_3
4	$\overline{x_4} x_3 x_1$				x				p_4	C_4
5	$\overline{\overline{x_4} x_2} \overline{x_1}$	x		x					p_5	C_5
6	$\overline{\overline{x_4} x_3} \overline{x_1}$	x	x						p_6	C_6
7	$\overline{x_3} \overline{x_2} x_1$			x			x		p_7	C_7

$$PA = (\overline{p_5} \vee \overline{p_6}) \& (\overline{p_2} \vee \overline{p_6}) \& (\overline{p_5} \vee \overline{p_7}) \& p_4 \& (p_1 \vee p_2) \& (p_3 \vee p_7) \& (p_1 \vee p_3) = 1$$

- Im **Petrick-Ausdruck** kann man erfassen (beweisen!), dass die **Präsenzvariablen** der **Kernimplikanten** (p_4) **immer eins** sein müssen

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

- Auch der **Petrick-Ausdruck** wird durch **Distributionsregeln** und **Absorptionsregeln** vereinfacht

Beispiel:

$$PA = (p_5 \vee p_6) \& (p_2 \vee p_6) \& (p_5 \vee p_7) \& p_4 \& (p_1 \vee p_2) \& (p_3 \vee p_7) \& (p_1 \vee p_3) = 1$$

= ...

$$= p_1 p_4 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_4 p_5 \vee p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_4 p_5 p_7 = 1$$

$$= p_4 \& (p_1 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_5 \vee p_1 p_3 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_5 p_7) = 1$$

$$PA = p_1 p_4 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_4 p_5 \vee p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_4 p_5 p_7 = 1$$

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

- Damit der **Petrick-Ausdruck '1'** wird, muss **mindestens einer** der disjunktiv verknüpften **konjunktiven Teilterme** eins sein
- Jeder **konjunktive Teilterm** repräsentiert genau eine **mögliche Lösung** des **Auswahlproblems**
- Zur **Auswahl** der **optimalen Lösung**:
 - die **Kosten c_k** der **Primterme p_k** werden herangezogen
 - **Anzahl der Literale von p_k**
- **Vergleich** der **Kostensummen K** aller **möglichen Lösungen**
(K = Summe der Literale der jeweils notwendigen Primterme)
 - diejenige **Überdeckung** mit **optimalen Kosten** kann ermittelt werden

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

Beispiel:

$$PA = p_1 p_4 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_4 p_5 \vee p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_4 p_5 p_7 = 1$$

mit $c_1=c_2=2$; $c_3 \dots c_7=3$

$p_1 p_4 p_6 p_7$ $K = 11$

$p_2 p_3 p_4 p_5$ $K = 11$

$p_1 p_3 p_4 p_5 p_6$ $K = 14$

$p_2 p_3 p_4 p_6 p_7$ $K = 14$

$p_1 p_2 p_4 p_5 p_7$ $K = 13$

k	PI	j							p _i	C _i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	x_4x_2					x		x	p ₁	c ₁
2	$\overline{x_3x_2}$		x			x			p ₂	c ₂
3	$x_4x_3x_1$						x	x	p ₃	c ₃
4	$\overline{x_4x_3x_1}$				x				p ₄	c ₄
5	$\overline{x_4x_2x_1}$	x		x					p ₅	c ₅
6	$\overline{x_4x_3x_1}$	x	x						p ₆	c ₆
7	$\overline{x_3x_2x_1}$			x			x		p ₇	c ₇

■ Damit ergeben sich **zwei kostenminimale Lösungen:**

$p_1 p_4 p_6 p_7$ und $p_2 p_3 p_4 p_5$

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

Beispiel:

- die zugehörigen **disjunktiven Minimallösungen (DMF)** mit nur **11 Literalen** sind:

$$y_1 = x_4 x_2 \vee \overline{x_4} \overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_4} \overline{x_2} \overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2} \overline{x_1} \quad \text{und}$$

$$y_2 = \overline{x_3} x_2 \vee x_4 x_3 \overline{x_1} \vee x_4 \overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_4} x_2 x_1$$

