

**Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker**

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

# Digitaltechnik

## Entwicklungssatz der Schaltalgebra

## Normalformtheoreme

- Ermöglichen eine **eindeutige** (*kanonische*) **Darstellung** jeder **beliebigen Schaltfunktion**
- Schaltfunktionen sind **allein** durch **3 logische Operationen** realisierbar **Und, Oder** und **Negation**
- Der **Boole'sche Entwicklungssatz** ist eine formelle Methode zur gezielten **Umwandlung** jedes **beliebigen schaltalgebraischen Ausdrucks** in eine der beiden Normalformen (KNF bzw. DNF)  
  
→ **Ergebnis:** eine der kanonischen **Darstellungen KNF** bzw. **DNF**

## Minterme

- Terme  $m_i \rightarrow$  für **genau eine Belegung** wird der Wert **1** angenommen  
 $\rightarrow$  “orthogonale Basisfunktionen“ zur **Bildung der DNF**
- “Projektion“ von Einstellen auf beliebige Positionen im Symmetriediagramm
- **“Auswahl“** der richtigen **Funktionswerte** in **DNF**  
 $\rightarrow$  **Einstellenmenge**

Minterme		$f(x_2, x_1)$
$m_0$	$\overline{x_2} \& \overline{x_1}$	$f(0,0)$
$m_1$	$\overline{x_2} \& x_1$	$f(0,1)$
$m_2$	$x_2 \& \overline{x_1}$	$f(1,0)$
$m_3$	$x_2 \& x_1$	$f(1,1)$

## Maxterme

- Terme  $M_i \rightarrow$  für **genau eine Belegung** wird der Wert **0** angenommen  
 $\rightarrow$  “orthogonale Basisfunktionen“ für **Bildung der KNF**
- “Projektion“ von Nullstellen auf beliebige Positionen im Symmetriediagramm
- “Auswahl“ der richtigen **Funktionswerte** in **KNF**  
 $\rightarrow$  **Nullstellenmenge**

Maxterme		$f(x_2, x_1)$
$M_0$	$x_2 \vee x_1$	$f(0,0)$
$M_1$	$x_2 \vee \overline{x_1}$	$f(0,1)$
$M_2$	$\overline{x_2} \vee x_1$	$f(1,0)$
$M_3$	$\overline{x_2} \vee \overline{x_1}$	$f(1,1)$

# DNF (Disjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in DNF-Form:** besteht aus mehreren *disjunktiv* verknüpften ( $\rightarrow$  Oder-Funktion) **Termen**, die aus *konjunktiv* verknüpften ( $\rightarrow$  Und-Funktion) **Literalen** bestehen

## Beispiele:

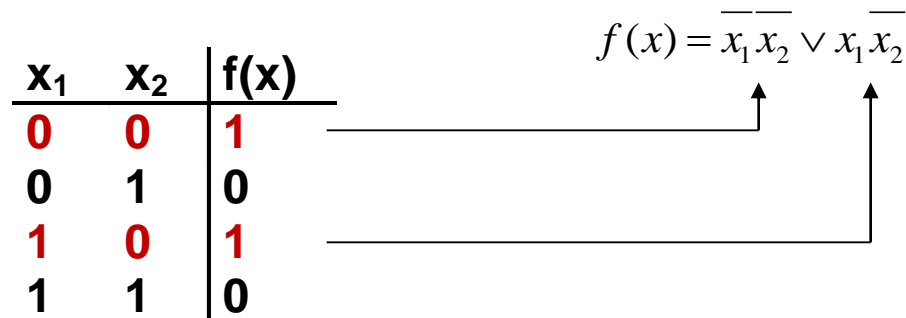
$$f(x) = (x_1 \& x_2 \& x_3) \vee (x_1 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_3) \vee (\bar{x}_1 \& x_2 \& \bar{x}_3) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$$

$$f(x) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \& x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_2$$

- Also: **DNF** listet **alle Belegungen**, die den **Funktionswert '1'** erzeugen sollen, einzeln auf

$x_1$	$x_2$	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$f(x) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2$



# KNF (Konjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in KNF-Form:** besteht aus mehreren *konjunktiv* verknüpften **Termen**, die aus *disjunktiv* verknüpften **Literalen** bestehen

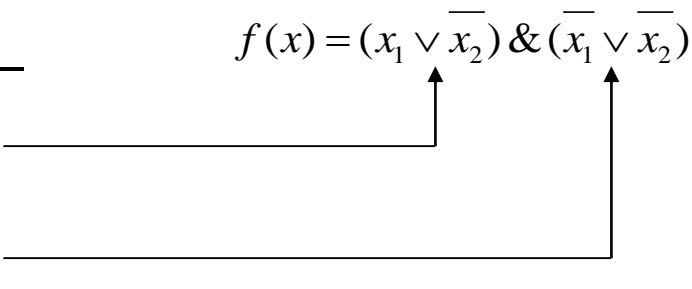
## Beispiel:

$$f(x) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

- Also:** bei der **KNF** entspricht **jeder Term** von **disjunktiv** verknüpften **Literalen** einer **“invertierten Belegung”** mit **Funktionswert ‘0’**
- Tritt diese Wertkombination auf, so wird der entsprechende Term ‘0’ und der komplette Schaltfunktionswert wird auch ‘0’

$x_1$	$x_2$	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$f(x) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$



# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Der **Entwicklungssatz** ist eine formale Methode eine **Funktion**  $f(x_n, \dots, x_3, x_2, x_1)$  in eine **DNF** (oder KNF) umzuwandeln

- Die **Entwicklung der Funktion f nach der Variablen  $x_i$**

→ Aufteilung in **zwei Fälle**:  $x_i = 1$  und  $x_i = 0$

$$f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) = [x_i \& f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \vee [\bar{x}_i \& f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)]$$
$$= [x_i \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{x}_i \& f \Big|_{x_i=0}]$$

- **Oder für eine KNF:**

$$f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) = [x_i \vee f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \& [\bar{x}_i \vee f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)]$$
$$= [x_i \vee f \Big|_{x_i=0}] \& [\bar{x}_i \vee f \Big|_{x_i=1}]$$

## Beweis der beiden Fälle:

$$\begin{aligned}f(x_n, \dots, x_i = 1, \dots, x_1) &= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{1} \& f \Big|_{x_i=0}] \\&= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [0 \& f \Big|_{x_i=0}] \\&= f \Big|_{x_i=1} \vee 0 \\&= f \Big|_{x_i=1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_n, \dots, x_i = 0, \dots, x_1) &= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{0} \& f \Big|_{x_i=0}] \\&= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [1 \& f \Big|_{x_i=0}] \\&= 0 \vee f \Big|_{x_i=0} \\&= f \Big|_{x_i=0}\end{aligned}$$



# Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- $f|_{x_i=1}$  und  $f|_{x_i=0}$  werden als **Restfunktionen** oder **Kofaktoren** bezeichnet
- der nach  $x_i$  entwickelte Ausdruck lässt sich nach den weiteren Variablen entwickeln

## Beispiel einer Funktion mit zwei Variablen:

$$\begin{aligned}y = f(x_2, x_1) &= x_1 \& f(x_2, 1) \vee \overline{x_1} \& f(x_2, 0) \\ &= x_2 \& [x_1 \& f(1, 1) \vee \overline{x_1} \& f(1, 0)] \vee \\ &\quad \overline{x_2} \& [x_1 \& f(0, 1) \vee \overline{x_1} \& f(0, 0)]\end{aligned}$$

Entwicklung nach  $x_1$

Entwicklung nach  $x_2$

$$\begin{aligned}&= \underbrace{x_2 \& x_1 \& f(1, 1)}_{m_3} \vee x_2 \& \overline{x_1} \& f(1, 0) \vee \overline{x_2} \& x_1 \& f(0, 1) \vee \overline{x_2} \& \overline{x_1} \& f(0, 0)] \\ &= m_3 \& f_3 \vee m_2 \& f_2 \vee m_1 \& f_1 \vee m_0 \& f_0 \\ &= \bigvee_{j=0}^3 (m_j \& f_j)\end{aligned}$$

Minterme

DNF