

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Mathematische Grundlagen - Relationen -

Was sind Relationen?

- **Relationen** verallgemeinern die Prinzipien von **Vorschriften** wie $x < y$ oder $A \subseteq B$ und stellen sie auf eine **formale Grundlage**
- **zweistellige Relation** zwischen zwei Mengen X und Y :
 - Vorschrift α für beliebige Elemente $x \in X$ und $y \in Y$
 - setzt fest, ob x in **Beziehung α zu y** steht
- Steht x in der Beziehung α zu y ,
so schreibt man: $x \alpha y$
sonst: $x \bar{\alpha} y$
- Gilt $X = Y$
→ so spricht man von einer **Relation auf** oder **in einer Menge**

Eigenschaften von Relationen

- Bei **zweistelligen Relationen** auf einer Menge interessiert man sich für einige **spezielle Eigenschaften**

Reflexivität

- wenn $x \alpha x$ für beliebige x gilt, so ist die **Relation α reflexiv**

Beispiel:

- $,=‘$ ist eine **reflexive Relation**, da $x = x$ immer gilt
- $,\leq‘$ ist **reflexiv** auf den reellen Zahlen, da $x \leq x$ für alle x gilt
- $,\subseteq‘$ ist **reflexiv**, da jede Menge Untermenge von sich selbst ist

Symmetrie

- Wenn aus $x \alpha y$ auch $y \alpha x$ folgt
→ so ist die **Relation α symmetrisch**

Beispiele:

- „ $=$ “ ist **symmetrisch**
- Die Relation „**ist Freund von**“ ist meist **symmetrisch**

Antisymmetrie

- Wenn aus $x \alpha y$ und $y \alpha x$ folgt, dass $x = y$ ist
→ so ist α **antisymmetrisch**
- Antisymmetrie ist **nicht** das Gegenteil von Symmetrie

Beispiele:

- $,=$ ist sowohl **symmetrisch** als auch **antisymmetrisch**!
- $,<$ ist **antisymmetrisch**
- $,\geq$ ist **antisymmetrisch**

Transitivität

- Wenn aus $x \alpha y$ und $y \alpha z$ folgt, dass $x \alpha z$ gilt
→ so ist α **transitiv**

Beispiele:

- $,=$ ist **transitiv**
- $,<$ ist **transitiv**
- $,\subseteq$ ist **transitiv**
- Die Relation „ist älter als“ ist **transitiv**

Typen von Relationen

- Anhand der vorgestellten Eigenschaften können Relationen bestimmten Typen zugeordnet werden

Ordnungsrelation

- Eine **Ordnungsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
 - reflexiv
 - antisymmetrisch
 - Transitiv

Beispiele:

- $,=$ ist **Ordnungsrelation**
- $,\leq$ ist **Ordnungsrelation**
- Die Relation „ist mindestens so alt wie“ ist **Ordnungsrelation**

Strenge Ordnungsrelation

- Eine **strenge Ordnungsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
 - **antireflexiv** ($x \alpha x$ gilt für kein x)
 - **antisymmetrisch**
 - **transitiv**
- Die meisten Relationen, die man auch instinktiv als ordnend bezeichnen würde sind entweder eine Ordnungsrelation oder eine strenge Ordnungsrelation

Beispiele:

- „ $<$ “ ist eine **strenge Ordnungsrelation**
- Die Relation „**ist schneller als**“ ist eine **strenge Ordnungsrelation**

Äquivalenzrelation

- Eine **Äquivalenzrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
 - reflexiv
 - symmetrisch
 - transitiv
- Als Zeichen für ‚ α ‘ wird bei **Äquivalenzrelationen** ‚ $\equiv$ ‘ verwendet
- Teilt die Elemente in **disjunkte Teilmengen** auf $\rightarrow$ **Äquivalenzklassen**

Beispiele:

- ‚ $=$ ‘ ist selbstverständlich eine **Äquivalenzrelation**
- „ $x \alpha y \Leftrightarrow |x| = |y|$ “ ist für **Vektoren** eine **Äquivalenzrelation**

Verträglichkeitsrelation

- Eine **Verträglichkeitsrelation** muss folgende Eigenschaften besitzen:
 - reflexiv
 - symmetrisch
 - nicht transitiv
- Als Zeichen für „ α “ wird bei **Verträglichkeitsrelationen** häufig „ $\sim$ “ verwendet

Beispiele:

- Relation für Menschen „**verträgt sich mit**“ ist **Verträglichkeitsrelation**
- **Verträglichkeitsrelationen** treten bei Problemen auf, bei denen bestimmte Paarungen ausgeschlossen sind
 - z.B.: **“zwei Leitungen führen zur gleichen Zeit ein Signal“**

Überdeckungsproblem

- Ein häufig auftretendes Grundproblem ist das sogenannte **Überdeckungsproblem**
- Beispiel:
 - “wie viele Partys man **mindestens** feiern muss, um alle Freunde so einzuladen, dass keine zwei Freunde, die sich nicht vertragen, zur gleichen Party eingeladen werden“
- Die Grundlage des Problems:
 - eine **Verträglichkeitsrelation**

Problemstellung

- Es sei **M** die **Menge der Freunde** f_i
 - $M = \{ f_i \mid f_i \text{ ist Freund} \}$
- Gesucht sind Gästelisten (Teilmengen G_j)
 - nur **Freunde** (f_i) enthalten, für welche **paarweise** die **Verträglichkeitsrelation** erfüllt ist
 - für alle $f_k, f_m \in G_j$ gilt: $f_k \alpha f_m$
- Eine **Menge** τ von solchen **Partys** (G_j) wird **Überdeckung** von **M** genannt, wenn **jeder Freund** (f_i) in einer **Gästeliste** ($G_j \in \tau$) **enthalten** ist
 - $\tau = \{ G_{j1}, G_{j2}, \dots, G_{jn} \}$
 - $\forall f_i \in M$ gilt $\rightarrow \exists G_j \in \tau$ mit $f_i \in G_j$

Beispiel:

■ Gäste:

$$M = \{ a, b, c, d, e \}$$

■ Verträglichkeit:

$$a \bar{a}c \quad b \bar{a}c \quad a \bar{a}e$$

■ Gästelisten:

$$G_1 = \{ a, b \}$$

$$G_2 = \{ c, e, d \}$$

$$G_3 = \{ b, d, e \}$$

$$G_4 = \{ a \}$$

■ Überdeckungen:

$$\tau_a = \{ G_1, G_2 \}$$

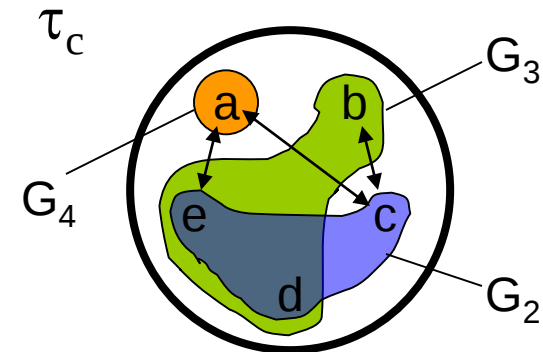
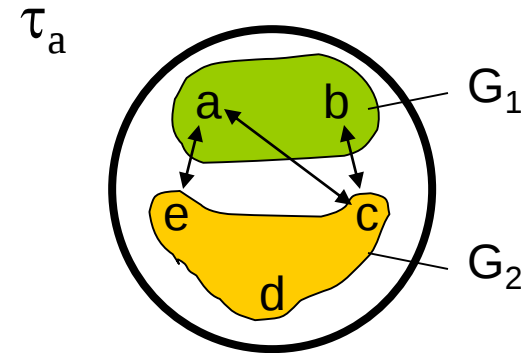
$$\tau_b = \{ G_2, G_3 \}$$

$$\tau_c = \{ G_2, G_3, G_4 \}$$

ist **Überdeckung**

ist keine Überdeckung

ist **Überdeckung**



Überdeckungsrelation

- bestimmtes **Element** f_i von einer **Teilmenge** G_j **überdeckt**
 → eine **Relation** zwischen der Menge der **Elemente** aus M
 und der Menge der **Teilmengen** τ
- Diese Relation wird **Überdeckungsrelation** genannt
- Sie wird zweckmäßigerweise als „ $\tau \times M$ “-**Matrix** dargestellt

Struktur der Überdeckungstabelle:

Überdeckende Mengen $\hat{\tau}$	Überdeckte Größen $\hat{M}$		
	f_1	f_2	f_j
G_1			
G_2			
...			
G_j			ist $f_j \hat{\tau} G_j$?

Überdeckungstabellen des Beispiels:

τ_a	a	b	c	d	e
G_1	X	X			
G_2			X	X	X

τ_c	a	b	c	d	e
G_2			X	X	X
G_3		X		X	X
G_4	X				

■ τ_b ist keine Überdeckung, da ,a' von keiner Teilmenge überdeckt wird

τ_b	a	b	c	d	e
G_2			X	X	X
G_3		X		X	X