Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Normalformtheoreme

- Ermöglichen eine **eindeutige** (*kanonische*) **Darstellung** jeder **beliebigen Schaltfunktion**
- Schaltfunktionen sind **allein** durch **3 logische Operationen** realisierbar ***Und***, ***Oder*** und ***Negation***
- Der **Boole'sche Entwicklungssatz** ist eine formelle Methode zur gezielten **Umwandlung** jedes **beliebigen schaltalgebraischen Ausdrucks** in eine der beiden Normalformen (KNF bzw. DNF)

  → **Ergebnis:** eine der kanonischen **Darstellungen KNF** bzw. **DNF**

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Minterme

- **Terme m_i** → für **genau eine Belegung** wird der **Wert ´1´** angenommen

  → “orthogonale Basisfunktionen“ zur **Bildung der DNF**

- “Projektion“ von Einsstellen auf beliebige Positionen

  im Symmetriediagramm

- **“Auswahl“** der richtigen **Funktionswerte** in **DNF**

  → **Einsstellenmenge**

Minterme		$f(x_2,x_1)$
m_0	$\overline{x_2} \,\&\, \overline{x_1}$	f(0,0)
m_1	$\overline{x_2} \,\&\, x_1$	f(0,1)
m_2	$x_2 \,\&\, \overline{x_1}$	f(1,0)
m_3	$x_2 \,\&\, x_1$	f(1,1)

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Maxterme

- **Terme M_i** → für **genau eine Belegung** wird der **Wert ´0´** angenommen
  → “orthogonale Basisfunktionen“ für **Bildung der KNF**
- “Projektion“ von Nullstellen auf beliebige Positionen
  im Symmetriediagramm
- **“Auswahl“** der richtigen **Funktionswerte** in **KNF**
  → **Nullstellenmenge**

Maxterme		$f(x_2,x_1)$
M_0	$x_2 \vee x_1$	f(0,0)
M_1	$x_2 \vee \overline{x_1}$	f(0,1)
M_2	$\overline{x_2} \vee x_1$	f(1,0)
M_3	$\overline{x_2} \vee \overline{x_1}$	f(1,1)

DNF (Disjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in DNF-Form:** besteht aus mehreren ***disjunktiv*** verknüpften (→ *Oder*-Funktion) **Termen**, die aus ***konjunktiv*** verknüpften (→ *Und*-Funktion) **Literalen** bestehen

Beispiele:

$$f(x) = (x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3) \vee (x_1 \,\&\, \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \,\&\, x_2 \,\&\, \overline{x_3}) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2}\,\overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$$

$$f(x) = (x_1 \,\&\, x_2) \vee (x_1 \,\&\, \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \,\&\, x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

- Also: **DNF** listet **alle Belegungen**, die den **Funktionswert ´1´** erzeugen sollen, einzeln auf

x_1	x_2	f(x)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(x) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_2}$$

KNF (Konjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in KNF-Form:** besteht aus mehreren ***konjunktiv*** verknüpften **Termen**, die aus ***disjunktiv*** verknüpften **Literalen** bestehen

Beispiel:

$$f(x) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \,\&\, (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \,\&\, (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

Also: bei der **KNF** entspricht **jeder Term** von **disjunktiv** verknüpften **Literalen** einer **"invertierten Belegung"** mit **Funktionswert ´0´**

→ Tritt diese Wertkombination auf, so wird der entsprechende Term ´0´ und der komplette Schaltfunktionswert wird auch ´0´

x_1	x_2	f(x)
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(x) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \,\&\, (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- Der **Entwicklungssatz** ist eine formale Methode eine **Funktion $f(x_n,...,x_3, x_2, x_1)$** in eine **DNF** (oder KNF) umzuwandeln

- Die **Entwicklung der Funktion f nach der Variablen x_i**
  → Aufteilung in **zwei Fälle**: **$x_i = 1$** und **$x_i = 0$**

$$f(x_n,...,x_i,...,x_1) = [x_i \,\&\, f(x_n,...,1,...,x_1)] \vee [\overline{x_i} \,\&\, f(x_n,...,0,...,x_1)]$$
$$= [x_i \,\&\, f\Big|_{x_i=1}] \vee [\overline{x_i} \,\&\, f\Big|_{x_i=0}]$$

- **Oder für eine KNF:**

$$f(x_n,...,x_i,...,x_1) = [x_i \vee f(x_n,...,0,...,x_1)] \,\&\, [\overline{x_i} \vee f(x_n,...,1,...,x_1)]$$
$$= [x_i \vee f\Big|_{x_i=0}] \,\&\, [\overline{x_i} \vee f\Big|_{x_i=1}]$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Beweis der beiden Fälle:

$$
\begin{aligned}
f(x_n,\dots,x_i=1,\dots,x_1) &= [1 \,\&\, f\big|_{x_i=1}] \vee [\bar{1} \,\&\, f\big|_{x_i=0}] \\
&= [1 \,\&\, f\big|_{x_i=1}] \vee [0 \,\&\, f\big|_{x_i=0}] \\
&= f\big|_{x_i=1} \vee 0 \\
&= f\big|_{x_i=1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x_n,\dots,x_i=0,\dots,x_1) &= [0 \,\&\, f\big|_{x_i=1}] \vee [\bar{0} \,\&\, f\big|_{x_i=0}] \\
&= [0 \,\&\, f\big|_{x_i=1}] \vee [1 \,\&\, f\big|_{x_i=0}] \\
&= 0 \vee f\big|_{x_i=0} \\
&= f\big|_{x_i=0}
\end{aligned}
$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- $f\big|_{x_i=1}$ und $f\big|_{x_i=0}$ werden als **Restfunktionen** oder **Kofaktoren** bezeichnet
- der nach x_i entwickelte Ausdruck lässt sich nach den weiteren Variablen entwickeln

Beispiel einer Funktion mit zwei Variablen:

$$y = f(x_2, x_1) = x_1 \,\&\, f(x_2,1) \vee \overline{x_1} \,\&\, f(x_2,0)$$

Entwicklung nach x_1

$$= x_2 \,\&\, [x_1 \,\&\, f(1,1) \vee \overline{x_1} \,\&\, f(1,0)] \vee \overline{x_2} \,\&\, [x_1 \,\&\, f(0,1) \vee \overline{x_1} \,\&\, f(0,0)]$$

Entwicklung nach x_2

$$= \underbrace{x_2 \,\&\, x_1}_{} \,\&\, f(1,1) \vee x_2 \,\&\, \overline{x_1} \,\&\, f(1,0) \vee \overline{x_2} \,\&\, x_1 \,\&\, f(0,1) \vee \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_1} \,\&\, f(0,0)]$$

$$= m_3 \,\&\, f_3 \vee m_2 \,\&\, f_2 \vee m_1 \,\&\, f_1 \vee m_0 \,\&\, f_0$$

Minterme

$$= \bigvee_{j=0}^{3} (m_i \,\&\, f_i)$$

DNF