

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. J. Becker

becker@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

Digitaltechnik

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

Normalformtheoreme

- Ermöglichen eine **eindeutige** (*kanonische*) **Darstellung** jeder **beliebigen Schaltfunktion**
- Schaltfunktionen sind **allein** durch **3 logische Operationen** realisierbar **Und**, **Oder** und **Negation**
- Der **Boole'sche Entwicklungssatz** ist eine formelle Methode zur gezielten **Umwandlung** jedes **beliebigen schaltalgebraischen Ausdrucks** in eine der beiden Normalformen (KNF bzw. DNF)

→ **Ergebnis**: eine der kanonischen **Darstellungen KNF** bzw. **DNF**

Minterme

- Terme $m_i \rightarrow$ für **genau eine Belegung** wird der Wert **‘1’** angenommen
 $\rightarrow$ “orthogonale Basisfunktionen” zur **Bildung der DNF**
- “Projektion” von Einsstellen auf beliebige Positionen im Symmetriediagramm
- **“Auswahl”** der richtigen **Funktionswerte** in **DNF**
 $\rightarrow$ **Einsstellenmenge**

Minterme		$f(x_2, x_1)$
m_0	$\overline{x_2} \& \overline{x_1}$	$f(0,0)$
m_1	$\overline{x_2} \& x_1$	$f(0,1)$
m_2	$x_2 \& \overline{x_1}$	$f(1,0)$
m_3	$x_2 \& x_1$	$f(1,1)$

Maxterme

- Terme $M_i \rightarrow$ für **genau eine Belegung** wird der Wert **0** angenommen
 $\rightarrow$ “orthogonale Basisfunktionen” für **Bildung der KNF**
- “Projektion” von Nullstellen auf beliebige Positionen
im Symmetriediagramm
- **“Auswahl”** der richtigen **Funktionswerte** in **KNF**
 $\rightarrow$ **Nullstellenmenge**

Maxterme		$f(x_2, x_1)$
M_0	$x_2 \vee x_1$	$f(0,0)$
M_1	$x_2 \vee \overline{x_1}$	$f(0,1)$
M_2	$\overline{x_2} \vee x_1$	$f(1,0)$
M_3	$\overline{x_2} \vee \overline{x_1}$	$f(1,1)$

DNF (Disjunktive Normalform)

- **Schaltfunktion in DNF-Form:** besteht aus mehreren *disjunktiv* verknüpften ($\rightarrow$ Oder-Funktion) **Termen**, die aus *konjunktiv* verknüpften ($\rightarrow$ Und-Funktion) **Literalen** bestehen

Beispiele:

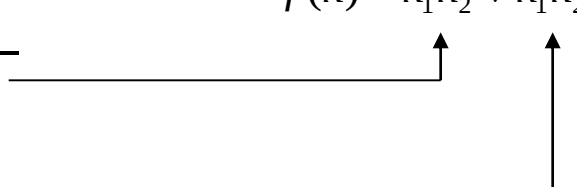
$$f(x) = (x_1 \& x_2 \& x_3) \vee (x_1 \& \overline{x_2} \& \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \& x_2 \& \overline{x_3}) = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} \vee \overline{x_1} x_2 \overline{x_3}$$

$$f(x) = (x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& \overline{x_2}) \vee (\overline{x_1} \& x_2) = x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x_2} \vee \overline{x_1} x_2$$

- Also: **DNF** listet **alle Belegungen**, die den **Funktionswert '1'** erzeugen sollen, einzeln auf

x_1	x_2	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$f(x) = \overline{x_1} \overline{x_2} \vee x_1 \overline{x_2}$



KNF (Konjunktive Normalform)

■ **Schaltfunktion in KNF-Form:** besteht aus mehreren *konjunktiv* verknüpften **Termen**, die aus *disjunktiv* verknüpften **Literalen** bestehen

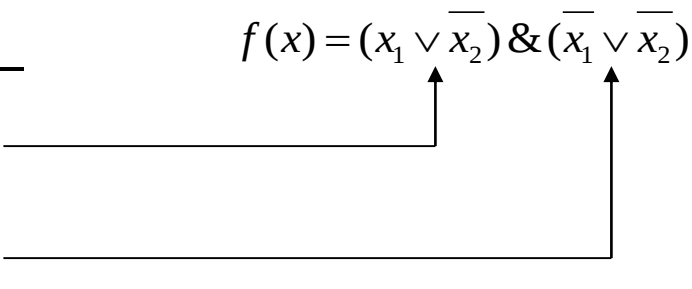
Beispiel:

$$f(x) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \& (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \& (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3})$$

Also: bei der **KNF** entspricht **jeder Term** von *disjunktiv* verknüpften **Literalen** einer *“invertierten Belegung”* mit **Funktionswert ‘0’**
→ Tritt diese Wertkombination auf, so wird der entsprechende Term ‘0’ und der komplette Schaltfunktionswert wird auch ‘0’

x_1	x_2	$f(x)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$f(x) = (x_1 \vee \overline{x_2}) \& (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$



- Der **Entwicklungssatz** ist eine formale Methode eine **Funktion** $f(x_n, \dots, x_3, x_2, x_1)$ in eine **DNF** (oder KNF) umzuwandeln

- Die **Entwicklung der Funktion f nach der Variablen x_i**

→ Aufteilung in **zwei Fälle**: $x_i = 1$ und $x_i = 0$

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) &= [x_i \& f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \vee [\bar{x}_i \& f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \\ &= [x_i \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{x}_i \& f \Big|_{x_i=0}] \end{aligned}$$

- Oder für eine KNF:

$$\begin{aligned} f(x_n, \dots, x_i, \dots, x_1) &= [x_i \vee f(x_n, \dots, 0, \dots, x_1)] \& [\bar{x}_i \vee f(x_n, \dots, 1, \dots, x_1)] \\ &= [x_i \vee f \Big|_{x_i=0}] \& [\bar{x}_i \vee f \Big|_{x_i=1}] \end{aligned}$$

Beweis der beiden Fälle:

$$\begin{aligned}f(x_n, \dots, x_i = 1, \dots, x_1) &= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{1} \& f \Big|_{x_i=0}] \\&= [1 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [0 \& f \Big|_{x_i=0}] \\&= f \Big|_{x_i=1} \vee 0 \\&= f \Big|_{x_i=1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_n, \dots, x_i = 0, \dots, x_1) &= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [\bar{0} \& f \Big|_{x_i=0}] \\&= [0 \& f \Big|_{x_i=1}] \vee [1 \& f \Big|_{x_i=0}] \\&= 0 \vee f \Big|_{x_i=0} \\&= f \Big|_{x_i=0}\end{aligned}$$

Entwicklungssatz der Schaltalgebra

- $f|_{x_i=1}$ und $f|_{x_i=0}$ werden als **Restfunktionen** oder **Kofaktoren** bezeichnet
- der nach x_i entwickelte Ausdruck lässt sich nach den weiteren Variablen entwickeln

Beispiel einer Funktion mit zwei Variablen:

$$\begin{aligned}y = f(x_2, x_1) &= x_1 \& f(x_2, 1) \vee \overline{x_1} \& f(x_2, 0) \\&= x_2 \& [x_1 \& f(1, 1) \vee \overline{x_1} \& f(1, 0)] \vee \\&\quad \overline{x_2} \& [x_1 \& f(0, 1) \vee \overline{x_1} \& f(0, 0)]\end{aligned}$$

Entwicklung nach x_1

Entwicklung nach x_2

$$\begin{aligned}&= \underbrace{x_2 \& x_1 \& f(1, 1)}_{m_3 \& f_3} \vee x_2 \& \overline{x_1} \& f(1, 0) \vee \overline{x_2} \& x_1 \& f(0, 1) \vee \overline{x_2} \& \overline{x_1} \& f(0, 0) \\&= m_3 \& f_3 \vee m_2 \& f_2 \vee m_1 \& f_1 \vee m_0 \& f_0 \\&= \bigvee_{j=0}^3 (m_i \& f_i)\end{aligned}$$

Minterme

DNF