Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Prof. Jürgen Becker

becker@kit.edu

Digitaltechnik

Mathematische Grundlagen
- Graphen -

Graphentheorie

Was ist ein Graph?

- **Graphen** dienen zur **Abstraktion** von Problemen
  → abstrakte **Darstellung** von **Zusammenhängen**
  → **verbundene Objekte** (→ Relationen zwischen Objekten)

- Bei Spielen wie Scotland Yard kommt es beispielsweise für die Strategie nicht darauf an, wie die Wege verlaufen, sondern nur welche Punkte wie miteinander verbunden sind

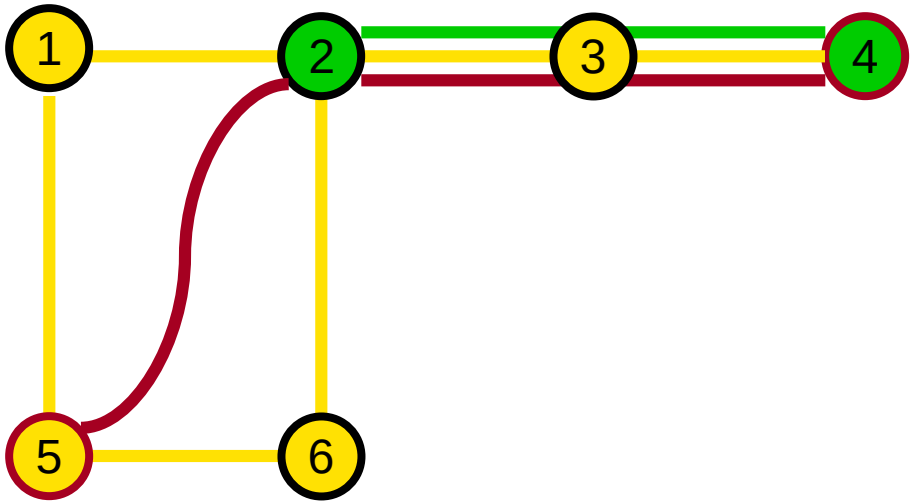
- **Graphen** stellen das **Problem** durch **Knoten** und **Kanten** dar

- Ein **Graph** muss mindestens einen **Knoten** besitzen

- **Kanten** können **je zwei Knoten** verbinden

Graphentheorie

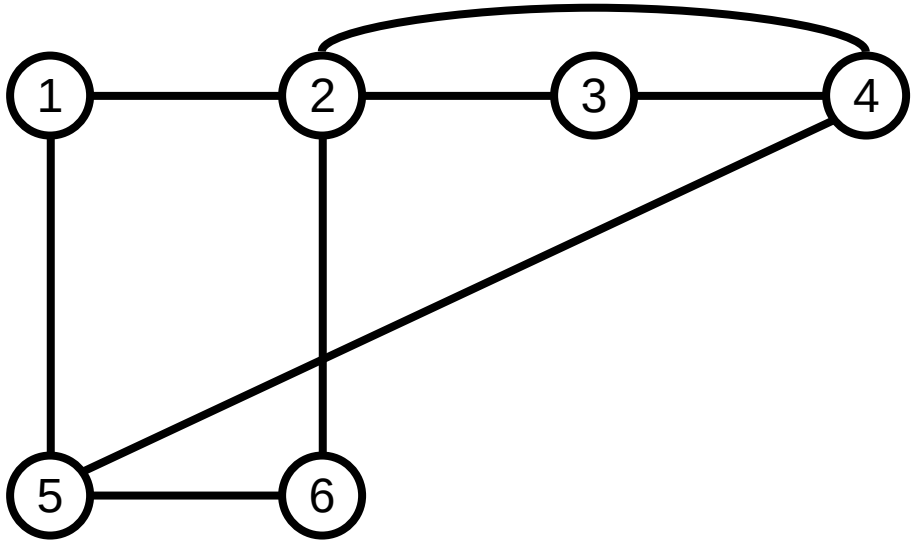
Problemerfassung:



- Darstellung der **Zusammenhänge** und **Abhängigkeitsbeziehungen**
- Hervorheben wesentlicher Beziehungen

Graphentheorie

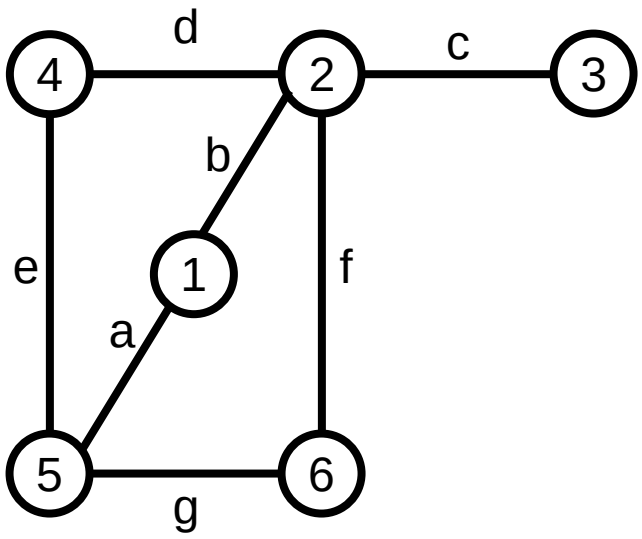
Repräsentation durch einen Graphen:



- **Abstraktion** der **Zusammenhänge** und **Abhängigkeitsbeziehungen**
- Repräsentation der Beziehungen durch direkte Kantenverbindungen

Graphentheorie

Graph ohne Überschneidungen der Kanten:



- Weitere **Vereinfachung/Optimierung** der Abhängigkeitsbeziehungen
  → ohne **kreuzende Verbindungen**
- Einfügen von Kantenbezeichnern

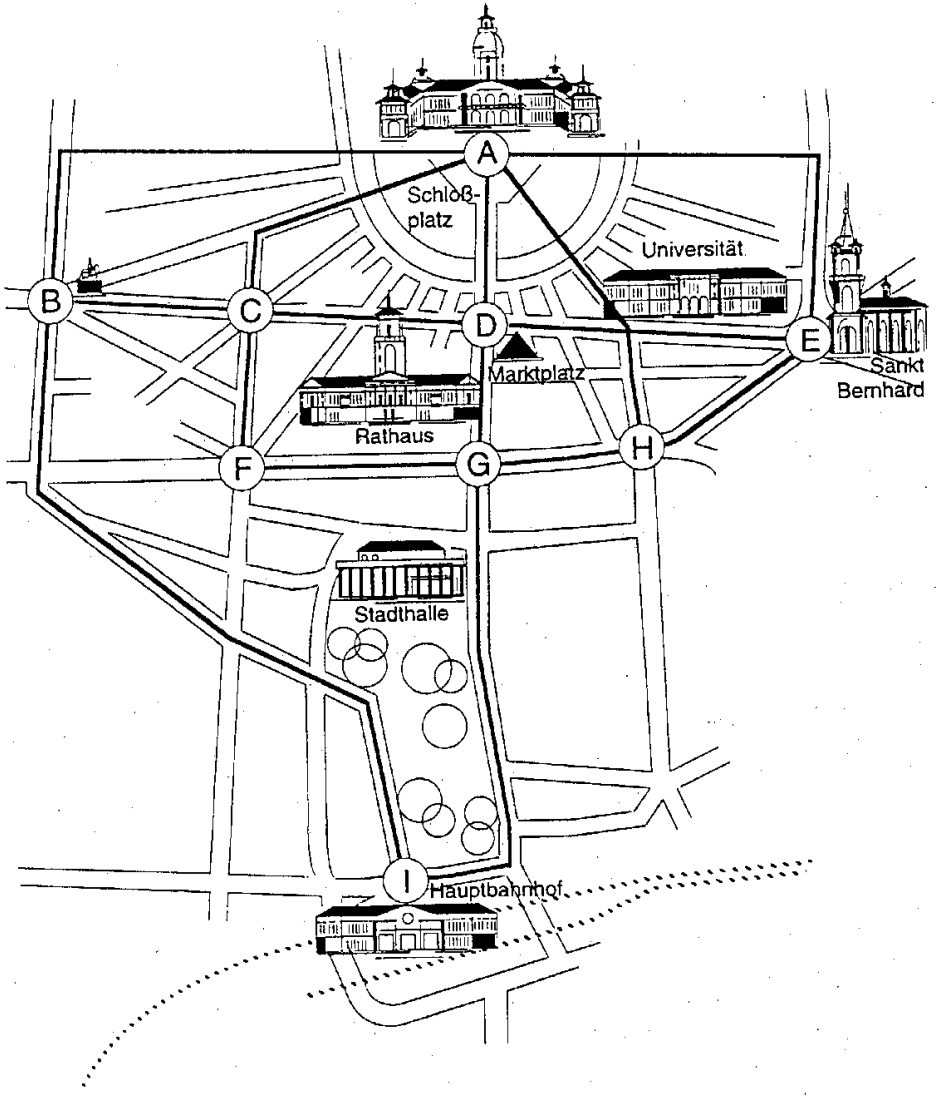
Graphentheorie: Beispiel

Beispiel:

- **Darstellung von Verkehrsbeziehungen im Karlsruher Stadtplan**

  → wichtige Punkte

  → wesentliche Straßen-verbindungen



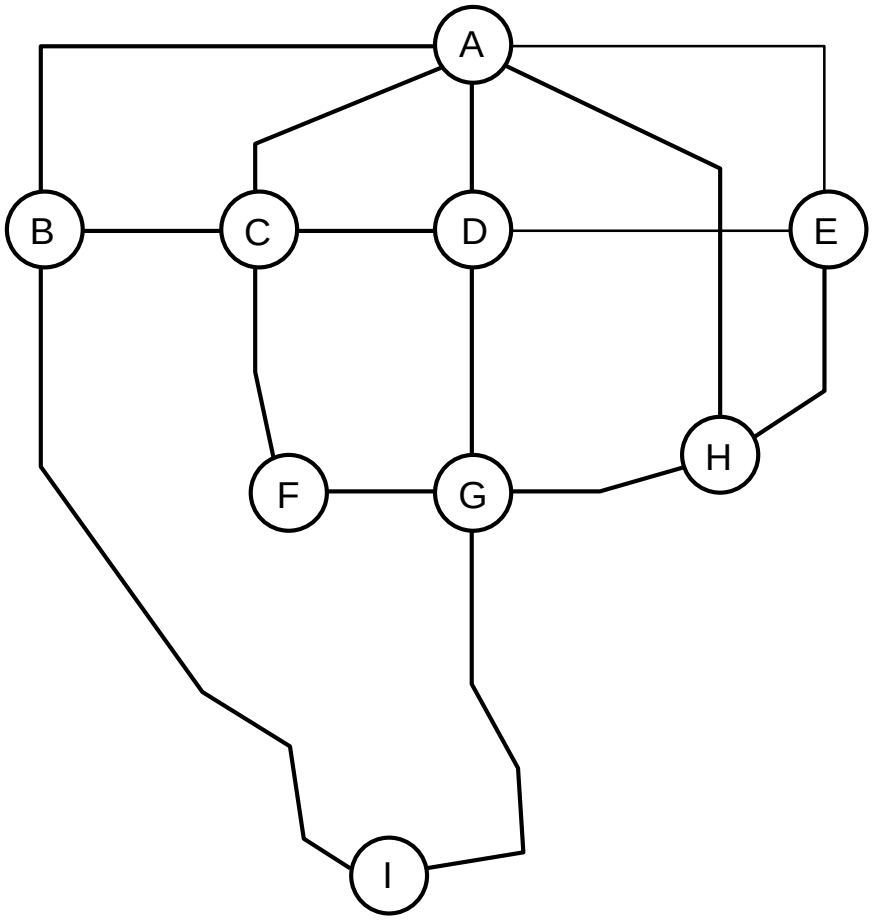
Graphentheorie: Beispiel

Beispiel:

- **Abstrahierte Darstellung der Verkehrsbeziehungen**

  → Weglassen von Details:
  Bottom-up Abstraktion

  → **exakte Geometrie** der Verbindungen **nicht relevant**



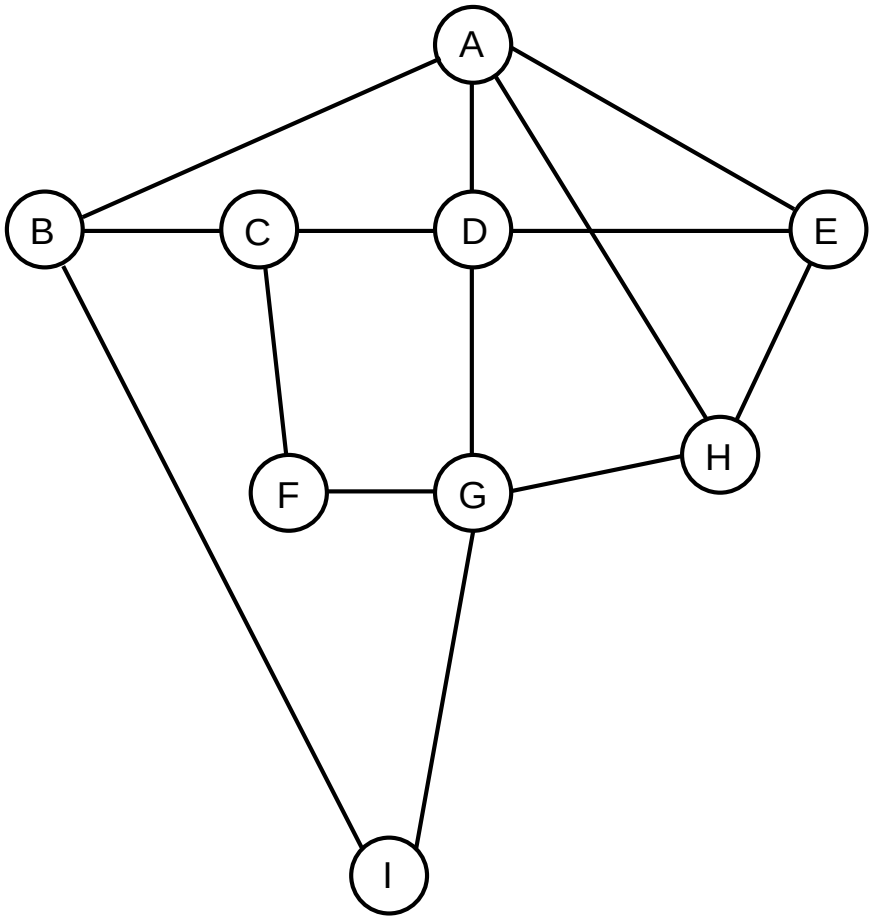
Graphentheorie: Beispiel

Beispiel:

- **Weitere Abstraktion in der Darstellung der Verkehrsbeziehungen**

  → **gerade** Verbindungslinien

  → **Störend in Darstellung:** Kreuzung von Verbindungen



Graphentheorie: Beispiel

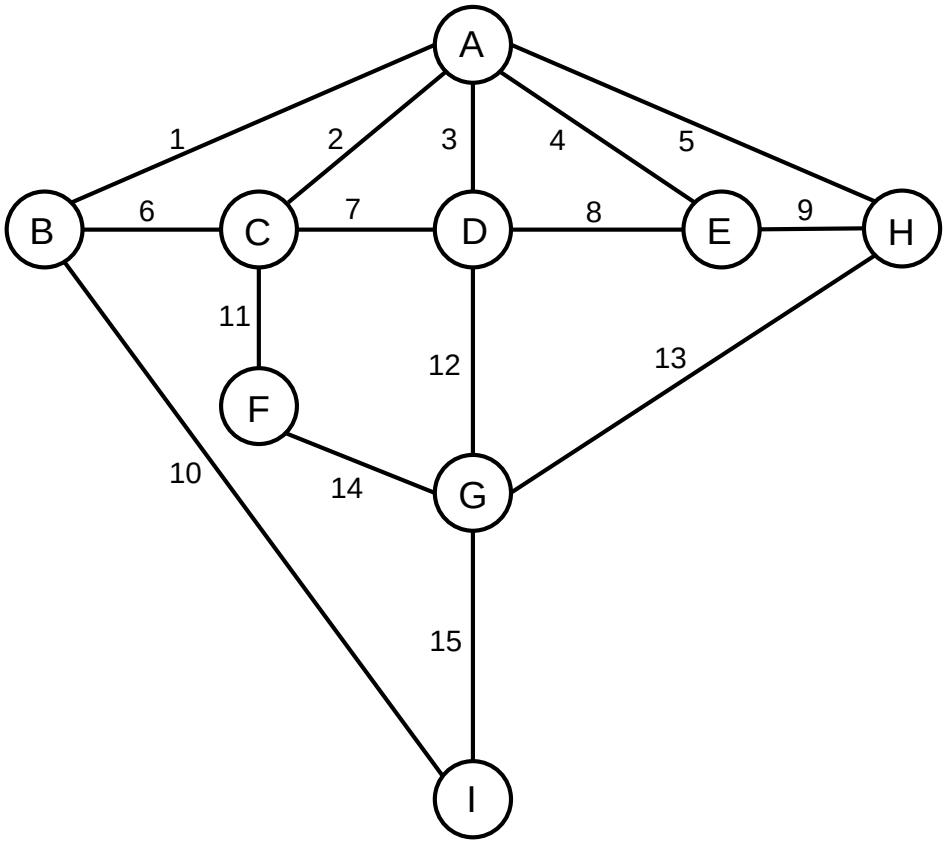
Beispiel:

- **Darstellung ohne kreuzende Verbindungen**

  → **planare** Darstellung

  → Einfügen von Kantenbezeichnern

  → **weiterhin:** automatisierte Verarbeitung mit **Graphenalgorithmen**



Graphentheorie: Abstrakter Graph

Formale mathematische Beschreibung:

- Weitere Abstraktion von der Bedeutung der Darstellungselemente:
  → Verknüpfung mit der Begriffswelt der Mengen und Relationen

- **Graphen** können ganz **unabhängig** von der **Darstellung** durch **zwei Mengen** und **eine Abbildung** beschrieben werden:
  - **V = Menge der Knoten**
  - **E = Menge der Kanten**
  - **Φ (e)** ordnet **jeder Kante e $\in$ E zwei Knoten aus V** zu
    → diejenigen, die durch die Kante e verbunden sind

- **G (V, E, Φ)** wird **abstrakter Graph** genannt

Graphentheorie: Abstrakter Graph

Beispiel:

- **V** = { 1, 2, ..., 6 }
- **E** = { a, b, ..., g }
- **Φ:** E → { v, w } v, w ∈ V

  Φ (a) = { 1, 5 }

  Φ (b) = { 1, 2 }

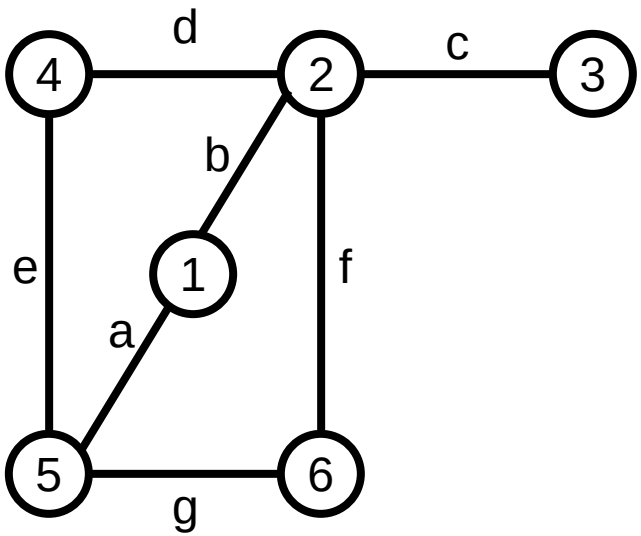
  Φ (c) = { 2, 3 }

  Φ (d) = { 2, 4 }

  Φ (e) = { 4, 5 }

  Φ (f) = { 2, 6 }

  Φ (g) = { 5, 6 }



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie: Begriffe

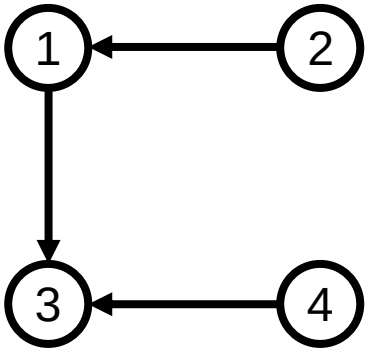
Gerichteter Graph:

- Für manche Probleme benutzt man auch **gerichtete Graphen**
  → **Kanten** haben eine **festgelegte Richtung**

- Bei **gerichteten Graphen** gilt:
  Φ bildet **Kanten** auf **geordnetes Knoten-Tupel** aus **V x V** ab

- Ein gerichteter Graph muss mindestens eine Kante zwischen zwei Knoten (g,h) besitzen, so dass keine Kante in umgekehrter Richtung (h,g) existiert

- Gerichtete Graphen werden auch als **Digraphen** bezeichnet

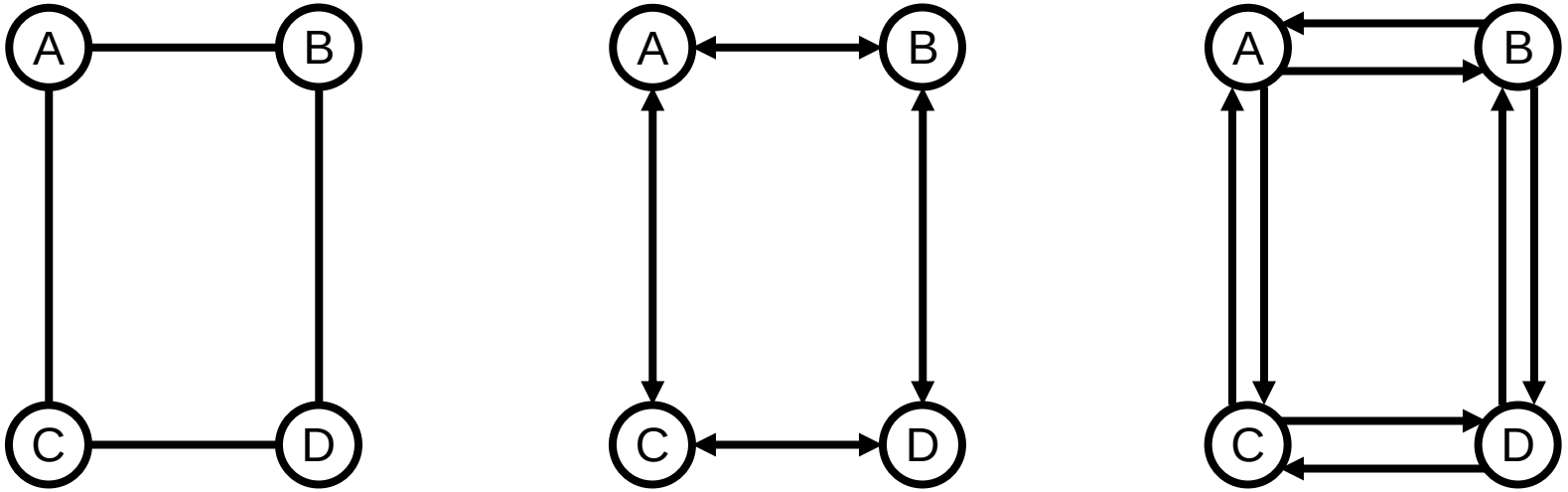


Graphentheorie: Begriffe

Ungerichteter Graph:

- **Ungerichtete Graphen**
  - → sind **immer** auch mit **gerichteten Kanten darstellbar**
  - → zu jeder Kante existiert eine weitere Kante in umgekehrter Richtung

Beispiel:



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie: Begriffe

Sprechweisen:

- Verbindet die **Kante e** die **Knoten g** und **h**, so sagt man:
  „e ist inzident zu g bzw. zu h“ und schreibt:
  - **Φ (e) = (g, h)** für **gerichtete** Graphen
  - **Φ (e) = { g, h } = { h, g }** für **ungerichtete** Graphen

- Φ wird daher **Inzidenzabbildung** genannt
  → Graph lässt sich formal durch eine **Inzidenzmatrix** beschreiben

- die **Knoten g** und **h** heißen **adjazent zur Kante e**

- Weitere Möglichkeit zur **formalen Beschreibung** eines Graphen ist die **Adjazenzmatrix**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie: Begriffe

Globale Charakterisierung von Graphen:

- Der **Graphentheorie** fehlt es selbstverständlich nicht an Begriffen, um die unerschöpfliche Vielfalt der Graphen zu kategorisieren

- Im folgenden wollen wir uns nur mit **Graphen** beschäftigen, deren **Mengen V** und **E endlich** sind:
  → **endliche Graphen** (insbesondere für technische Anwendungen)

- Ist die Menge der **Kanten E** leer
  → so handelt es sich um einen **entarteten Graphen**
  → dieser besteht nur aus **isolierten Knoten**

- Wenn zu je zwei verschiedenen **Knoten** höchstens eine **Kante** existiert
  → so handelt es sich um einen **einfachen Graphen**

Graphentheorie: Begriffe

Globale Charakterisierung von Graphen:

- Vergleichbarkeit zweier **Graphen**:
  → es werden **Abbildungen** zwischen **Knoten** und **Kanten** gesucht, so dass die **Inzidenzbeziehungen** erhalten bleiben

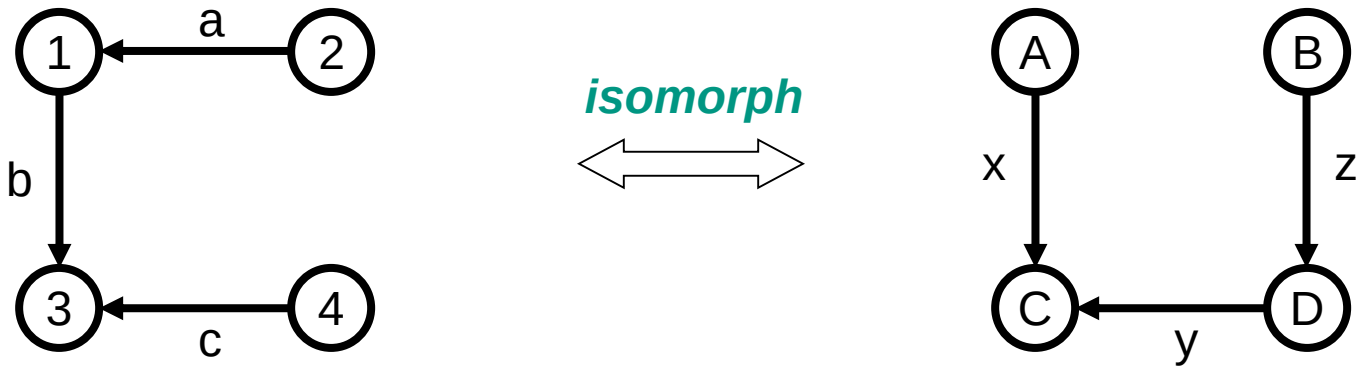
- Sind diese Zuordnungen eineindeutig
  → so wird der **Graph isomorph** genannt

- **Isomorphie** von Graphen:
  → Strukturen isomorpher Graphen sind gleich
  → wichtige Eigenschaft in der Vergleichbarkeit und **formalen Verifikation** digitaltechnischer Schaltungen und Systeme

Graphentheorie: Begriffe

Beispiel: Isomorphie

- Die Folgenden Graphen sind **isomorph**



- Zuordnung der **Knoten** φ: $(1,2,3,4) \Rightarrow (D,B,C,A)$
- Zuordnung der **Kanten** ψ: $(a,b,c) \Rightarrow (z,y,x)$
- **Inzidenzbeziehungen:**

$$\Phi(a) = (2,1) \Leftrightarrow \Phi(\psi(a)) = \Phi(z) = (B,D) = (\varphi(2), \varphi(1))$$
$$\Phi(b) = (1,3) \Leftrightarrow \Phi(\psi(b)) = \Phi(y) = (D,C) = (\varphi(1), \varphi(3))$$
$$\Phi(c) = (4,3) \Leftrightarrow \Phi(\psi(c)) = \Phi(x) = (A,C) = (\varphi(4), \varphi(3))$$

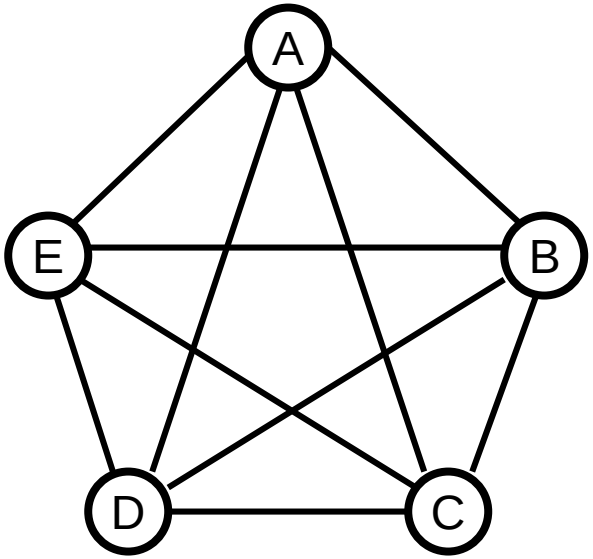
Graphentheorie: Begriffe

Globale Charakterisierung von Graphen:

Vollständigkeit von (Sub-) Graphen

- sind je zwei verschiedene **Knoten** durch eine **Kante** verbunden, so ist der (Sub-) Graph **vollständig** → (Sub-) Graph ist **Clique**

Beispiel:



Graphentheorie: Begriffe

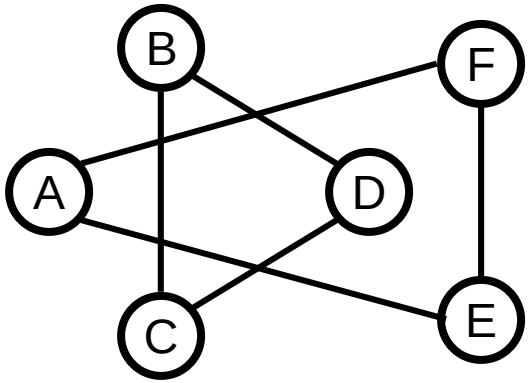
Globale Charakterisierung von Graphen:

Zusammenhängende Graphen

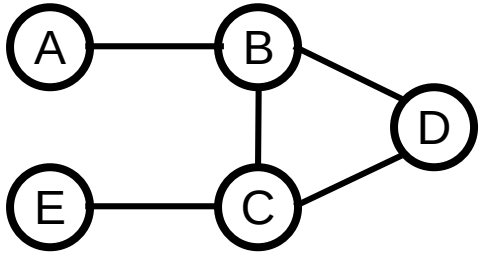
- durch Folgen von Kanten und Knoten kann man von jedem beliebigen Knoten des Graphen zu jedem anderen Knoten des Graphen gelangen
  → der **Graph** ist dann **zusammenhängend**

- Ist der Graph **nicht zusammenhängend**
  → so besteht er aus mindestens zwei **Teilgraphen**

Beispiele:



nicht zusammenhängend



zusammenhängend

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

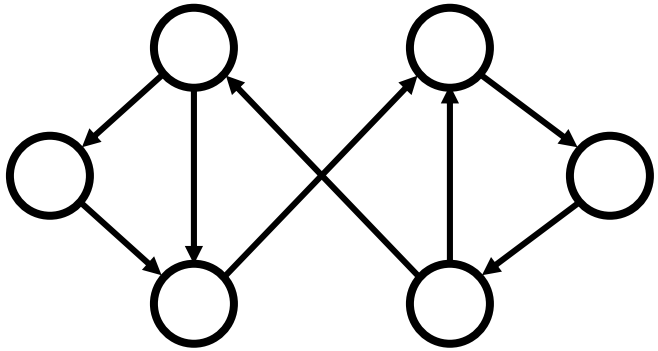
Graphentheorie: Begriffe

Globale Charakterisierung von Graphen:

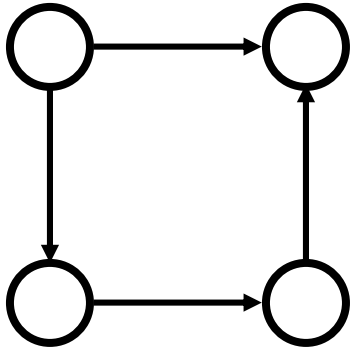
Streng zusammenhängende Graphen

- **Gerichtete Graphen** bezeichnet man als **zusammenhängend**, wenn der zugehörige **ungerichtete Graph zusammenhängend** ist
- Findet man zusätzlich von jedem beliebigen Knoten des Graphen zu jedem anderen Knoten eine **gerichtete Folge von Kanten** (Weg unter Einbezug der Richtungen!) → so ist der **Graph streng zusammenhängend**

Beispiele:



streng zusammenhängend



nicht streng zusammenhängend

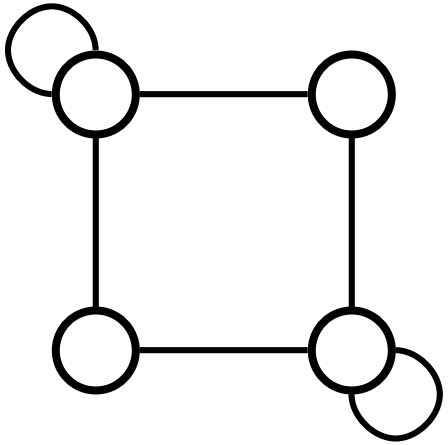
Graphentheorie: Begriffe

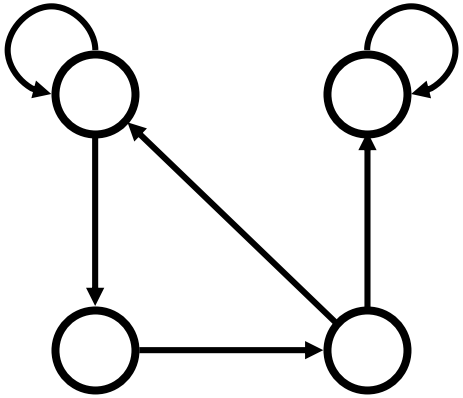
Lokale Eigenschaften von Graphen:

Schlinge

- Verbindet eine Kante einen Knoten mit sich selbst, so wird diese als **Schleife** oder **Schlinge** bezeichnet
- $\Phi(e) = (g,g)$

Beispiele:





KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Mehrfachkanten

- Existieren **mehrere Kanten** zwischen zwei Knoten g und h, so heißen diese **parallel** bzw. **Mehrfachkanten**

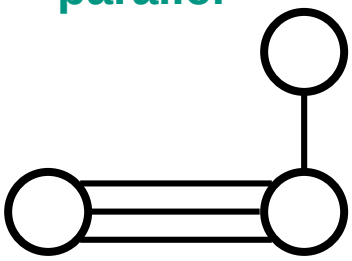
$$\Phi(e) = \Phi(f) = \{g,h\} \text{ bzw. } (g,h) \qquad e \neq f$$

- Bei **gerichteten Graphen** nennt man Kanten **antiparallel**, falls sie zwei Knoten in entgegengesetzter Richtung verbinden

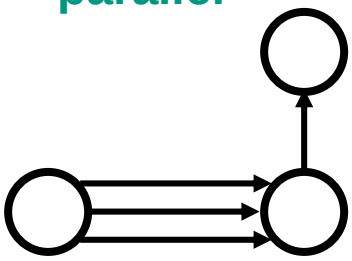
$$\Phi(e) = (g,h) \qquad \Phi(f) = (h,g)$$

Beispiele:

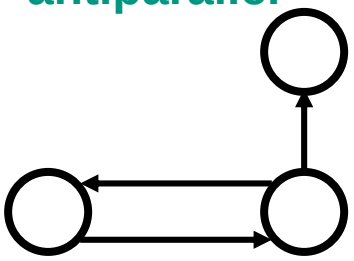
parallel



parallel

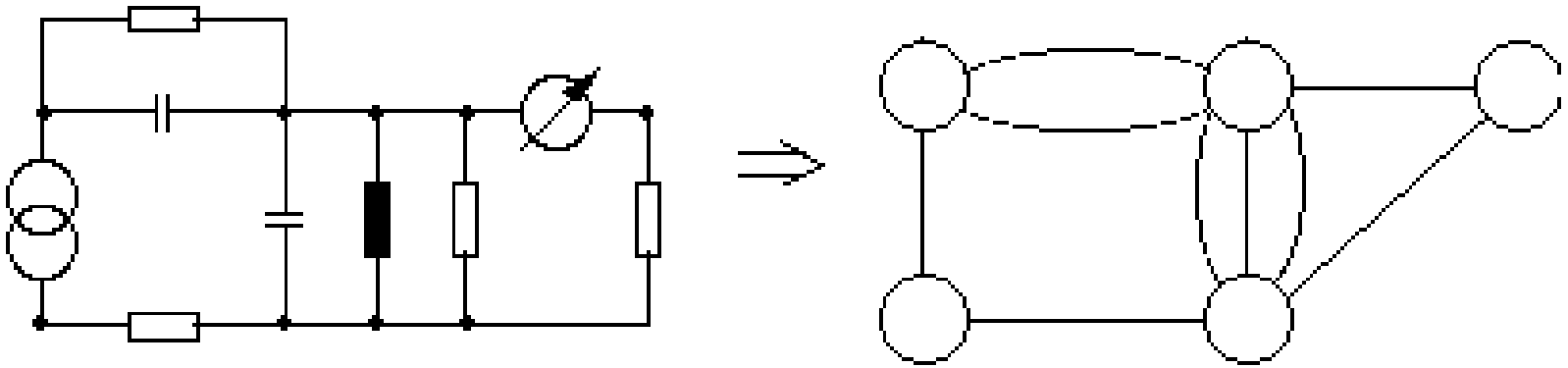


antiparallel



Graphentheorie: Begriffe

Technisches Beispiel: **Mehrfachkanten**



- Analoger Schaltkreis:
  - **Mehrfachkante** als Abbild schaltungstechnischer Merkmale
  - Bauteile **parallel** geschaltet

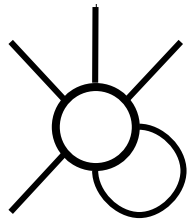
Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

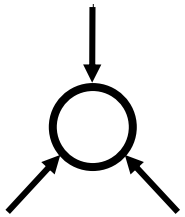
Grad eines Knotens

- Betrachtet man einen **Knoten**, so wird die **Anzahl** der damit **inzidenten Kanten** als **Grad d(g)** des Knotens bezeichnet
- Bei **gerichteten Graphen** unterscheidet man zusätzlich
  - abgehende Kanten $\Rightarrow$ **Ausgangsgrad $d^+(g)$**
  - von ankommenden Kanten $\Rightarrow$ **Eingangsgrad $d^-(g)$**

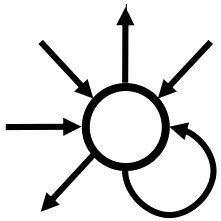
Beispiele:



d(g) = 6



$d^-(g) = 3$



$d^+(g) = 3$
$d^-(g) = 4$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Unmittelbare Nachbarschaft von Knoten

- Sind **zwei Knoten** durch **eine Kante** verbunden
  → so sind die Knoten **unmittelbar benachbart**

- **Menge** der **unmittelbar benachbarten Knoten**
  → wird mit **V‘(g)** bezeichnet

- Bei **gerichteten Graphen** gilt:
  → die Menge der benachbarten Knoten wird **entsprechend** der Richtungen der Kanten eingeteilt in:
    → **unmittelbare Vorgänger** $V'_1(g)$ und
    → **unmittelbare Nachfolger** $V'_2(g)$

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Unmittelbare Nachbarschaft:

→ mengenalgebraische Eigenschaften

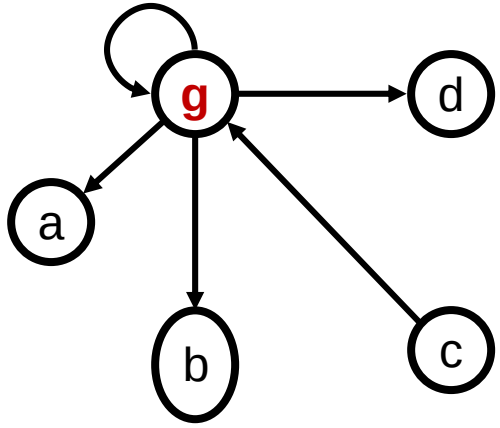
- Für die **Mengen** der **unmittelbaren Nachbarn** gilt:
  - $|V'_1(g)| = d^-(g)$
  - $|V'_2(g)| = d^+(g)$
  - $V' = V'_1 \cup V'_2$

- Da jedoch Knoten sowohl Vorgänger als auch Nachfolger sein können, gilt:
  - $|V'(g)| \leq d(g)$

Graphentheorie: Begriffe

Beispiel: **Unmittelbare Nachbarschaft des Knotens g**

- **Vorgänger:** $V'_1(g) = \{ c, g \}$
- **Nachfolger:** $V'_2(g) = \{ a, b, d, g \}$
- **$V'(g)$** $= \{ a, b, c, d, g \}$
- **$d^-(g)$** $= |V'_1(g)| = 2$
- **$d^+(g)$** $= |V'_2(g)| = 4$
- **$d(g)$** $= d^-(g) + d^+(g) = 6$
- **$|V'(g)|$** $= 5$



Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

Mittelbare Nachbarschaft von Knoten

- Schwächt man die Forderung so ab, dass nur eine **Folge** von **Kanten zwischen zwei Knoten** existieren muss
  → so sind die Knoten **mittelbar benachbart**

- Nützlich ist die mittelbare Nachbarschaft besonders bei gerichteten Graphen bzgl. der Unterscheidung in
  → **mittelbare Vorgänger** und
  → **mittelbare Nachfolger**

- **Beispiel:** Stammbaum
  → die Frage nach der Abstammung in direkter Linie ist eine Frage nach mittelbaren Vorgängern

Graphentheorie: Begriffe

Lokale Eigenschaften von Graphen:

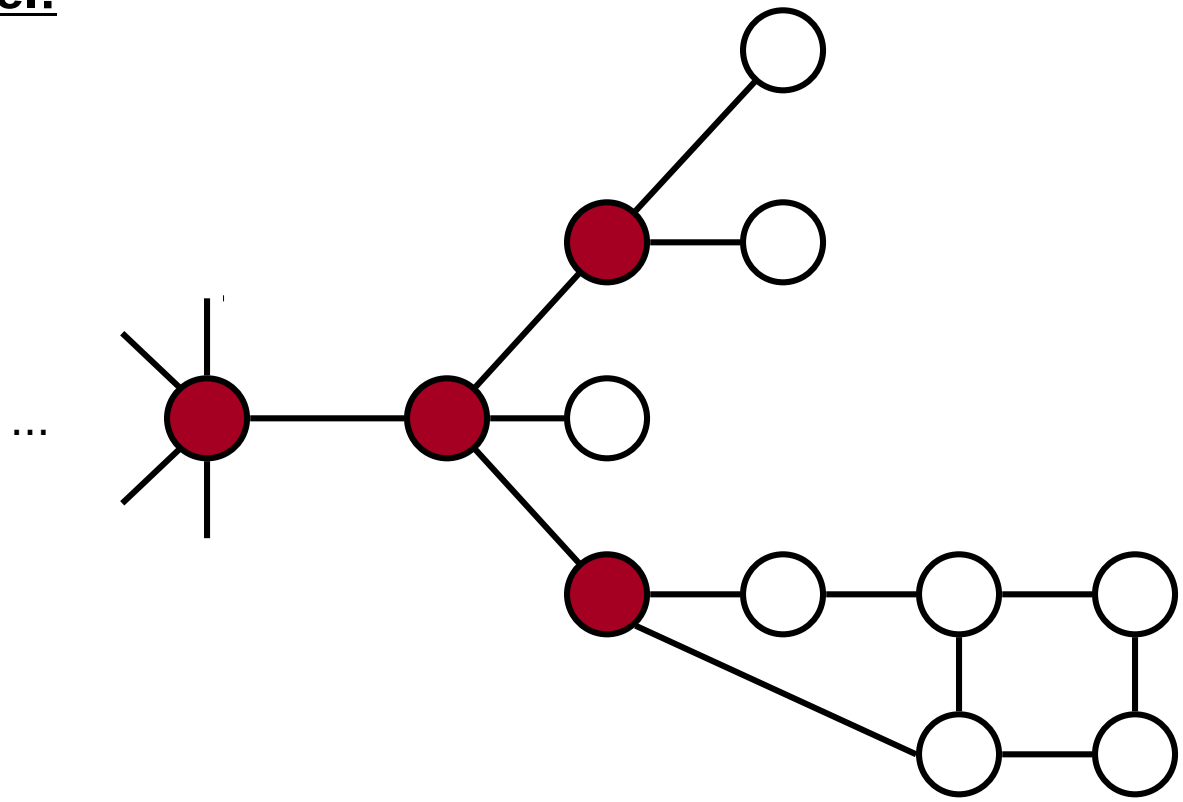
Artikulation eines Graphen

- Bei der **Modellierung** von technischen Systemen mit Graphen werden
  - → **Komponenten** häufig durch **Knoten** dargestellt
  - → **Verbindungen** zwischen Komponenten durch **Kanten** abgebildet
- Der **Ausfall** einer **Komponente**
  - → entspricht dem **Entfernen** eines **Knotens** aus dem Graphen
- Besonders **kritisch** bei Ausfall einer Komponente (Knoten):
  - → Graph **zerfällt** in **zwei nicht zusammenhängende Teilgraphen**
  - → solche **kritischen Knoten** erhalten den Namen **Artikulation**
- Die **Artikulationen** eines Graphen repräsentieren **kritische Systemstellen**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie: Begriffe

Beispiel:



Graph mit **Artikulationen**

Graphentheorie

Spezielle Kantenfolgen in Graphen:

- Bereits bei der mittelbaren Nachbarschaft haben wir uns dafür interessiert, ob Knoten über **Kantenfolgen** verbunden sind

- **Definition:** **Kantenprogression** der **Länge n**
  → **endliche Folge** von **n nicht** notwendigerweise **verschiedenen Kanten (e^i),** die n + 1 nicht notwendigerweise verschiedene Knoten (g^i) verbinden

  $$\Phi(e^i) = (g^i, g^{i+1}) \quad \text{für } i = 1, 2, ..., n$$

- Sind in einer **Kantenprogression alle Knoten (g^i)** voneinander **verschieden** und damit auch alle Kanten, so heißt sie **einfach**

- Je nachdem, ob der Anfangsknoten gleich dem Endknoten ist ($g^1 = g^{n+1}$), oder ob es sich um einen gerichteten Graphen handelt, verwendet man unterschiedliche Bezeichnungen

Spezielle Kantenfolgen in Graphen

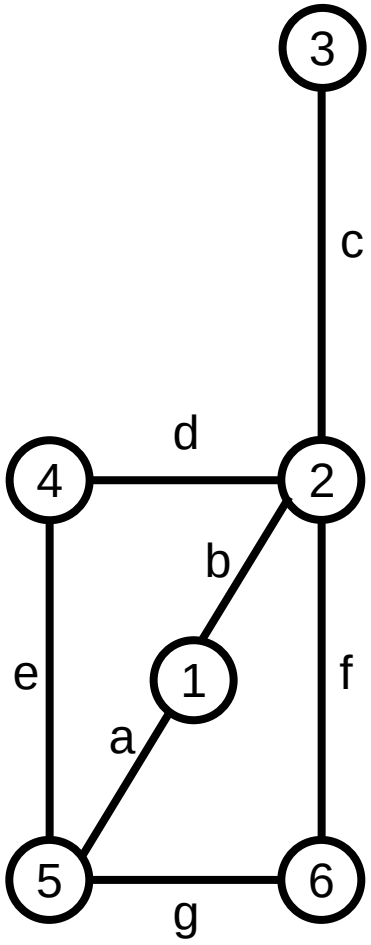
Ungerichteter Graph		Gerichteter Graph	
$g^1 \neq g^{n+1}$	$g^1 = g^{n+1}$	$g^1 \neq g^{n+1}$	$g^1 = g^{n+1}$
offene Kanten-progression	geschlossene Kanten-progression	offene Kanten-progression	geschlossene Kanten-progression
Sind alle Kanten einer Progression voneinander verschieden			
Ketten-progression	geschlossene Kantenzug-progression	Weg-progression	Zyklus-progression
Berücksichtigt man die Kanten einer Progression ohne Ordnung			
Kette	geschlossener Kantenzug	Weg	Zyklus

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Spezielle Kantenfolgen in Graphen

Beispiele am ungerichteten Graphen:

Folge	Merkmal
g-f-c-c-d	**offene** Kantenprogression
d-c-c-b-a-e	**geschlossene** Kantenprogression
e-g-f	**Kettenprogression**
a-b-f-g	**geschlossene Kantenzugprogression**
{ e, b, a }	**Kette**
{ g, d, f, e }	**geschlossener Kantenzug**

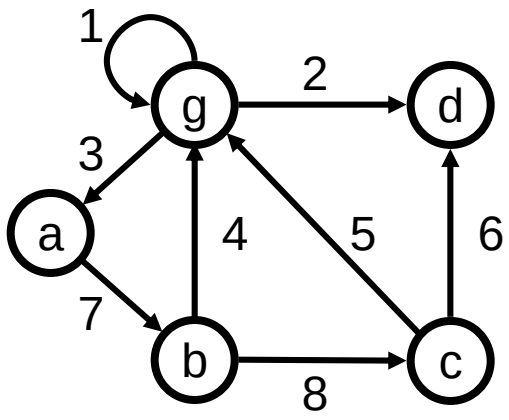


KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Spezielle Kantenfolgen in Graphen

Beispiele am gerichteten Graphen:

Folge	Merkmal
4-3-7-4	**offene** Kantenprogression
3-7-4-1-1	**geschlossene** Kantenprogression
4-1-2	**Wegprogression**
5-1-3-7-8	**Zyklusprogression**
{ 2, 8, 5, 1 }	**Weg**
{ 1 }	**Zyklus**



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie

Spezielle Graphen:

Begriff des Zyklus/Zyklen in Graphen:

- Für viele Algorithmen, die auf Graphen arbeiten ist es wichtig zu wissen, ob es möglich ist, mit unterschiedlichen Kanten „im Kreis zu laufen“

- Man bezeichnet einen kompletten **Graphen** als **zyklisch**, wenn
  → wenigstens eine **geschlossene Kantenzugprogression** (= **Zyklus**) existiert in diesem Graphen
  → eine **Schleife** ist ebenfalls ein **Zyklus**

- Wenn ein **Graph nicht zyklisch** ist
  → nennt man ihn **zyklenfrei** oder **azyklisch**

Graphentheorie

Spezielle Graphen:

Baum

- **Definition:** **Baum**
  → ein **zusammenhängender, zyklenfreier** Graph

- **Also:** bei einem **ungerichteten Baum**
  → es darf **kein geschlossener Kantenzug** existieren

- **Weiterhin:** bei einem **gerichteten Baum** gilt:
  → der zugehörige ungerichtete Graph:
  - darf **keinen Zyklus** aufweisen und
  - muss **zusammenhängend** sein

Graphentheorie

Spezielle Graphen: Bäume

Definition: Wurzel und Blätter

- In einem **gerichteten Baum**
  - → gibt es genau einen **Knoten**, der **keine Vorgänger** hat
    $d^- = 0$
  - → dieser Knoten wird **Wurzel** genannt

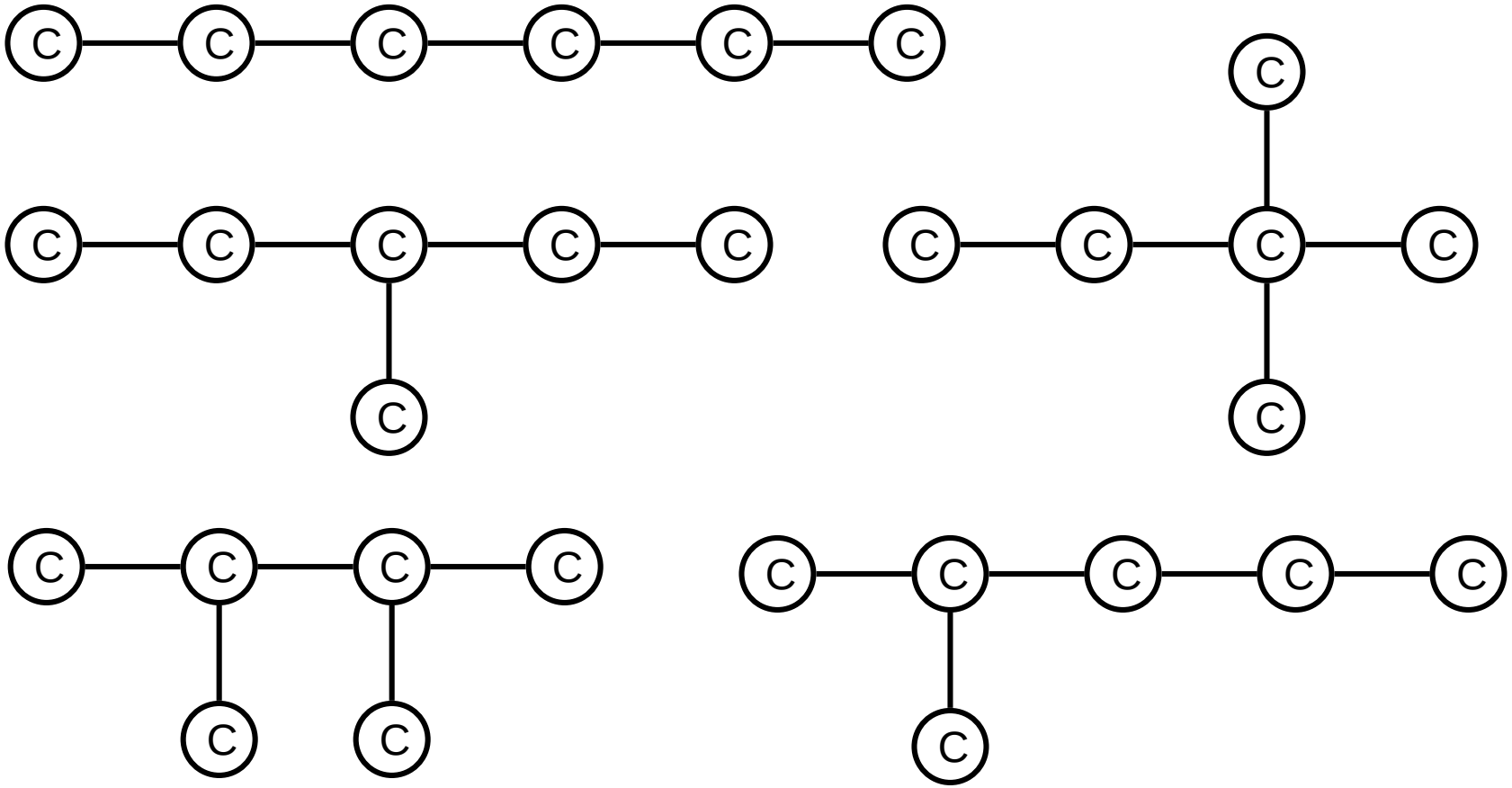
- Die Knoten ohne Nachfolger ($d^+ = 0$) heißen **Blätter**

- Bei einem **ungerichteten Baum**
  - → kann die **Wurzel** frei gewählt werden
  - → daraus ergeben sich die **Blätter**
    als übrige **Knoten** mit **Knotengrad eins**

Graphentheorie

Beispiel: ungerichteter Baum

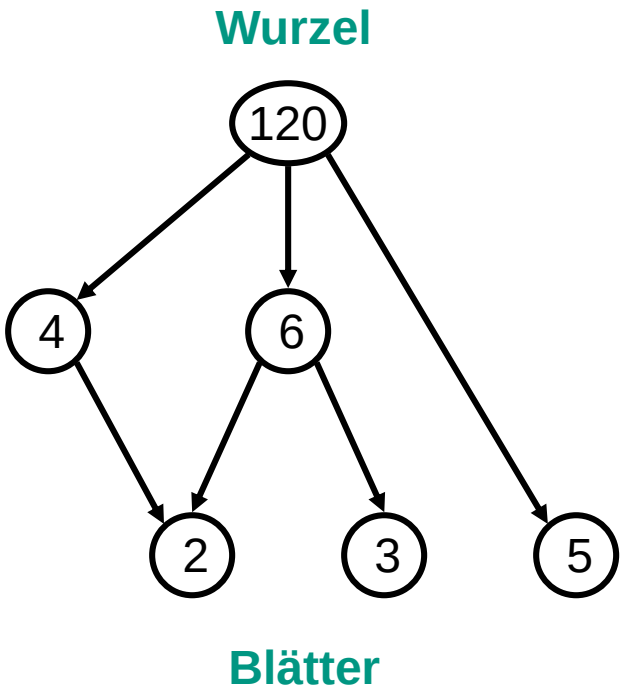
- Die **Molekülstrukturen** der **Hexane** ergeben **ungerichtete Bäume**

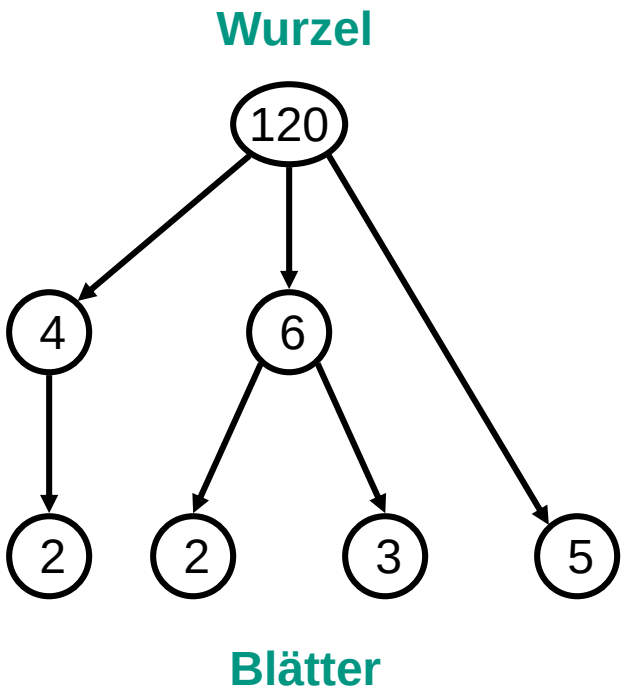


Graphentheorie

Beispiel: **gerichteter Baum**

- Die **Relation „ist teilbar durch“** führt zu einem gerichteten Baum

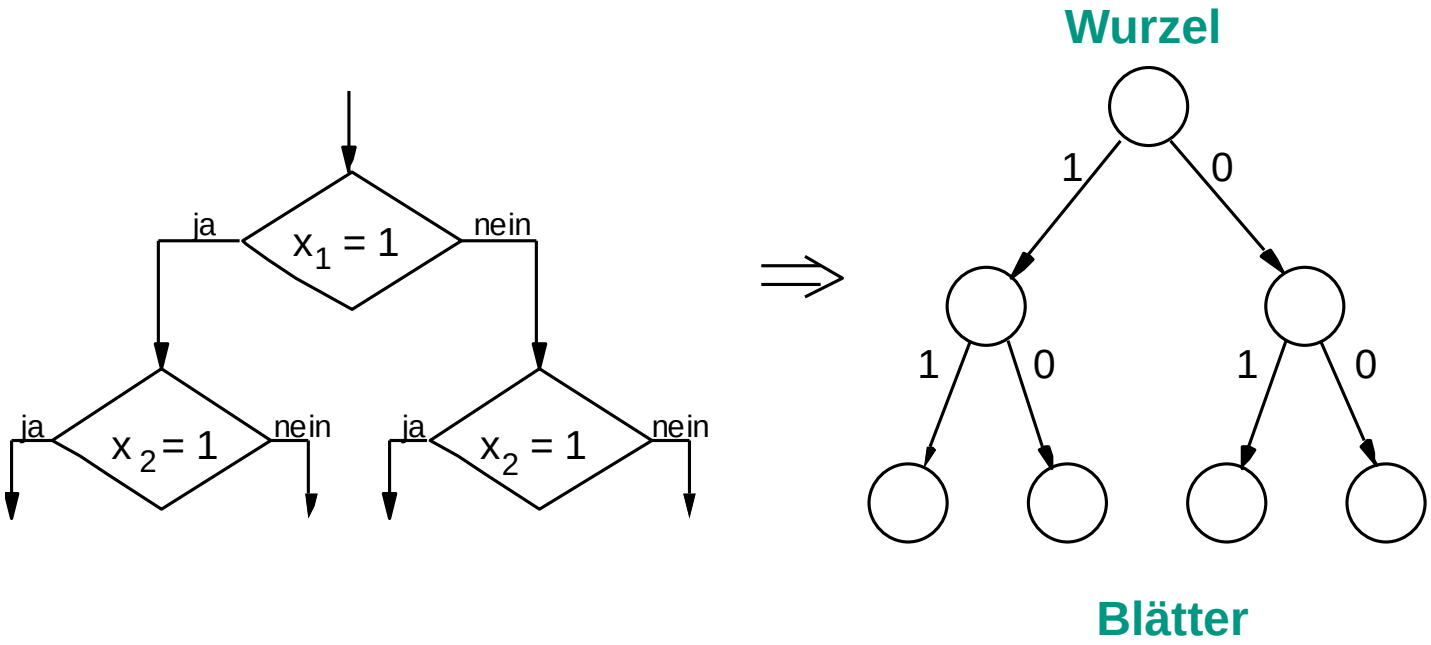




Graphentheorie

Definition: Binärbaum

- Hat jeder Knoten eines Baumes, außer den Blättern, **genau zwei** Nachfolger: **$d^+(g) = 2$**, so heißt ein solcher Baum **Binärbaum**



Graphentheorie

Weitere Begriffe: Binärbaum

- Der **Abstand** von der **Wurzel** zu den **Blättern**
  → wird als **Tiefe** des **Baumes** bezeichnet

- Ist der Abstand von der **Wurzel** zu den **Blättern** für alle Blätter **identisch**
  → so handelt es sich um einen **symmetrischen** Binärbaum

- Unterscheiden sich die Abstände um maximal eins
  → so nennt man den **Baum ausgeglichen**

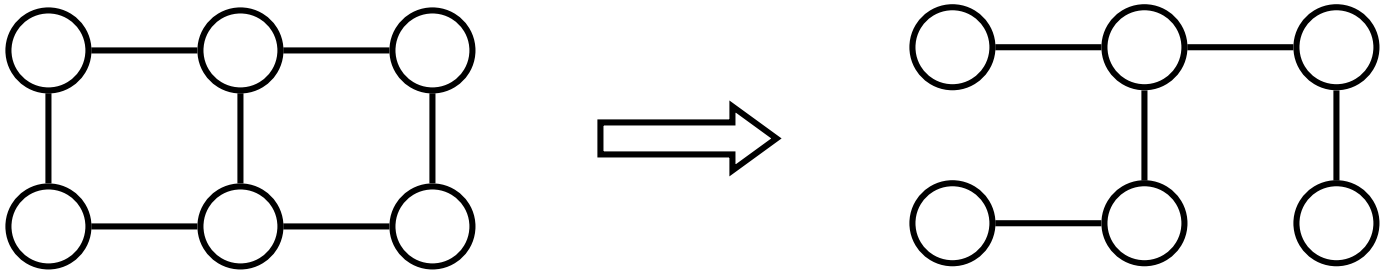
Graphentheorie

Definition: **Aufspannender Baum**

- **Es gilt:** bei jedem **zusammenhängenden Graphen** kann man **alle Zyklen** durch **gezieltes Entfernen** von **Kanten** auflösen (→ *Kruskal Algorithmus*: Minimal Aufspannender Baum, MAB) **ohne** dass der Graph in **zwei Teilgraphen zerfällt**

- Auf diese Weise erhält man zu jedem beliebigen Graphen einen zugehörigen **aufspannenden Baum**

Beispiel:



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

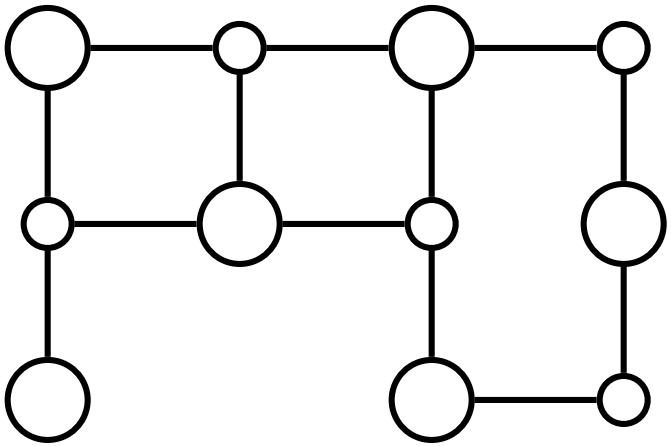
Graphentheorie

Definition: **Bipartiter Graph**

- **Knoten** eines **Graphen** sind folgendermaßen in **zwei Teilmengen** aufteilbar:
  - → **keine Kante** verbindet **zwei Knoten** in **derselben Teilmenge**
  - → so nennt man den **Graphen bipartit**

- **In technischen Systemen:**
  - → **zwei Teilmengen** entsprechen bspw. **zwei** verschiedenen **Typen** von **Komponenten**, die nicht untereinander verbunden werden dürfen

Beispiel:



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Graphentheorie

Definition: **Geometrische Graphen**

- Bisher hatte die Darstellung der Knoten und Kanten des Graphen in der Zeichenebene keine Bedeutung

- **Geometrische Graphen** ordnen den **Knoten** jedoch eine geometrische **Position** zu:
  - → im **n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$**
  - → zu den **Kanten „glatte“ (kreuzungsfreie!) Kurven zwischen den Knoten**, die außer den Endknoten selbst keinen Punkt gemeinsam haben

- **Zweidimensionale** geometrische **Graphen**
  - → müssen im zweidimensionalen Raum (2D) **kreuzungsfrei** sein

- Man kann beweisen, dass zu **jedem Graphen** ein **isomorpher dreidimensionaler geometrischer Graph** existiert

Graphentheorie

Eigenschaften: Geometrische Graphen

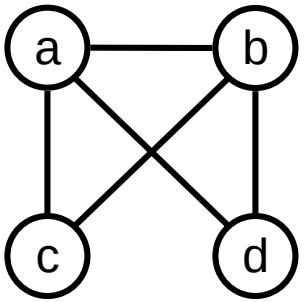
- In **zweidimensionaler Ebene:**
  → es existiert **nicht immer** im 2D **Raum $\mathbb{R}^2$** ein **isomorpher kreuzungsfreier** Graph mit **„glatten“ Kanten**

- Graphen, zu denen ein **isomorpher geometrischer** Graph in 2D existiert
  → nennt man **planare Graphen**

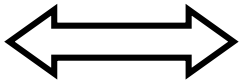
- **Planare Graphen** müssen **nicht immer kreuzungsfrei** dargestellt sein

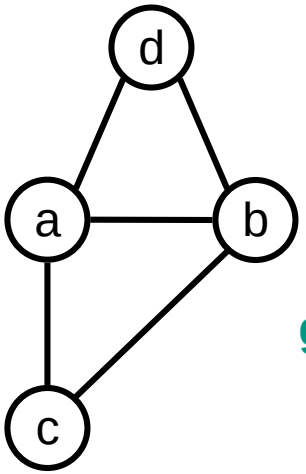
Beispiel:

planarer Graph



isomorph





2D geometrischer Graph

Graphentheorie

Definition: Duale Graphen

- **Planarer Graph**:
  → teilt die **Zeichenebene** in **verschiedene Gebiete** ein
  → **äußere Umgebung** des **Graphen** wird hier auch als **Gebiet** betrachtet

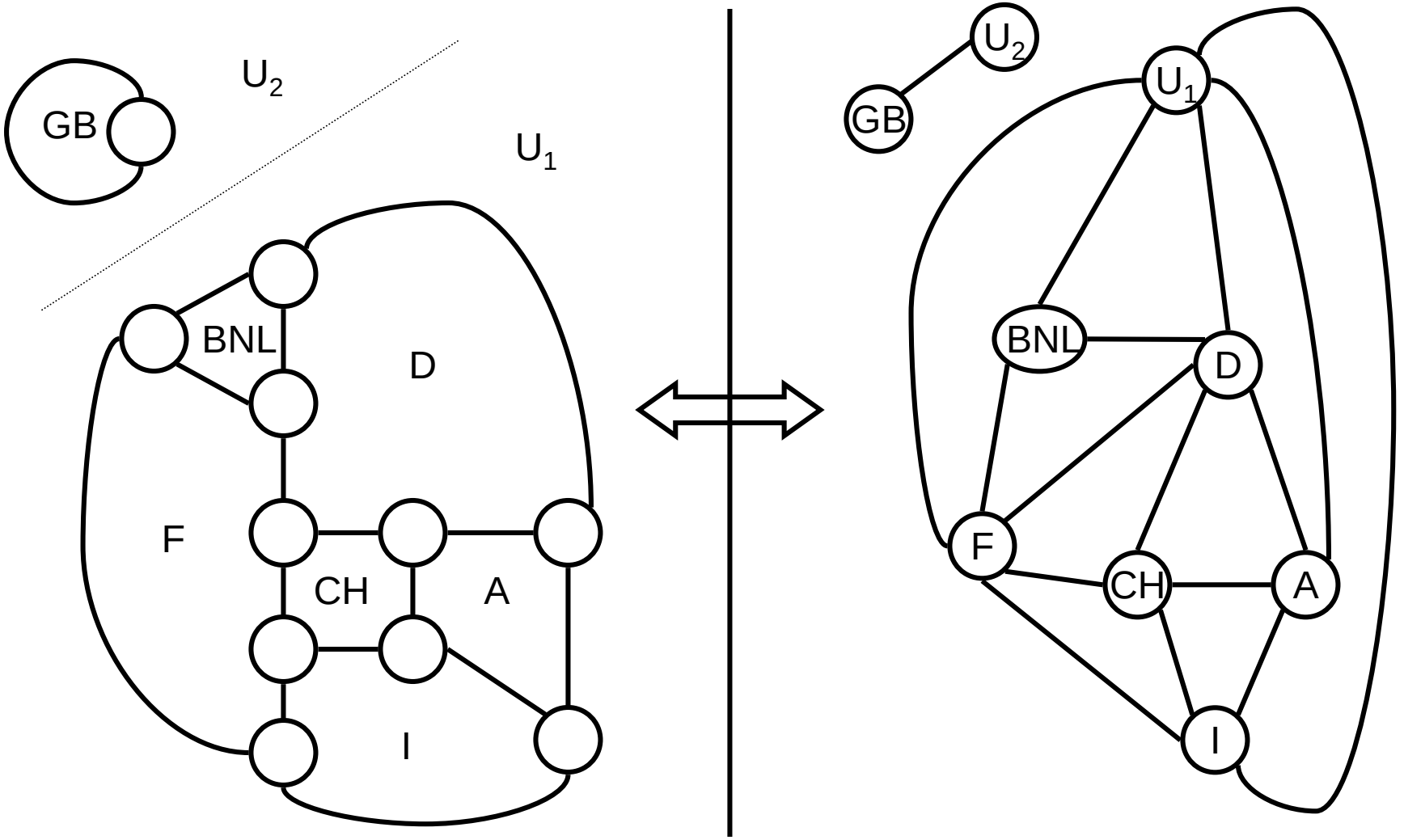
- **Planarität** des **Graphen**:
  → **notwendige** und **hinreichende** Bedingung dafür, dass man einen **dualen Graphen** dazu konstruieren kann

- **Vorgehensweise: Konstruktion eines dualen Graphen**
  → **Gebiete** eines zusammenhängenden **Graphen** in der Zeichenebene entsprechen den **Knoten** im **dualen Graphen**, **jede Grenze zwischen zwei Gebieten** (Kanten im Ausgangsgraph!) entspricht dabei **einer kreuzungsfreien Kante** im zu konstruierenden **dualen Graph**; jedem eigenständigen zusammenhängenden Graphen wird dabei ein eigener **Umgebungsknoten U** zugeordnet

- **Duale Graphen:**
  → spielen beispielsweise eine Rolle, bei der **Beurteilung**, ob eine **Schaltung planar** in einer 2D-Ebene **realisiert** werden kann

Duale Graphen

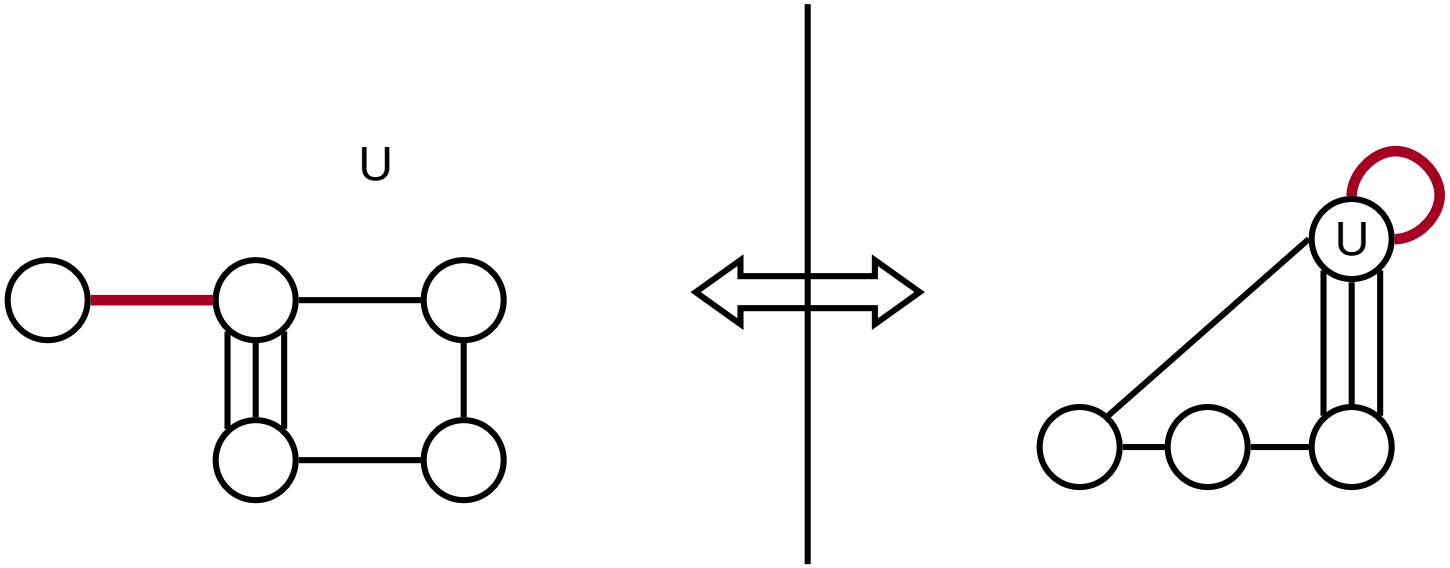
Beispiel 1: Duale Graphen



Duale Graphen

Beispiel 2: **Duale Graphen**

→ **Konstruktion von Schlingen**



Graphentheorie

Definition: **Gewichtete Graphen**

- Analog zum Scotland Yard Spiel:
  → es macht einen **Unterschied**, ob **zwei Knoten** mit einer Bus-, Taxi- oder U-Bahn-Verbindung verbunden sind

- Man kann jeder **Kante** noch **zusätzliche Attribute** zuordnen

- In vielen Fällen genügt jedoch die **Zuordnung** einer reellen Zahl, die als **Gewicht** bezeichnet wird
  → dann spricht man von einem **gewichteten Graphen**

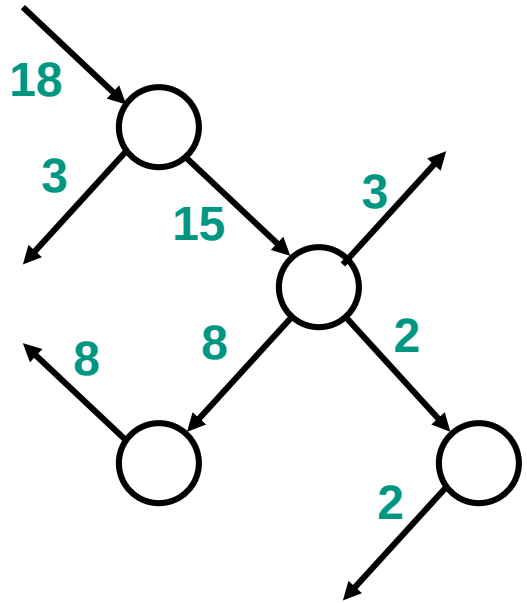
- **Gewichtete Graphen**:
  → dienen zur **Modellierung** von:
  - Netzwerkflüssen,
  - Transportprozessen, und
  - Planungsstrategien

Gewichtete Graphen

Beispiele: Gewichtete Graphen

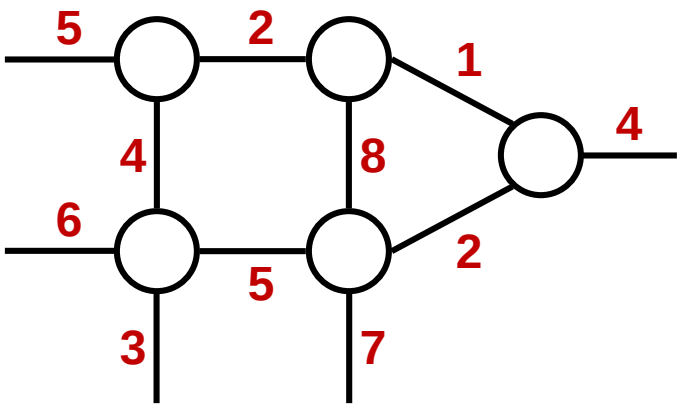
Netzwerkfluss

Gewicht: Durchsatz



Transportprozess

Gewicht: Entfernung



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Gewichtete Graphen

Beispiel: **Planungsstrategie**

- **Produktionsabläufe** sind mit **gewichteten Graphen** modellierbar:
  - → die **gerichteten Kanten** werden als Arbeitsschritt aufgefasst
  - → als **Gewicht** wird die jeweils benötigte Dauer verwendet

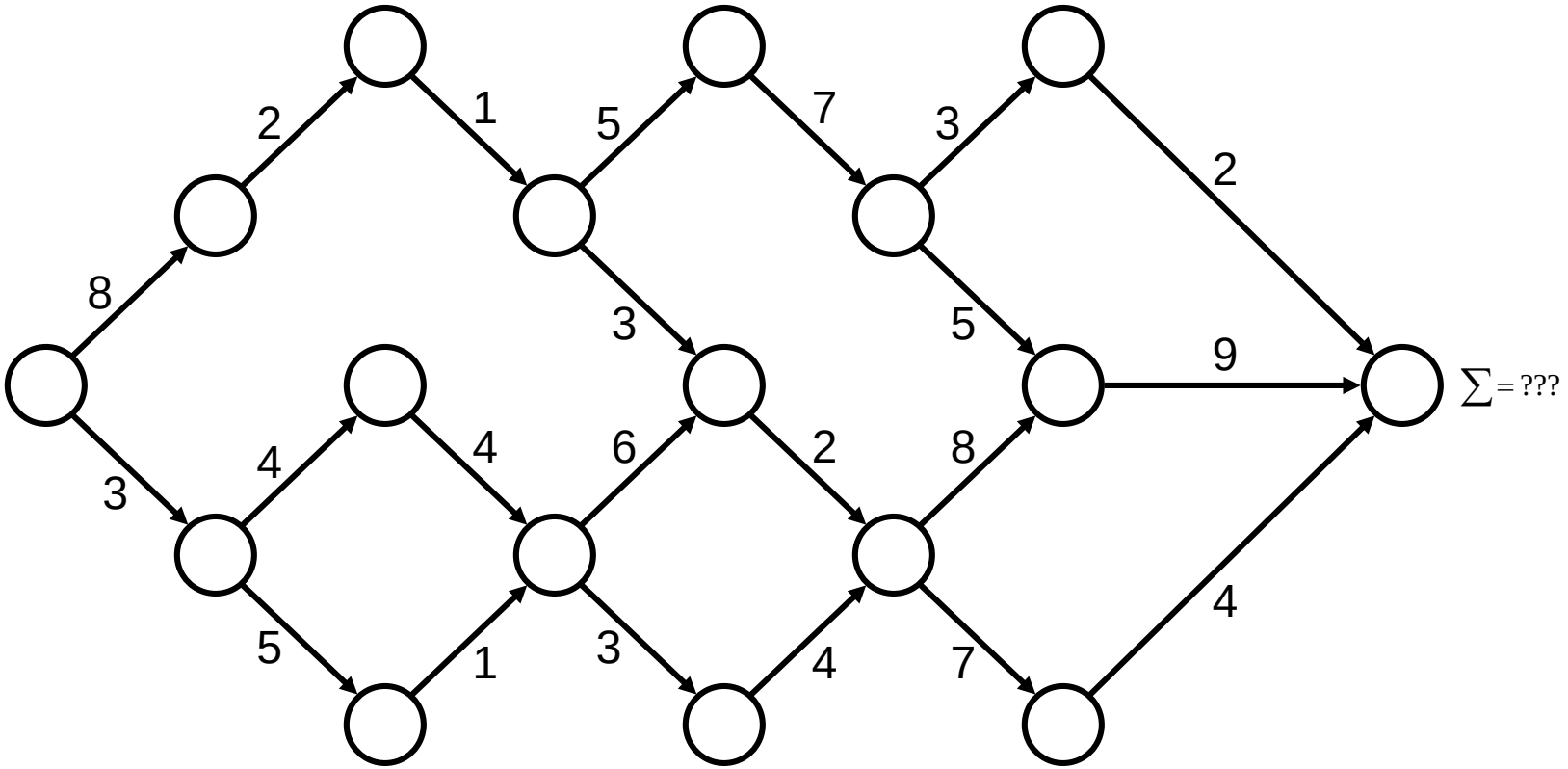
- mehrere ankommende **Kanten** an **einem Knoten** markieren
  - → **Arbeitsschritte**, die **vorher abgearbeitet sein müssen**, bevor die Arbeitsschritte der abgehenden Kanten begonnen werden können

- **Also:** **Knoten** sind **Produktionszustände**
  - → für deren Erreichen ist **minimale Arbeitsdauer** zu berechnen

- **Gesucht:** die **Dauer** des **kompletten Produktionsablaufs**

Gewichtete Graphen

Beispiel: **Planungsstrategie**



Gewichtete Graphen

Beispiel: **Planungsstrategie**

Vorgehensweise:

→ **Berechnung der Dauer des kompletten Produktionsablaufs**

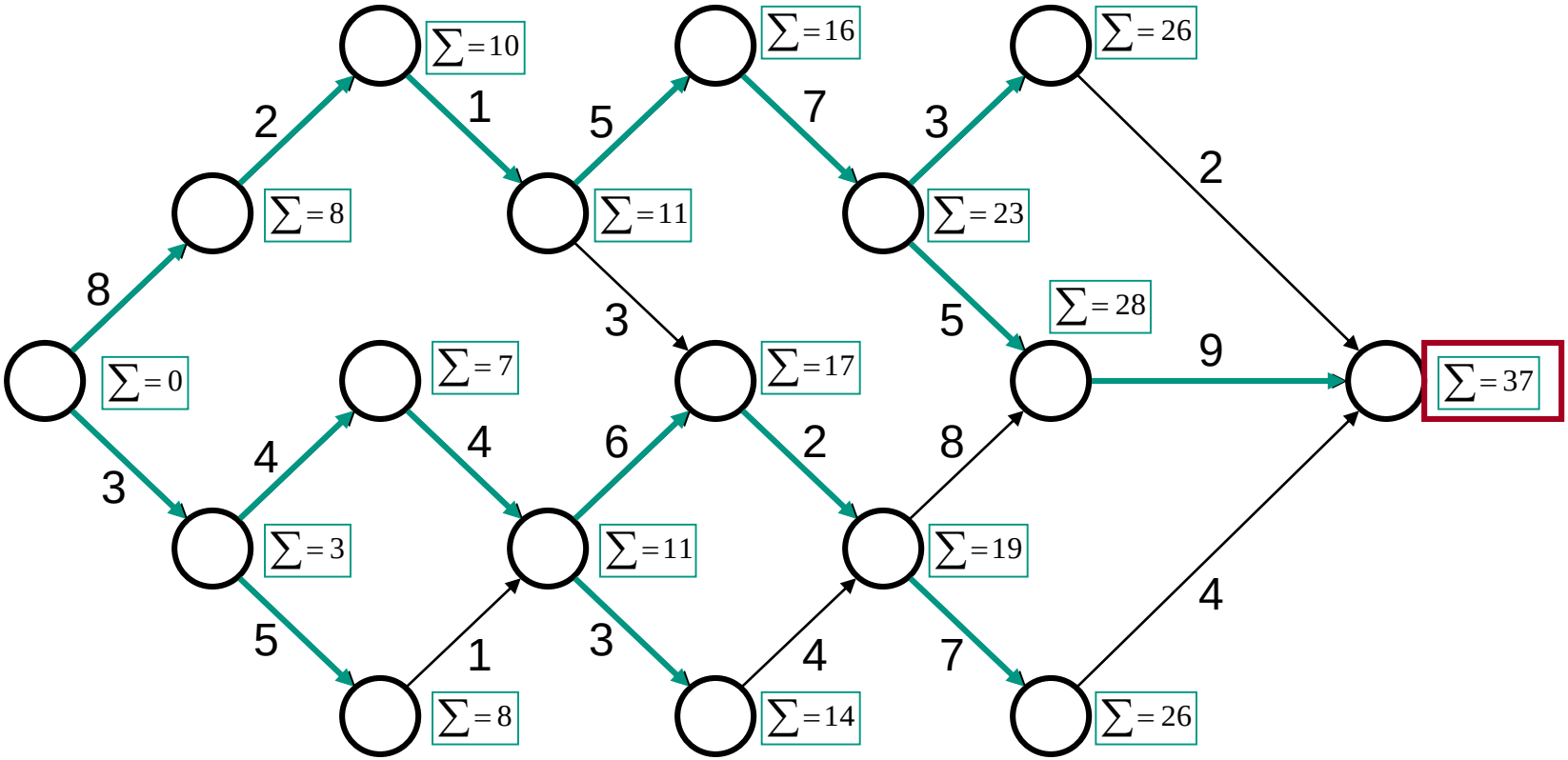
- zur Lösung des Problems berechnet man jeweils das **Maximum** der **Gewichtssummen** sämtlicher Wege zu einem Knoten
- die **maximale Summe** steht für die **Gesamtzeit** des Auftrags
- **Optimalerweise:**

  → man wählt die **Knotenreihenfolge** bzw. **Kantenfolge** so, dass die **Gewichtsummen** der **Vorgängerknoten** schon berechnet sind
- Die Wege mit **maximalen Gewichtsummen** zum Endknoten ergeben einen (maximal) **aufspannenden Graphen**

KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023

Planungsstrategien

Beispiel: **Planungsstrategie**



KIT – Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV) | © 2023