Klausur im SS2017
Klausur Digitaltechnik

Institut für Technik der Informationsverarbeitung – ITIV
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

Klausur Digitaltechnik
Datum: 04.09.2017
Name:
Matr. Nr.:
ID:

Hörsaal:
Platz:

Hinweise zur Klausur

Hilfsmittel:

- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt..
- Verwenden Sie zum Bearbeiten der Aufgaben nur dokumentenechte Schreibgeräte – keinen Bleistift, keine Rotstifte!
- Alle nicht genannten Hilfsmittel sind untersagt. Dies beinhaltet jegliche Kommunikation mit anderen Personen sowie die Benutzung eines Taschenrechners.

Klausurdauer:
Die Prüfungsdauer für die Klausur beträgt 120 Minuten.

Klausurunterlagen:
Die Klausurunterlagen bestehen aus insgesamt 31 Seiten Aufgabenblättern (inklusive dieses Titelblatt, 8 Aufgabenblöcke und 1 zusätzliches Lösungsblatt) und 3 Seiten Formelsammlung. **Bitte prüfen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben auf jeder Seite oben Ihre Matrikelnummer sowie Ihre ID und zusätzlich Ihren Namen auf der ersten Seite.** Falls Sie zusätzliche Blätter zur Lösung der Aufgaben benötigen, fragen Sie nach zusätzlichem Lösungspapier bei der Aufsicht. Vermeiden Sie generell das Beschreiben der Rückseiten. Die Verwendung von eigenen Blättern ist nicht erlaubt. Geben Sie zu jeder Aufgabe ein detaillierten Rechenweg an. Lösungen ohne Rechenweg können trotz richtigem Ergebnis zu Punktabzug führen.

Klausurabgabe:
In den letzten 30 Minuten der Klausur ist eine vorzeitige Abgabe der Klausur nicht möglich. Am Ende der Klausur bleiben Sie bitte sitzen. Alle Aufgaben- und Lösungsblätter sowie dieses Deckblatt sind in den ausgehändigten Umschläge abzugeben. Diese werden von der Aufsicht eingesammelt.

		Seite	≈ Pkt. [%]	Punkte
Aufgabe 1:	Allgemeine Fragen	2	12	**15**
Aufgabe 2:	Zahlensysteme	5	12	**15**
Aufgabe 3:	Boolsche Algebra	8	12	**15**
Aufgabe 4:	Minimierung	12	12	**14**
Aufgabe 5:	Mengen, Relationen und Graphen	16	11	**13**
Aufgabe 6:	Optimale Codes	18	12	**15**
Aufgabe 7:	Automaten	23	14	**17**
Aufgabe 8:	CMOS und Gatter	27	10	**12**
				$\sum$ **116**

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen

15

Aufgabe 1.1: Codierung

A) Geben Sie den Wertebereich einer 14-stelligen Hexadezimalzahl im Dezimalsystem unter der Annahme an, dass es sich um eine vorzeichenlose Hexadezimalzahl handelt.

1

$0 \leq x \leq 16^{14} - 1$

+0,5P. für 16 hoch 14
+0,5P. für "0" und -1

B) Sender und Empfänger haben sich auf vier-Bit Codewortlänge mit einer minimalen Hammingdistanz von zwei geeinigt. Eins der gültigen Codeworte ist das Codewort 0101. Markieren Sie im nachfolgenden Bitstream die eindeutig falsch übertragenen Codewörter und geben Sie an wie viele insgesamt falsch übertragen wurden?

1

Empfangener Bitstream: 1111 0000 0110 0001 0111 0101 1010 0000 1001 1101 0101

falsch übertragene Codewörter: 0001 0111 1101
insgesamt 3 falsch übertragene Codewörter

1P für alles richtig (+Angabe)
-0,5P keine Angabe o. ein Fehler

C) Nennen Sie ein Verfahren, dass die gleiche Fehlerkorrektur- bzw. Fehlererkennungseigenschaft hat wie das genannte Verfahren in Aufgabe 1.1 B), jedoch weniger Overhead erzeugt.

1

Paritätsbit

+1P für korrekt

D) Nun haben sich Sender und Empfänger auf fünf-Bit Codewortlänge mit einer minimalen Hammingdistanz von drei geeinigt. Die gültigen Codewörter sind 11000, 00110 und 11111.

2

Der Empfänger hat folgenden Bitstream empfangen: 11011 01000 10110 00111 01000
Geben Sie den am wahrscheinlichsten gesendeten Bitstream an.

11111 11000 00110 00110 11000

+1P für mind. 3 richtige CWs;
+1P für alle 5 CWs richtig

E) Wie viele gültige Codewörter können maximal bei einem 8-stelligen binärem Codewort existieren, wenn eine minimale Hammingdistanz von genau 2 vereinbart wurde und eins der gültigen Codewörter 0000 0000 ist?

2

1. gCW: 0000 0000 ; 2. gCW: 1111 1111
+ alle Kombinationen mit zwei 1er und sechs 0er
+ alle mit vier 1er und vier 0er, + alle mit sechs 1er und zwei 0er;

daraus folgt: $2^8 = 256$ Möglichkeiten, wobei genau die Hälfte keine gültigen CWs sind –> 256/2 = 128 gültige Codewörter

Alternativ: $N = \binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\binom{8}{6}+2(=\frac{8!}{4!(8-4)!}+2*\frac{8!}{2!(8-2)!}+2 = 70+2*28+2 = 128)$

+1P für 1.+2. gCW
+1P für Idee 2, 4, 6x1er o. Hälfte Weg
+1P für Gleichung o. Ergebnis

Aufgabe 1.2: Verschiedenes

A) Geben Sie für die in Tabelle 1.1 gegebenen Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.
Hinweis: Bei einer falschen Antwort gibt es Punktabzug. Die Aufgabe wird minimal mit 0 Punkten bewertet.

4

+0,5P pro richtige Antwort
-0,5P pro falsche Antwort

Aussagen	Wahr	F
Jede beliebige KNF kann in eine DNF umgewandelt werden.	x	
Bei der Addition zweier Stibitz-Dekaden muss zur Korrektur immer eine 3_D (0011_B) addiert oder subtrahiert werden.	x	
Die De Morgan Regel besagt, dass $\overline{a\&b} = a\overline{\vee}b$ ist.		
Bei einer Übertragung mittels Blocksicherung können in jedem Fall zwei Bitfehler korrigiert werden.		
Ein (9 aus 12)-Code besitzt genauso viele gültige Codewörter wie ein (3 aus 12)-Code.	x	
Mit einer Codierung, welche eine minimale Hammingdistanz von 7 aufweist, können bis zu 4 Fehler korrigiert werden.		
Ein entarteter Graph besitzt keine Kanten.	x	
Die Planarität eines Graphen bedeutet, dass man einen dualen Graphen zum Ursprungsgraphen konstruieren kann.	x	

Tabelle 1.1: Multiple Choice

B) Wie heißt der FlipFlop, der die charakteristische Gleichung $q_k^{v+1} = D^v$ besitzt? **1**

D-FlipFlop

+1P für "D"

C) Wird der Informationsgehalt eines Zeichen größer oder kleiner, je kleiner die Auftrittswahrscheinlichkeit ist? Begründen Sie Ihre Antwort anhand einer Formel. **1**

$H_e = ld\frac{1}{p}$

+0,5P für Formel
+0,5P für IG steigt

daraus folgt, der Informationsgehalt steigt, je kleiner die Auftrittswahrscheinlichkeit wird

D) Vereinfachen Sie den boolischen Ausdruck $\bar{a}b\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee bc$ soweit wie möglich.
Anmerkung: das Symmetriediagramm kann zur Hilfe hinzugezogen werden **2**

$\bar{a}b \vee ac$

+2P für korrektes Ergebnis
-1P für einfachen Fehler

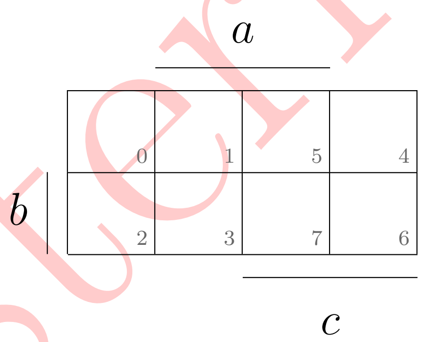


Abbildung 1.1: Symmetriediegramm als Hilfe

15

Aufgabe 2: Zahlensysteme

Aufgabe 2.1: Umrechnung von Zahlensystemen

6

A) Vervollständigen Sie die Tabelle 2.1, indem Sie die offenen Felder durch die entsprechende Konvertierung ergänzen.

-0.5 wenn ein Fehler, 0 Punkte wenn systematisch falsch

Dezimal	Binär	Oktal	Hexade
1111_D	$0100\ 0101\ 0111_B$	2127_O	457_H
969_D	$0011\ 1100\ 1001_B$	1711_O	$3C9$
255_D	$1111\ 1111_B$	377_O	FF_H
1337_D	010100111001_B	2471_O	539_H

Tabelle 2.1: Umrechnung von Zahlensystemen

2

B) Wandeln Sie die Zahl 55_7 (Basis 7) in das Zahlensystem mit der Basis 5 um. Geben Sie dabei die für die Umrechnung nötigen Zwischenschritte an.

-0,5 wenn ein Rechenfehler, 0 Punkte wenn systematisch falsch

$$55_{11} \widehat{=} 40_D \tag{2.1}$$
$$40 : 5 = 8\ R0 \tag{2.2}$$
$$8 : 5 = 1\ R3 \tag{2.3}$$
$$1 : 5 = 0\ R1 \tag{2.4}$$
$$55_7 \widehat{=} 130_5 \tag{2.5}$$

Aufgabe 2.2: Fließkommazahl

Abbildung 2.1 zeigt eine Darstellung von Fließkommazahlen mit 16 Bit. Das höchstwertige Bit stellt das Vorzeichen V dar, die nachfolgenden acht Bits den Exponenten E und die niederwertigsten sieben Bits die Mantisse M.

V	E_7	E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Abbildung 2.1: 16bit Fließkommazahlenformat

A) Bestimmen Sie den betragsmäßig größten, sowie kleinsten Wert dieser Fließkommazahl. Hierbei soll der betragsmäßig kleinste Wert ungleich 0 sein. Vereinfachen Sie die Lösung soweit möglich. **4**

Betragsmäßig größter Wert:

M = $1111111_B \hat{=} 1{,}1111111_B => (2^9 - 1) * 2^{-7}$
E= $11111111_B \hat{=} 2^9 - 1 = 255 => 2^{255-127}$

$=> (2^9 - 1) * 2^{-7} * 2^{255-127} = (2^9 - 1) * 2^{121} = 511 * 2^{121}$

Betragsmäßig kleinster Wert:

M = $0000000_B \hat{=} 1{,}0000000_B => 1$
E = $00000000_B \hat{=} 0 => 2^{0-127} = 2^{-127}$
$=> 1 * 2^{-127}$

Alternativ:
Betragsmäßig größter Wert:

E = $11111111_B => M = 0 \hat{=} \infty$
M = 0000000_B

$=> \pm\infty$

Betragsmäßig kleinster Wert:

E = $00000000_B \hat{=} 0 => 2^{0-126} = 2^{-126}$
M = $0000001_B \hat{=} 0{,}0000001_B => 2^{-}7 \hat{=} 1/128$

$=> \pm 2^{-126} * 2^{-7} = 2^{-133}$

+0,5P für M = 1111111_B
+0,5P für $(2^9 - 1) * 2^{-7}$ bzw. $1{,}1111111_B$
+0,5P für E= 11111111_B
+0,5P für $(2^9 - 1) * 2^{121}$
+0,5P für richtiges Ergebnis
+0,5P für M = 0000000_B und 1
+0,5P für E = 00000000 2^{-127}
+0,5P für richtiges Ergebnis
Alternative 0 Punkte
Systematisch Falsch
-0,5 je Fehler

Aufgabe 2.3: Rechenoperationen

A) Geben Sie den Vorteil des Zweierkomplement gegenüber dem Einerkomplement an. **1**

Im Zweierkomplement existiert eine eindeutige Abbildung der 0. Dem entgegen besitzt das Einerkomplement zwei Abbildungen für die 0 (11...1 und 00...0).

B) Berechnen Sie mit Hilfe des Zweierkomplement folgende Aufgabe: **7 - 42**.
Geben Sie hierfür alle notwendigen Zwischenschritte an. **2**

$7_D = 000111_B$
$42_D = 101010_B$ => 010101_{1er} => 010110_{2er}

$$\begin{array}{r} (00)000111 \\ +(11)010110 \\ \hline (11)011101 \end{array}$$

+0,5P Umwandlung Zweierkomplement
+0,5P Berechnung im Zweierkomplement Richtig
+0,5P Negatives Ergebnis
+0,5P Betrag Berechnung richtig

Ergebnis ist negativ
Betrag ist:
$\overline{11011101} + 1 = 100011 \widehat{=} 35$
7 - 42 = -35

Aufgabe 3: Boolsche Algebra

15

A) Zeigen Sie mit Boolescher Algebra, dass Ausdruck A gleich Ausdruck B ist. Geben sie bei jeder Umformung das hierbei benutzte Gesetz an.
$A = (abc) \vee (a\bar{b}c) \vee \overline{(ab\bar{c})}$
$B = \bar{a} \vee \bar{b} \vee c$

3

	$(abc) \vee (a\bar{b}c) \vee \overline{(ab\bar{c})}$
De Morgansche Gesetz	$= (abc) \vee (a\bar{b}c) \vee \bar{a} \vee \bar{b} \vee c$
Komplementärgesetz	$= (ac) \vee \bar{a} \vee \bar{b} \vee c$
Distributivgesetz	$= ((a \vee \bar{a}) \wedge (c \vee \bar{a})) \vee \bar{b} \vee c$
Komplementärgesetz	$= ((1) \wedge (c \vee \bar{a})) \vee \bar{b} \vee c$
Neutralitätsgesetz	$= (c \vee \bar{a}) \vee \bar{b} \vee c$
Assoziativgesetz	$= c \vee \bar{a} \vee \bar{b} \vee c$
Kommutativgesetze	$= \bar{a} \vee \bar{b} \vee c \vee c$
Idempotenzgesetz	$= \bar{a} \vee \bar{b} \vee c$

-1p pro Fehler
-0.5P bei fehlendem Gesetz
Kommutativgesetz darf auch nicht vergessen werden

B) Definieren Sie den Begriff Axiomensystem.

1

Verknüpfungsgebilde, dessen einzelne Aussagen nicht mathematisch ableitbar bzw. beweisbar sind, aus dem aber alle weiteren (algebraischen) Regeln ableitbar sind

0.5P für einzelne (grundlegende Aussagen) Aussagen
0.5P für Ableiten der Regeln

Gegeben sei folgende Wahrheitstabelle der Funktion $X(c, b, a)$:

a	b	c	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabelle 3.1: Funktion $X(c, b, a)$

C) Leiten Sie aus der Wahrheitstabelle 3.1 die dazugehörige KNF für $X(c, b, a)$ ab. **2**

$(a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)$

-1P für jeden Fehler, bis 0P erreicht

D) Geben Sie eine konjunktive Minimalform der Funktion $X(c, b, a)$ an. **1**

$X = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{a} \vee c)$

0.5P pro korrektem Term
FF werden nicht beachtet

E) Gegeben sei folgende boolesche Funktion: $Y = (bcd) \vee (\bar{a}b\bar{c}) \vee (ac\bar{d}) \vee (\bar{a}\bar{b}d) \vee (a\bar{b}\bar{c}\bar{d})$ Entwickeln Sie den Ausdruck Y mit Hilfe des Booleschen Entwicklungssatzes in der Reihenfolge d, c, b, a. Geben Sie alle Zwischenergebnisse an und tragen sie das Ergebnis in die unten stehende Tabelle 3.2 ein. Eine Umformung des Ausdrucks ist nicht gestattet.

4

(d, c, b, a)	Y	(d, c, b, a)	Y
$(0, 0, 0, 0)$	0	$(1, 0, 0, 0)$	1
$(0, 0, 0, 1)$	1	$(1, 0, 0, 1)$	0
$(0, 0, 1, 0)$	1	$(1, 0, 1, 0)$	1
$(0, 0, 1, 1)$	0	$(1, 0, 1, 1)$	0
$(0, 1, 0, 0)$	0	$(1, 1, 0, 0)$	1
$(0, 1, 0, 1)$	1	$(1, 1, 0, 1)$	0
$(0, 1, 1, 0)$	0	$(1, 1, 1, 0)$	1
$(0, 1, 1, 1)$	1	$(1, 1, 1, 1)$	1

Tabelle 3.2: Ergebnis des Entwicklungssatzes

$$Y(1,c,b,a) = (bc1) \lor (\bar{a}b\bar{c}) \lor (ac0) \lor (\bar{a}\bar{b}1) \lor (a\bar{b}\bar{c}) = (bc) \lor (\bar{a}b\bar{c}) \lor (\bar{a}\bar{b})$$
$$Y(0,c,b,a) = (bc0) \lor (\bar{a}b\bar{c}) \lor (ac1) \lor (\bar{a}\bar{b}0) \lor (a\bar{b}\bar{c}) = (\bar{a}b\bar{c}) \lor (ac) \lor (a\bar{b}\bar{c})$$

$$Y(1,1,b,a) = (b1) \lor (\bar{a}b0) \lor (\bar{a}\bar{b}) = (b) \lor (\bar{a}\bar{b})$$
$$Y(1,0,b,a) = (b0) \lor (\bar{a}b1) \lor (\bar{a}\bar{b}) = (\bar{a}b) \lor (\bar{a}\bar{b})$$
$$Y(0,1,b,a) = (\bar{a}b0) \lor (a1) \lor (a\bar{b}0) = a$$
$$Y(0,0,b,a) = (\bar{a}b1) \lor (a0) \lor (a\bar{b}1) = (\bar{a}b) \lor (a\bar{b})$$

$$Y(1,1,1,a) = (1) \lor (\bar{a}0) = 1$$
$$Y(1,1,0,a) = (0) \lor (\bar{a}1) = \bar{a}$$
$$Y(1,0,1,a) = (\bar{a}1) \lor (\bar{a}0) = \bar{a}$$
$$Y(1,0,0,a) = (\bar{a}0) \lor (\bar{a}1) = \bar{a}$$
$$Y(0,1,1,a) = a$$
$$Y(0,1,0,a) = a$$
$$Y(0,0,1,a) = (\bar{a}1) \lor (a0) = \bar{a}$$
$$Y(0,0,0,a) = (\bar{a}0) \lor (a1) = a$$

$$Y(1,1,1,1) = 1 \; Y(1,1,1,0) = 1$$
$$Y(1,1,0,1) = 0 \; Y(1,1,0,0) = 1$$
$$Y(1,0,1,1) = 0 \; Y(1,0,1,0) = 1$$
$$Y(1,0,0,1) = 0 \; Y(1,0,0,0) = 1$$
$$Y(0,1,1,1) = 1 \; Y(0,1,1,0) = 0$$
$$Y(0,1,0,1) = 1 \; Y(0,1,0,0) = 0$$
$$Y(0,0,1,1) = 0 \; Y(0,0,1,0) = 1$$
$$Y(0,0,0,1) = 1 \; Y(0,0,0,0) = 0$$

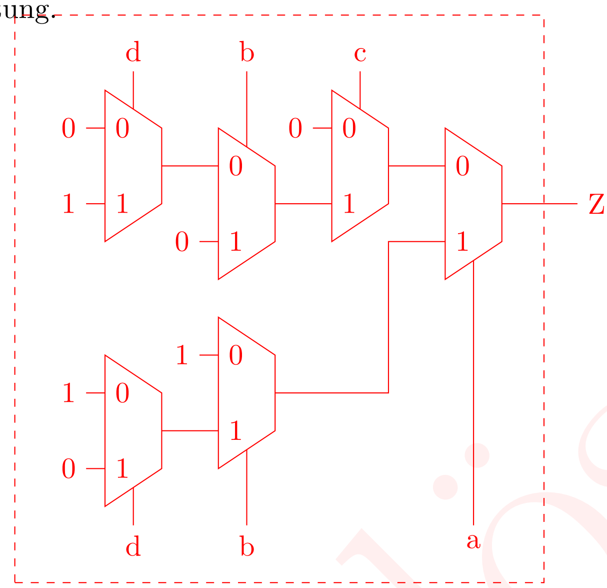
+1P pro Literal
-0,5P pro Fehler im Entwicklungssatz, bis 0P erreicht (auch mehrere Fehler in einer Zeile möglich!)
0P wenn nur die Tabelle ausgefüllt wurde
0P wenn die Tabelle nicht ausgefüllt wurde

F) Gegeben sei die folgende Funktion

4

$$Z(a,b,c,d) = \bar{a}(\bar{c}(0) \vee c(\bar{b}(\bar{d}(0) \vee d(1)) \vee b(0))) \vee a(\bar{b}(1) \vee b(\bar{d}(1) \vee d(0)))$$

Die bereits entwickelte Funktion z soll für eine Field Programmable Gate Array (FPGA) Realisierung mit 2:1 Multiplexern umgesetzt werden. Die Eingangsliterale a, b, c, d sollen dabei ausschließlich als Steuersignale genutzt werden. Zeichnen Sie die minimale Multiplexerschaltung.



1P je korrekter Stufe a,b,c,d

Aufgabe 4: Minimierung

Aufgabe 4.1: Symmetriediagramme

y (Variablen: a oben über Spalten 2–3; b links neben Zeilen 2–3; d rechts neben Zeilen 3–4; c unten unter Spalten 3–4)

0 $_{0}$	1 $_{1}$	1 $_{5}$	- $_{4}$
0 $_{2}$	1 $_{3}$	- $_{7}$	- $_{6}$
0 $_{10}$	- $_{11}$	0 $_{15}$	0 $_{14}$
1 $_{8}$	- $_{9}$	1 $_{13}$	1 $_{12}$

Abbildung 4.1: Symmetriediegramm einer Schaltfunktion

A) Gegeben sei das Symmetriediagramm aus Abbildung 4.1. Freistellen sollen zunächst zu “0” gesetzt werden. Geben Sie für die dargestellte Schaltfunktion die **disjunktive** Normalform (DNF) an. **3**

$y = (a \wedge \overline{b} \wedge \overline{c} \wedge \overline{d}) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge c \wedge \overline{d}) \vee (a \wedge b \wedge \overline{c} \wedge \overline{d}) \vee$
$(\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge \overline{c} \wedge d) \vee (a \wedge \overline{b} \wedge c \wedge d) \vee (\overline{a} \wedge \overline{b} \wedge c \wedge d)$

-0,5P pro falschem/fehlendem Term

B) Legen Sie nun die Freistellen so fest, dass die Schaltfunktion aus Abbildung 4.1 optimal minimiert werden kann und bestimmen sie in diesem Fall eine **konjunktive** Minimalform (KMF). Geben Sie außerdem an, welche Terme der KMF zu den Kernen zählen. **2**

KMF: $y = (a \vee d) \wedge (\overline{b} \vee \overline{d})$

Alle Terme der KMF sind Kerne:

-1P für jeden fehlenden/falschen Term und eine fehlende Aussage zu den Kernen.

Aufgabe 4.2: Nelson/Petrick Verfahren

A) Welche Bedeutung haben die Präsenzvariablen p_k im Petrickausdruck? **1**

Eine Präsenzvariable p_k gibt an, ob der Primimplikant w_k in einer Lösung verwendet wird ($p_k = 1$) oder nicht ($p_k = 0$).

B) Gegeben ist die folgende Überdeckungstabelle (Tabelle 4.1). Bei welchen Zeilen handelt es sich um Kerne der Schaltfunktion? Geben sie die jeweiligen Präsenzvariablen an. **2**

p_i/E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
p_1	X					X		X
p_2			X				X	
p_3		X						
p_4			X	X			X	
p_5		X			X		X	X
p_6						X		X
p_7		X		X				

Tabelle 4.1: Überdeckungstabelle für den Petrickausdruck

p_1 und p_5 sind Kerne

-1P pro falschem/fehlendem Kern

C) Im Folgenden ist eine Überdeckungstabelle gegeben, welche bereits durch Zeilen- und Spaltendominanzregeln optimiert wurde. Da auf diesem Weg noch kein eindeutiges Ergebnis erreicht werden konnte, muss nun eine Fallunterscheidung durchgeführt werden um auf ein optimales Ergebnis zu kommen. Führen sie eine solche Fallunterscheidung auf Spalte E_4 durch, bis sie zu den entsprechenden optimalen Lösungen gelangen. Für ihre Lösung stehen ihnen zwei Kopien der ursprünglichen Tabelle in 4.2 und 4.4 zur Verfügung. Geben sie in beiden Fällen zunächst an, welche Spalten durch die Auswahl bei der Fallunterscheidung jeweils gestrichen werden können. Füllen sie anschließend die Tabelle mit den nun möglichen Streichungen aus und geben sie zuletzt die erhaltene Lösung in Form der ausgewählten Präsenzvariablen an.

6

Fall 1:

p_i/E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
p_1				X	X
p_2	X	X			
p_3			X		X
p_4		X	X		
p_5	X			X	

Tabelle 4.2: Überdeckungstabelle für den Petrickausdruck

Streichbare Spalten:

E_4, E_5

Dominierende Zeile	**Dominierte Zeile**	**gestrichene Zeile**
p_2	p_5	p_5
p_4	p_3	p_3

Tabelle 4.3: Mögliche Streichungen nach Fallunterscheidung in Spalte E_4

Ausgewählte Präsenzvariablen:

p_1, p_2, p_4

Fall 2:

p_i/E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
p_1				X	X
p_2	X	X			
p_3			X		X
p_4		X	X		
p_5	X			X	

Tabelle 4.4: Überdeckungstabelle für den Petrickausdruck

Streichbare Spalten:

E_4, E_1

Dominierende Zeile	Dominierte Zeile	gestrichene Zeile
p_3	p_1	p_1
p_4/p_2	p_2/p_4	p_2/p_4

Tabelle 4.5: Mögliche Streichungen nach alternativer Fallunterscheidung in Spalte E_4

Ausgewählte Präsenzvariablen:

p_2/p_4, p_3, p_5

+1 jeweils (pro Fall) für die Korrekt gestrichene Spalte, +1 jeweils für eine vollständige Tabelle zur Zeilenüberdeckung, +1 jeweils für die erhaltenen Präsenzvariablen

13

Aufgabe 5: Mengen, Relationen und Graphen

Aufgabe 5.1: Mengen

Gegeben sei die Grundmenge $G = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 9, a, b\}$. Auf dieser Menge seien zwei weitere Mengen A und B gegeben:

$$A = \left\{x | x \in G, x = a \text{ oder x ist Zahl und } (x-2)^2 = 4 \text{ oder x ist Zahl und } x^3 = 27\right\}$$
$$B = \{a, b, 0, 4\} \tag{5.1}$$

A) Wie lauten die Elemente x der Menge A? **1**

a, 4, 3

-0,5P pro falschem/fehlendem Element, nicht weniger als 0P

B) Bilden sie die Potenzmenge P(B). **3**

P(B) = {{}, {a}, {b}, {0}, {4}, {a,b}, {a,0}, {a,4}, {b,0}, {b,4}, {0,4}, {a,b,0}, {a,b,4}, {a,0,4}, {b,0,4}, {a,b,0,4}}

-0,5P pro falschem/fehlendem Element, nicht weniger als 0P

C) Bilden sie das kartesische Produkt der Mengen $R = \{0, 1, a\}$ und $S = \{a, b, c, d\}$. **2**

R x S = {(0,a), (0,b), (0,c), (0,d), (1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (a,a), (a,b), (a,c), (a,d)}

-0,5P pro falschem/fehlendem Element, nicht weniger als 0P

D) Bilden sie bezüglich der Grundmenge $T = \{0, 1, 2, 3, a, b, c, d, e, f\}$ das Komplement C_T $(R \cup S)$. **2**

C_T $(R \cup S)$ = C_T ({0, 1, a, b, c}) = {2, 3, e, f}

-0,5P pro falschem/fehlendem Element, ggf. Folgefehler aus $R \cup S$ beachten

Aufgabe 5.2: Graphendarstellung von Relationen

Gegeben sei die Graphendarstellung G einer Relation in Abbildung 5.1.

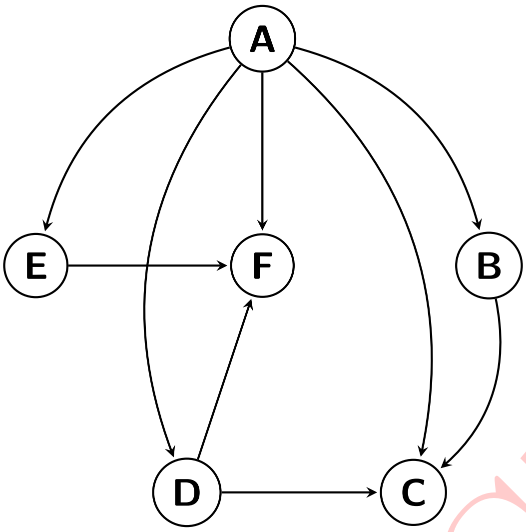


Abbildung 5.1: Graph G

A) Welche Eigenschaften einer Relation werden im Graphen G dargestellt? **2**

Transitivität
Antisymmetrie

je 1 Punkt

B) Ergänzen die den Graphen in 5.1 so, dass die Relation reflexiv wird. Benennen Sie die Relation, die nun von G dargestellt wird. **2**

Ordnungsrelation

je 1 Punkt
In der Abbildung muss pro Knoten eine Kante auf sich selbst eingezeichnet werden.

C) Ist der in der vorhergehenden Aufgabe veränderte Graph ein Baum? Begründen Sie Ihre Antwort. **1**

Nein, ist nicht zyklenfrei.

+1P nur für korrekte Antwort mit Begründung.

Aufgabe 6: Optimale Codes

15

Die Bibliothek Waldstadt hat eine Studie gemacht, um eine effizientere Codierung der Bücher herzustellen. Die gesammelten Statistiken über die Anzahl der ausgeliehene Bücher pro Monat wurden in eine Tabelle eingetragen und damit ein Codierbaum entwickelt (s. Abb. 6.1). Somit haben die Lieblingsbücher eine kürzere Codierung und der benötigte Speicher ist kleiner.

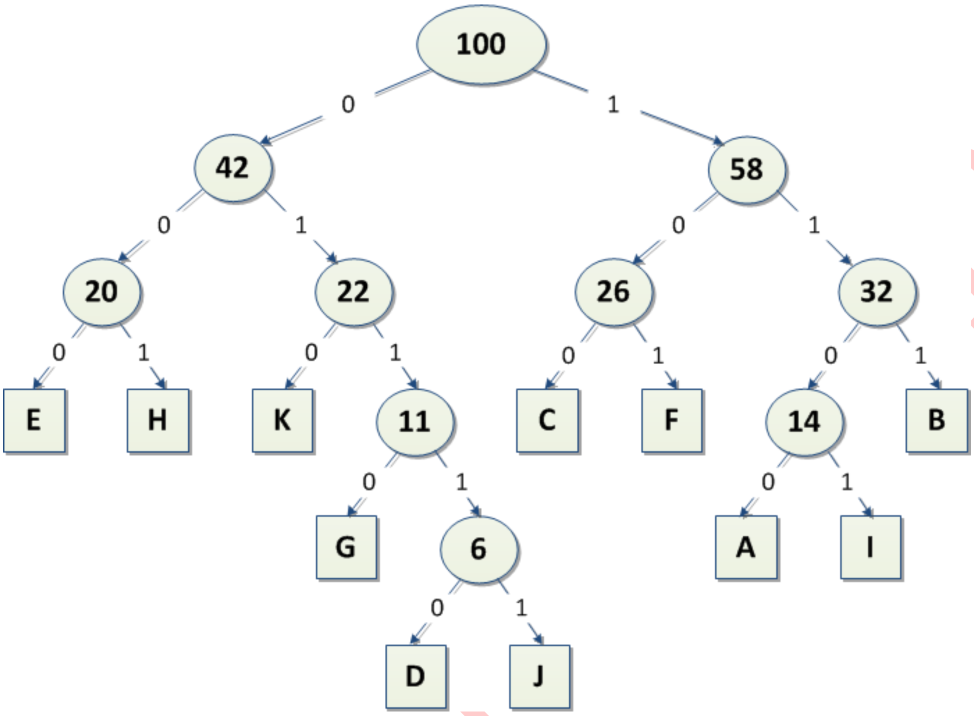


Abbildung 6.1: Kodierbaum für die Bibliothek Waldstadt

A) Füllen Sie die Spalte *Code* in der Tabelle 6.1 mithilfe des in der Abbildung 6.1 gezeigten Codierbaums aus. **2**

B) In der Vorlesung haben Sie mehrere Codierungsverfahren kennengelernt. Welches Verfahren kam hier zur Anwendung? Begründen Sie Ihre Antwort. **1**

Es handelt sich um eine Huffmann-Codierung. Begründung: Es werden immer die beiden Knoten mit der geringsten Auftrittshäufigkeit zusammengefasst.Bei Shannon-Fano wäre eine eindeutige Sortierreihenfolge in den Blättern zu erkennen.

0,5p Huffman
0,5p Begründung

C) Welche mittlere Codewortlänge ergibt sich für eine Codierung, falls alle Codewörter binär und mit gleicher Länge codiert werden. Geben Sie dafür die Berechnungsvorschrift sowie die ermittelte mittlere Codewortlänge an. **1**

$\bar{m} = \lceil \text{ld(11 Zeichen)} \rceil = 4 \text{ bits}$

0,5p ceiling(ld(11))
0,5p 4 bits

-0,5p je Fehler
Minimum 0 Punkte

Buch	Ausleihe pro Monat	Code
A	7/100	1100
B	18/100	111
C	12/100	100
D	3/100	01110
E	9/100	000
F	14/100	101
G	5/100	0110
H	11/100	001
I	7/100	1101
J	3/100	01111
K	11/100	010

Tabelle 6.1: Statistiken der Bibliothek Waldstadt

D) Geben Sie die Formel zur Berechnung der mittleren Codewortlänge für die Codierung in der Abbildung 6.1 an. Berechnen Sie anschließend diesen Wert soweit wie möglich.

2

$\bar{m} = \sum_{i=1}^{n} m(x_i)p(x_i) = (4\cdot 7 + 3\cdot 18 + 3\cdot 12 + 5\cdot 3 + 3\cdot 9 + 3\cdot 14 + 4\cdot 5 + 3\cdot 11 + 4\cdot 7 + 5\cdot 3 + 3\cdot 11)\frac{1}{100} = 331/100 = 3{,}31\,bits$

1p Formel
1p Berechnung (ohne endgültige Ergebnis noch akzeptabel)

E) Welche Länge hat die Historie der ausgeliehenen Bücher die im Mittel im Speicher abgelegt werden kann? Der Speicher hat eine Größe von 256 Bytes (die Angabe einer Formel ist ausreichend).

1

Mittlere Anzahl an gespeicherte ausgeliehene Bücher $= (256\,bytes \cdot 8\,bits)/\bar{m}$

F) Nach einer Testphase von einem Tag enthält der Speicher der Ausleihe bei der Bibliothek Waldstadt den folgenden Datenstrom: **1**

111110111110110000000010

Verwenden Sie den Kodierbaum in der Abbildung 6.1, um die ausgeliehene Bücher zu bestimmen und schreiben Sie hier Ihre Antwort:

111 1101 111 0110 000 000 010 = B,I,B,G,E,E,K

G) Erstellen Sie einen Codierbaum nach dem Shannon-Fanø-Verfahren für die Codierung der ausgeliehenen Bücher anhand der in Tabelle 6.1 gegebenen Statistik. **Verwenden Sie für die Herstellung des Baumes die nächste Seite und füllen Sie anschließend die Tabelle 6.2.** **6**
Konventionen:

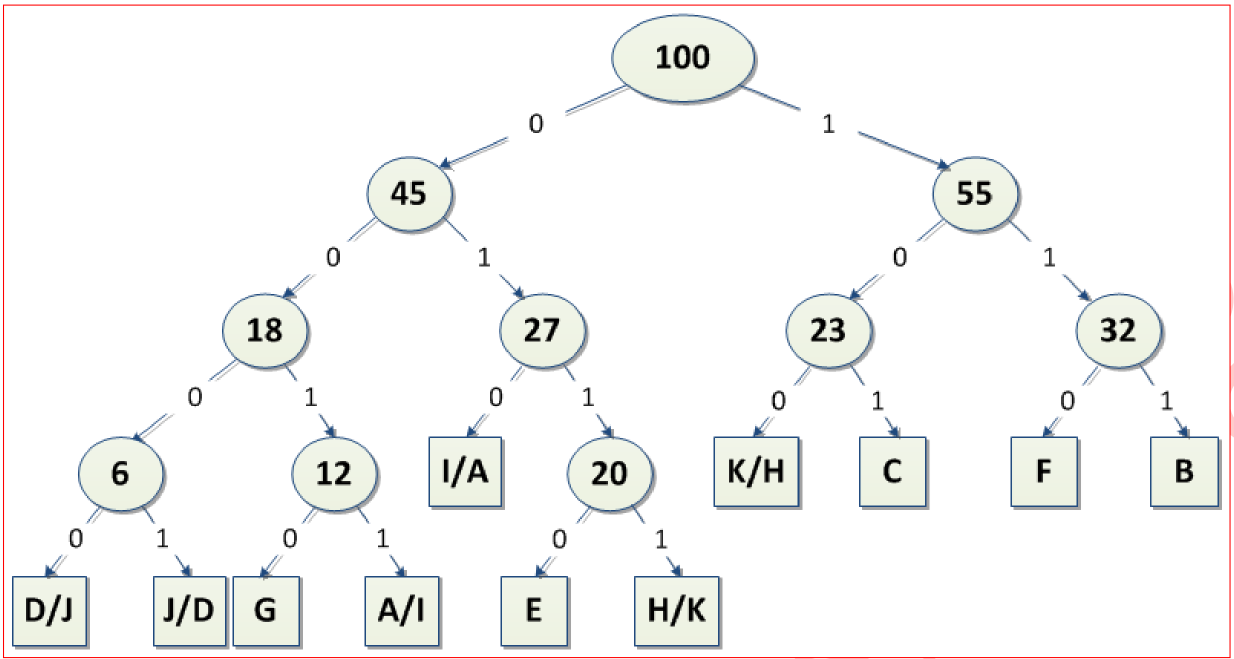
- Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein und der vollständige Codierbaum angegeben werden!
- Sortieren Sie die Elemente entsprechend den Auftrittshäufigkeiten aufsteigend von links nach rechts. Falls unterschiedliche Knoten dieselbe Auftrittshäufigkeiten haben, sortieren Sie diese alphabetisch von links nach rechts.
- Teilen Sie eine Menge immer so auf, dass die Differenz zwischen den Summen der Auftrittshäufigen der Teilmengen minimiert wird. Die kleinere Teilmenge an der linke Seite!
- Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baumes die „0“ zu, den rechten Ästen die „1“.

Buch	Code	Buch	Code
A	0011	G	0010
B	111	H	0111
C	101	I	010
D	0000	J	0001
E	0110	K	100
F	110		

Die Codewörter von A-I, D-J und H-K sind austauschbar. Das hängt vom Baum ab.

Tabelle 6.2: Statistiken der Bibliothek Waldstadt

Antwort Frage (G):



H) Welche der beiden Codierungen (Huffman vs. Shannon-Fanø) eignet sich am besten, um eine möglichst effiziente Speicherung der erfassten Daten zu erreichen? Begründen Sie Ihre Aussage! **1**

Huffman, da Huffman immer mindestens gleich gut zu Shannon-Fanø ist.

17

Aufgabe 7: Automaten

Aufgabe 7.1: Automaten

Der allgemeinste Fall eines Automaten ist der sogenannte Mealy Automat, dessen Ausgabefunktion durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$A_h^\nu = \lambda(E_g^\nu, S_k^\nu)$, wobei E_g^ν die Eingabe und S_k^ν den Zustand beschreiben.

A) Nennen Sie zwei weitere Automatentypen, erklären Sie jeweils den Unterschied zum Mealy-Automaten und geben Sie die allgemeine Gleichung der Ausgabefunktion an. 2

Moore-Automat: die Ausgabe ist nur vom Zustand abhängig: $A_h^\nu = \lambda(S_k^\nu)$

Medwedew-Automat: die Ausgabe und der Zustand sind gleich: $A_h^\nu = S_k^\nu$

+2P für korrekte Antwort

Es soll ein vereinfachter Leergutautomat für Flaschenpfandrückgabe genauer untersucht werden. Dieser Automat befindet sich typischerweise in Supermärkten und ermöglicht den Kunden, ihre zurückgegebene Pfänder in Geld umzuwandeln. Dieses Geld wird am Ende in Form eines Bons ausgedruckt, indem der Kunde auf einen entsprechenden Knopf drückt.

Eingänge:

- F: Eine Flasche wird in die Maschine eingeführt.
- TB: Der Taster zur Pfandbon-Ausgabe wird gedrückt.
- BG: Der ausgegebene Pfandbon wird vom Nutzer genommen.

Ausgänge:

- T: Transportband führt die Flasche zum inneren Container.
- Bo: Der Pfandbon wird ausgedruckt.

Zustände:

- S_{Start}: Der Automat befindet sich im initialen Zustand: keine Flaschen eingeführt.
- $S_{Betrieb}$: Eine eingeführte Flasche wird angenommen.
- S_{Ende}: Endzustand: die Pfandrückgabe ist abgeschlossen und auf das entnehmen des Bons wird gewartet.

Der betrachtete Automat soll die folgenden Eigenschaften aufweisen:

- Der Taster zur Pfandausgabe kann erst gedrückt werden, wenn der Automat im Betriebszustand ist.
- Falls eine Flasche im Betriebszustand eingeführt wird, wird der Bon-Taster ignoriert.
- Im Endzustand muss der ausgedruckte Bon vom Nutzer genommen werden, und somit kehrt der Automat zum initialen Zustand zurück. Wenn dies nicht geschieht, bleibt er im Endzustand.

B) Entwerfen Sie das Ablaufdiagramm des Automaten entsprechend der vorgegebenen Anforderungen. Als Ausgangsvektor benutzen Sie die binäre Darstellung $Y = (T, Bo)$. Verwenden Sie für die Zustandsübergänge nur die relevanten Eingangsvariablen. 7
Nutzen Sie die in Abbildung 7.1 vorgegebene Diagramm-Struktur.

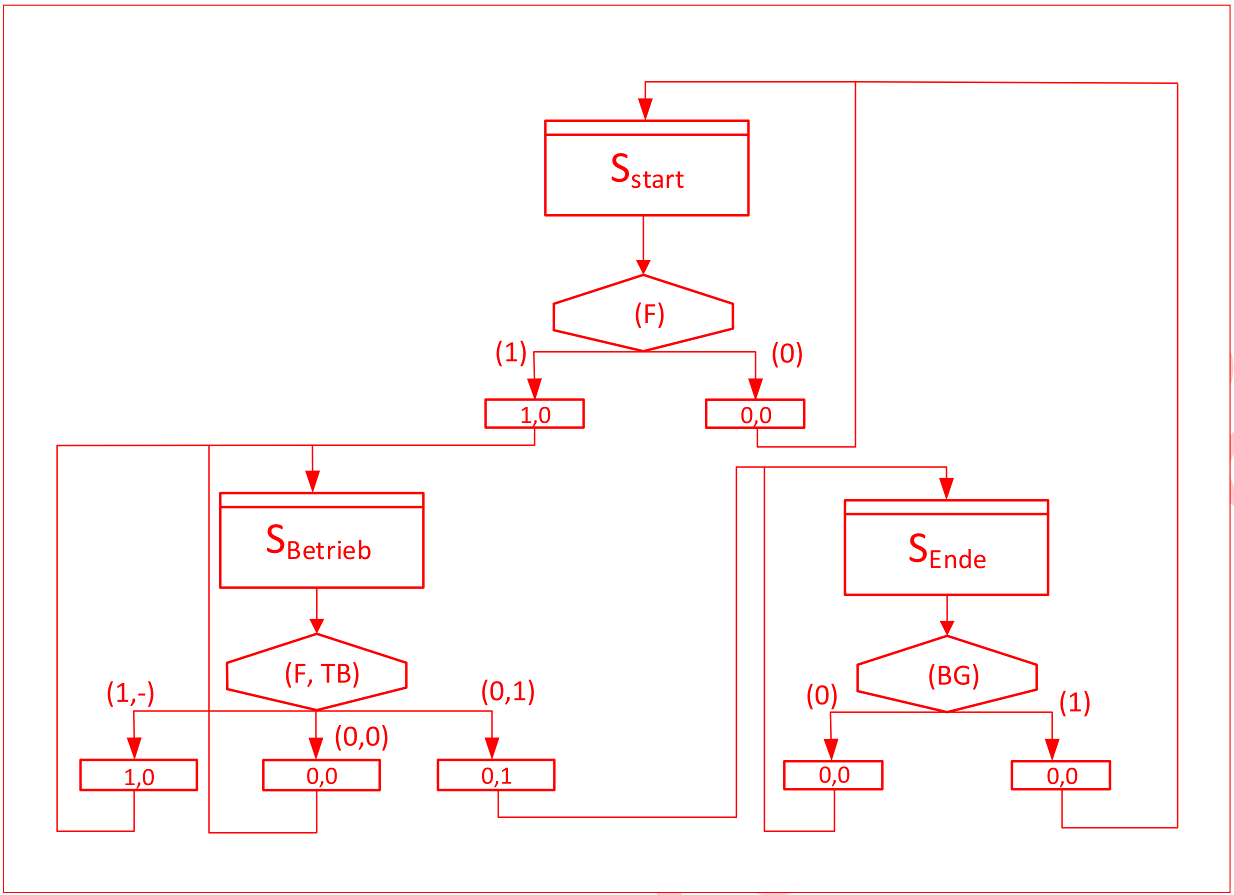


Abbildung 7.1: Ablaufdiagramm des vereinfachten Leergutautomaten

+1P für alle 3 Namen der Zustände, +0,5P für jede richtige Abfrage der Eingangsvariablen für S_{Start} und S_{End}, und +1P für $S_{Betrieb}$, +0.5P für alle richtige Ausgaben pro Zustand (inklusive Eingangswerte) für S_{Start} und S_{End}, und +1P für $S_{Betrieb}$, +0,5P für richtige Übergänge von den zuständen für S_{Start} und S_{End}, und +1P für $S_{Betrieb}$

C) Welchen Typ hat der entworfene Automat? Begründen Sie Ihre Antwort **1**

Mealy Automat, da die Ausgabe vom Zustand und von der Eingabe abhängig ist.

+1P für korrekte Antwort mit Begründung

Aufgabe 7.2: Realisierung von Automaten mit FlipFlops

A) Der Zustandsautomat aus Tabelle 7.1 soll mit einem *T-FlipFlop* (mit dem Eingang t_0) für das erste Bit S_0 und einem *RS-FlipFlop* (mit den Eingängen r_1 und s_1) für das zweite Bit S_1 realisiert werden. **3**
Ergänzen Sie in der Ablauftabelle die fehlenden Ansteuerbits für die Eingänge t_0, r_1 und s_1 der FlipFlops. Verwenden Sie nach Möglichkeit "don't care" Stellen.

+1P für korrektes T-FlipFlop (t_0), +2P für korrektes RS-Flipflop (r_1 und s_1), -0,5P pro Fehler

Zustand	**Eingabe**	**Folgezustand**	**FlipFlop Ansteuerur**		
$S^v = (S_0^v, S_1^v)$	$E^v = (E_0^v, E_1^v)$	S^{v+1}	t_0	r_1	s_1
0,0	0,0	0,0	0	-	0
	0,1	0,1	0	0	1
	1,0	1,1	1	0	1
	1,1	0,0	0	-	0
0,1	0,0	0,0	0	1	0
	0,1	0,1	0	0	-
	1,0	0,1	0	0	-
	1,1	1,0	1	1	0
1,0	0,0	1,0	0	-	0
	0,1	0,0	1	-	0
	1,0	0,0	1	-	0
	1,1	1,1	0	0	1
1,1	0,0	1,1	0	0	-
	0,1	1,0	0	1	0
	1,0	0,1	1	0	-
	1,1	1,1	0	0	-

Tabelle 7.1: Ablauftabelle eines unbekannten Zustandsautomaten

B) Die Ansteuerfunktionen für die FlipFlops sollen nun minimiert werden. Geben Sie mit Hilfe der in Abbildung 7.2 vorgegebenen Symmetriediagrammen jeweils eine minimale Ansteuerfunktion für die beiden Eingänge t_0 und s_1 an. **4**

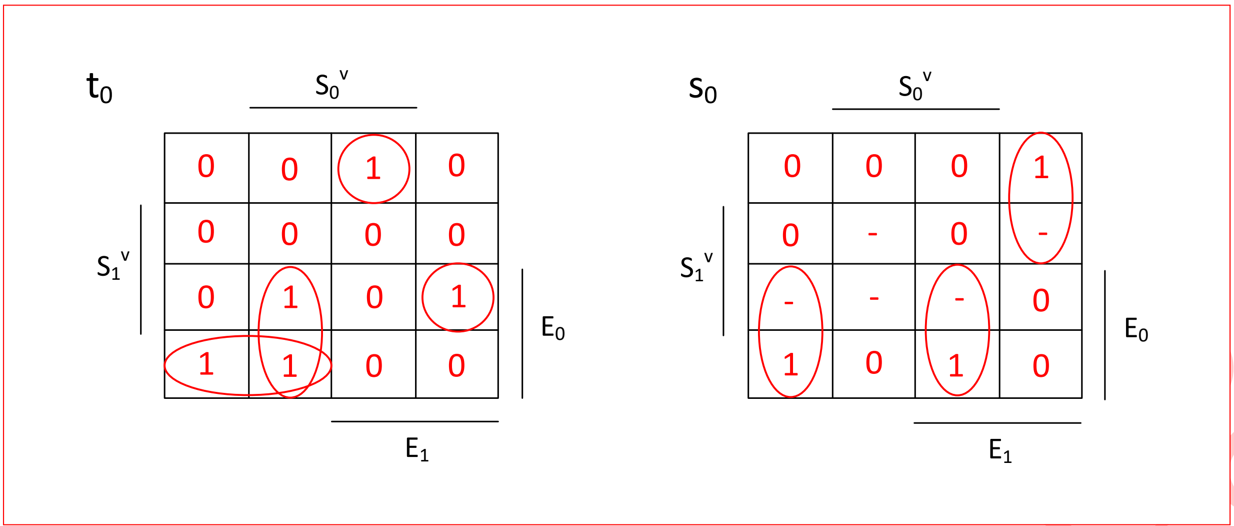


Abbildung 7.2: Symmetriediagramme für Ansteuerfunktionen

$t_0 = (\overline{S_1^v} \wedge E_0 \wedge \overline{E_1}) \vee (S_0^v \wedge E_0 \wedge \overline{E_1}) \vee (S_0^v \wedge \overline{S_1^v} \wedge \overline{E_0} \wedge E_1) \vee (\overline{S_0^v} \wedge S_1^v \wedge E_0 \wedge E_1)$

$s_0 = (\overline{S_0^v} \wedge E_0 \wedge \overline{E_1}) \vee (S_0^v \wedge E_0 \wedge E_1) \vee (\overline{S_0^v} \wedge \overline{E_0} \wedge E_1)$

+2P für jede korrekte minimale Ansteuerfunktion, -1P für jede Funktion, falls nur Folgefehler (Symmetriediagramm falsch, aber Minimierung richtig.)

Aufgabe 8: CMOS und Gatter

12

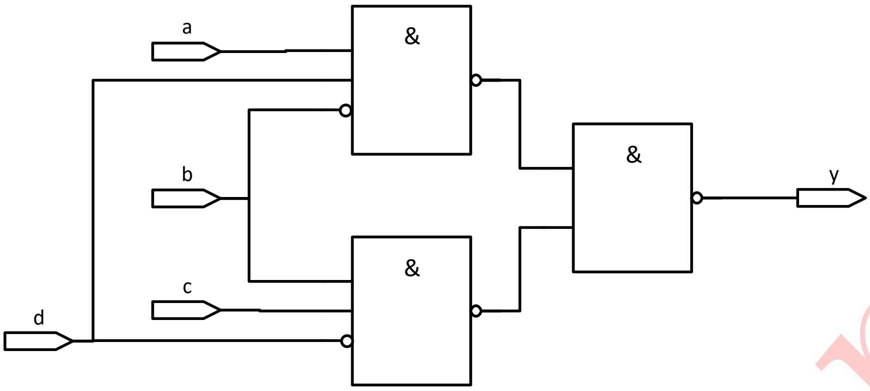
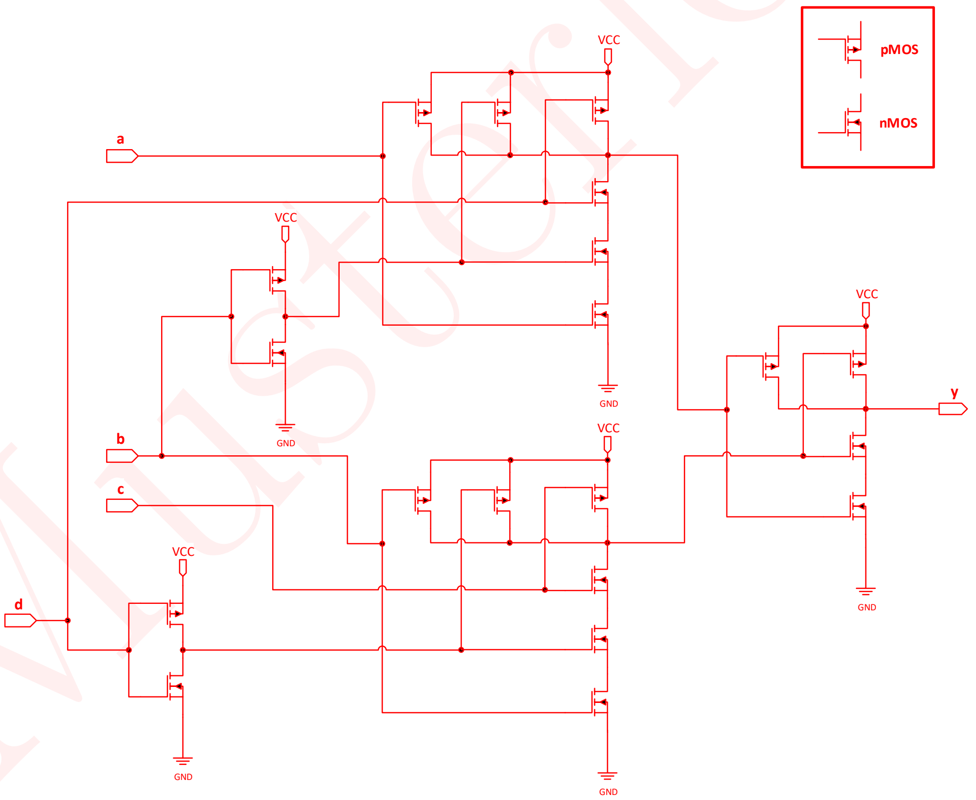


Abbildung 8.1: Logikschaltung mit 4 Eingängen (a, b, c, d) und einem Ausgang (y)

A) In Abbildung 8.1 ist eine Logikschaltung in Negativlogik (*nand*/*nor*) abgebildet. Realisieren Sie dieses Schaltnetz durch eine entsprechende Schaltung aus CMOS-Gattern. Zeichnen Sie die resultierende CMOS-Schaltung.

4



+0,5P für korrekte Inverter
+1P für 2-fach NAND Gatter
+1,5P für 3-fach NAND Gatter
+1P für korrekte Verdrahtung

B) Geben Sie die durch die Gatter in Abbildung 8.1 realisierte Schaltfunktion in Positiv-Logik an (nur *und*/*oder* Operationen, kein *nand*/*nor*). Der *nicht* Operator soll dabei ausschließlich auf einzelne Literale, nicht aber auf die Ergebnisse einer anderen logischen Operation angewendet werden. Lässt sich die Logikschaltung aus der Abbildung noch vereinfachen und mit weniger Hardwareaufwand realisieren?

2

$Y = \overline{\overline{(a \wedge \overline{b} \wedge d)} \wedge \overline{(b \wedge c \wedge \overline{d})}}$

$= (a \wedge \overline{b} \wedge d) \vee (b \wedge c \wedge \overline{d})$

Die Funktion ist bereits minimal, daher kann die Schaltung nicht mehr vereinfacht werden.

+1P für Aufstellen und vereinfachen der Schaltfunktion
+1P für Funktion bereits minimal

Aufgabe 8.1: Umwandlung von NMOS Logik in CMOS Logik

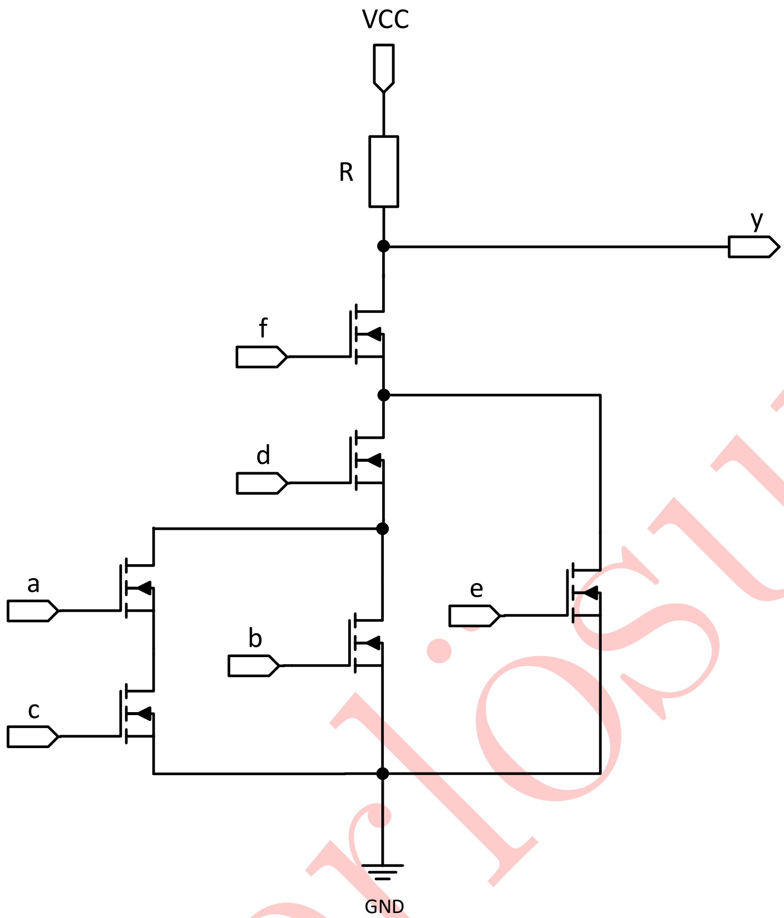


Abbildung 8.2: NMOS-Schaltung mit 6 Eingängen a-f und einem Ausgang y

A) Abbildung 8.2 zeigt eine Logikschaltung in NMOS Technik. Um die Energieeffizienz zu erhöhen, soll daraus eine äquivalente wohldefinierte CMOS-Schaltung entwickelt werden, indem der pull-up-Widerstand R durch ein PMOS Schaltnetz ersetzt wird. Warum kann dadurch die mittlere Leistungsaufnahme gesenkt werden? (*Hinweis*: Der Einfachheit halber soll von idealen Transistoren ausgegangen werden) **1**

In der bisherigen NMOS Schaltung fließt durch R kontinuierlich ein Strom solange der Ausgang auf dem Masse-Pegel liegt. Bei wohldefinierten CMOS-Schaltungen sperren in diesem Fall die PMOS Transistoren, sodass kein Strom mehr fließt. Die Leistungsaufnahme kann dadurch für diesen Fall gesenkt werden.

1P für korrekte Antwort

B) Entwickeln Sie nun für die NMOS-Schaltung aus Abbildung 8.2 ein komplementäres PMOS-Schaltnetz. Ermitteln Sie dazu zunächst die pull-down-Funktion G der NMOS-Schaltung und entwickeln sie daraus die pull-up-Schaltfunktion F für das PMOS-Netz. Zeichnen Sie anschließend die zugehörige CMOS-Schaltung unter Verwendung des vorgegebenen Vordrucks.

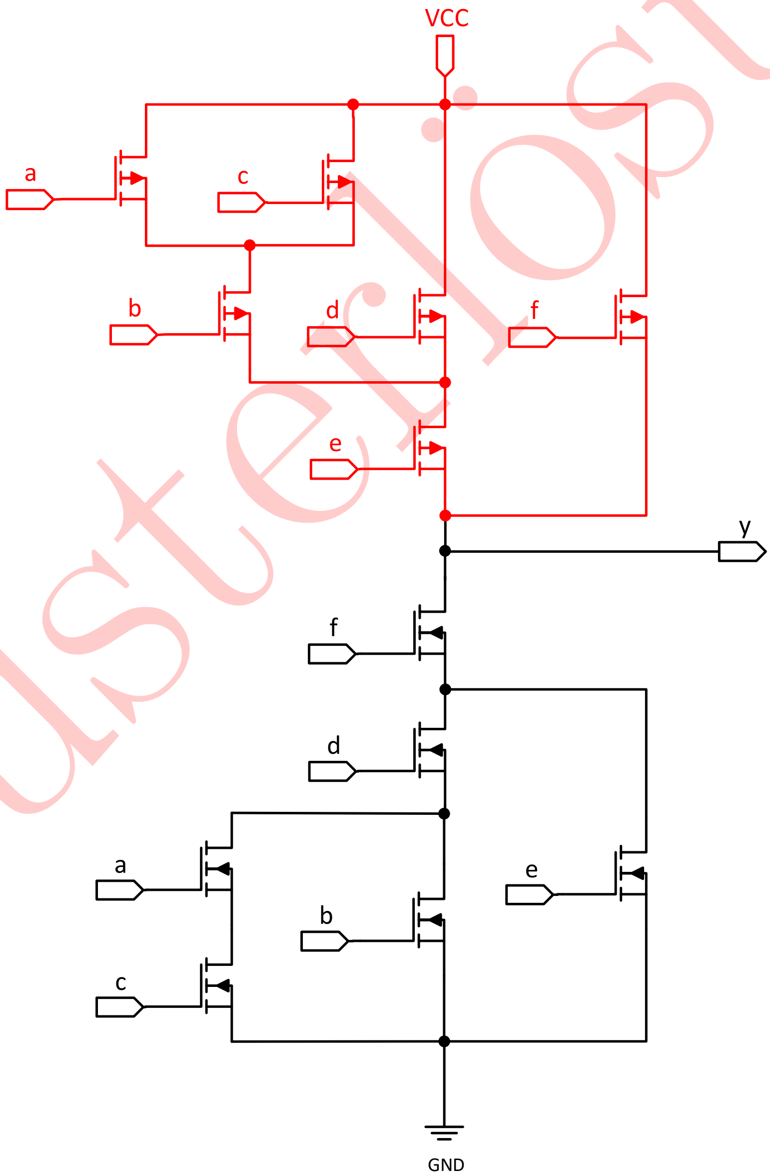
5

$G = ((ac + b)d + e)f$

$F = \overline{G}$

$F = ((\overline{a} + \overline{c})\,\overline{b} + \overline{d})\,\overline{e} + \overline{f}$

+1P für pull-down-Funktion G
+2P für pull-up-Funktion F
+2P für die Zeichnung
-0,5P bei Negierung d. PMOS Eingänge
Folgefehler nur wenn Gleichung alle Literale enthält



Zusätzliches Lösungsblatt: