Prüfung

Prof. Dr.-Ing. J. Becker

Digitaltechnik

WS 2011/12

Institut für Technik der Informationsverarbeitung, KIT

Klausur

Do., 23.02.2012

Lösungsblätter

Hinweise zur Klausur

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel zur Prüfung sind vier Seiten vorgegebene und **ein DIN A4 Blatt** selbst geschriebene Formelsammlung zugelassen. Nicht erlaubt hingegen sind die Verwendung eines Taschenrechners, zusätzliche Unterlagen und jegliche Kommunikation mit anderen Personen.

Prüfungsdauer

Die Prüfungsdauer beträgt für die Klausur 120 Minuten.

Prüfungsunterlagen

Die Prüfungsunterlagen bestehen aus insgesamt 32 Seiten Aufgabenblättern (einschließlich diesem Titelblatt). Weiterhin sind 4 zusätzliche Seiten Formelsammlung enthalten.

Bitte überprüfen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben auf jeder Seite oben Ihren vorgedruckten Namen und ihre Matrikelnummer!

Auf jedes zusätzliche Lösungsblatt ist neben dem Namen auch die Aufgabennummer mit einzutragen. Vermeiden Sie das Beschreiben der Rückseiten.

Am Ende der Prüfung sind die 32 Seiten Aufgaben- und Lösungsblätter und alle verwendeten zusätzlichen Lösungsblätter abzugeben.

Verwenden Sie zum Bearbeiten der Aufgaben lediglich dokumentenechte Schreibgeräte – keinen Bleistift sowie Rotstifte!

Aufgabe 1	Optimale Codes	2		~12%
Aufgabe 2	Boolesche Algebra und Schaltnetze	6		~16%
Aufgabe 3	Fehlererkennung- und Korrektur	10		~13%
Aufgabe 4	CMOS-Schaltnetze	14		~12%
Aufgabe 5	Automaten	18		~12%
Aufgabe 6	Minimierung	22		~15%
Aufgabe 7	Polyadische Zahlensysteme	26		~10%
Aufgabe 8	Mengen, Relationen und Graphen	30		~9%
			Σ	

Aufgabe 1 Optimale Codes

Aufgabe 1.1 Shannon-Fanø und Huffman-Codierung

Fünf Zeichen A, B, C, D und E treten mit folgender Häufigkeit auf und sollen für eine Datenübertragung codiert werden:

Zeichen	Auftrittshäufigkeit	Huffman CW	Shannon- Fanø CW
A	5		
B	7		
C	14		
D	4		
E	6		

Tabelle 1-1: Zeichen, Auftrittshäufigkeiten und Codewörter

A) Welche mittlere Codewortlänge würde sich ergeben, wenn man alle Zeichen mit gleicher Länge codieren würde?

B) Erstellen Sie einen Huffman-Codierbaum für die in Tabelle 1-1 gegebenen Zeichen und deren Auftrittshäufigkeiten. Tragen Sie anschließend die gefundenen Kodierung für die Zeichen A, B, C, D und E in Tabelle 1-1 ein.

Konventionen:

- *Sortieren Sie die Elemente zu Beginn entsprechend den Auftrittshäufigkeiten* ***aufsteigend von links nach rechts****. Falls unterschiedliche Knoten dieselbe Auftrittshäufigkeiten haben, sortieren Sie diese bitte alphabetisch von links nach rechts. Gehen Sie bei jedem nötigen Sortierschritt nach diesem Schema vor.*
- *Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baumes die „0“ zu, den rechten Ästen die „1“.*

C) Bestimmen Sie nun die Codierung nach dem Shannon-Fanø-Verfahren für die Auftrittshäufigkeiten aus Tabelle 1-1 und tragen Sie diese in Tabelle 1-1 ein.

Konventionen:

- *Sortieren Sie die Elemente zu Beginn entsprechend den Auftrittshäufigkeiten* ***aufsteigend von links nach rechts****. Falls unterschiedliche Knoten dieselbe Auftrittshäufigkeiten haben, sortieren Sie diese alphabetisch von links nach rechts.*
- *Teilen Sie eine Menge immer so auf, dass die Differenz zwischen den Summen der Auftrittshäufigen der Teilmengen minimiert wird.*
- *Verändern Sie die Reihenfolge der Sortierung/Ordnung während der Anwendung des Verfahrens nicht.*
- *Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baumes die „0“ zu, den rechten Ästen die „1“.*

D) Welche Kodierung (Shannon-Fanø oder Huffman) würden Sie im Allgemeinen bevorzugen?

E) Zeigen Sie nun, dass die „allgemeine“ Aussage aus Teilaufgabe D) auch für die in Teilaufgabe B) und C) ermittelten Kodierungen gültig ist. Berechnen Sie dazu konkrete Werte als Bruch.

Aufgabe 2 Boolesche Algebra und Schaltnetze

Aufgabe 2.1 Boolesche Algebra

Gegeben sei die folgende boolesche Gleichung:

$$\boldsymbol{a\ xor\ b\ =\ \overline{a\ \equiv\ b}}$$

A) Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung durch algebraische Umformung.

Aufgabe 2.2 Konjunktive Normalform

Gegeben sei die folgende boolesche Gleichung:

$$\boldsymbol{y_1 = a \vee bc}$$

A) Geben Sie y_1 in konjunktiver Normalform (KNF) an. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.

Aufgabe 2.3 Entwicklungssatz

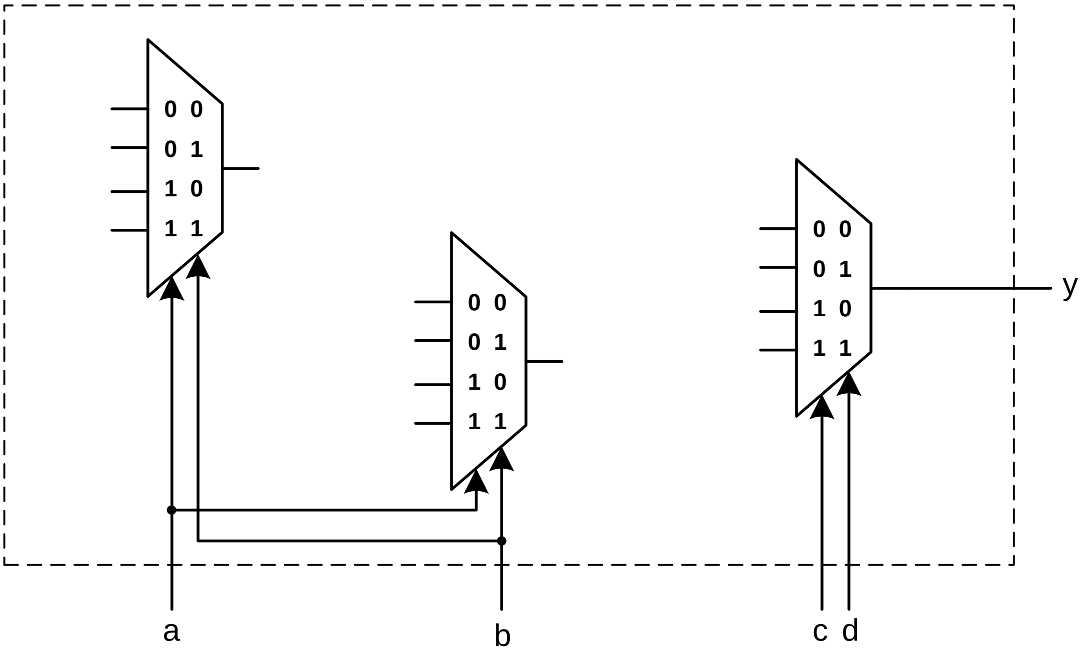
Geben sei nun folgende boolesche Funktion:

$$\boldsymbol{y(d,c,b,a)} = \left(\overline{\bar{\boldsymbol{c}} \vee \bar{\bar{\boldsymbol{d}}}}\right) \vee \left(\overline{\bar{\boldsymbol{c}} \vee \boldsymbol{d} \vee \boldsymbol{a}}\right) \vee \bar{\boldsymbol{c}}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b})$$

A) Entwickeln Sie den Ausdruck y mit Hilfe des Booleschen Entwicklungssatzes in der Reihenfolge d, c, b, a. Geben Sie alle Zwischenergebnisse an.

Hinweis: Bringen Sie den Funktionsausdruck zuerst in eine geeignete Form.

B) Die entwickelte Funktion aus Aufgabe 2.3 A) soll mit 4:1 Multiplexern realisiert werden. Die Eingangsliterale a, b, c, d sollen dabei ausschließlich als Steuersignale genutzt werden. Zeichnen Sie die minimale Multiplexerschaltung. Dazu sind bereits drei 4:1 Multiplexern vorgegeben.



Aufgabe 2.4 PAL-Realisierung

Geben sei nun folgende boolesche Funktion:

$$\boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{d}[\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{c}} \vee \overline{\boldsymbol{b}\overline{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{a} \vee \boldsymbol{d})}] \vee \overline{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c} \vee \boldsymbol{b}\boldsymbol{d})}$$

A) Bringen Sie die Gleichung y_2 durch algebraische Umformungen in eine minimale Form, die sich anschließend direkt mit dem in Abbildung 2–1 gezeigten PAL-Schaltnetz realisieren lässt.

B) Die umgeformte Funktion y_2 aus Teilaufgabe A) soll nun in einem PAL-Baustein realisert werden. Verwenden Sie dazu Abbildung 2–1 und tragen Sie die benötigten Verknüpfungen in die UND-Matrix ein.

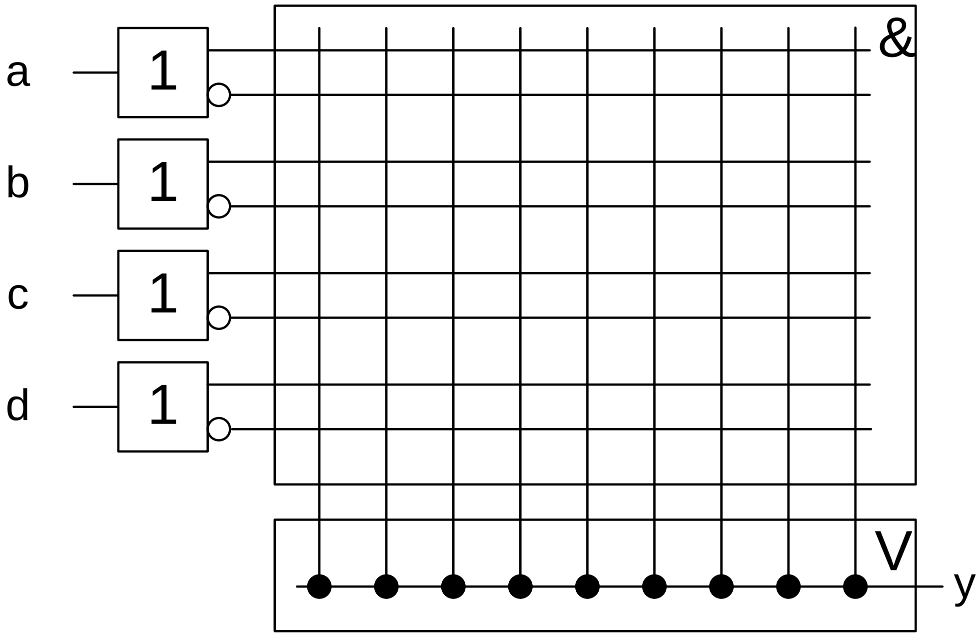


Abbildung 2–1: PAL-Schaltnetz

Aufgabe 3 Fehlererkennung- und Korrektur

Aufgabe 3.1 Hamming Codes

In einem digitalen System soll bei der Übertragung von 8 Datenbits 1 Bit-Fehler korrigiert werden können.

A) Wie viele Prüfbits sind dazu nötig?

Aus einer vorherigen Implementierung ist noch eine Datenübertragung erhalten. Empfangen wurden folgende 34 Bit: 0110 0010 0001 1101 0100 1001 1010 0011 01. Bekannt ist, dass das erste Bit auch das erste Bit eines Codeworts ist, die Datenübertragung ohne Fehler erfolgte und mindestens ein volständiges Codewort empfangen wurde. Pro Codewort werden zuerst die Datenbits von x_1 bis x_8 gesendet, anschließend die Paritätsbits von y_1 bis y_n. Zum Einsatz kam ein Hamming Code, bei dem die Paritätsbits mehrere Stellen der Datenbits abhängig von ihrer dualen Kennzahl überprüfen. Zusätzlich exisitiert ein Teil einer Tabelle, die die Zuordnung zwischen Daten- und Pürfbits angibt.

B) Vervollständigen Sie die Tabelle 3-1 für eine gültige Hamming-Codierung.

Lfd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Duale Kennzahl	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100
1. Stelle												
2. Stelle										x_7		
3. Stelle				y_3	x_2	x_6	x_3					x_8
4. Stelle												

Tabelle 3-1: Zuordnung zwischen Daten- und Prüfbits

C) Welche Parität (gerade/ungerade) kam bei der im Aufgabenteil B) dargestellten Datenübertragung zum Einsatz? Begrün den Sie Ihre Antwort.

D) Geben Sie das Codewort für das Datenwort „10111010“ für den konstruierten Hamming Code aus Tabelle 3-1 an.

E) Wäre es effizienter, wenn man je Codewort nur 4 Datenbits senden würde? Ziehen Sie zur Begründung Ihrer Antwort die Effizienz (Nutzdaten/Codewortlänge) heran.

Aufgabe 3.2 Blocksicherung und Scrambling

A) Was ist eine Blocksicherung? Welche Vorteile bietet sie bezüglich Fehlererkennung und –Korrektur gegenüber einer einfachen Paritätsprüfung?

B) Erklären Sie den Vorteil von Scrambling bezüglich Fehlererkennung nach der Datenübertragung, wenn keine Blocksicherung verwendet wird.

Nun wurden 3 Datenworte mit jeweils 4 Bit verschickt. Dabei wurden die gleichen Daten 2 Mal geschickt, wobei einmal eine Blocksicherung und einmal Scrambling verwendet wurde. Durch einen Fehler im System treten bei beiden Übertragungen 2 Bitfehler auf, die erkannt werden können. Benutzt wurde gerade Parität. Empfangen wurden die beiden Bitfolgen die für Blocksicherung in Tabelle 3-2 und für Scrambling in Tabelle 3-3 angegeben sind. Die Bits der Datenworte sind in beiden Tabellen gleich angeordnet.

	Datenworte				Parität
	1	1	0	1	1
	0	1	0	1	0
	0	0	1	0	1
Prüfwort	0	1	1	0	0

Tabelle 3-2: Blocksicherung - Empfangene Daten

Datenworte				Parität
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1

Tabelle 3-3: Scramling - Empfangene Daten

C) Wie lauten die 3 korrekten Datenworte? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Kombinieren Sie dazu die Daten aus Tabelle 3-2 und Tabelle 3-3.

Aufgabe 4 CMOS-Schaltnetze

In dieser Aufgabe soll eine digitale Grundschaltung in 2 Teilaufgaben analysiert werden.

Aufgabe 4.1 CMOS-Schaltnetz - Teil 1

Gegeben sei das folgende CMOS-Schaltnetz in Abbildung 4–1. In dieser Teilaufgabe soll schrittweise das Pull-Down-Schaltnetz G analysiert und das fehlerhafte Pull-Up-Schaltnetz F korrigiert werden.

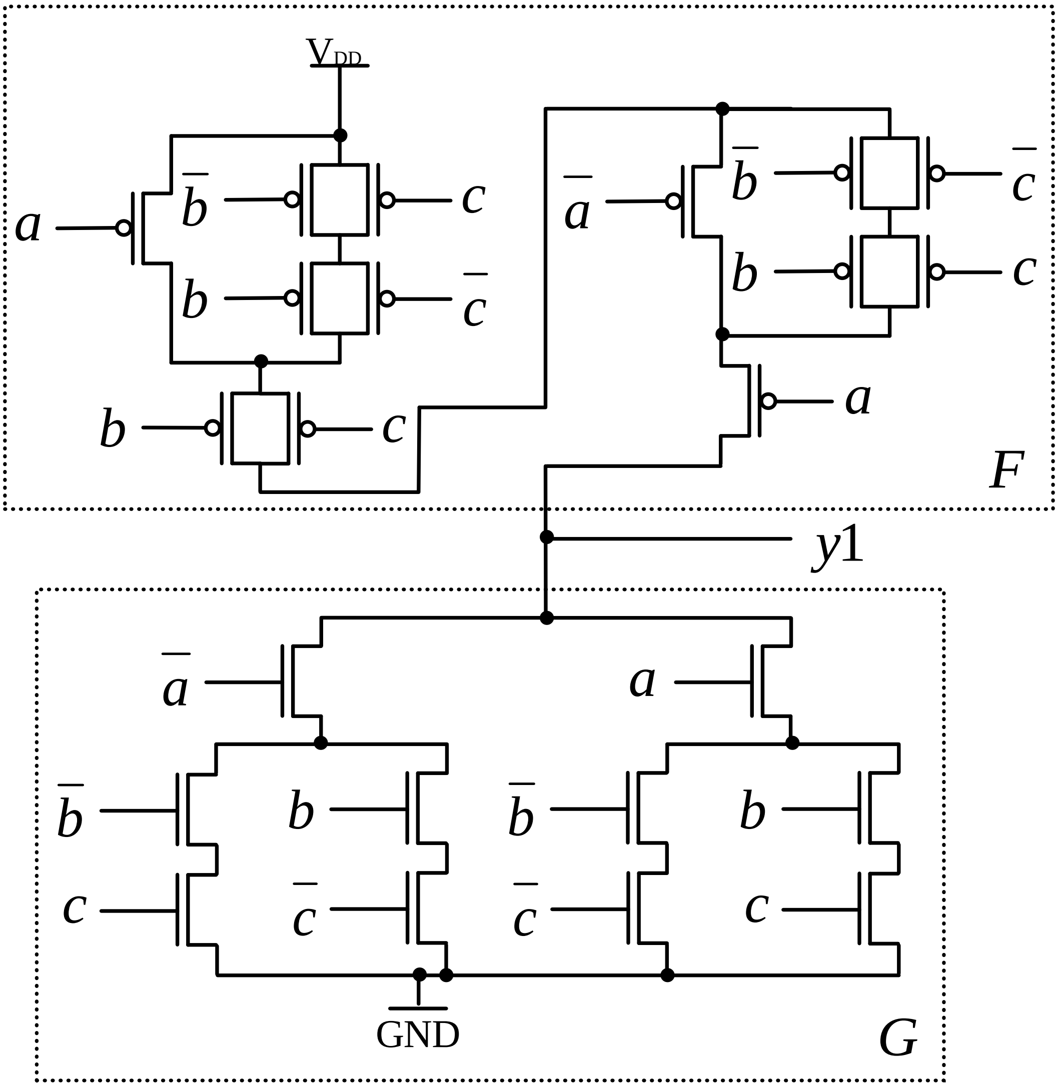


Abbildung 4–1: Fehlerhaftes CMOS-Schaltnetz

A) Geben Sie das Pull-Down-Schaltnetz G aus Abbildung 4–1 in DNF an.

B) Bestimmen Sie das Pull-Up-Schaltnetz F in KNF, so dass die Funktion y_1 wohldefiniert und kurschlussfrei ist.

C) Überprüfen Sie das in Abbildung 4–1 gezeichnete Pull-Up-Schaltnetz F und markieren Sie die Transistoren, die man kurzschließen müsste, um eine wohldefinierte Schaltung zu erhalten.

Aufgabe 4.2 CMOS-Schaltnetz - Teil 2

Gegeben sei das folgende CMOS-Schaltnetz in Abbildung 4–2. In dieser Teilaufgabe sollen die Schaltnetze F‘ und G‘ analysiert werden.

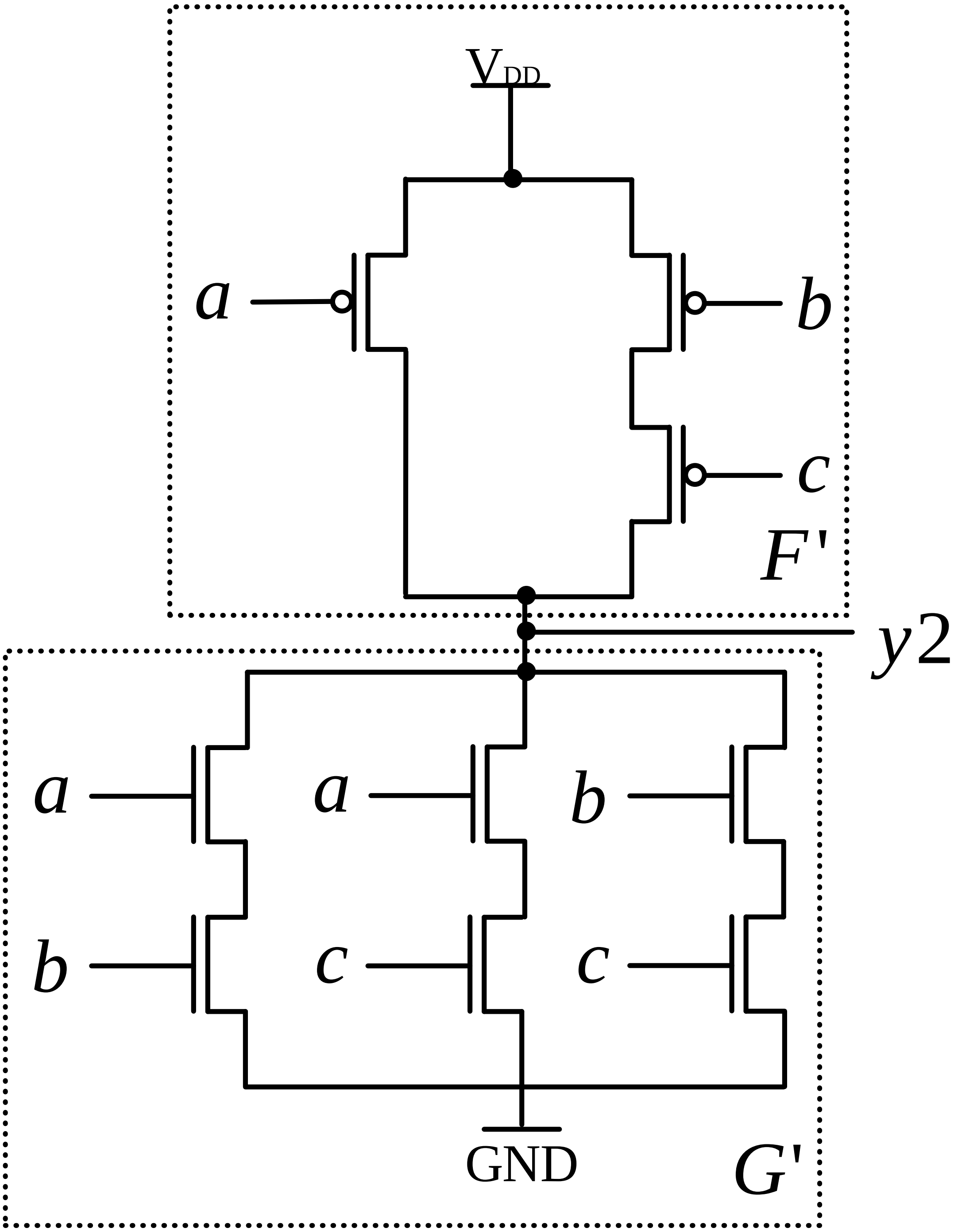


Abbildung 4–2: CMOS Schaltnetz

A) Geben Sie die Funktionen F‘ und G‘ an.

B) Welche Bedingungen müssen die Pull-Up- und Pull-Down-Funktionen erfüllen, damit das CMOS-Schaltnetz in Abbildung 4–2 für alle möglichen Eingangsbelegungen einen definierten Ausgangspegel hat?

C) Überprüfen Sie, ob das Schaltnetz mit F‘ und G‘ kurschlussfrei ist. Geben Sie alle Kurzschlusskombinationen an, falls die Schaltung nicht kurzschlussfrei ist.

Aufgabe 5 Automaten

Aufgabe 5.1 Automatenentwurf

In einem Empfänger wird eine Fehlererkennung mittels Paritätsprüfung realisiert. Der Empfänger signalisiert, wenn eine Übertragung gestartet (S) und beendet (E) wird. Zusätzlich setzt der Empfänger ein Signal (F) kurzzeitig (für einen Taktzyklus) auf ‘1‘, wenn ein Übertragungsfehler erkannt wird.

Es soll nun ein Automat entworfen werden, der die Signale des Empfängers mit Hilfe der drei Zustände „Warten“, „Übertragung“ und „Übertragungsfehler“ verarbeitet. Am Ausgang werden zwei Signale geliefert, welche anzeigen, wenn ein Paket vollständig empfangen wurde (UE) oder, ob während der Übertragung des Pakets ein Fehler aufgetreten ist (UF), so dass eine Neuübertragung des Pakets nötig ist.

Bei einem Übertragungsfehler soll sofort in den Zustand „Übertragungsfehler“ übergegangen werden. Der Fehlerzustand wird wieder verlassen, wenn ein Übertragungsende vorliegt. Die Eingangssignale S und E sind nie gleichzeitig aktiv.

Verwenden Sie zur Realisierung die folgenden Variablen und Namen:

Eingangsvariablen:

S:	0:	Kein Beginn einer Übertragung erkannt
	1:	Beginn einer neuen Übertragung erkannt
E:	0:	Kein Ende einer Übertragung erkannt
	1:	Ende einer laufenden Übertragung erkannt
F:	0:	Kein Bitfehler erkannt
	1:	Bitfehler während einer laufenden Übertragung erkannt

Ausgangsvariablen:

UE:	0:	Übertragung eines Pakets nicht abgeschlossen
	1:	Übertragung eines Pakets abgeschlossen
UF:	0:	Während der Übertragung des empfangenen Pakets sind keine Bitfehler aufgetreten
	1:	Während der Übertragung des empfangenen Pakets sind Bitfehler aufgetreten

Zustandsnamen:

„Warten“ (S0), „Übertragung“ (S1), „Übertragungsfehler“ (S2)

A) Entwerfen Sie das Ablaufdiagramm für eine Realisierung als Mealy-Automat. Nutzen Sie dabei die Eigenschaften des Mealy-Automaten um Übertragungsfehler oder das Übertragungsende im selben Taktzyklus zu signalisiert indem das Ereignis auftritt.

B) Erstellen Sie eine Ablauftabelle des Automaten. Verwenden Sie dazu die voregebene Tabelle 5-1.

	Q^v		Eingang			Q^{v+1}		Ausgang	
	q_2^v	q_1^v	F	E	S	q_2^{v+1}	q_1^{v+1}	UF^v	UE^v
S0									
			1	*-*	*-*	*1*	*0*	*1*	*0*
S1									
S2									

Tabelle 5-1: Ablauftabelle des Automaten

Aufgabe 5.2 Flip-Flop Ansteuerfunktion

A) Nun sei folgende Ablauftabelle (Tabelle 5-2) gegeben. Ermitteln Sie die Ansteuerfunktion der zwei JK Flip-Flops. Verwenden Sie, falls möglich, Freistellen.

	Q^v		E		Q^{v+1}		Y / A		JK FF 2		JK FF 1	
	q_2^v	q_1^v	e_2	e_1	q_2^{v+1}	q_1^{v+1}	a_2^v	a_1^v	J	K	J	K
S0	0	1	0	0	0	1	1	0				
			0	1	0	0						
			1	0	1	1						
			1	1	1	0						
S1	1	0	0	0	1	0	0	1				
			0	1	0	1						
			1	0	0	0						
			1	1	1	1						
S2	1	1	0	0	1	1	0	0				
			0	1	1	0						
			1	0	0	1						
			1	1	0	0						
S3	0	0	0	0	0	0	1	1				
			0	1	1	1						
			1	0	1	0						
			1	1	0	1						

Tabelle 5-2: Ablauftabelle des Automaten

B) Um welchen Automatentyp handelt es sich bei dem in Aufgabenteil A) realisierten Automaten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6 Minimierung

Aufgabe 6.1 Petrickausdruck

Ohne Streichungsregeln anzuwenden hat ein Entwickler aus der Übertragungstabelle einer Schaltfunktion den folgenden Petrickausdruck gebildet:

$$PA = (a \lor b \lor f)\&(b \lor d)\&(a \lor c)\&(b \lor e \lor f)\& c \& (a \lor c \lor e)$$

Um den Ausdruck nicht vollständig ausdistribuieren zu müssen, soll zunächst die Überdeckungstabelle wiedergewonnen werden.

A) Ergänzen Sie die untenstehende Überdeckungstabelle entsprechend des gegebenen Petrickausdrucks, ohne diesen zu vereinfachen. Die überdeckenden Größen sind durch die Präsenzvariablen a, b, c, d, e und f gegeben.

Die zu überdeckenden Größen E_i werden entsprechend der Reihenfolge wie sie im Petrickausdruck auftauchen (links nach rechts), aufsteigend von E_1 bis E_n indiziert.

pi/Ei						
a						
b						
c						
d						
e						
f						

Tabelle 6-1: Überdeckungstabelle 1

B) Bestimmen Sie alle Kerne aus Tabelle 6-1 und markieren Sie die entsprechende(n) Zellen(n).

Kernspalte(n):

Aufgabe 6.2 Verfahren nach Petrick

In den folgenden Teilaufgaben sollen verschiedene Schritte des Petrick-Verfahrens durchgeführt werden.

A) Wenden Sie die Spaltendominanzregel auf Tabelle 6-2 an. Welche Spalte(n) können gestrichen werden? Streichen Sie die entsprechende(n) Spalte(n) und geben Sie die dominierte(n) und zugehörigen dominierende(n) Spalte(n), sowie die streichbaren Spalte(n) an.

pi/Ei	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a			X	X		X		X
b		X			X	X	X	
c		X			X			
d	X			X			X	X
e		X	X			X		X
f	X			X				
g		X						
h				X				

Tabelle 6-2: Überdeckungstabelle 2

Dominierende Spalte(n):							
<u>Dominierte</u> Spalte(n):							
Streichbare Spalte(n):							

Hinweis: Die folgenden Teilaufgaben können und sollen vollkommen unabhängig von der vorherigen Aufgabe gelöst werden.

B) Wenden Sie nun die Zeilendominanzregel auf die bereits reduzierte Tabelle 6-3 an. Welche Zeile(n) können gestrichen werden? Streichen Sie die entsprechende(n) Zeile(n) und die Spalte(n) die durch dominierende Zeilen überdeckt werden. Geben Sie die dominierte(n) und zugehörigen dominierende(n) Zeile(n), sowie die streichbaren Zeile(n) in der Tabelle an. Beachten Sie dabei, dass minimale Kosten (gegeben in *gate equivalent* (*GE*)) entstehen sollen. Neu entstandene Kerne dürfen mitverwendet werden. Führen Sie also das Patrick-Verfahren zu Ende.

$p_i \backslash N_i$	E_1	E_3	E_5	E_8	E_{10}	E_{11}	E_{13}	Kosten
a		X			X		X	6 GE
b		X	X			X	X	2 GE
f			X		X			7 GE
i	X				X			3 GE
l		X		X				8 GE
m	X			X			X	5 GE
n				X				1 GE
q		X				X		4 GE

Tabelle 6-3: Reduzierte Überdeckungstabelle

Dominierende Zeile(n):							
Dominierte Zeile(n):							
Streichbare Zeile(n):							

C) Geben Sie die Präsenzvariablen (p_i) für die in Teilaufgabe B) gefundenen Überdeckung an.

Überdeckung:

Aufgabe 6.3 Symmetriediagramm

Gegeben sei folgendes Symmetriediagramm der Schaltfunktion G:

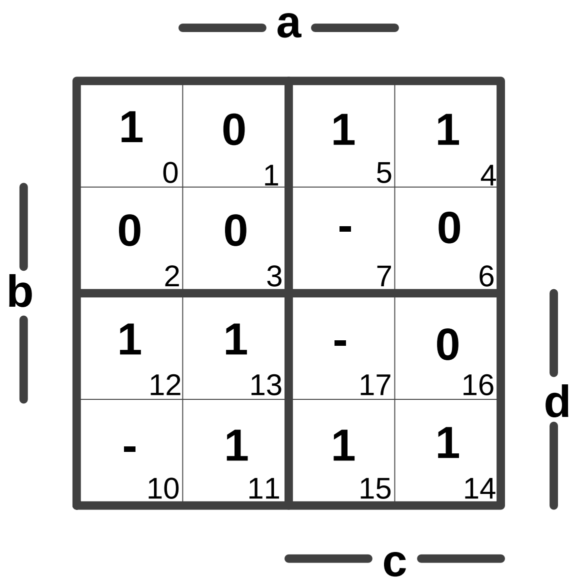


Abbildung 6–1: Symmetriediagramm

A) Geben Sie **alle** möglichen Primterme für eine vollständige Einsstellenüberdeckung der Funktion G aus Abbildung 6–1 an. Verwenden Sie zur Blockbildung auch die Freistellen.

B) Geben Sie die Minimal-Überdeckung der durch das Symmetriediagramm repräsentierten Funktion an, falls dies eindeutig ist. Sollte dies nicht der Fall sein begründen Sie dies. Die Implementierungskosten pro Term entsprechen der Anzahl an enthaltener Literale.

Aufgabe 7 Polyadische Zahlensysteme

Aufgabe 7.1 BCD

A) Addieren Sie die im Dezimalsystem gegebenen Zahlen 167_D und 359_D im BCD Code. Stellen Sie ihren Lösungsweg – inklusiv aller notwendigen Korrekturschritte – ausführlich dar.

Aufgabe 7.2 Konvertierung

A) Gegeben ist folgende Gleichung, bei der nicht alle Zahlensysteme bekannt sind:

$$\mathbf{223_{H/O} + 1000\ 0100_{BCD/B} = 347_{D/O}}$$

Die möglichen Zahlensysteme der Zahlen sind als Indizes angegeben. Bestimmen Sie rechnerisch, um welche Zahlensysteme es sich handeln muss. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg und geben Sie die korrekte Gleichung mit den entsprechenden Zahlensystemen an.

B) Wandeln Sie die gegebenen Zahlen aus Tabelle 7-1 in das angegebene Ziel-Zahlensystem um. Das ursprüngliche Zahlensystem (Basis) ist als Index angegeben. Geben Sie den Rechenweg an.

Gegeben	Ziel-Zahlen-system	Rechenweg	Gesucht
263_7	9		
3720_8	16		

Tabelle 7-1: Zahlensystemkonvertierung

Aufgabe 7.3 Zweierkomplement

A) Subtrahieren Sie die im Dezimalsystem gegebene Zahl 213_D von 174_D. Führen Sie diese Rechnung komplett im binären Zahlensystem durch. Stellen Sie ihren Lösungsweg – inklusive aller notwendigen Schritte – ausführlich dar. Geben Sie anschließend das Ergebnis im dezimalen Zahlensystem an.

Aufgabe 8 Mengen, Relationen und Graphen

Aufgabe 8.1 Graphen

Gegeben ist der folgende gerichtete Graph

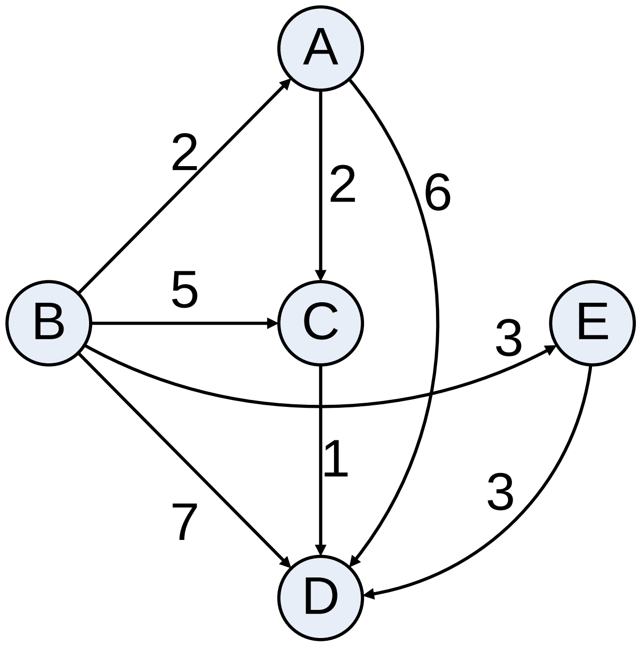


Abbildung 8–1: Gerichteter Graph

A) Der Graph in Abbildung 8–1 repräsentiert eine Relation. Um welche Art von Relation handelt es sich und welche Eigenschaften hat diese? Begründen Sie jede Eigenschaft mit Bezug auf den Graph.

B) Überführen Sie den Graph aus Abbildung 8–1 in einen ungerichteten Graph und stellen Sie diesen kreuzungsfrei/planar dar.

C) Zeichnen Sie nun den dualen Graph zum ungerichteten planaren Graph aus Teilaufgabe B).

D) Geben Sie die Knotenmenge der größten Clique des ungerichteten Graphen aus Teilaufgabe B) an.

E) Warum handelt es sich beim gegebenen Graph (Abbildung 8–1) nicht um einen Baum?

F) Geben Sie Startknoten (Eingangsgrad=0) und Zielknoten (Ausgangsgrad=0) des Graphen aus Abbildung 8–1 an. Welche Kantenprogression repräsentiert den kürzesten Weg zwischen Start- und Zielknoten?