Matrikelnummer: Name:

Prüfung

Prof. Dr.-Ing. J. Becker

Digitaltechnik

WS 2011/12

Institut für Technik der Informationsverarbeitung, KIT

Klausur

Do., 23.02.2012

Lösungsblätter

Musterlösung

Hinweise zur Klausur

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel zur Prüfung sind vier Seiten vorgegebene und **ein DIN A4 Blatt** selbst geschriebene Formelsammlung zugelassen. Nicht erlaubt hingegen sind die Verwendung eines Taschenrechners, zusätzliche Unterlagen und jegliche Kommunikation mit anderen Personen.

Prüfungsdauer

Die Prüfungsdauer beträgt für die Klausur 120 Minuten.

Prüfungsunterlagen

Die Prüfungsunterlagen bestehen aus insgesamt 32 Seiten Aufgabenblättern (einschließlich diesem Titelblatt). Weiterhin sind 4 zusätzliche Seiten Formelsammlung enthalten.
Bitte überprüfen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben auf jeder Seite oben Ihren vorgedruckten Namen und ihre Matrikelnummer!
Auf jedes zusätzliche Lösungsblatt ist neben dem Namen auch die Aufgabennummer mit einzutragen.
Vermeiden Sie das Beschreiben der Rückseiten.
Am Ende der Prüfung sind die 32 Seiten Aufgaben- und Lösungsblätter und alle verwendeten zusätzlichen Lösungsblätter abzugeben.
Verwenden Sie zum Bearbeiten der Aufgaben lediglich dokumentenechte Schreibgeräte – keinen Bleistift sowie Rotstifte!

Aufgabe 1	Optimale Codes	2		~12%
Aufgabe 2	Boolesche Algebra und Schaltnetze	6		~16%
Aufgabe 3	Fehlererkennung- und Korrektur	10		~13%
Aufgabe 4	CMOS-Schaltnetze	14		~12%
Aufgabe 5	Automaten	18		~12%
Aufgabe 6	Minimierung	22		~15%
Aufgabe 7	Polyadische Zahlensysteme	26		~10%
Aufgabe 8	Mengen, Relationen und Graphen	30		~9%
			Σ	

Aufgabe 1 Optimale Codes

Aufgabe 1.1 Shannon-Fanø und Huffman-Codierung

Fünf Zeichen A, B, C, D und E treten mit folgender Häufigkeit auf und sollen für eine Datenübertragung codiert werden:

Zeichen	**Auftrittshäufigkeit**	**Huffman CW**	**Shannon- Fanø CW**
A	5	101	001
B	7	111	10
C	14	0	11
D	4	100	000
E	6	110	01

Tabelle 1-1: Zeichen, Auftrittshäufigkeiten und Codewörter

A) Welche mittlere Codewortlänge würde sich ergeben, wenn man alle Zeichen mit gleicher Länge codieren würde?

5 Zeichen => ld(5)= 3 Bit

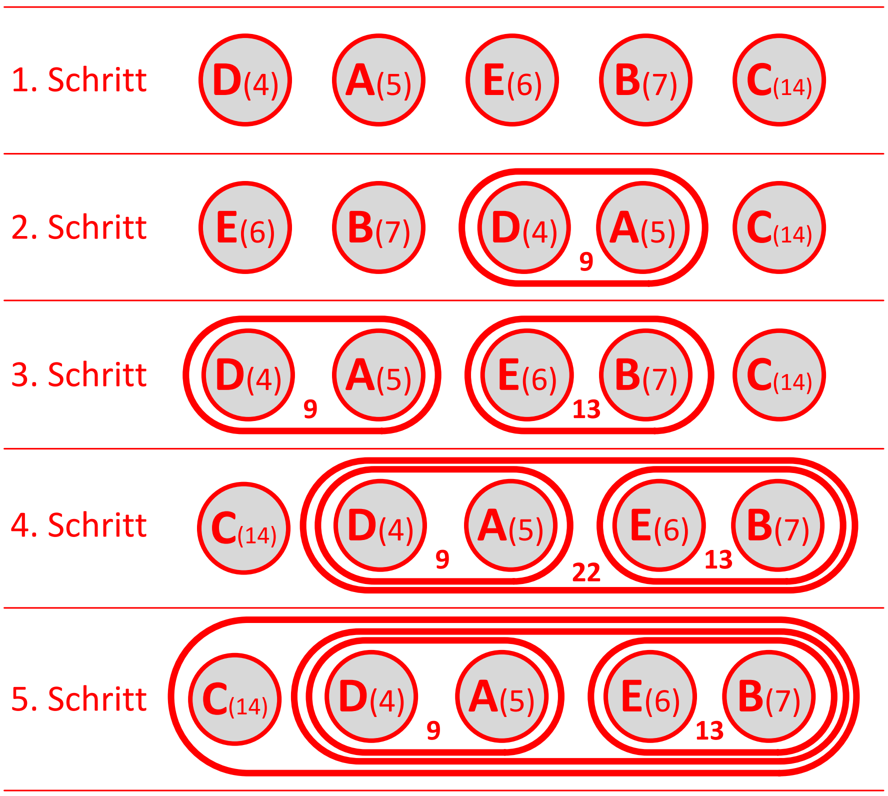
Um 5 Zeichen zu codieren sind Codewörter mit einer Länge von 3 Bit nötig.

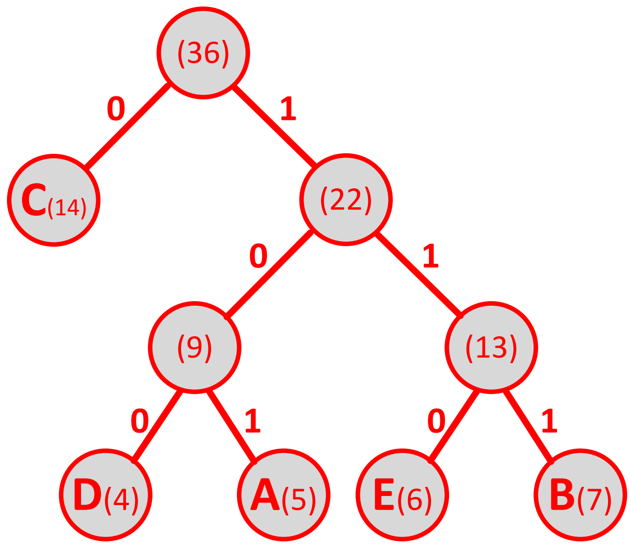
Bei gleicher Länge aller CW entspricht die mittlere CW-Länge der Länge eines CW

B) Erstellen Sie einen Huffman-Codierbaum für die in Tabelle 1-1 gegebenen Zeichen und deren Auftrittshäufigkeiten. Tragen Sie anschließend die gefundenen Kodierung für die Zeichen A, B, C, D und E in Tabelle 1-1 ein.

Konventionen:

- *Sortieren Sie die Elemente zu Beginn entsprechend den Auftrittshäufigkeiten* ***aufsteigend von links nach rechts****. Falls unterschiedliche Knoten dieselbe Auftrittshäufigkeiten haben, sortieren Sie diese bitte alphabetisch von links nach rechts. Gehen Sie bei jedem nötigen Sortierschritt nach diesem Schema vor.*
- *Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baumes die „0“ zu, den rechten Ästen die „1“.*

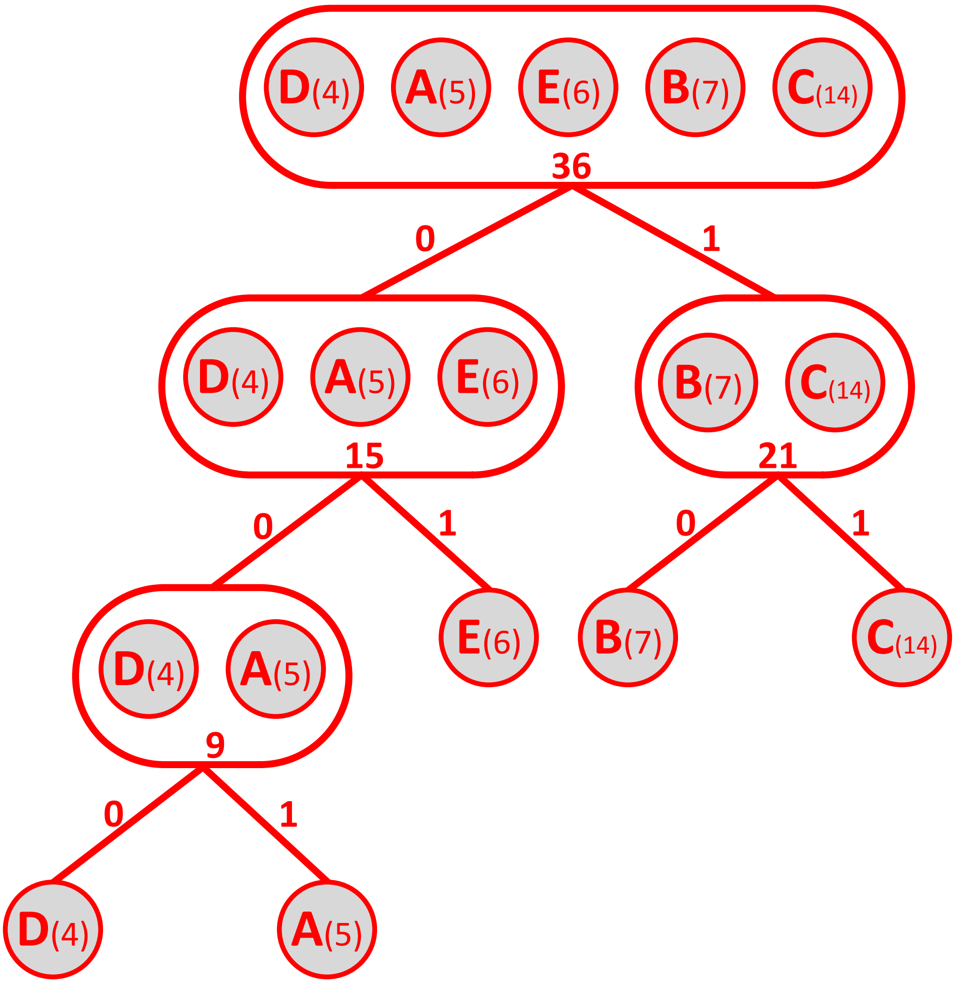




C) Bestimmen Sie nun die Codierung nach dem Shannon-Fanø-Verfahren für die Auftrittshäufigkeiten aus Tabelle 1-1 und tragen Sie diese in Tabelle 1-1 ein.

Konventionen:

- *Sortieren Sie die Elemente zu Beginn entsprechend den Auftrittshäufigkeiten **aufsteigend von links nach rechts**. Falls unterschiedliche Knoten dieselbe Auftrittshäufigkeiten haben, sortieren Sie diese alphabetisch von links nach rechts.*
- *Teilen Sie eine Menge immer so auf, dass die Differenz zwischen den Summen der Auftrittshäufigen der Teilmengen minimiert wird.*
- *Verändern Sie die Reihenfolge der Sortierung/Ordnung während der Anwendung des Verfahrens nicht.*
- *Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baumes die „0“ zu, den rechten Ästen die „1“.*



D) Welche Kodierung (Shannon-Fanø oder Huffman) würden Sie im Allgemeinen bevorzugen?

Im Allgemeinen ergibt sich bei der Huffman-Codierung eine äquivalente oder geringere mittlere Codewortlänge als für Shannon-Fanø. Daher ist die Huffman-Codierung zu bevorzugen.

E) Zeigen Sie nun, dass die „allgemeine“ Aussage aus Teilaufgabe D) auch für die in Teilaufgabe B) und C) ermittelten Kodierungen gültig ist. Berechnen Sie dazu konkrete Werte als Bruch.

→ Berechnung der mittleren Codewortlänge: $\bar{m} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) * m(x_i)$

Huffman-Code:

$$\bar{m}_{Huffman} = \frac{[(4+5+6+7)*3+14*1]}{36} = \frac{[66+14]}{36} = \frac{80}{36}$$

Shannon-Fanø:

$$\bar{m}_{Shannon\_fano} = \frac{[(4+5)*3+(6+7+14)*2]}{36} = \frac{[27+54]}{36} = \frac{81}{36}$$

$$\bar{m}_{Huffman} < \bar{m}_{Shannon\_fano}$$

⇨ Auch für die gegebene Codierung bietet Huffman eine geringere mittlere Codewortlänge als Shannon-Fanø (und ist daher zu bevorzugen).

Aufgabe 2 Boolesche Algebra und Schaltnetze

Aufgabe 2.1 Boolesche Algebra

Gegeben sei die folgende boolesche Gleichung:

$$\boldsymbol{a\ xor\ b \ = \ \overline{a \equiv b}}$$

A) Zeigen Sie die Gültigkeit dieser Gleichung durch algebraische Umformung.

$a\ xor\ b = \bar{a}b \lor a\bar{b}$

$= \overline{\overline{\bar{a}b \lor a\bar{b}}}$

De Morgan:

$= \overline{\overline{\bar{a}b} * \overline{a\bar{b}}}$

$= \overline{(a \lor \bar{b}) * (\bar{a} \lor b)}$

Ausdistribuieren der beiden Klammern:

$= \overline{a\bar{a} \lor b\bar{b} \lor ab \lor \bar{a}\bar{b}} = \overline{ab \lor \bar{a}\bar{b}}$

$= \overline{a \equiv b}$ *q.e.d*

Aufgabe 2.2 Konjunktive Normalform

Gegeben sei die folgende boolesche Gleichung:

$$\boldsymbol{y_1 = a \lor bc}$$

A) Geben Sie y_1 in konjunktiver Normalform (KNF) an. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein.

$y_1 = a \lor bc = (a \lor b)(a \lor c)$

$= (a \lor b \lor (c * \bar{c}))(a \lor (b * \bar{b}) \lor c)$

$= (a \lor b \lor c)(a \lor b \lor \bar{c})\cancel{(a \lor b \lor c)}(a \lor \bar{b} \lor c)$

$= (a \lor b \lor c)(a \lor b \lor \bar{c})(a \lor \bar{b} \lor c)$

Aufgabe 2.3 Entwicklungssatz

Geben sei nun folgende boolesche Funktion:

$$\boldsymbol{y(d,c,b,a) = (\overline{\bar{c} \vee \bar{d}}) \vee (\overline{\bar{c} \vee d \vee a}) \vee \bar{c}d(a \equiv b)}$$

A) Entwickeln Sie den Ausdruck y mit Hilfe des Booleschen Entwicklungssatzes in der Reihenfolge d, c, b, a. Geben Sie alle Zwischenergebnisse an.

Hinweis: Bringen Sie den Funktionsausdruck zuerst in eine geeignete Form.

$$y(d,c,b,a) = (\overline{\bar{c} \vee \bar{d}}) \vee (\overline{\bar{c} \vee d \vee a}) \vee \bar{c}d(a \equiv b)$$

De Morgan: $y(d,c,b,a) = \mathrm{cd} \vee (\mathrm{c\bar{d}\bar{a}}) \vee \bar{c}d(a \equiv b)$

$$y(d,c,b,a) = \mathrm{cd} \vee (\mathrm{c\bar{d}\bar{a}}) \vee \bar{c}d(a\mathrm{b} \vee \mathrm{\bar{a}\bar{b}})$$

Lösungsweg A:

Entwicklung nach d:

$$y(0,c,b,a) = \mathrm{c\bar{a}}$$

$$y(1,c,b,a) = \mathrm{c} \vee \bar{c}\left(a\mathrm{b} \vee \mathrm{\bar{a}\bar{b}}\right)$$

Entwicklung nach c:

$y(0,0,b,a) = 0$ $\quad$ $y(0,1,b,a) = \mathrm{\bar{a}}$

$y(1,0,b,a) = a\mathrm{b} \vee \mathrm{\bar{a}\bar{b}}$ $\quad$ $y(1,1,b,a) = 1$

Entwicklung nach b:

$$y(0,1,-,a) = \bar{a}$$

$y(1,0,0,a) = \bar{a}$ $\quad$ $y(1,0,1,a) = a$

Entwicklung nach a:

$y(0,1,-,0) = 1$ $\quad$ $y(0,1,-,1) = 0$

$y(1,0,0,0) = 1$ $\quad$ $y(1,0,0,1) = 0$

$y(1,0,1,0) = 0$ $\quad$ $y(1,0,1,1) = 1$

Lösungsweg B:

Entwicklung nach d:

$$y(d,c,b,a) = \mathrm{d}[\mathrm{c} \vee \bar{c}\left(a\mathrm{b} \vee \mathrm{\bar{a}\bar{b}}\right)] \vee \mathrm{\bar{d}}[\mathrm{c\bar{a}}]$$

Entwicklung nach c:

$$y(d,c,b,a) = \mathrm{d}[\mathrm{c} \vee \bar{c}\left(a\mathrm{b} \vee \mathrm{\bar{a}\bar{b}}\right)] \vee \mathrm{\bar{d}}[\mathrm{c}(\mathrm{\bar{a}}) \vee \bar{c}(0)]$$

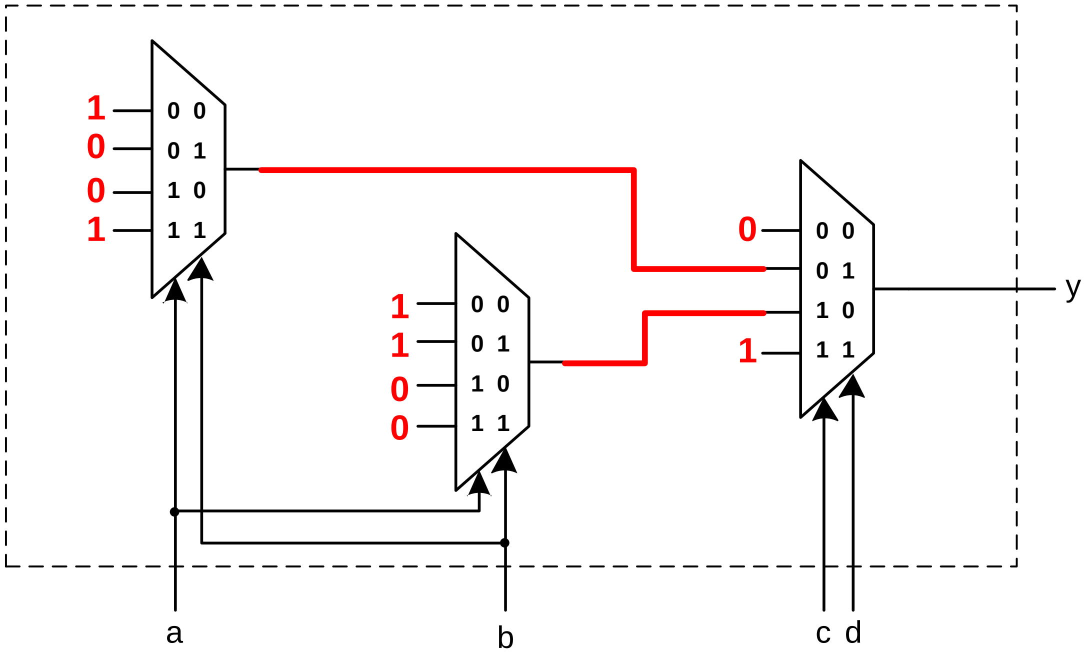
Entwicklung nach b:

$$y(d,c,b,a) = \mathrm{d}[\mathrm{c} \vee \bar{c}\left(b(a) \vee \mathrm{\bar{b}}(\mathrm{\bar{a}})\right)] \vee \mathrm{\bar{d}}[\mathrm{c}(\mathrm{\bar{a}}) \vee \bar{c}(0)]$$

Entwicklung nach a:

$$y(d,c,b,a) = \mathrm{d}[\mathrm{c} \vee \bar{c}\left(b\left(a(1)\right) \vee \mathrm{\bar{b}}(\mathrm{\bar{a}}(1))\right)] \vee \mathrm{\bar{d}}[\mathrm{c}(\mathrm{\bar{a}}(1)) \vee \bar{c}(0)]$$

B) Die entwickelte Funktion aus Aufgabe 2.3 A) soll mit 4:1 Multiplexern realisiert werden. Die Eingangsliterale a, b, c, d sollen dabei ausschließlich als Steuersignale genutzt werden. Zeichnen Sie die minimale Multiplexerschaltung. Dazu sind bereits drei 4:1 Multiplexern vorgegeben.



Aufgabe 2.4 PAL-Realisierung

Geben sei nun folgende boolesche Funktion:

$$\boldsymbol{y_2 = d[a\bar{c} \vee \overline{b\bar{c}(a \vee d)}] \vee \overline{a(c \vee bd)}}$$

A) Bringen Sie die Gleichung y_2 durch algebraische Umformungen in eine minimale Form, die sich anschließend direkt mit dem in Abbildung 2–1 gezeigten PAL-Schaltnetz realisieren lässt.

$y_2 = d[a\bar{c} \vee \overline{b\bar{c}(a \vee d)}] \vee \overline{a(c \vee bd)}$

De Morgan:

$y_2 = d[a\bar{c} \vee (\bar{b} \vee c \vee \bar{a}\bar{d})] \vee (\bar{a} \vee \bar{c}(\bar{b} \vee \bar{d}))$

Ausdistribuieren:

$y_2 = da\bar{c} \vee d\bar{b} \vee dc \vee \cancel{d\bar{a}\bar{d}} \vee \bar{a} \vee \bar{c}\bar{b} \vee \bar{c}\bar{d}$

Minimieren:

$y_2 = a\bar{c}d \vee \bar{b}d \vee cd \vee \bar{a} \vee \bar{b}\bar{c} \vee \bar{c}\bar{d}$

$y_2 = \cancel{a}\bar{c}d \vee \bar{b}d \vee cd \vee \bar{a} \vee \bar{b}\bar{c} \vee \bar{c}\bar{d}$ (=> Weitere Minimierung möglich)

$y_2 = \bar{a} \vee \bar{c} \vee d$

B) Die umgeformte Funktion y_2 aus Teilaufgabe A) soll nun in einem PAL-Baustein realisert werden. Verwenden Sie dazu Abbildung 2–1 und tragen Sie die benötigten Verknüpfungen in die UND-Matrix ein.

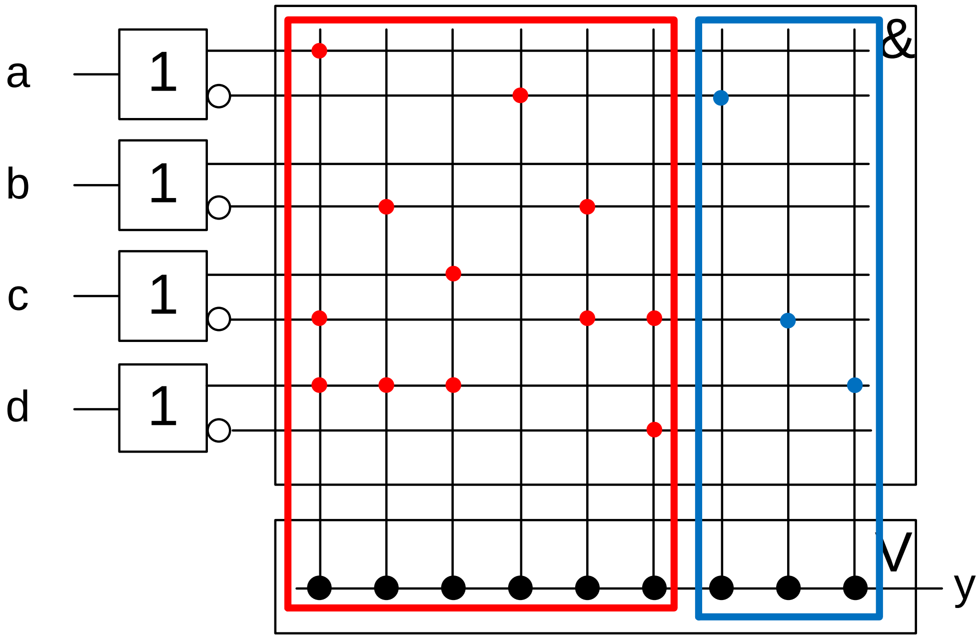


Abbildung 2–1: PAL-Schaltnetz

Aufgabe 3 Fehlererkennung- und Korrektur

Aufgabe 3.1 Hamming Codes

In einem digitalen System soll bei der Übertragung von 8 Datenbits 1 Bit-Fehler korrigiert werden können.

A) Wie viele Prüfbits sind dazu nötig?

$n = 2^k - k - 1$ einsetzen von Werten:

k=3 -> n=4 Datenbits

k=4 -> n=11 Datenbits

➔ 4 Prüfbits werden benötigt

*Bzw.: Hamming Distanz = 3 -> **4 Prüfbits***

Aus einer vorherigen Implementierung ist noch eine Datenübertragung erhalten. Empfangen wurden folgende 34 Bit: 0110 0010 0001 1101 0100 1001 1010 0011 01. Bekannt ist, dass das erste Bit auch das erste Bit eines Codeworts ist, die Datenübertragung ohne Fehler erfolgte und mindestens ein volständiges Codewort empfangen wurde. Pro Codewort werden zuerst die Datenbits von x_1 bis x_8 gesendet, anschließend die Paritätsbits von y_1 bis y_n. Zum Einsatz kam ein Hamming Code, bei dem die Paritätsbits mehrere Stellen der Datenbits abhängig von ihrer dualen Kennzahl überprüfen. Zusätzlich exisitiert ein Teil einer Tabelle, die die Zuordnung zwischen Daten- und Pürfbits angibt.

B) Vervollständigen Sie die Tabelle 3-1 für eine gültige Hamming-Codierung.

Lfd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Duale Kennzahl	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100
1. Stelle	y_1		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5	
2. Stelle		y_2	x_1			x_6	x_3			x_7	x_5	
3. Stelle				y_3	x_2	x_6	x_3					x_8
4. Stelle								y_4	x_4	x_7	x_5	x_8

Tabelle 3-1: Zuordnung zwischen Daten- und Prüfbits

C) Welche Parität (gerade/ungerade) kam bei der im Aufgabenteil B) dargestellten Datenübertragung zum Einsatz? Begrün den Sie Ihre Antwort.

Aus A: Ein Codewort hat die Länge 12.

Es wurden also 2 ganze Wörter

empfangen, vom dritten fehlen 2 Paritätsbits.

Erstes Codewort zusammen mit der Tabelle (funktioniert auch mit 2. CW):

$x_2 + x_6 + x_3 + x_8$ -> $1+0+1+0=2$ *und* -> $y_3 = 0$ *gerade Parität*

D) Geben Sie das Codewort für das Datenwort „10111010“ für den konstruierten Hamming Code aus Tabelle 3-1 an.

y_1: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 + 0 + 1 + 1 + 1 = 4$ => $y_1 = 0$

y_2: $x_1 + x_6 + x_3 + x_7 + x_5 = 1 + 0 + 1 + 1 + 1 = 4$ => $y_2 = 0$

y_3: $x_2 + x_6 + x_3 + x_8 = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$ => $y_3 = 1$

y_4: $x_4 + x_7 + x_5 + x_8 = 1 + 1 + 1 + 0 = 3$ => $y_4 = 1$

Codewort: 101110100011

E) Wäre es effizienter, wenn man je Codewort nur 4 Datenbits senden würde? Ziehen Sie zur Begründung Ihrer Antwort die Effizienz (Nutzdaten/Codewortlänge) heran.

Fall1 : $Effizienz = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = \frac{14}{21}$

Fall2: $Effizienz = \frac{4}{7} = \frac{12}{21}$

$\frac{14}{21} > \frac{12}{21}$, *es wäre also nicht effizienter*

Aufgabe 3.2 Blocksicherung und Scrambling

A) Was ist eine Blocksicherung? Welche Vorteile bietet sie bezüglich Fehlererkennung und –Korrektur gegenüber einer einfachen Paritätsprüfung?

Zweidimensionale Paritätssicherung: Nachricht wird in Blöcke von n Codewörtern mit Paritätsbit eingeteilt, am Ende jedes Blocks wird ein weiteres Codewort eingefügt.

Einfachfehler sind korrigierbar.

Bündelstörungen sind erkennbar ODER

2 Fehler sind in jedem Fall Erkennbar

B) Erklären Sie den Vorteil von Scrambling bezüglich Fehlererkennung nach der Datenübertragung, wenn keine Blocksicherung verwendet wird.

Es können Bündelstörungen erkannt werden, wenn nur 1 Bit je Codewort gestört wurde. Ohne Scrambling wäre ein Datenwort beim Auftreten einer Bündestörung mehrfach gestört => keine Korrektur mehr möglich

Nun wurden 3 Datenworte mit jeweils 4 Bit verschickt. Dabei wurden die gleichen Daten 2 Mal geschickt, wobei einmal eine Blocksicherung und einmal Scrambling verwendet wurde. Durch einen Fehler im System treten bei beiden Übertragungen 2 Bitfehler auf, die erkannt werden können. Benutzt wurde gerade Parität. Empfangen wurden die beiden Bitfolgen die für Blocksicherung in Tabelle 3-2 und für Scrambling in Tabelle 3-3 angegeben sind. Die Bits der Datenworte sind in beiden Tabellen gleich angeordnet.

	Datenworte				Parität
	1	1	0	1	1
	0	1	0	1	0
	0	0	1	0	1
Prüfwort	0	1	1	0	0

Tabelle 3-2: Blocksicherung - Empfangene Daten

Datenworte				Parität
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1

Tabelle 3-3: Scramling - Empfangene Daten

C) Wie lauten die 3 korrekten Datenworte? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Kombinieren Sie dazu die Daten aus Tabelle 3-2 und Tabelle 3-3.

Unter der Voraussetzung das je zwei Fehler aufgetreten sind:

Beim Scrambling ist in der ersten und dritten Zeile ein Fehler enthalten.

⇨ *Dem Scrambling kann man Datenwort 2 entnehmen: 1001*

Korrigieren des zweiten Datenwortes in Blocksicherung

⇨ *Damit wurden zwei Bit verändert (Fehler korrigiert)*

⇨ *Keine Fehler mehr vorhanden*

Datenwort 1: lautet 1101, Datenwort 2: 1001, Datenwort 3: 0010

Aufgabe 4 CMOS-Schaltnetze

In dieser Aufgabe soll eine digitale Grundschaltung in 2 Teilaufgaben analysiert werden.

Aufgabe 4.1 CMOS-Schaltnetz - Teil 1

Gegeben sei das folgende CMOS-Schaltnetz in Abbildung 4–1. In dieser Teilaufgabe soll schrittweise das Pull-Down-Schaltnetz G analysiert und das fehlerhafte Pull-Up-Schaltnetz F korrigiert werden.

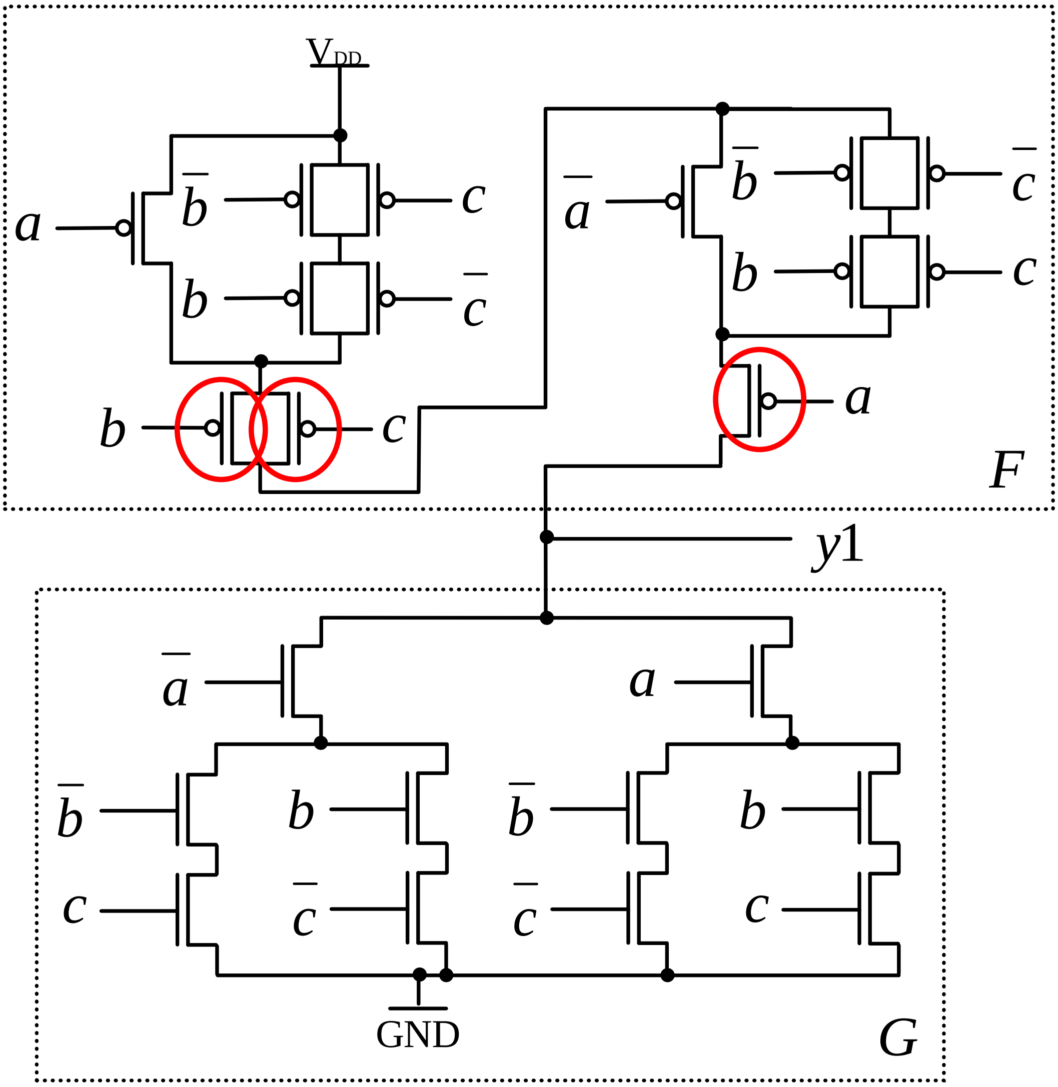


Abbildung 4–1: Fehlerhaftes CMOS-Schaltnetz

A) Geben Sie das Pull-Down-Schaltnetz G aus Abbildung 4–1 in DNF an.

$$G = \bar{a} \wedge (\bar{b}c \vee b\bar{c}) \vee a \wedge (bc \vee \overline{bc}) = \overline{ab}c \vee \bar{a}b\bar{c} \vee a\overline{bc} \vee abc$$

B) Bestimmen Sie das Pull-Up-Schaltnetz F in KNF, so dass die Funktion y_1 wohldefiniert und kurschlussfrei ist.

$$F = \bar{G} = \overline{\overline{ab}c \vee \bar{a}b\bar{c} \vee a\overline{bc} \vee abc} = (\overline{\overline{ab}c})(\overline{\bar{a}b\bar{c}})(\overline{a\overline{bc}})(\overline{abc})$$

$$= (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{a} \vee b \vee c) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c})$$

C) Überprüfen Sie das in Abbildung 4–1 gezeichnete Pull-Up-Schaltnetz F und markieren Sie die Transistoren, die man kurzschließen müsste, um eine wohldefinierte Schaltung zu erhalten.

Aufgabe 4.2 CMOS-Schaltnetz - Teil 2

Gegeben sei das folgende CMOS-Schaltnetz in Abbildung 4–2. In dieser Teilaufgabe sollen die Schaltnetze F‘ und G‘ analysiert werden.

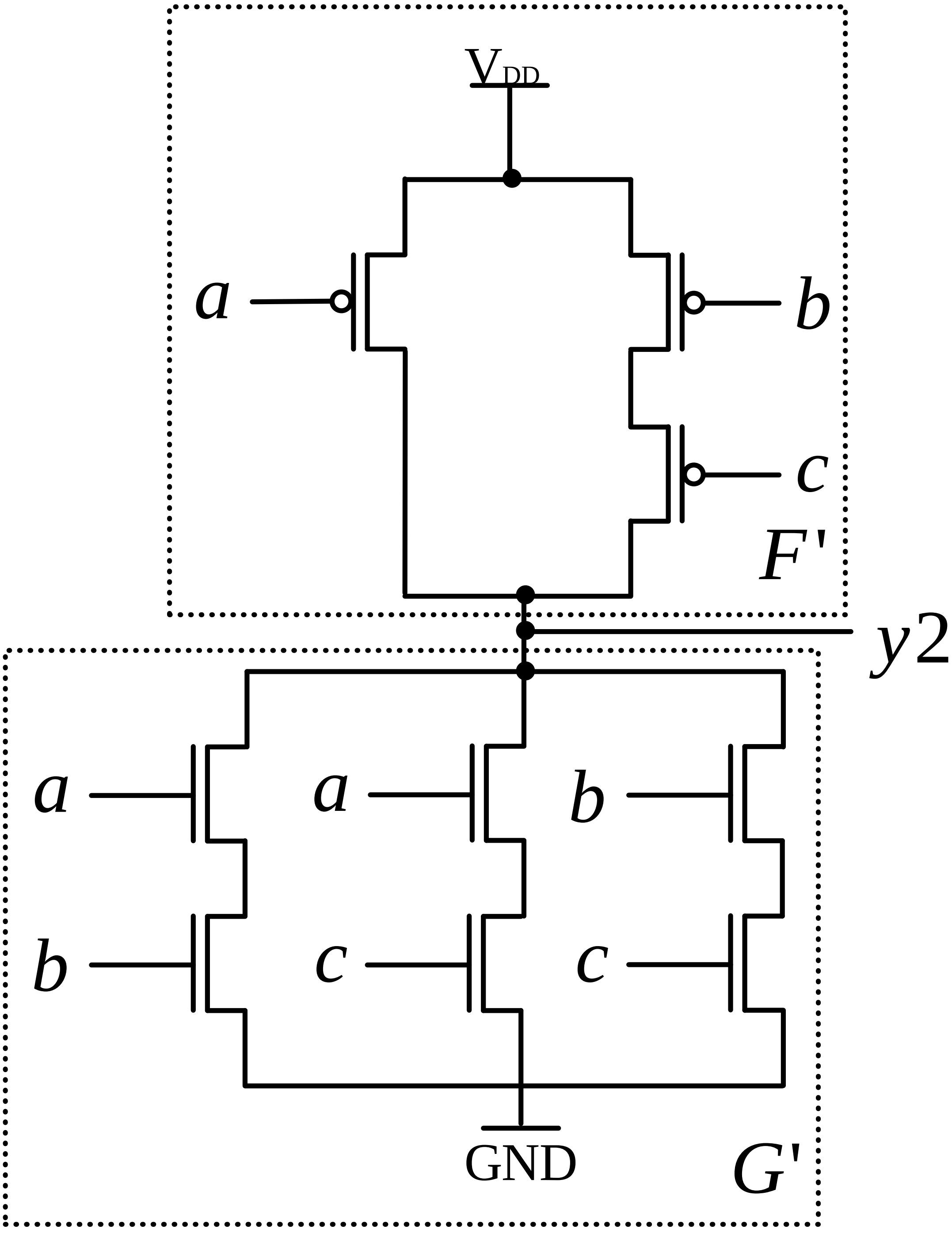


Abbildung 4–2: CMOS Schaltnetz

A) Geben Sie die Funktionen F‘ und G‘ an.

F‘ = $\bar{a} \vee (\bar{b} \wedge \bar{c})$ *(=* $\bar{a} \vee \bar{b}\bar{c}$*)*

G‘ = $(ab \vee bc \vee ac)$

B) Welche Bedingungen müssen die Pull-Up- und Pull-Down-Funktionen erfüllen, damit das CMOS-Schaltnetz in Abbildung 4–2 für alle möglichen Eingangsbelegungen einen definierten Ausgangspegel hat?

Kurzschlussfreiheit: $F' \wedge G' = 0$ *und*

Vollständigkeit: $F' \vee G' = 1$

oder

Wolhdefiniertheit: F = !G

C) Überprüfen Sie, ob das Schaltnetz mit F‘ und G‘ kurschlussfrei ist. Geben Sie alle Kurzschlusskombinationen an, falls die Schaltung nicht kurzschlussfrei ist.

$F' \wedge G' = 0$

$F' \wedge G' = (ab \vee bc \vee ac) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b}\bar{c})$

$= \bar{a}bc \neq 0$ *nicht fehlerfrei*

⇨ *Kurzschluss bei a=0, b=1, c=1*

Aufgabe 5 Automaten

Aufgabe 5.1 Automatenentwurf

In einem Empfänger wird eine Fehlererkennung mittels Paritätsprüfung realisiert. Der Empfänger signalisiert, wenn eine Übertragung gestartet (S) und beendet (E) wird. Zusätzlich setzt der Empfänger ein Signal (F) kurzzeitig (für einen Taktzyklus) auf '1', wenn ein Übertragungsfehler erkannt wird.

Es soll nun ein Automat entworfen werden, der die Signale des Empfängers mit Hilfe der drei Zustände „Warten“, „Übertragung“ und „Übertragungsfehler“ verarbeitet. Am Ausgang werden zwei Signale geliefert, welche anzeigen, wenn ein Paket vollständig empfangen wurde (UE) oder, ob während der Übertragung des Pakets ein Fehler aufgetreten ist (UF), so dass eine Neuübertragung des Pakets nötig ist.

Bei einem Übertragungsfehler soll sofort in den Zustand „Übertragungsfehler“ übergegangen werden. Der Fehlerzustand wird wieder verlassen, wenn ein Übertragungsende vorliegt. Die Eingangssignale S und E sind nie gleichzeitig aktiv.

Verwenden Sie zur Realisierung die folgenden Variablen und Namen:

Eingangsvariablen:

S: 0: Kein Beginn einer Übertragung erkannt

1: Beginn einer neuen Übertragung erkannt

E: 0: Kein Ende einer Übertragung erkannt

1: Ende einer laufenden Übertragung erkannt

F: 0: Kein Bitfehler erkannt

1: Bitfehler während einer laufenden Übertragung erkannt

Ausgangsvariablen:

UE: 0: Übertragung eines Pakets nicht abgeschlossen

1: Übertragung eines Pakets abgeschlossen

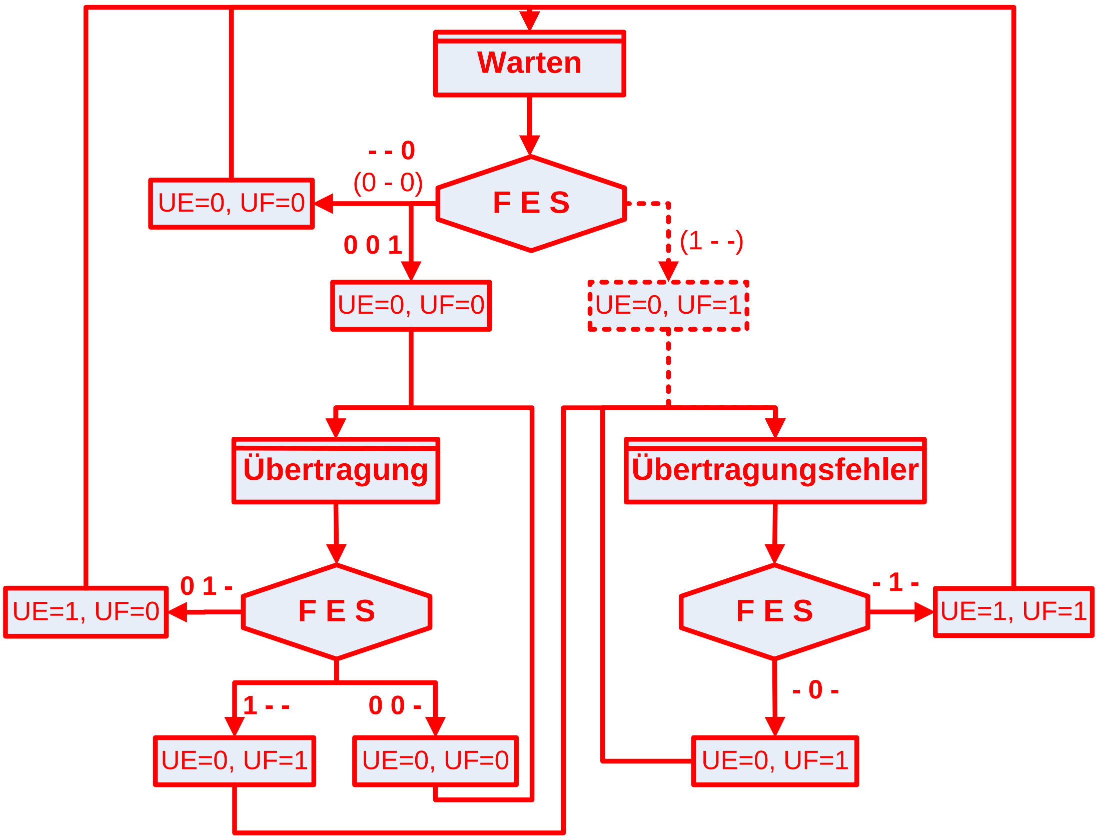
UF: 0: Während der Übertragung des empfangenen Pakets sind keine Bitfehler aufgetreten

1: Während der Übertragung des empfangenen Pakets sind Bitfehler aufgetreten

Zustandsnamen:

„Warten“ (S0), „Übertragung“ (S1), „Übertragungsfehler“ (S2)

A) Entwerfen Sie das Ablaufdiagramm für eine Realisierung als Mealy-Automat. Nutzen Sie dabei die Eigenschaften des Mealy-Automaten um Übertragungsfehler oder das Übertragungsende im selben Taktzyklus zu signalisiert indem das Ereignis auftritt.



B) Erstellen Sie eine Ablauftabelle des Automaten. Verwenden Sie dazu die voregebene Tabelle 5-1.

	Q^v			Eingang		Q^{v+1}		Ausgang	
	q_2^v	q_1^v	F	E	S	q_2^{v+1}	q_1^{v+1}	UF^v	UE^v
S0	0	0	-	-	0	0	0	0	0
			0	0	1	0	1	0	0
			1	-	-	*1*	*0*	*1*	*0*
S1	0	1	0	0	-	0	1	0	0
			0	1	-	0	0	0	1
			1	-	-	1	0	1	0
S2	1	0	-	0	-	1	0	1	0
			-	1	-	0	0	1	1

Tabelle 5-1: Ablauftabelle des Automaten

Aufgabe 5.2 Flip-Flop Ansteuerfunktion

A) Nun sei folgende Ablauftabelle (Tabelle 5-2) gegeben. Ermitteln Sie die Ansteuerfunktion der zwei JK Flip-Flops. Verwenden Sie, falls möglich, Freistellen.

	Q^v		E		Q^{v+1}		Y / A		JK FF 2		JK FF 1	
	q_2^v	q_1^v	e_2	e_1	q_2^{v+1}	q_1^{v+1}	a_2^v	a_1^v	J	K	J	K
S0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	-	-	0
			0	1	0	0			0	-	-	1
			1	0	1	1			1	-	-	0
			1	1	1	0			1	-	-	1
S1	1	0	0	0	1	0	0	1	-	0	0	-
			0	1	0	1			-	1	1	-
			1	0	0	0			-	1	0	-
			1	1	1	1			-	0	1	-
S2	1	1	0	0	1	1	0	0	-	0	-	0
			0	1	1	0			-	0	-	1
			1	0	0	1			-	1	-	0
			1	1	0	0			-	1	-	1
S3	0	0	0	0	0	0	1	1	0	-	0	-
			0	1	1	1			1	-	1	-
			1	0	1	0			1	-	0	-
			1	1	0	1			0	-	1	-

Tabelle 5-2: Ablauftabelle des Automaten

B) Um welchen Automatentyp handelt es sich bei dem in Aufgabenteil A) realisierten Automaten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Moore Automat, da die Ausgabe y nur vom Zustand q_n abhängt.

Aufgabe 6 Minimierung

Aufgabe 6.1 Petrickausdruck

Ohne Streichungsregeln anzuwenden hat ein Entwickler aus der Übertragungstabelle einer Schaltfunktion den folgenden Petrickausdruck gebildet:

$$PA = (a \lor b \lor f)\&(b \lor d)\&(a \lor c)\&(b \lor e \lor f)\& c \& (a \lor c \lor e)$$

Um den Ausdruck nicht vollständig ausdistribuieren zu müssen, soll zunächst die Überdeckungstabelle wiedergewonnen werden.

A) Ergänzen Sie die untenstehende Überdeckungstabelle entsprechend des gegebenen Petrickausdrucks, ohne diesen zu vereinfachen. Die überdeckenden Größen sind durch die Präsenzvariablen a, b, c, d, e und f gegeben.

Die zu überdeckenden Größen E_i werden entsprechend der Reihenfolge wie sie im Petrickausdruck auftauchen (links nach rechts), aufsteigend von E_1 bis E_n indiziert.

pi/Ei	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	
a	x		x			x	
b	x	x		x			
c			x		x	x	
d		x					
e				x		x	
f	x			x			

Tabelle 6-1: Überdeckungstabelle 1

B) Bestimmen Sie alle Kerne aus Tabelle 6-1 und markieren Sie die entsprechende(n) Zellen(n).

Kernspalte(n):

E_5

Aufgabe 6.2 Verfahren nach Petrick

In den folgenden Teilaufgaben sollen verschiedene Schritte des Petrick-Verfahrens durchgeführt werden.

A) Wenden Sie die Spaltendominanzregel auf Tabelle 6-2 an. Welche Spalte(n) können gestrichen werden? Streichen Sie die entsprechende(n) Spalte(n) und geben Sie die dominierte(n) und zugehörigen dominierende(n) Spalte(n), sowie die streichbaren Spalte(n) an.

pi/Ei	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a			X	X		X		X
b		X			X	X	X	
c		X			X			
d	X			X			X	X
e		X	X			X		X
f	X			X				
g		X						
h				X				

Tabelle 6-2: Überdeckungstabelle 2

Dominierende Spalte(n):	E_4	E_2	E_8	E_6			
<u>Dominierte</u> Spalte(n):	E_1	E_5	E_3	E_3			
Streichbare Spalte(n):	E_4	E_2	E_8	E_6			

<u>Hinweis:</u> Die folgenden Teilaufgaben können und sollen vollkommen unabhängig von der vorherigen Aufgabe gelöst werden.

B) Wenden Sie nun die <u>Zeilendominanzregel</u> auf die bereits reduzierte Tabelle 6-3 an. Welche Zeile(n) können gestrichen werden? <u>Streichen Sie</u> die entsprechende(n) <u>Zeile(n) und die Spalte(n)</u> die durch dominierende Zeilen überdeckt werden. Geben Sie die dominierte(n) und zugehörigen dominierende(n) Zeile(n), sowie die streichbaren Zeile(n) in der Tabelle an. Beachten Sie dabei, dass minimale Kosten (gegeben in *gate equivalent* (*GE*)) entstehen sollen. Neu entstandene Kerne dürfen mitverwendet werden. Führen Sie also das Patrick-Verfahren zu Ende.

$p_i \backslash N_i$	E_1	E_3	E_5	E_8	E_{10}	E_{11}	E_{13}	Kosten
a		X			X		X	6 GE
b		X	X			X	X	2 GE
f			X		X			7 GE
i	X				X			3 GE
l		X		X				8 GE
m	X			X			X	5 GE
n				X				1 GE
q		X				X		4 GE

Tabelle 6-3: Reduzierte Überdeckungstabelle

Dominierende Zeile(n):	**b**	**i/a**	**i**	**n/m**	**n**		
<u>Dominierte</u> Zeile(n):	**q**	**f**	**a**	**l**	**m**		
Streichbare Zeile(n):	**q**	**f**	**a**	**l**	**m**		

C) Geben Sie die Präsenzvariablen (p_i) für die in Teilaufgabe B) gefundenen Überdeckung an.

Überdeckung:

b, i, n

Aufgabe 6.3 Symmetriediagramm

Gegeben sei folgendes Symmetriediagramm der Schaltfunktion G:

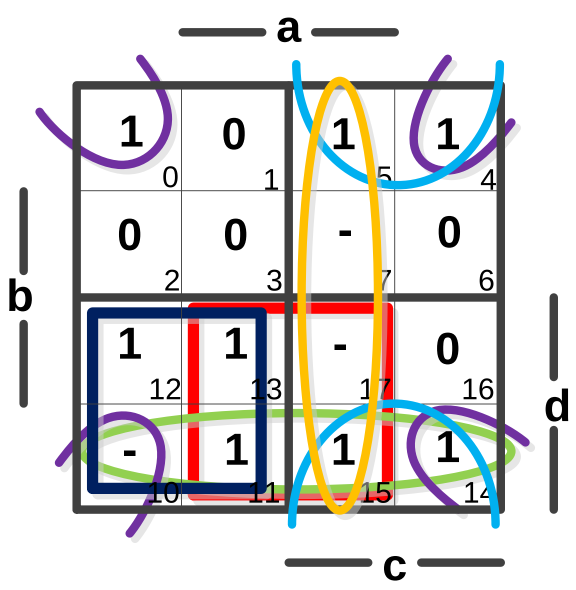


Abbildung 6–1: Symmetriediagramm

A) Geben Sie **alle** möglichen Primterme für eine vollständige Einsstellenüberdeckung der Funktion G aus Abbildung 6–1 an. Verwenden Sie zur Blockbildung auch die Freistellen.

$\bar{a}\bar{b}$, $c\bar{b}$, $\bar{b}d$, $\bar{c}d$, ac, ad

B) Geben Sie die Minimal-Überdeckung der durch das Symmetriediagramm repräsentierten Funktion an, falls dies eindeutig ist. Sollte dies nicht der Fall sein begründen Sie dies. Die Implementierungskosten pro Term entsprechen der Anzahl an enthaltener Literale.

Alle Terme haben gleiche Kosten => Kosten können vernachlässigt werden

$\bar{c}d$ *und* $\bar{a}\bar{b}$ *überdecken Kerne und müssen damit Teil jeder*

Nur zwei Einsstellen sind nicht durch $\bar{c}d$ *und* $\bar{a}\bar{b}$ *überdeckt.*

Die übrigen beiden Einsstellen lassen sich durch ac *oder* $c\bar{b}$ *mit nur einem Term überdecken*

⇨ *Es gibt zwei minimale Lösungen:* $\bar{c}d + \bar{a}\bar{b} + ac$ *ODER* $\bar{c}d + \bar{a}\bar{b} + c\bar{b}$

Aufgabe 7 Polyadische Zahlensysteme

Aufgabe 7.1 BCD

A) Addieren Sie die im Dezimalsystem gegebenen Zahlen 167_D und 359_D im BCD Code. Stellen Sie ihren Lösungsweg – inklusiv aller notwendigen Korrekturschritte – ausführlich dar.

	BCD			Dezimalsystem
	0001	0110	0111	167
+	0011	0101	1001	+359
	-11-	1111	111-	
=	0100	1100	0000	
Korr. wegen:.		Ps.	Üb.	
	0100	1100	0000	
+		0110	0110	
	---1	1--	----	
=	0101	0010	0110	(526)

Aufgabe 7.2 Konvertierung

A) Gegeben ist folgende Gleichung, bei der nicht alle Zahlensysteme bekannt sind:

$$\mathbf{223_{H/O} + 1000\ 0100_{BCD/B} = 347_{D/O}}$$

Die möglichen Zahlensysteme der Zahlen sind als Indizes angegeben. Bestimmen Sie rechnerisch, um welche Zahlensysteme es sich handeln muss. Dokumentieren Sie Ihren Lösungsweg und geben Sie die korrekte Gleichung mit den entsprechenden Zahlensystemen an.

Konvertierung:

223H = 547D
223O = 147D
10000100BCD = 84D
10000100B = 132D
347O = 231D

Proberechnung:

$547_D + 84_D = 631_D$
$547_D + 132_D = 679_D$
$147_D + 84_D = 231_D$
$147_D + 132_D = 279_D$

Korrekte Gleichung:

$\underline{223_O + 10000100_{BCD} = 347_O}$

B) Wandeln Sie die gegebenen Zahlen aus Tabelle 7-1 in das angegebene Ziel-Zahlensystem um. Das ursprüngliche Zahlensystem (Basis) ist als Index angegeben. Geben Sie den Rechenweg an.

Gegeben	Ziel-Zahlen-system	Rechenweg	Gesucht
263_7	9	Dezimal: $263_7 = 2*49 + 6*7 + 3 = 143_D$ $143_D : 9 = 15$ Rest 8 $15_D : 9 = 1$ Rest 6 $1_D : 9 = 0$ Rest 1	168_9
3720_8	16	Binär: *(011 111 010 000)* 0111 1101 0000	$7D0_{16}$

Tabelle 7-1: Zahlensystemkonvertierung

Aufgabe 7.3 Zweierkomplement

A) Subtrahieren Sie die im Dezimalsystem gegebene Zahl 213_D von 174_D. Führen Sie diese Rechnung komplett im binären Zahlensystem durch. Stellen Sie ihren Lösungsweg – inklusive aller notwendigen Schritte – ausführlich dar. Geben Sie anschließend das Ergebnis im dezimalen Zahlensystem an.

Konvertierung:

$213_D = 0\ 1101\ 0101_B$
$174_D = 0\ 1010\ 1110_B$

Zweierkomplementdarstellung von -213D:

1 0010 1010B + 1B = 1 0010 1011B

Addieren des Zweierkomplements von -213D zu 174D:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & & & 1 & & 1 & 1 & 1 & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Das Ergebnis ist negativ. Den Betrag des Ergebnisses erhält man durchs Bilden des Zweierkomplements des Ergebnisses:

0 0010 0110B + 1B = 0 0010 0111B

Das Ergebnis lautet somit -39D.

Aufgabe 8 Mengen, Relationen und Graphen

Aufgabe 8.1 Graphen

Gegeben ist der folgende gerichtete Graph

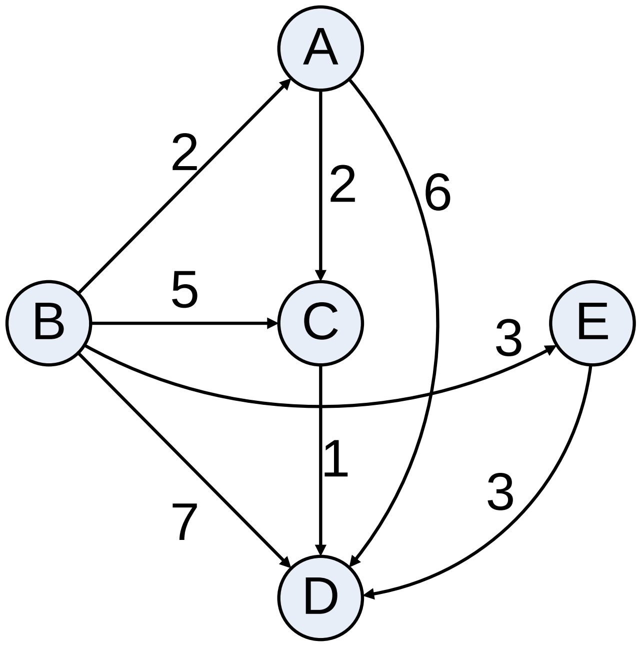


Abbildung 8–1: Gerichteter Graph

A) Der Graph in Abbildung 8–1 repräsentiert eine Relation. Um welche Art von Relation handelt es sich und welche Eigenschaften hat diese? Begründen Sie jede Eigenschaft mit Bezug auf den Graph.

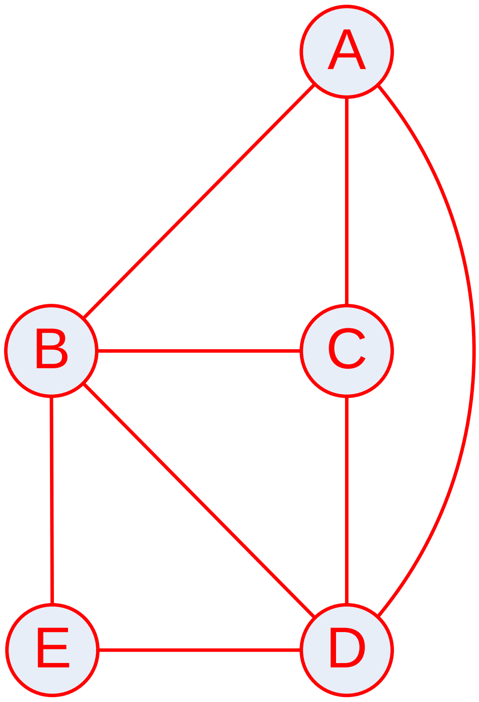
Antireflexiv: es gibt keine Schlingen

Antisymetrisch: keine antiparallelen Kanten

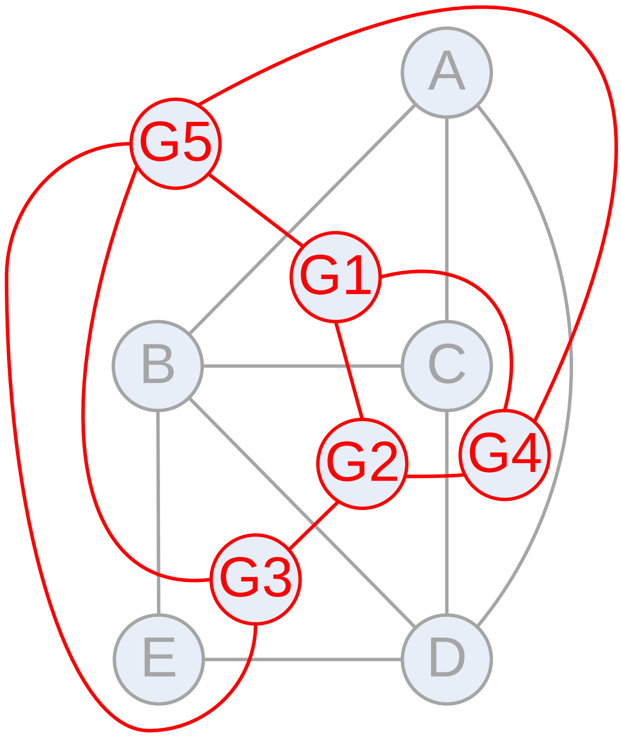
Transitiv: aus a ~ b und b ~ c folgt a ~ c, für alle Knoten erfüllt

⇨ *Strege Ordnungsrelation*

B) Überführen Sie den Graph aus Abbildung 8–1 in einen ungerichteten Graph und stellen Sie diesen kreuzungsfrei/planar dar.



C) Zeichnen Sie nun den dualen Graph zum ungerichteten planaren Graph aus Teilaufgabe B).



D) Geben Sie die Knotenmenge der größten Clique des ungerichteten Graphen aus Teilaufgabe B) an.

Knotenmenge der größten Clique: {A, B, C, D}

E) Warum handelt es sich beim gegebenen Graph (Abbildung 8–1) nicht um einen Baum?

Knoten C und D sind über mehrere Pfade erreichbar

oder

Geschlossener Kantenzug (Zyklus) im ungerichteten Graph aus B)

F) Geben Sie Startknoten (Eingangsgrad=0) und Zielknoten (Ausgangsgrad=0) des Graphen aus Abbildung 8–1 an. Welche Kantenprogression repräsentiert den kürzesten Weg zwischen Start- und Zielknoten?

- *Start: B*
- *Ziel: D*
- *Kürzester Weg: B → A → C → D*