

Digitaltechnik

Klausur Wintersemester 14/15



Institut für Technik der Informationsverarbeitung – ITIV

Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

Digitaltechnik

Datum: 19.03.2015

Name:

Matrikel-Nr.:

ID:

Hörsaal:

Sitzplatznummer.:

Hinweise zur Klausur

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel zur Prüfung sind drei Seiten vorgegebene und ein DIN A4 Blatt selbst geschriebene Formelsammlung zugelassen. Nicht erlaubt hingegen sind die Verwendung eines Taschenrechners, andere elektronische Geräte, zusätzliche Unterlagen und jegliche Kommunikation mit anderen Personen.

Prüfungsdauer

Die Prüfungsdauer beträgt für die Klausur 120 Minuten.

Prüfungsunterlagen

Die Prüfungsunterlagen bestehen aus insgesamt 32 Seiten Aufgaben- und Lösungsblättern (einschließlich diesem Titelblatt, acht Aufgabenblöcke und einem zusätzlichem Lösungsblatt). Weiterhin sind drei zusätzliche Seiten Formelsammlung enthalten.

Bitte prüfen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben auf jeder Seite oben Ihren Namen sowie ihre Matrikelnummer.

Auf jedes zusätzliche Lösungsblatt ist neben dem Namen auch die Aufgabennummer mit einzutragen. **Vermeiden Sie generell das Beschreiben der Rückseiten.**

Am Ende der Prüfung sind alle 32 Seiten Aufgaben- und Lösungsblätter, einschließlich diesem Titelblatt, und alle zusätzlichen verwendeten Lösungsblätter abzugeben.

Verwenden Sie zum Bearbeiten der Aufgaben lediglich dokumentenechte Schreibgeräte – insbesondere keinen Bleistift sowie Rotstifte!

Prüfungsaufgaben

Wenn nicht anders vorgegeben ist zu jeder Aufgabe ein detaillierter Rechenweg anzugeben. Lösungen ohne Rechenweg können trotz richtigem Ergebnis zu Punktabzug führen.

Aufgabe 1	Codierung und Fehlerbehandlung	S.2	~12%
Aufgabe 2	Mengen, Relationen und Graphen	S.5	~11%
Aufgabe 3	Boolsche Algebra	S.9	~12%
Aufgabe 4	Zahlensysteme und Codierung	S.13	~12%
Aufgabe 5	Minimierung Boolescher Funktionen	S.15	~13%
Aufgabe 6	Optimale Codes	S.19	~11%
Aufgabe 7	Automaten	S.23	~14%
Aufgabe 8	CMOS	S.26	~13%
		Σ	

Aufgabe 1 Codierung und Fehlerbehandlung**Aufgabe 1.1 Allgemeine Fragen**

- A) Welchen Informationsgehalt besitzt das Würfeln einer „6“ bei einem Standardwürfel. Geben Sie alle Formeln und Rechenwege an.

- B) Welche Hammingdistanz besitzen zwei aufeinanderfolgende Codeworte bei einer Gray-Code Codierung.

- C) Gegeben Sei eine Gray-Code Codierung. Können Sie dadurch eine Aussage über die Fehlerkorrektureigenschaften treffen? Begründen Sie Ihre Antwort.

- D) Welche Verfahren haben Sie in der Vorlesung kennengelernt um Einzelfehler zu erkennen? Geben Sie mindestens zwei mögliche Verfahren an.

- E) Berechnen Sie die notwendige minimale Hammingdistanz um Zweifachfehler korrigieren zu können. Geben Sie alle Formeln und Rechenschritte an.

Aufgabe 1.2 Digitalisierung

Gegeben sei der in Abbildung 1-1 dargestellte Signalverlauf:

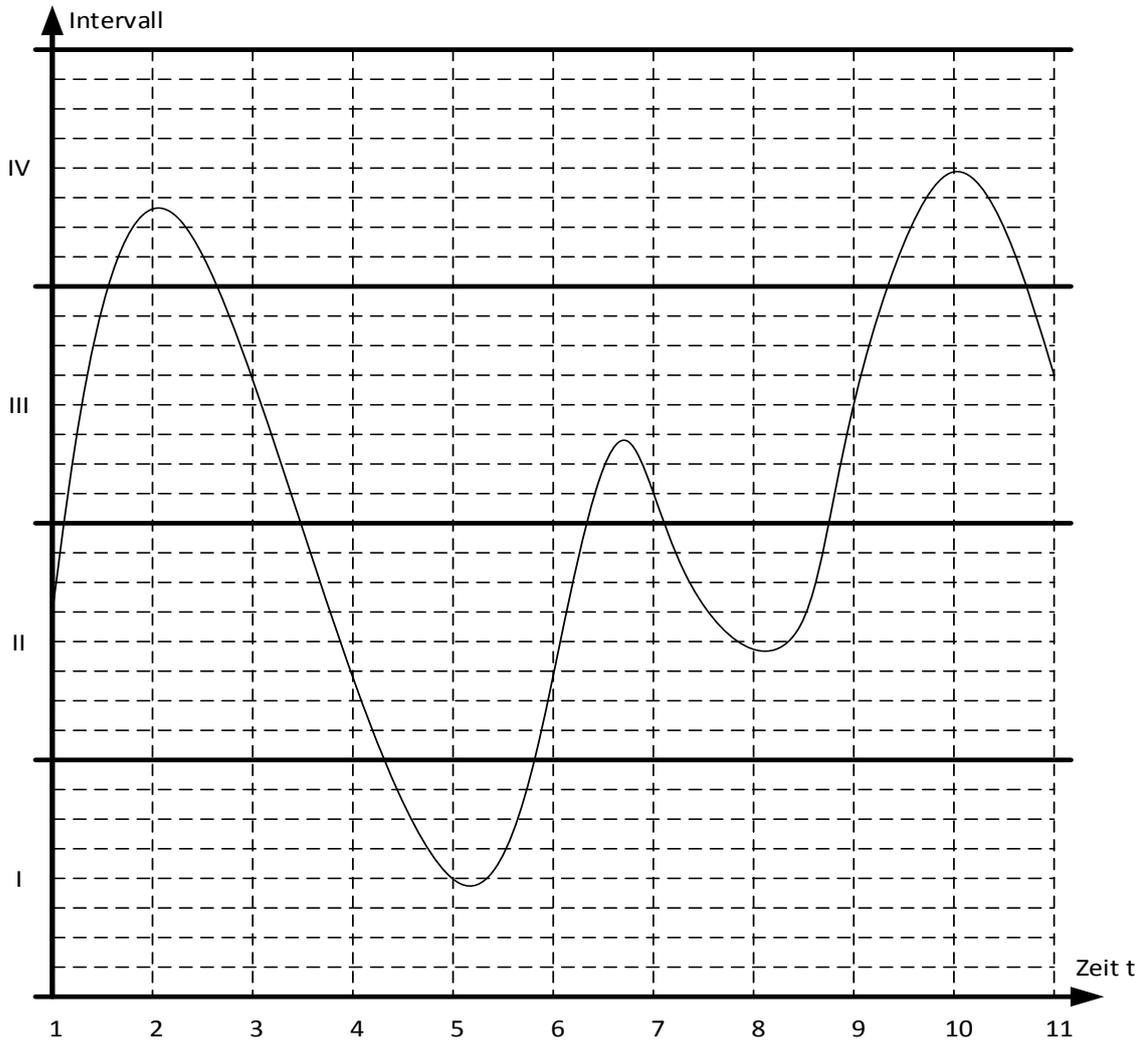


Abbildung 1-1: Analoger Signalverlauf

- A) Zeichnen Sie für jeden Intervallübergang einen undefinierten Bereich ein. Die Größe jedes undefinierten Bereichs soll insgesamt halb so groß sein, wie ein einzelnes Intervall.
- B) Nennen Sie einen Vorteil, den undefinierte Bereiche bei der Digitalisierung von analogen Signalen bieten.

- C) Digitalisieren Sie das in Abbildung 1-1 dargestellte Signal indem Sie jedem Zeitpunkt t eine (3 aus 4) – Codierung zuweisen. Dabei sollen die Dezimalwerte der Codierung absteigend den Intervallen zugeordnet werden.

Aufgabe 1.3 Blocksicherung und Scrambling

Sie haben die folgende Bitfolge empfangen, welche eine Zeichenfolge in ASCII Codierung darstellt:

11111111 00110110 01010101 10100010 01001111 00011011 10110101 01011111

Bei der Übertragung wurde ein Fehlersicherungsverfahren angewendet.

- A) Gehen Sie davon aus, dass die Bitfolge mit Scrambling und Blocksicherung mit gerader Quersummenbildung übertragen wurde. Dekodieren Sie die Bitfolge und geben Sie die übertragene Nachricht wieder.

Aufgabe 2 Mengen, Relationen, Graphen**Aufgabe 2.1 Allgemeines**

- A) Geben Sie für die in Tabelle 2-1 gegebenen Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.

Bei falscher Antwort gibt es Punktabzug. Die Aufgabe wird minimal mit 0 Punkten bewertet.

	Wahr	Falsch
Für den Durchschnitt V zweier Mengen S und T gilt: $V = S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ und } x \in T\}$		
Die Menge aller Untermengen einer Menge M heißt Potenzmenge P von M		
Ein ungerichteter Graph kann nicht immer als gerichteter Graph dargestellt werden		
Ein Baum ist ein zyklischer, zusammenhängender Graph		
\leq ist eine strenge Ordnungsrelation		
Die Planarität eines Graphen ist notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines dazugehörigen dualen Graphen		

Tabelle 2-1: Allgemeines

Aufgabe 2.2 Mengen und Relationen

- A) Zeichnen Sie einen gerichteten Graphen mit exakt 3 Knoten, welcher eine Ordnungsrelation darstellt. Geben Sie hierfür zunächst die einzelnen Eigenschaften und deren mathematische Definition zur Erfüllung dieser Relation an.

B) Gegeben seien die folgenden Mengen:

$$U = \{3, 5, 7, 9\}$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$W = \{8, 9, 0\}$$



- i. Wie viele Elemente hat die Potenzmenge P von W ? Geben Sie die vollständige Potenzmenge an.

- ii. Bestimmen Sie die folgenden Mengen und Größen:

$$|U \times V \times W| =$$

$$(V \cap W) \times U =$$

$$C_V(U) =$$

Aufgabe 2.3 Graphen

Gegeben sei der in Abbildung 2-1 dargestellte ungerichtete Graph G:

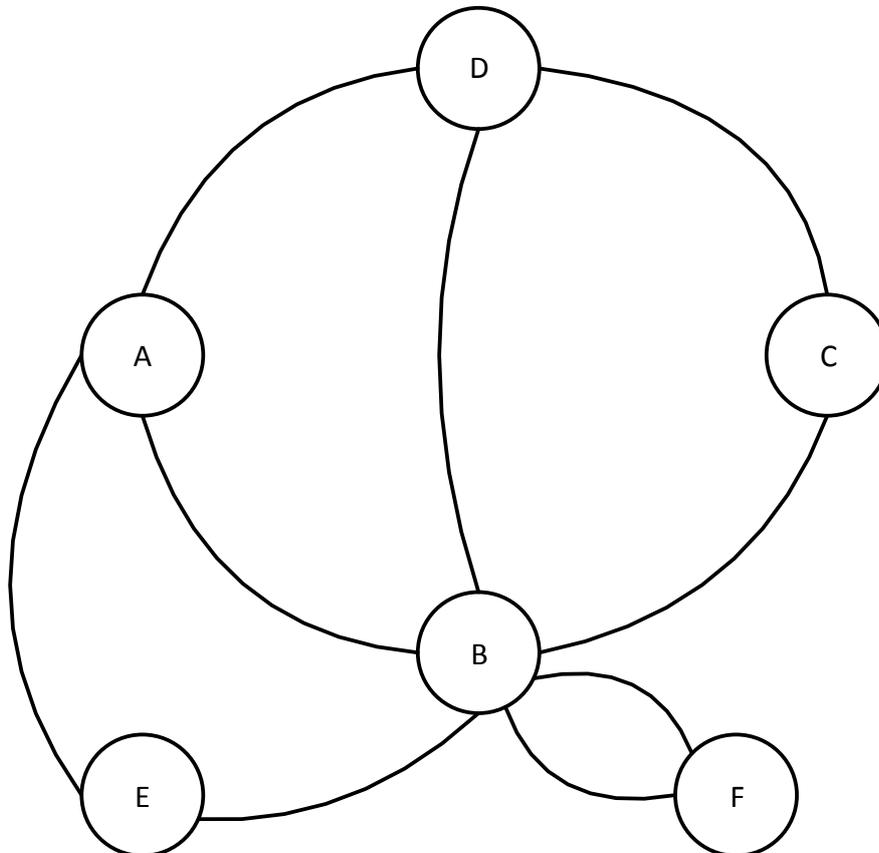
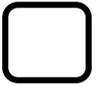


Abbildung 2-1: Ungerichteter Graph

- A) Konstruieren Sie aus dem Graph G in Abbildung 2-1 den dualen Graphen. Kennzeichnen Sie dabei die überführten Knoten eindeutig. Sie können Ihr Ergebnis auch direkt in die Abbildung 2-1 einzeichnen.

Aufgabe 3 Boolesche Algebra**Aufgabe 3.1 Entwicklungssatz**

Gegeben sei folgende boolesche Funktion:

$$x(d, c, b, a) = (a \rightarrow b)\bar{c}d \vee a(c \equiv d) \vee (a \oplus b) \vee \bar{a}\bar{b}c \vee (\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d})$$

- A) Formen Sie die Funktion $x(d,c,b,a)$ so um, dass er sich mit dem Entwicklungssatz nach Shannon entwickeln lässt. Also so, dass nur noch UND, ODER und NICHT Gatter verwendet werden.



- B) Beschreiben Sie kurz zwei Einsatzmöglichkeiten des Entwicklungssatzes der Schaltalgebra in der Digitaltechnik.



Gegeben sei nun folgende boolesche Funktion:

$$x(d, c, b, a) = (\bar{a}\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{c}\bar{d} \vee \bar{b}\bar{c}d \vee ab\bar{d} \vee \bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b})$$

- C) Entwickeln Sie den Ausdruck y mit Hilfe des Booleschen Entwicklungssatzes in der Reihenfolge d, c, b, a . Geben Sie alle Zwischenergebnisse an.



Matr.-Nr.:

Name:

ID:

Aufgabe 3.2 Normalformtheorem

Gegeben sei die in Tabelle 3-1 dargestellte Wahrheitstabelle der Funktion $y(c,b,a)$:

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabelle 3-1: Wahrheitstabelle der Funktion y

A) Geben Sie die disjunktive Normalform der Funktion $y(c,b,a)$ an:

B) Geben Sie eine disjunktive Minimalform der Funktion $y(c,b,a)$ an:

C) Definieren Sie den Begriff „Maxtermfunktion“:

D) Geben Sie eine Definition des Begriffes „Schaltnetz“ an:

Aufgabe 3.3 Multiplexer-Realisierung

Gegeben sei die folgende Funktion $z(a,b,c,d)$

$$z(a, b, c, d) = \bar{a}(1) \vee a(c(0) \vee \bar{c}(\bar{b}(1) \vee b(\bar{d}(1) \vee d(0))))$$

- A) Die bereits entwickelte Funktion z soll für eine Field Programmable Gate Array (FPGA) Realisierung mit 2:1 Multiplexern umgesetzt werden. Die Eingangsliterale a, b, c, d sollen dabei ausschließlich als Steuersignale genutzt werden. Zeichnen Sie die minimale Multiplexerschaltung.



Aufgabe 4 Zahlensysteme und Codierung**Aufgabe 4.1 Umrechnung von Zahlensystemen**

- A) Vervollständigen Sie die offenen Felder in der Tabelle 4-1 indem Sie die offenen Felder durch die entsprechende Konvertierung ergänzen.



Dezimal	Binär	Oktal	Hexadezimal
1934 _D			
	11000100110 _B		
		536 _O	
			DA5 _H

Tabelle 4-1: Umrechnung von Zahlensystemen

Aufgabe 4.2 Rechenoperationen im Binärsystem

Abbildung 4-1 zeigt eine Darstellung von Fließkommazahlen mit 16 Bit. Das höchstwertige Bit stellt das Vorzeichen V dar, die nachfolgenden acht Bits den Exponenten E und die niederwertigsten sieben Bits die Mantisse M.

V	E ₇	E ₆	E ₅	E ₄	E ₃	E ₂	E ₁	E ₀	M ₆	M ₅	M ₄	M ₃	M ₂	M ₁	M ₀
---	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

Abbildung 4-1: 16 Bit Fließkommazahlenformat

- A) Stellen Sie die Zahl **-0,09375_D** in der angegebenen normierten 16-Bit-Fließkommazahlendarstellung dar. Geben Sie die Zwischenschritte bei der Umrechnung an.



V	E ₇	E ₆	E ₅	E ₄	E ₃	E ₂	E ₁	E ₀	M ₆	M ₅	M ₄	M ₃	M ₂	M ₁	M ₀

- B) Addieren Sie die zwei in der normierten 16-Bit-Fließkommazahlendarstellung gegebenen Zahlen in Abbildung 4-2 miteinander. Geben Sie das Ergebnis ebenfalls in dieser Darstellung an.

	V	E ₇	E ₆	E ₅	E ₄	E ₃	E ₂	E ₁	E ₀	M ₆	M ₅	M ₄	M ₃	M ₂	M ₁	M ₀
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
+	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
=																

Abbildung 4-2: Addition von Fließkommazahlen

Aufgabe 4.3 Stibitz-Code

- A) Führen Sie eine Addition der Zahl 436_D von der Zahl 813_D im STIBITZ-Code durch. Geben Sie die Zwischenschritte bei der Berechnung an.

	Dezimal	STIBITZ-Code
	813 _D	
+	436 _D	
=		

Aufgabe 5 Minimierung digitaler Funktionen**Aufgabe 5.1 Symmetriediagramm**

Gegeben sei das in Abbildung 5-1 dargestellte Symmetriediagramm:

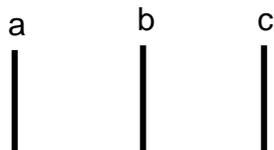
	— a —			
	0	1	5	4
	0	1	1	1
b	1	1	1	0
	2	3	7	6
	— c —			

Abbildung 5-1: Symmetriediagramm

A) Geben Sie die Funktion in der DNF an:

B) Geben Sie die Funktion in der DMF an:

C) Zeichnen Sie die zugehörige Schaltung zur Disjunktiven Minimalform. Verwenden Sie ausschließlich NOT, AND und OR Gatter.



- D) Wie viele Gatter (NOT, AND und OR) lassen sich in diesem Beispiel durch die DMF im Vergleich zur DNF einsparen?

Aufgabe 5.2 Verfahren nach Nelson

Gegeben ist die Boolesche Funktion $f(a,b,c,d)$ in Abbildung 5-2.

				— a —			
		1	0	0	1		
		0	1	5	4		
b	1	-	1	1			
	2	3	7	6			
	0	0	-	1			
	12	13	17	16			
		0	-	-	1		
		10	11	15	14		
				— c —			
		d					

Abbildung 5-2: Symmetriediagramm 2

- A) Stellen Sie die Einsvervollständigung f^E der Funktion als konjunktive Normalform dar.

- B) Ermitteln Sie mit Hilfe des Nelson-Verfahren alle Primimplikanten der Funktion g^E .

$$g^E = (a \vee b \vee c \vee d)(a \vee \bar{b} \vee c \vee d)(\bar{a} \vee b \vee c \vee d)(\bar{a} \vee b \vee \bar{c} \vee d)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c \vee \bar{d})$$



Aufgabe 5.3 Verfahren nach Petrick

- A) Gegeben ist der folgende Petrickausdruck:

$$PA = b \& (a \vee c \vee f) \& (b \vee e \vee f) \& (a \vee c \vee e \vee f) \& (b \vee d) \& (a \vee c \vee e)$$

Ergänzen Sie die in Tabelle 5-1 gegebene Überdeckungstabelle entsprechend des gegebenen Petrickausdrucks, ohne diesen zu vereinfachen. Die überdeckenden Größen sind durch die Präsenzvariablen a, b, c, d, e und f gegeben.

Die zu überdeckenden Größen E_i werden entsprechend der Reihenfolge wie Sie im Petrickausdruck auftauchen (links nach rechts), aufsteigend von E_1 bis E_n indiziert.

$p_i \setminus E_i$							
a							
b							
c							
d							
e							
f							

Tabelle 5-1: Überdeckungstabelle 1



Nun ist die in Tabelle 5-2 dargestellte Überdeckungstabelle gegeben

$p_i \backslash E_j$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
a			X		X	
b		X				X
c		X	X			X
d	X			X		
e		X		X		
f	X	X	X			X

Tabelle 5-2: Überdeckungstabelle 2

- B) Bestimmen Sie alle Kernspalte(n) in Tabelle 5-2 und markieren Sie die entsprechende(n) Zelle(n).

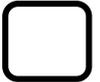
Kernspalte(n):

- C) Wenden Sie nun die Spaltendominanzregeln an. Welche Spalte(n) können gestrichen werden? Geben Sie die entsprechenden Spalte(n) unten an.

Dominierende Spalte(n):

Dominierte Spalte(n):

Streichbare Spalte(n):

Aufgabe 6 Optimale Codes

Ein Automobilhersteller möchte die zu speichernden Daten pro Fahrzeug minimieren. Hierzu wird eine Tabelle erstellt, welche die Auftrittshäufigkeit der Fahrzeuge in einer bestimmten Farbe aufzeigt.

Eine per Hand geführte Zählung hat dabei die in Tabelle 6-1 dargestellte Verteilung der verschiedenen Farben ergeben.

Da der zur Verfügung stehende Speicher relativ klein ist, soll zum Abspeichern der Werte eine optimale Codierung zum Einsatz kommen. Zu beachten ist, dass bei diesem Speicher eine '0' geringfügig effizienter abgelegt werden kann als eine '1'.

Farbe	Weiß	Schwarz	Silber	Rot	Blau	Grün
Häufigkeit	25%	10%	22%	13%	14%	16%

Tabelle 6-1: Häufigkeiten der Fahrzeugfarben

Aufgabe 6.1 Huffman-Codierung

Ein Berater des Herstellers ist Elektrotechniker und hat dafür eine Huffman-Codierung vorgeschlagen und dafür schon einen Codebaum entworfen.

- A) Vervollständigen Sie den Huffman-Codierbaum in Abbildung 6-1, indem Sie die Farben an den jeweils zugehörigen Blättern eintragen. Geben sie alle dafür notwendigen Schritte an und tragen Sie die Zahlen entsprechend ein. Berücksichtigen sie, dass die Äste mit höchster Auftrittswahrscheinlichkeit am effizientesten Codiert werden sollen.

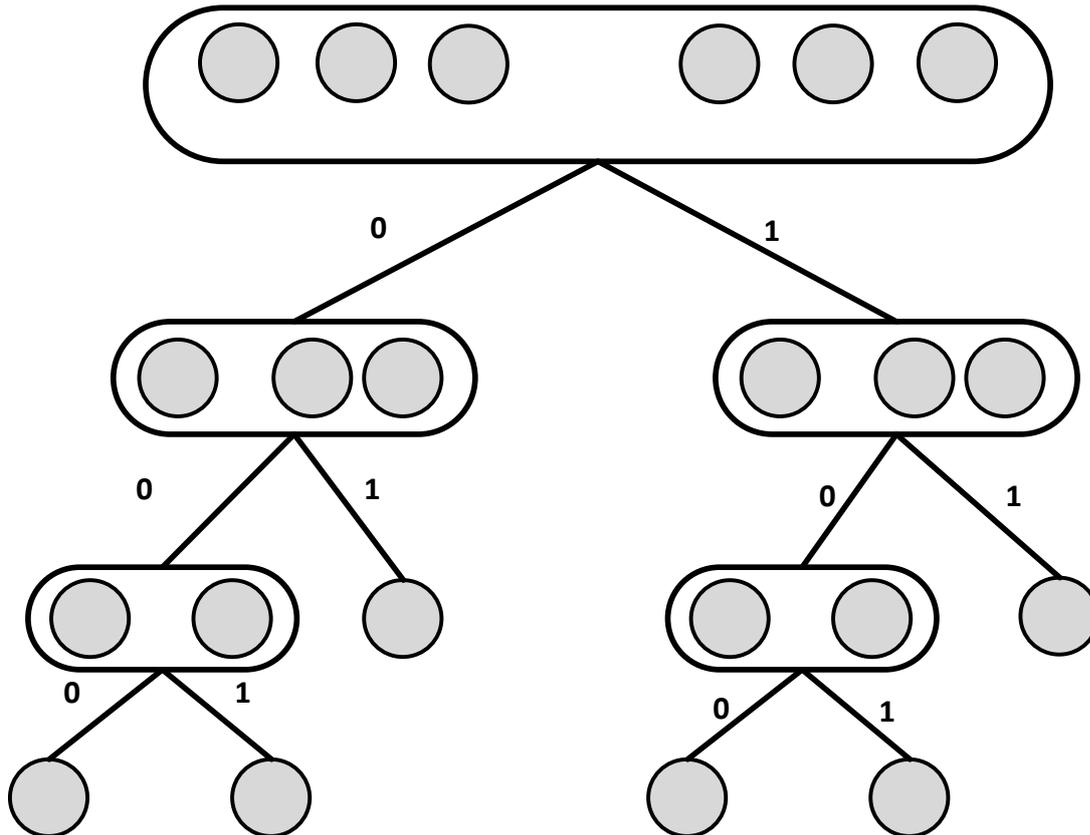


Abbildung 6-1: Huffman-Codierbaum

- B) Ermitteln Sie die Codierung der einzelnen Farben und geben Sie diese in Tabelle 6-2 an.



Farbe	Weiß	Schwarz	Silber	Rot	Blau	Grün
Codierung						

Tabelle 6-2: Huffman-Codierung der Farben

Aufgabe 6.2 Shannon-Fanø-Codierung

Bestimmen Sie nun die optimale Codierung nach dem Shannon-Fanø-Verfahren für die Auftrittshäufigkeiten aus Tabelle 6-1 und tragen Sie diese in Tabelle 6-3 ein.



Hinweis:

- *Auch hier sollen die Äste mit größter Auftrittswahrscheinlichkeit am effizientesten Codiert werden.*

Farbe	Weiß	Schwarz	Silber	Rot	Blau	Grün
Codierung						

Tabelle 6-3: Codierung nach Shannon-Fanø

Aufgabe 7 Automaten



Aufgabe 7.1 Automatenentwurf

Im Folgenden soll ein 3-Bit Schieberegister (ohne zirkuläre Rotation) als Zustandsautomat dargestellt werden. Die Eingangsgröße E_0^v des Automaten entspreche dabei dem einzuschiebenden Bit, während die drei Bits q_0 , q_1 und q_2 des Schieberegisters sowohl den Zustand S_k^v als auch die Ausgabe A_h^v des Automaten bilden sollen. Das Bit q_0 entspricht dabei dem niederwertigsten Bit.

- A) Um welchen Automatentypen handelt es sich hierbei?

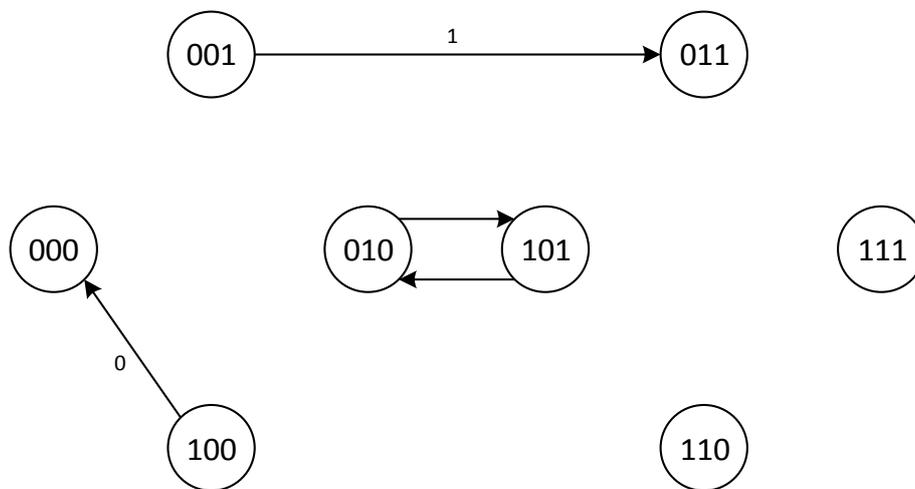


Abbildung 7-1: Unvollständiger Graph des Automaten.

- B) Gegeben sei der unvollständige Automatengraph in Abbildung 7-1 (Es sind nur die Zustände und vier der Kanten gegeben). In welche Richtung (links/rechts) werden die Bits des Schieberegisters verschoben?



- C) Ergänzen Sie die fehlenden Kanten in Abbildung 7-1, sodass der Automat ein funktionierendes Schieberegister abbildet. Achten sie dabei auf die korrekte Beschriftung der Kanten. Beschriften sie auch die vorgegebenen Kanten.



- D) Der Automat soll nun mit Hilfe von JK-FlipFlops als Zustandsspeicher realisiert werden (Die Zustandsbits sollen direkt und ohne zusätzliche Codierung in den FlipFlops gespeichert werden). Vervollständigen Sie die in der Tabelle 7-1 gegebene Ablaufabelle mit den entsprechenden Folgezuständen des Automaten und deren Ansteuerung für die JK-FlipFlops der beiden niederwertigen Bits. Verwenden Sie nach Möglichkeit „don't care“ Stellen für die Ansteuerung der FlipFlops.



Zustand S^v	Eingabe E_0^v	S^{v+1}	JK-FlipFlops			
			j_1	k_1	j_0	k_0
000	1					
	0					
001	1					
	0					
010	1					
	0					
011	1					
	0					
100	1					
	0					
101	1					
	0					
110	1					
	0					
111	1					
	0					

Tabelle 7-1: Ablauftabelle

E) Füllen Sie die in Tabelle 7-2 gegebenen Symmetriediagramme für die Größen j_0 und k_1 aus und geben sie jeweils eine minimale Ansteuerfunktion an.

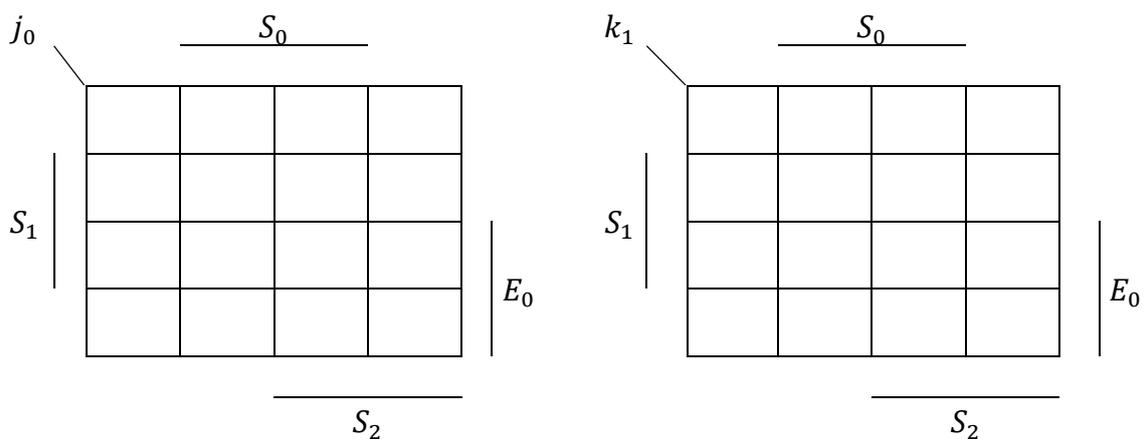


Tabelle 7-2: Symmetriediagramme

- F) Der entworfene Automat soll nun zur Erzeugung einer zyklischen Folge von Pseudozufallszahlen verwendet werden. Generatoren für Pseudozufallszahlen werden oft mit Hilfe von rückgekoppelten Schieberegistern realisiert. Dies lässt sich bei dem Automaten durch Rückkopplung der Ausgangsgrößen auf den Eingang erreichen. Hierzu soll die Exklusiv-Oder Beziehung zwischen den beiden höherwertigen Ausgangs-Bits als Eingabe dienen: $E_0^v := A_1^v \oplus A_2^v = (A_1^v \wedge \overline{A_2^v}) \vee (\overline{A_1^v} \wedge A_2^v)$.

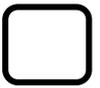


Der Automat soll sich am Anfang im Zustand 111 befinden. Geben sie die Binärwerte der zyklischen Folge von Pseudozufallszahlen an (Die Ausgabewerte des Automaten; insgesamt 7 Binärwerte).

- G) Welcher Anfangszustand ist für die Generierung einer Folge von Pseudozufallszahlen nicht geeignet? Begründen sie Ihre Antwort.



Aufgabe 8 CMOS



Aufgabe 8.1 Erzeugung von Gatter-Schaltungen

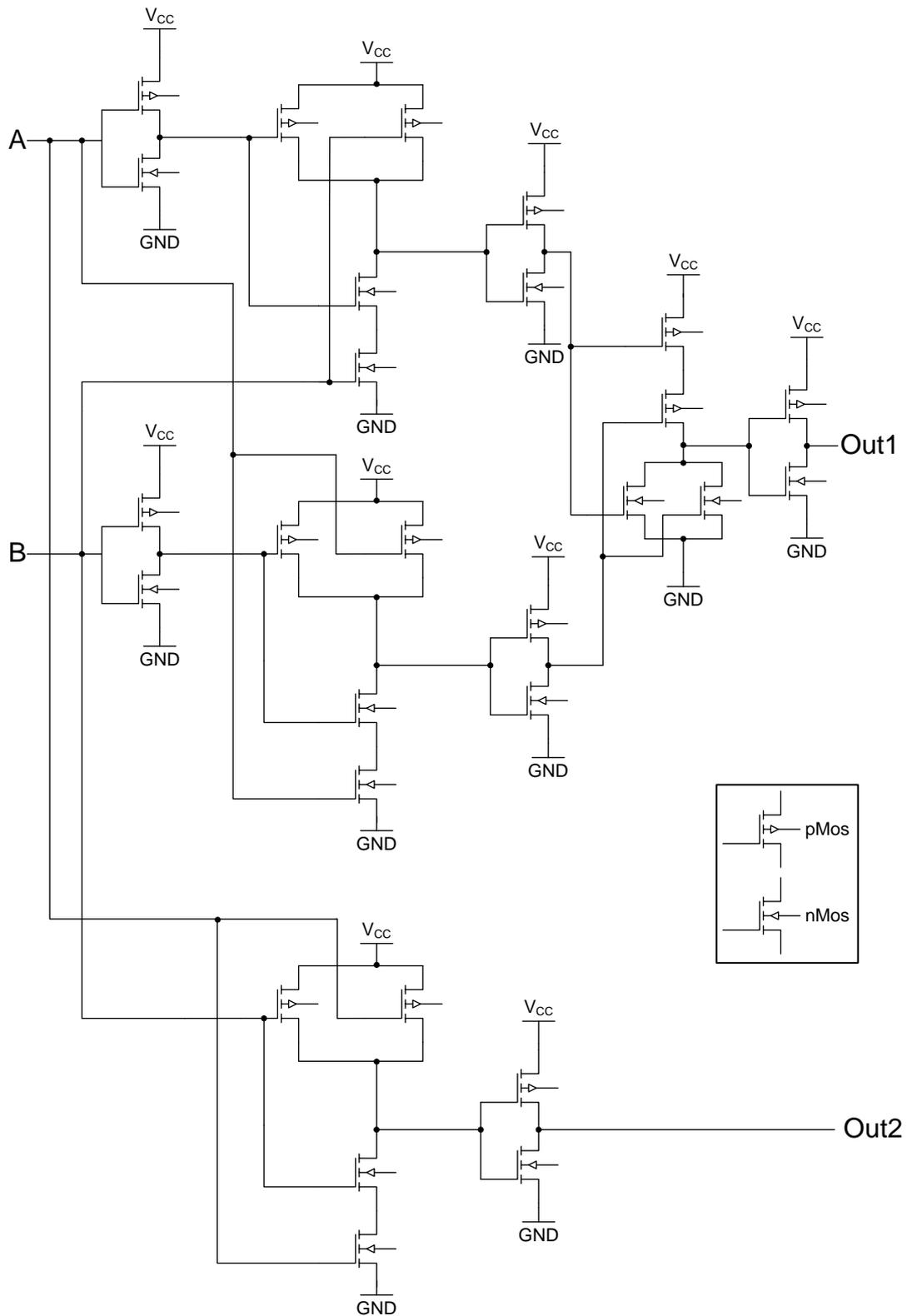


Abbildung 8-1: CMOS-Schaltung

- A) Übertragen Sie die in Abbildung 8-1 dargestellte CMOS-Schaltung in eine Gatterschaltung. Stellen Sie alle Gatter explizit dar.

- B) Welche Boolesche Funktion wird für Out1 und Out2 realisiert? Vereinfachen sie den Ausdruck so weit wie möglich.

- C) Welche grundlegende Schaltung wird durch die CMOS-Schaltung in Abbildung 8-1 realisiert?

- B) Entwickeln Sie aus der Funktion G aus Aufgabenteil A) die Funktion F, welche den pMOS-Teil der Schaltung definiert. Vereinfachen Sie die Funktion solange, bis nur noch Und- und Oder-Verknüpfungen und bitweise Negationen auftreten. Ergänzen Sie Abbildung 8-2 um den bestimmten pMOS-Teil.



Aufgabe 8.3 Korrektur von CMOS-Schaltungen

In Abbildung 8-3 ist eine CMOS-Schaltung gegeben. Diese soll in den folgenden Teilaufgaben analysiert werden.

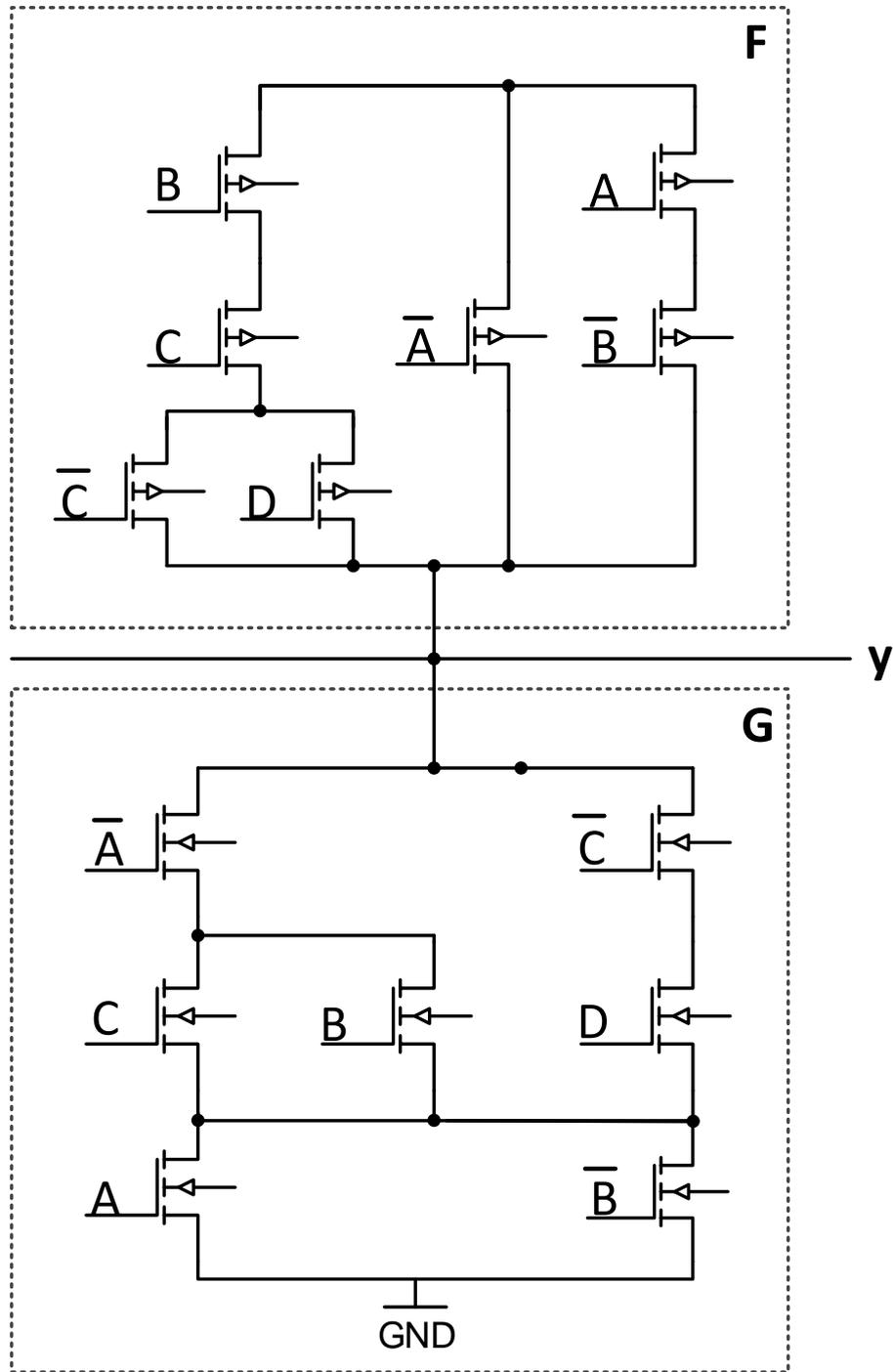


Abbildung 8-3: CMOS-Schaltung 3

Matr.-Nr.:

Name:

ID:

Überprüfen Sie für die Schaltung in Abbildung 8-3, ob die Bedingung für Wohldefiniertheit erfüllt ist, indem sie die booleschen Ausdrücke *geschickt* umformen. Falls eine Bedingung nicht erfüllt ist, geben sie im *Pull-Up Netz* der Schaltung an, an welcher Stelle dieses verändert werden müsste, um Wohldefiniertheit zu garantieren.



Zusätzliches Lösungsblatt

Aufgabe_____