Digitaltechnik
Klausur Wintersemester 14/15

Institut für Technik der Informationsverarbeitung – ITIV
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

Digitaltechnik

Datum: 19.03.2015
Name:
Matrikel-Nr.:
ID:
Hörsaal:

Sitzplatznummer.:

Hinweise zur Klausur

Hilfsmittel

Als Hilfsmittel zur Prüfung sind drei Seiten vorgegebene und ein DIN A4 Blatt selbst geschriebene Formelsammlung zugelassen. Nicht erlaubt hingegen sind die Verwendung eines Taschenrechners, andere elektronische Geräte, zusätzliche Unterlagen und jegliche Kommunikation mit anderen Personen.

Prüfungsdauer

Die Prüfungsdauer beträgt für die Klausur 120 Minuten.

Prüfungsunterlagen

Die Prüfungsunterlagen bestehen aus insgesamt 32 Seiten Aufgaben- und Lösungsblättern (einschließlich diesem Titelblatt, acht Aufgabenblöcke und einem zusätzlichem Lösungsblatt). Weiterhin sind drei zusätzliche Seiten Formelsammlung enthalten.

Bitte prüfen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben auf jeder Seite oben Ihren Namen sowie ihre Matrikelnummer.

Auf jedes zusätzliche Lösungsblatt ist neben dem Namen auch die Aufgabennummer mit einzutragen. **Vermeiden Sie generell das Beschreiben der Rückseiten.**

Am Ende der Prüfung sind alle 32 Seiten Aufgaben- und Lösungsblätter, einschließlich diesem Titelblatt, und alle zusätzlichen verwendeten Lösungsblätter abzugeben.

Verwenden Sie zum Bearbeiten der Aufgaben lediglich dokumentenechte Schreibgeräte – insbesondere keinen Bleistift sowie Rotstifte!

Prüfungsaufgaben

Wenn nicht anders vorgegeben ist zu jeder Aufgabe ein detaillierter Rechenweg anzugeben. Lösungen ohne Rechenweg können trotz richtigem Ergebnis zu Punktabzug führen.

Aufgabe 1	Codierung und Fehlerbehandlung	S.2			~12%
Aufgabe 2	Mengen, Relationen und Graphen	S.5			~11%
Aufgabe 3	Boolsche Algebra	S.9			~12%
Aufgabe 4	Zahlensysteme und Codierung	S.13			~12%
Aufgabe 5	Minimierung Boolscher Funktionen	S.15			~13%
Aufgabe 6	Optimale Codes	S.19			~11%
Aufgabe 7	Automaten	S.23			~14%
Aufgabe 8	CMOS	S.26			~13%
				Σ	

Aufgabe 1 Codierung und Fehlerbehandlung

15

Aufgabe 1.1 Allgemeine Fragen

A) Welchen Informationsgehalt besitzt das Würfeln einer „6“ bei einem Standardwürfel. Geben Sie alle Formeln und Rechenwege an. **1**

H(e) = ld(1/p) = H(6) = ld(1/1/6) = ld(6) = ca. 2,58

B) Welche Hammingdistanz besitzen zwei aufeinanderfolgende Codeworte bei einer Gray-Code Codierung. **1**

Immer genau eine 1 unterschiedlich => HD = 1

C) Gegeben Sei eine Gray-Code Codierung. Können Sie dadurch eine Aussage über die Fehlerkorrektureigenschaften treffen? Begründen Sie Ihre Antwort. **1**

Ja, eine Aussage ist möglich. Bei einschrittigen Codes (Gray Code) gilt:

HDmin = 1 => weder Fehlerkorrektur oder Fehlererkennung sind möglich,

wegen Erkennung: F < HDmin-1, Korrektur: F < (HDmin-1)/2

D) Welche Verfahren haben Sie in der Vorlesung kennengelernt um Einzelfehler zu erkennen? Geben Sie mindestens zwei mögliche Verfahren an. **1**

Paritätsbit, Blocksicherung, Scrambling

Codierung mit HDmin > 2

E) Berechnen Sie die notwendige minimale Hammingdistanz um Zweifachfehler korrigieren zu können. Geben Sie alle Formeln und Rechenschritte an. **1**

F =< (HDmin-1) / 2

⇨ 2 =< (HDmin-1)/2

⇨ 4 =< HDmin-1

⇨ 5 =< HDmin

Musterlösung

Aufgabe 1.2 Digitalisierung

Gegeben sei der in Abbildung 1-1 dargestellte Signalverlauf:

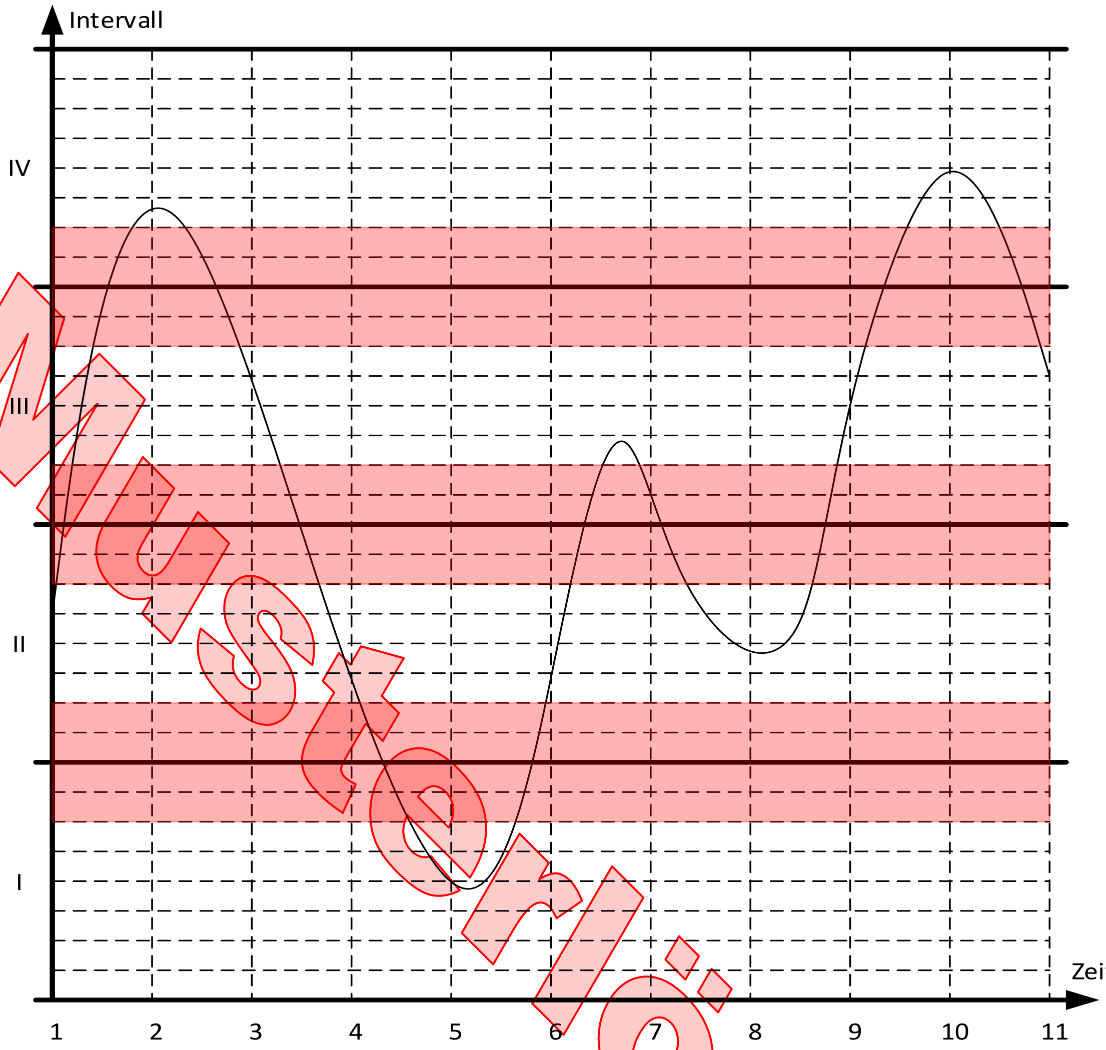


Abbildung 1-1: Analoger Signalverlauf

A) Zeichnen Sie für jeden Intervallübergang einen undefinierten Bereich ein. Die Größe jedes undefinierten Bereichs soll insgesamt halb so groß sein, wie ein einzelnes Intervall. **2**

B) Nennen Sie einen Vorteil, den undefinierte Bereiche bei der Digitalisierung von analogen Signalen bieten. **1**

Hiermit können Signalschwankungen abgefangen werden, die sonst zu ungewollten Wertänderungen führen würden.

Musterlösung

C) Digitalisieren Sie das in Abbildung 1-1 dargestellte Signal indem Sie jedem Zeitpunkt t eine (3 aus 4) – Codierung zuweisen. Dabei sollen die Dezimalwerte der Codierung absteigend den Intervallen zugeordnet werden.

3

Zeit t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Codierung	1101	0111	1011	1101	1110	1101	1101	1101	1011	0111	1011
Intervall	II	IV	III	II	I	II	II	II	III	IV	III

Aufgabe 1.3 Blocksicherung und Scrambling

Sie haben die folgende Bitfolge empfangen, welche eine Zeichenfolge in ASCII Codierung darstellt:

11111111 00110110 01010101 10100010 01001111 00011011 10110101 01011111

Bei der Übertragung wurde ein Fehlersicherungsverfahren angewendet.

A) Gehen Sie davon aus, dass die Bitfolge mit Scrambling und Blocksicherung mit gerader Quersummenbildung übertragen wurde. Dekodieren Sie die Bitfolge und geben Sie die übertragene Nachricht wieder.

4

1. Scrambling auflösen:

2. Fehlererkennung gerade Parität

1	0	0	1	0	0	1	0	X
1	0	1	0	1	0	0	1	
1	1	0	1	0	0	1	0	
1	1	1	0	0	1	1	1	
1	0	0	0	1	1	0	1	
1	1	1	0	1	0	1	1	
1	1	0	1	1	1	0	1	
1	0	1	0	1	1	1	1	
			X	X		X		

2. Fehler korrigieren

1 0 0 0 1 0 0 0 Nur erstes Datenwort zu korrigieren

Dekodieren mit ASCII Tabelle

3. DTisFun

Musterlösung

Aufgabe 2 Mengen, Relationen, Graphen

14

Aufgabe 2.1 Allgemeines

A) Geben Sie für die in Tabelle 2-1 gegebenen Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.

3

Bei falscher Antwort gibt es Punktabzug. Die Aufgabe wird minimal mit 0 Punkten bewertet.

	Wahr	Falsch
Für den Durchschnitt V zweier Mengen S und T gilt: $V = S \cap T = \{x \mid x \in S \; und \; x \in T\}$	X	
Die Menge aller Untermengen einer Menge M heißt Potenzmenge P von M	X	
Ein ungerichteter Graph kann nicht immer als gerichteter Graph dargestellt werden		X
Ein Baum ist ein zyklischer, zusammenhängender Graph		X
≤ ist eine strenge Ordnungsrelation		X
Die Planarität eines Graphen ist notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines dazugehörigen dualen Graphen	X	

Tabelle 2-1: Allgemeines

Musterlösung

Aufgabe 2.2 Mengen und Relationen

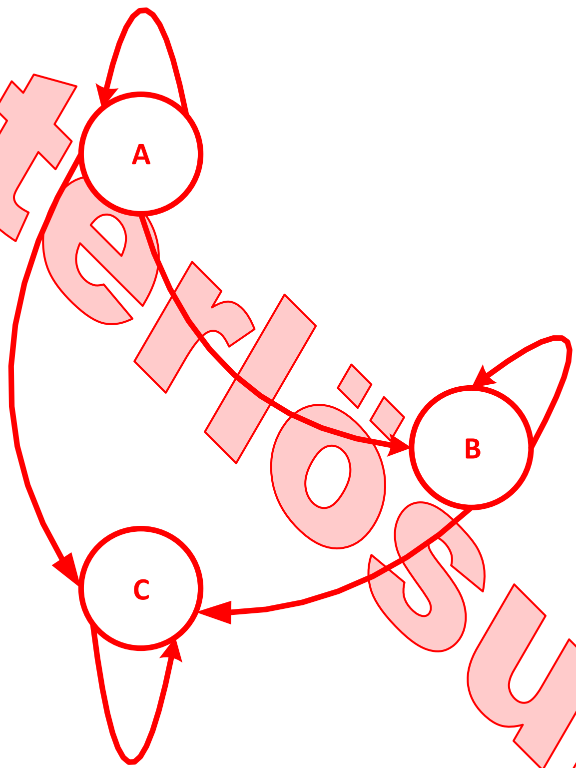
4

A) Zeichnen Sie einen gerichteten Graphen mit exakt 3 Knoten, welcher eine Ordnungsrelation darstellt. Geben Sie hierfür zunächst die einzelnen Eigenschaften und deren mathematische Definition zur Erfüllung dieser Relation an.

Reflexivität: $x \alpha x, \forall x \in M$

Antisymmetrie: aus $x \alpha y$ und $y \alpha x$ folgt $x = y, \forall x, y \in M$

Transitivität: aus $x \alpha y$ und $y \alpha z$ folgt $x \alpha z, \forall x, y, z \in M$



Musterlösung

B) Gegeben seien die folgenden Mengen:

4

U = {3, 5, 7, 9}

V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

W = {8, 9, 0}

i. Wie viele Elemente hat die Potenzmenge P von W? Geben Sie die vollständige Potenzmenge an.

8 Elemente

P ={Φ, {8}, {9}, {0}, {8,9}, {8,0}, {9,0}, {8,9,0}}

ii. Bestimmen Sie die folgenden Mengen und Größen:

$|U \; x \; V \; x \; W|$ =

4*9*3 = 108

$(V \; \cap \; W) \; x \; U$ =

{ (8,3), (8,5), (8,7), (8,9), (9,3), (9,5), (9,7), (9,9) }

$C_V(U)$ =

{1 ,2, 4, 6, 8}

Musterlösung

Aufgabe 2.3 Graphen

Gegeben sei der in Abbildung 2-1 dargestellte ungerichtete Graph G:

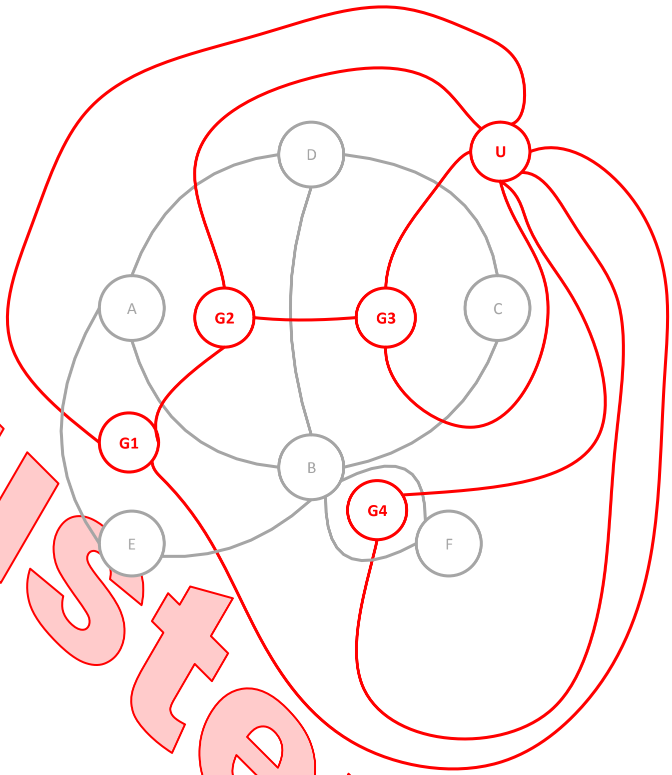


Abbildung 2-1: Ungerichteter Graph

Musterlösung

A) Konstruieren Sie aus dem Graph G in Abbildung 2-1 den dualen Graphen. Kennzeichnen Sie dabei die überführten Knoten eindeutig. Sie können Ihr Ergebnis auch direkt in die Abbildung 2-1 einzeichnen.

3

Aufgabe 3 Boolsche Algebra

15

Aufgabe 3.1 Entwicklungssatz

Gegeben sei folgende boolsche Funktion:

$$\boldsymbol{x(d,c,b,a) = (a \rightarrow b)\bar{c}d \vee a(c \equiv d) \vee (a \oplus b) \vee a\bar{b}c \vee (\overline{b \vee \bar{c} \vee d})}$$

A) Formen Sie die Funktion x(d,c,b,a) so um, dass er sich mit dem Entwicklungssatz nach Shannon entwickeln lässt. Also so, dass nur noch UND, ODER und NICHT Gatter verwendet werden. **2**

$x(d,c,b,a) = (\bar{a} \vee b)\bar{c}d \vee a\left(cd \vee \bar{c}\bar{d}\right) \vee \left(\bar{a}b \vee a\bar{b}\right) \vee a\bar{b}c \vee \left(\bar{b}c\bar{d}\right)$

Alternativ kann der Term bleiben: $(\overline{\boldsymbol{b} \vee \bar{\boldsymbol{c}} \vee \boldsymbol{d}})$

B) Beschreiben Sie kurz zwei Einsatzmöglichkeiten des Entwicklungssatzes der Schaltalgebra in der Digitaltechnik. **1**

Der Entwicklungssatz ist eine formelle Methode zur gezielten Umwandlung:

- In eine der beiden Normalformen (KNF bzw. DNF)
- Zur Mux-basierte Logikrealisierung
- Zur Darstellung einer BDD-Schaltfunktion

Gegeben sei nun folgende boolsche Funktion:

$$\boldsymbol{x(d,c,b,a) = (a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{c}\bar{d} \vee \bar{b}\bar{c}d \vee ab\bar{d} \vee \bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b})}$$

C) Entwickeln Sie den Ausdruck y mit Hilfe des Booleschen Entwicklungssatzes in der Reihenfolge d, c, b, a. Geben Sie alle Zwischenergebnisse an. **4**

Entwicklung nach d:

$y(0,c,b,a) = a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{c}1 \vee \bar{b}\bar{c}0 \vee ab1 \vee \bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b} = a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{c} \vee ab \vee \bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}$

$y(1,c,b,a) = a\bar{b}c \vee \bar{a}\bar{c}0 \vee \bar{b}\bar{c}1 \vee ab0 \vee \bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b} = a\bar{b}c \vee \bar{b}\bar{c} \vee \bar{b}c \vee \bar{a}\bar{b}$

Entwicklung nach c:

$y(0,0,b,a) = a\bar{b}0 \vee \bar{a}1 \vee ab \vee \bar{b}0 \vee \bar{a}\bar{b} = \bar{a} \vee ab \vee \bar{a}\bar{b} = \bar{a} \vee a$

$y(0,1,b,a) = a\bar{b}1 \vee \bar{a}0 \vee ab \vee \bar{b}1 \vee \bar{a}\bar{b} = a\bar{b} \vee ab \vee \bar{b} \vee \bar{a}\bar{b} = ab \vee \bar{b}$

Musterlösung

$y(1,0,b,a) = a\overline{b}0 \lor \overline{b}1 \lor \overline{b}0 \lor \overline{a}\overline{b} = \overline{b} \lor \overline{a}\overline{b} = \overline{b}$

$y(1,1,b,a) = a\overline{b}1 \lor \overline{b}0 \lor \overline{b}1 \lor \overline{a}\overline{b} = a\overline{b} \lor \overline{b} \lor \overline{a}\overline{b} = \overline{b}$

Entwicklung nach b:

$y(0,0,0,a) = \overline{a} \lor a0 = \overline{a}$ $\quad$ $y(0,0,1,-) = \overline{a} \lor a1 = 1$

$y(0,1,0,-) = a0 \lor 1 = 1$ $\quad$ $y(0,1,1,\mathrm{a}) = a1 \lor 0 = a$

$y(1,0,0,-) = 1$ $\quad$ $y(1,0,1,-) = 0$

$y(1,1,0,-) = 1$ $\quad$ $y(1,1,1,-) = 0$

Entwicklung nach c:

$y(0,0,0,0) = 1$ $\quad$ $y(0,0,0,1) = 0$ $\quad$ $y(0,1,1,0) = 0$ $\quad$ $y(0,1,1,1) = 1$

Musterlösung

Aufgabe 3.2 Normalformtheorem

Gegeben sei die in Tabelle 3-1 dargestellte Wahrheitstabelle der Funktion y(c,b,a):

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabelle 3-1: Wahrheitstabelle der Funktion y

A) Geben Sie die disjunktive Normalform der Funktion y(c,b,a) an: **2**

$y(c,b,a) = \bar{a}b\bar{c} \vee \bar{a}bc \vee a\bar{b}c \vee abc$

B) Geben Sie eine disjunktive Minimalform der Funktion y(c,b,a) an: **1**

$y(c,b,a) = \bar{a}b \vee ac$

$alternativ\ y(c,b,a) = \bar{a}b\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee bc$

C) Definieren Sie den Begriff „Maxtermfunktion“: **1**

$M_j = \ddot{x}_n \vee \ldots \vee \ddot{x}_1, \qquad \ddot{x} \begin{cases} \bar{x}\ für\ 1 \\ x\ für\ 0 \end{cases}$

D) Geben Sie eine Definition des Begriffes „Schaltnetz“ an: **1**

Ein Schaltnetz ist eine Digitalschaltung, in der es für jede mögliche Kombination von digitalen Signalen an den Eingängen eine –und nur eine- Kombination von digitalen Signalen an den Ausgängen gibt-

Musterlösung

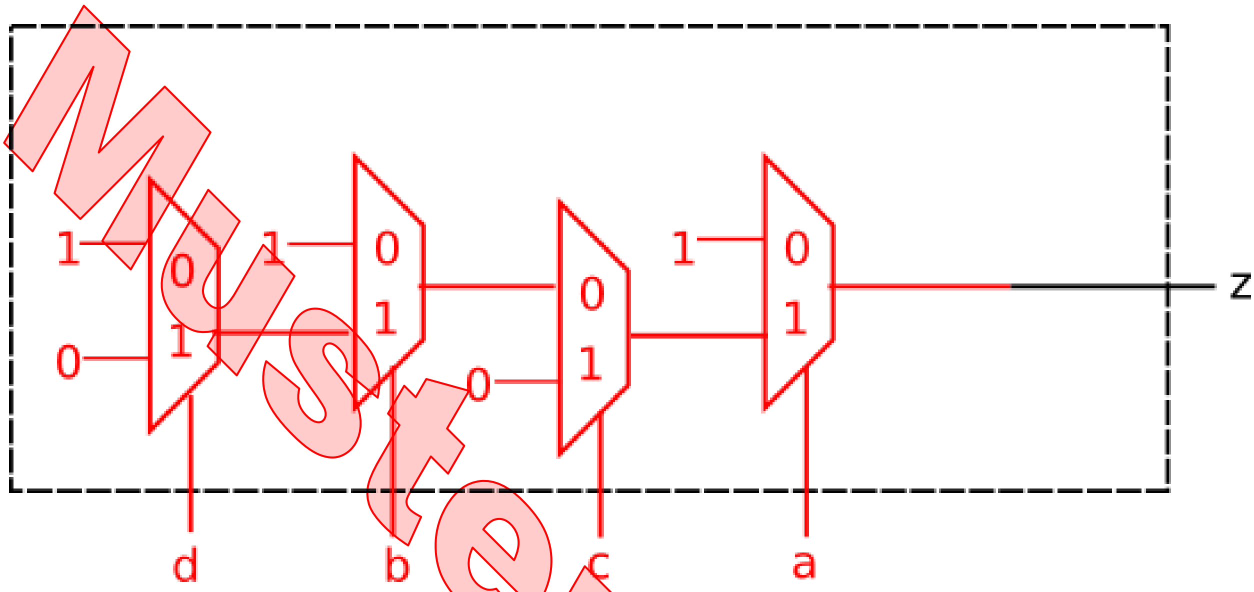
Aufgabe 3.3 Multiplexer-Realisierung

Gegeben sei die folgende Funktion z(a,b,c,d)

$$\boldsymbol{z(a,b,c,d)} = \overline{\boldsymbol{a}}(\mathbf{1}) \vee \boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}(\mathbf{0}) \vee \overline{\boldsymbol{c}}(\overline{\boldsymbol{b}}(\mathbf{1}) \vee \boldsymbol{b}(\overline{\boldsymbol{d}}(\mathbf{1}) \vee \boldsymbol{d}(\mathbf{0}))))$$

3

A) Die bereits entwickelte Funktion z soll für eine Field Programmable Gate Array (FPGA) Realisierung mit 2:1 Multiplexern umgesetzt werden. Die Eingangsliterale a, b, c, d sollen dabei ausschließlich als Steuersignale genutzt werden. Zeichnen Sie die minimale Multiplexerschaltung.



Musterlösung

Aufgabe 4 Zahlensysteme und Codierung

15

Aufgabe 4.1 Umrechnung von Zahlensystemen

A) Vervollständigen Sie die offenen Felder in der Tabelle 4-1 indem Sie die offenen Felder durch die entsprechende Konvertierung ergänzen.

6

Dezimal	Binär	Oktal	Hexadezimal
1934_D	11110001110_B	3616_O	$78E_H$
1574_D	11000100110_B	3046_O	626_H
350_D	101011110_B	536_O	$15E_H$
3493_D	110110100101_B	6645_O	$DA5_H$

Tabelle 4-1: Umrechnung von Zahlensystemen

Musterlösung

Aufgabe 4.2 Rechenoperationen im Binärsystem

Abbildung 4-1 zeigt eine Darstellung von Fließkommazahlen mit 16 Bit. Das höchstwertige Bit stellt das Vorzeichen V dar, die nachfolgenden acht Bits den Exponenten E und die niederwertigsten sieben Bits die Mantisse M.

V	E_7	E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Abbildung 4-1: 16 Bit Fließkommazahlenformat

A) Stellen Sie die Zahl **$-0{,}09375_D$** in der angegebenen normierten 16-Bit-Fließkommazahlendarstellung dar. Geben Sie die Zwischenschritte bei der Umrechnung an.

3

V	E_7	E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0
1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0

$0{,}09375_D = 1/16 + 1/32 = 0{,}00011_B$

Normierung der Mantisse auf 1,M → $0{,}00011_B = 1{,}1_B * 2^{-4}$

Mantisse erweitern auf 7 Bits: M = 1000 000

Exponent: - 4 → E = - 4 + 127 = 123 → 01111011_B

Zahl ist negativ → V = 1

1 01111011 1000 000

B) Addieren Sie die zwei in der normierten 16-Bit-Fließkommazahlendarstellung gegebenen Zahlen in Abbildung 4-2 miteinander. Geben Sie das Ergebnis ebenfalls in dieser Darstellung an.

3

	V	E_7	E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
+	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0
=	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1

Abbildung 4-2: Addition von Fließkommazahlen

Hinweis: Die Zweite Zahl entspricht bis auf das Vorzeichen dem Ergebnis aus Aufgabenteil A)

Zahl 1: $2^{(128-127)} * 1{,}0110001$

Zahl 2: $2^{(123-127)} * 1{,}1 \Rightarrow 2^{(128-127)} * 0{,}000011$

Addition der Mantissen: 1,0110111

Ergebnis: $2^{(128-127)} * 1{,}0110111$

Musterlösung

Aufgabe 4.3 Stibitz-Code

A) Führen Sie eine Addition der Zahl 436_D von der Zahl 813_D im STIBITZ-Code durch. Geben Sie die Zwischenschritte bei der Berechnung an.

3

	Dezimal	STIBITZ-Code			
	813_D	0011	1011	0100	0110
+	436_D	0011	0111	0110	1001
		0111	0010	1010	1111
		1101	0011	1101	1101
=	1249_D	0100	0101	0111	1100

Aufgabe 5 Minimierung digitaler Funktionen

17

Aufgabe 5.1 Symmetriediagramm

Gegeben sei das in Abbildung 5-1 dargestellte Symmetriediagramm:

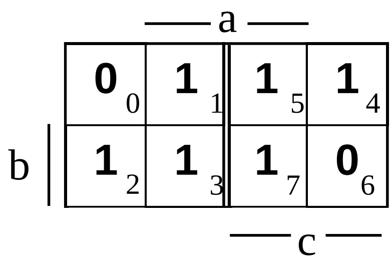


Abbildung 5-1: Symmetriediagramm

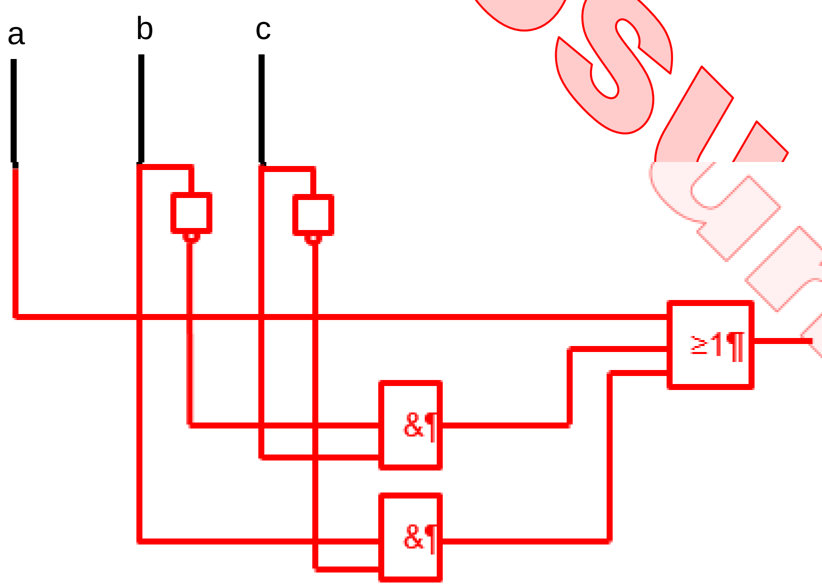
A) Geben Sie die Funktion in der DNF an: **2**

$f = a\overline{b}\overline{c}\ V\ \overline{a}b\overline{c}\ V\ ab\overline{c}\ V\ \overline{a}\overline{b}c\ V\ a\overline{b}c\ V\ abc$

B) Geben Sie die Funktion in der DMF an: **1**

$f = a\ V\ \overline{b}c\ V\ b\overline{c}$

C) Zeichnen Sie die zugehörige Schaltung zur Disjunktiven Minimalform. Verwenden Sie ausschließlich NOT, AND und OR Gatter. **2**



Musterlösung

D) Wie viele Gatter (NOT, AND und OR) lassen sich in diesem Beispiel durch die DMF im Vergleich zur DNF einsparen? 1

DNF: 3x NOT; 6x AND; 1x OR

DMF: 2x NOT; 2x AND; 1x OR

5 Gatter lassen sich einsparen.

Musterlösung

Aufgabe 5.2 Verfahren nach Nelson

Gegeben ist die Boolesche Funktion f(a,b,c,d) in Abbildung 5-2.

	a	a	a	a	
	1 $_0$	**0** $_1$	**0** $_5$	**1** $_4$	
b	**1** $_2$	**-** $_3$	**1** $_7$	**1** $_6$	
b	**0** $_{12}$	**0** $_{13}$	**-** $_{17}$	**1** $_{16}$	d
	0 $_{10}$	**-** $_{11}$	**-** $_{15}$	**1** $_{14}$	d
			c	c	

Abbildung 5-2: Symetriediagramm 2

A) Stellen Sie die Einsvervollständigung f^E der Funktion als konjunktive Normalform dar. 2

$$f^E = (\bar{a} \vee b \vee c \vee d)(\bar{a} \vee b \vee \bar{c} \vee d)(a \vee b \vee c \vee \bar{d})(a \vee \bar{b} \vee c \vee \bar{d})(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c \vee \bar{d})$$

B) Ermitteln Sie mit Hilfe des Nelson-Verfahren alle Primimplikanten der Funktion g^E. **5**

$$g^E = (a \vee b \vee c \vee d)\big(a \vee \bar{b} \vee c \vee d\big)(\bar{a} \vee b \vee c \vee d)(\bar{a} \vee b \vee \bar{c} \vee d)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c \vee \bar{d})$$

$$= (a \vee c \vee d)(\bar{a} \vee b \vee d)\big(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c \vee \bar{d}\big)$$

$$= (a \vee c \vee d)(\bar{a} \vee bc \vee b\bar{d} \vee \bar{b}d)$$

$$(\text{Alternativ: } = (ab \vee \bar{a}c \vee d)(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c \vee \bar{d}))$$

$$= \bar{a}c \vee \bar{a}d\ bc \vee \bar{b}d \vee cd \vee ab\bar{d}$$

Musterlösung

Aufgabe 5.3 Verfahren nach Petrick

A) Gegeben ist der folgende Petrickausdruck: **2**

$$PA = b\ \&\ (a \vee c \vee f)\ \&\ (b \vee e \vee f)\ \&\ (a \vee c \vee e \vee f)\ \&\ (b \vee d)\ \&\ (a \vee c \vee e)$$

Ergänzen Sie die in Tabelle 5-1 gegebene Überdeckungstabelle entsprechend des gegebenen Petrickausdrucks, ohne diesen zu vereinfachen. Die überdeckenden Größen sind durch die Präsenzvariablen a, b, c, d, e und f gegeben.
Die zu überdeckenden Größen E_i werden entsprechend der Reihenfolge wie Sie im Petrickausdruck auftauchen (links nach rechts), aufsteigend von E_1 bis E_n indiziert.

$p_i \backslash E_i$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	
a		X		X		X	
b	X		X		X		
c		X		X		X	
d					X		
e			X	X		X	
f		X	X	X			

Tabelle 5-1: Überdeckungstabelle 1

Nun ist die in Tabelle 5-2 dargestellte Überdeckungstabelle gegeben

$p_i \backslash E_i$	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
a			X		X	
b		X				X
c		X	X			X
d	X			X		
e		X		X		
f	X	X	X			X

Tabelle 5-2: Überdeckungstabelle 2

B) Bestimmen Sie alle Kernspalte(n) in Tabelle 5-2 und markieren Sie die entsprechende(n) Zelle(n). **1**

Kernspalte(n):

E5

C) Wenden Sie nun die Spaltendominanzregeln an. Welche Spalte(n) können gestrichen werden? Geben Sie die entsprechenden Spalte(n) unten an- **1**

Dominierende Spalte(n):

E2 (E3)

Dominierte Spalte(n):

E6 (E5)

Streichbare Spalte(n):

E2 (E3)

Musterlösung

Aufgabe 6 Optimale Codes

14

Ein Automobilhersteller möchte die zu speichernden Daten pro Fahrzeug minimieren. Hierzu wird eine Tabelle erstellt, welche die Auftrittshäufigkeit der Fahrzeuge in einer bestimmten Farbe aufzeigt.

Eine per Hand geführte Zählung hat dabei die in Tabelle 6-1 dargestellte Verteilung der verschiedenen Farben ergeben.

Da der zur Verfügung stehende Speicher relativ klein ist, soll zum Abspeichern der Werte eine optimale Codierung zum Einsatz kommen. Zu beachten ist, dass bei diesem Speicher eine ‘0‘ geringfügig effizienter abgelegt werden kann als eine ‘1‘.

Farbe	Weiß	Schwarz	Silber	Rot	Blau	Grün
Häufigkeit	25%	10%	22%	13%	14%	16%

Tabelle 6-1: Häufigkeiten der Fahrzeugfarben

Musterlösung

Aufgabe 6.1 Huffman-Codierung

Ein Berater des Herstellers ist Elektrotechniker und hat dafür eine Huffman–Codierung vorgeschlagen und dafür schon einen Codebaum entworfen.

A) Vervollständigen Sie den Huffman-Codierbaum in Abbildung 6-1, indem Sie die Farben an den jeweils zugehörigen Blättern eintragen. Geben sie alle dafür notwendigen Schritte an und tragen Sie die Zahlen entsprechend ein. Berücksichtigen sie, dass die Äste mit höchster Auftrittswahrscheinlichkeit am effizientesten Codiert werden sollen. **4**

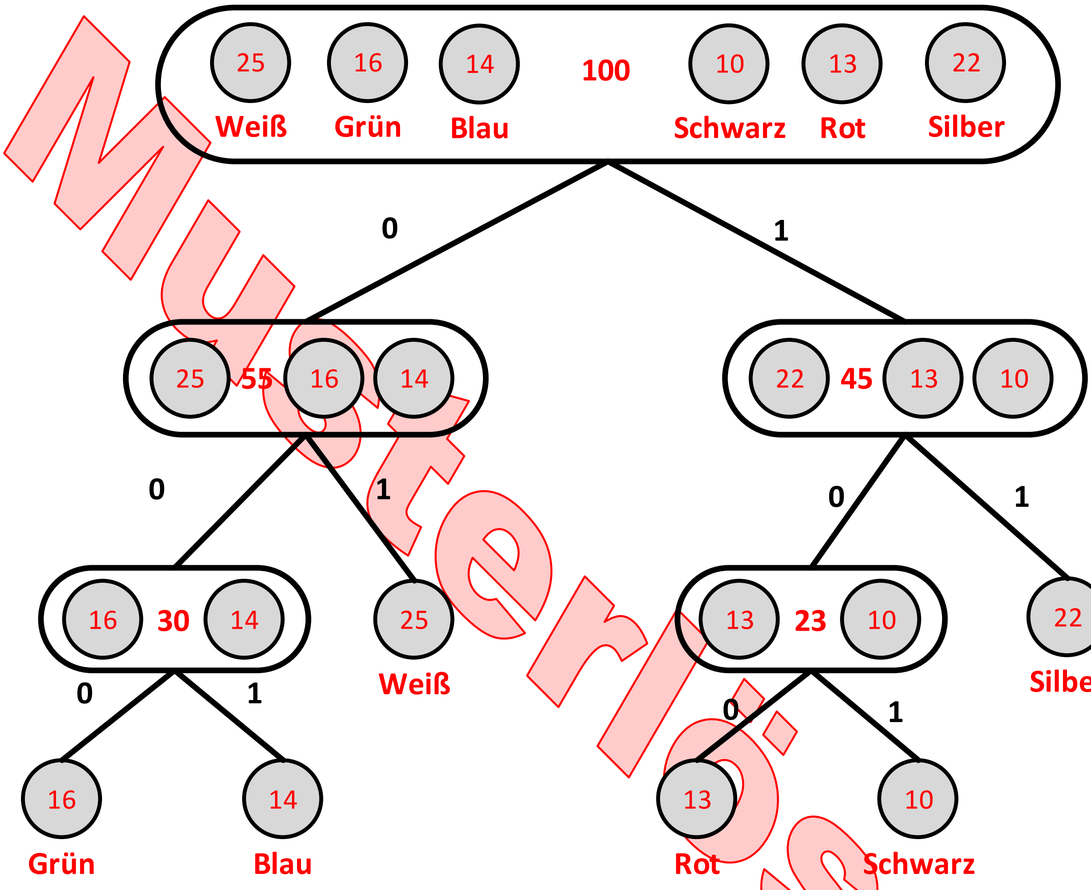


Abbildung 6-1: Huffman-Codierbaum

B) Ermitteln Sie die Codierung der einzelnen Farben und geben Sie diese in Tabelle 6-2 an. **1**

Farbe	Weiß	Schwarz	Silber	Rot	Blau	Grün
Codierung	01	101	11	100	001	000

Tabelle 6-2: Huffman-Codierung der Farben

Musterlösung

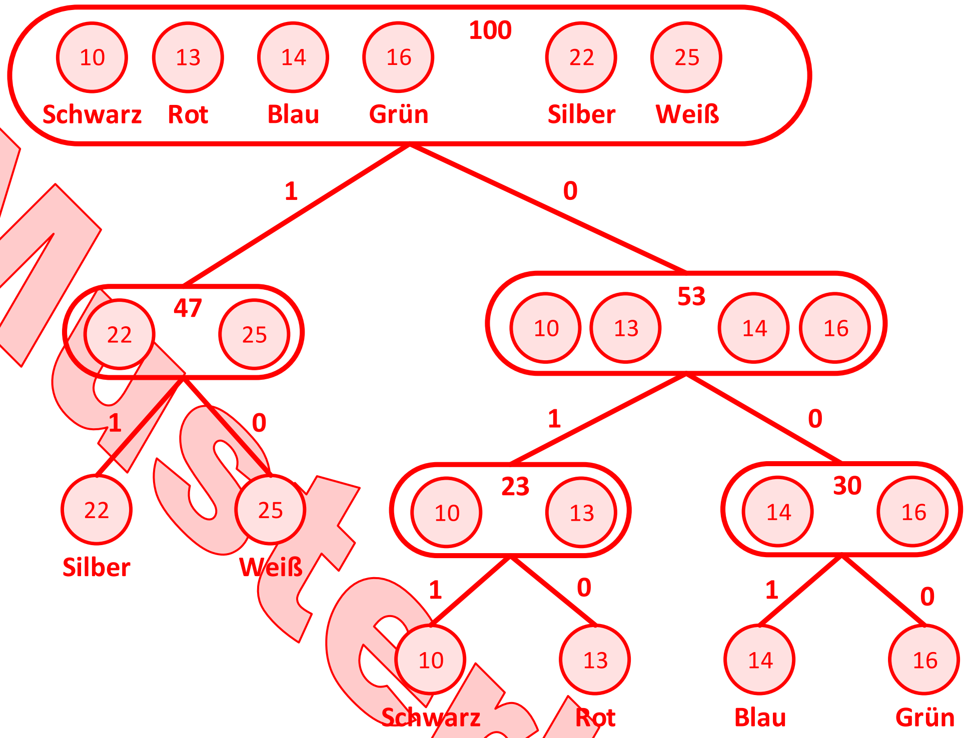
Aufgabe 6.2 Shannon-Fanø-Codierung

6

Bestimmen Sie nun die optimale Codierung nach dem Shannon-Fanø-Verfahren für die Auftrittshäufigkeiten aus Tabelle 6-1 und tragen Sie diese in Tabelle 6-3 ein.

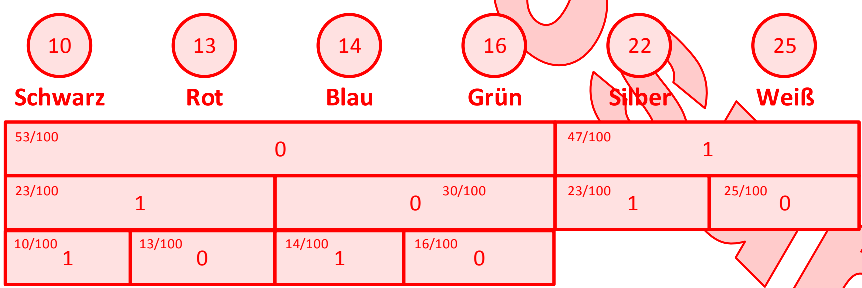
Hinweis:

- *Auch hier sollen die Äste mit größter Auftrittswahrscheinlichkeit am effizientesten Codiert werden.*



Musterlösung

Alternativ:



Farbe	Weiß	Schwarz	Silber	Rot	Blau	Grün
Codierung	10	011	11	010	001	000

Tabelle 6-3: Codierung nach Shannon-Fanø

Aufgabe 6.3 Codierungs-Auswahl

3

Welche der beiden Codierungen aus Aufgabe 6.1 und Aufgabe 6.2 eignet sich am besten für das konkrete Beispiel, um eine möglichst effiziente Speicherung der erfassten Daten zu erreichen? Begründen Sie Ihre Aussage mit einer Rechnung und beachten sie die Vorgaben der Aufgabenstellung!

Die Codierung mit der kleinsten mittleren Codewortlänge ermöglichst die effizienteste Speicherung der Daten.

→ Berechnung der mittleren Codewortlänge: $\bar{m} = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) * m(x_i)$

1.1) Huffman-Code:

m = 0,1 * 3 + 0,13 * 3 + 0,14 * 3 + 0,16 * 3 + 0,22 * 2 + 0,25 * 2 = 2,53

1.2) Shannon-Fanø:

m = 0,1 * 3 + 0,13 * 3 + 0,14 * 3 + 0,16 * 3 + 0,22 *2 + 0,25 * 2 = 2,53

Die mittlere Codewortlänge ist bei beiden Codierungen gleich. Auch die Anzahl der zu Speichernden ‘0‘ ist gleich. Damit bietet keine der Codierungen einen Effizienzvorteil gegenüber der anderen Codierung!

Musterlösung

Aufgabe 7 Automaten

18

Aufgabe 7.1 Automatenentwurf

Im Folgenden soll ein 3-Bit Schieberegister (ohne zirkuläre Rotation) als Zustandsautomat dargestellt werden. Die Eingangsgröße E_0^ν des Automaten entspreche dabei dem einzuschiebenden Bit, während die drei Bits q_0, q_1 und q_2 des Schieberegisters sowohl den Zustand S_k^ν als auch die Ausgabe A_h^ν des Automaten bilden sollen. Das Bit q_0 entspricht dabei dem niederwertigsten Bit.

A) Um welchen Automatentypen handelt es sich hierbei? 1

Medwedew-Automat

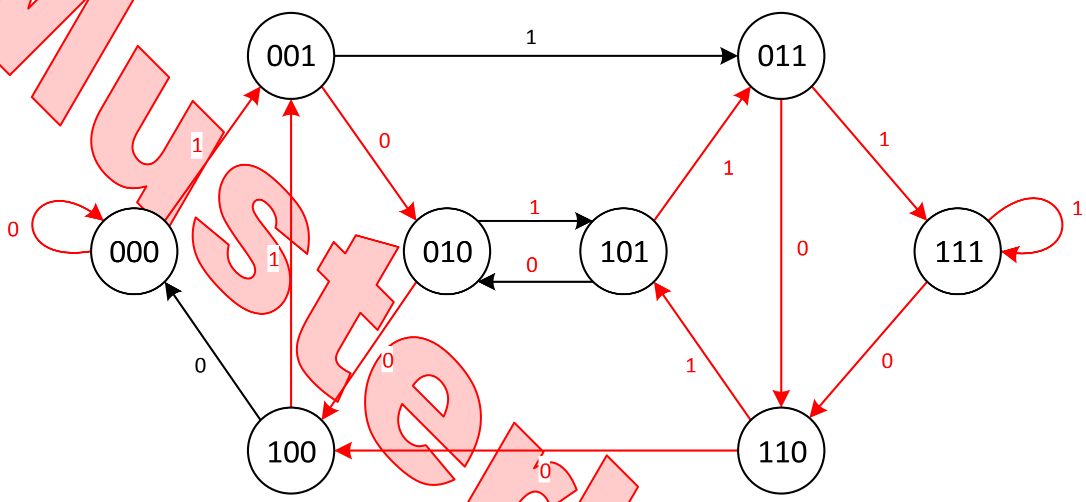


Abbildung 7-1: Unvollständiger Graph des Automaten.

B) Gegeben sei der unvollständige Automatengraph in Abbildung 7-1 (Es sind nur die Zustände und vier der Kanten gegeben). In welche Richtung (links/rechts) werden die Bits des Schieberegisters verschoben? 1

Links

C) Ergänzen Sie die fehlenden Kanten in Abbildung 7-1, sodass der Automat ein funktionierendes Schieberegister abbildet. Achten sie dabei auf die korrekte Beschriftung der Kanten. Beschriften sie auch die vorgegebenen Kanten. 3

D) Der Automat soll nun mit Hilfe von JK-FlipFlops als Zustandsspeicher realisiert werden (Die Zustandsbits sollen direkt und ohne zusätzliche Codierung in den FlipFlops gespeichert werden). Vervollständigen Sie die in der Tabelle 7-1 gegebene Ablauftabelle mit den entsprechenden Folgezuständen des Automaten und deren Ansteuerung für die JK-FlipFlops der beiden niederwertigen Bits. Verwenden Sie nach Möglichkeit „don't care" Stellen für die Ansteuerung der FlipFlops. 6

Musterlösung

Zustand S^{ν}	Eingabe E_0^{ν}	$S^{\nu+1}$	JK-FlipFlops j_1	k_1	j_0	k_0
000	1	001	0	-	1	-
	0	000	0	-	0	-
001	1	011	1	-	-	0
	0	010	1	-	-	1
010	1	101	-	1	1	-
	0	100	-	1	0	-
011	1	111	-	0	-	0
	0	110	-	0	-	1
100	1	001	0	-	1	-
	0	000	0	-	0	-
101	1	011	1	-	-	0
	0	010	1	-	-	1
110	1	101	-	1	1	-
	0	100	-	1	0	-
111	1	111	-	0	-	0
	0	110	-	0	-	1

Tabelle 7-1: Ablauftabelle

E) Füllen Sie die in Tabelle 7-2 gegebenen Symmetriediagramme für die Größen j_0 und k_1 aus und geben sie jeweils eine minimale Ansteuerfunktion an.

3

j_0

		S_0	S_0		
	0	-	-	0	
S_1	0	-	-	0	
S_1	1	-	-	1	E_0
	1	-	-	1	E_0
			S_2	S_2	

k_1

		S_0	S_0		
	-	-	-	-	
S_1	1	0	0	1	
S_1	1	0	0	1	E_0
	-	-	-	-	E_0
			S_2	S_2	

Tabelle 7-2: Symmetriediagramme

$j_0 = E_0 \qquad k_1 = \overline{S_0}$

Musterlösung

F) Der entworfene Automat soll nun zur Erzeugung einer zyklischen Folge von Pseudozufallszahlen verwendet werden. Generatoren für Pseudozufallszahlen werden oft mit Hilfe von rückgekoppelten Schieberegistern realisiert. Dies lässt sich bei dem Automaten durch Rückkopplung der Ausgangsgrößen auf den Eingang erreichen. Hierzu soll die Exklusiv-Oder Beziehung zwischen den beiden höherwertigen Ausgangs-Bits als Eingabe dienen: $E_0^\nu := A_1^\nu \oplus A_2^\nu = (A_1^\nu \wedge \overline{A_2^\nu}) \vee (\overline{A_1^\nu} \wedge A_2^\nu)$.

3

Der Automat soll sich am Anfang im Zustand 111 befinden. Geben sie die Binärwerte der zyklischen Folge von Pseudozufallszahlen an (Die Ausgabewerte des Automaten; insgesamt 7 Binärwerte).

111 -> 110 -> 100 -> 001 -> 010 -> 101 -> 011

G) Welcher Anfangszustand ist für die Generierung einer Folge von Pseudozufallszahlen nicht geeignet? Begründen sie Ihre Antwort.

1

Der Zustand 000 wird bei der gegebenen Rückkopplung nie verlassen.

⇨ Ungeeignet, da keine anderen Zahlen als 000 generiert werden

Musterlösung

Aufgabe 8 CMOS

17

Aufgabe 8.1 Erzeugung von Gatter-Schaltungen

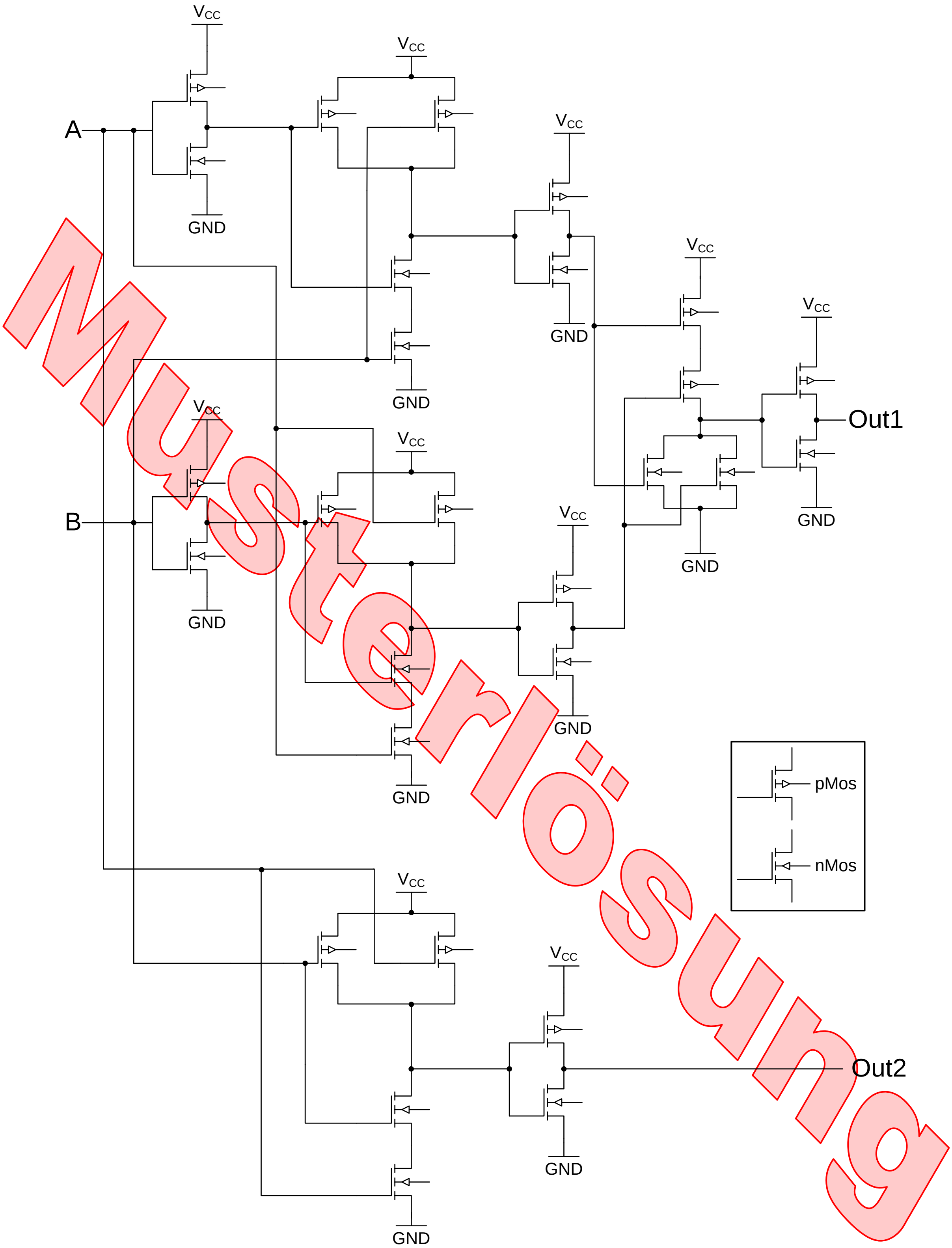
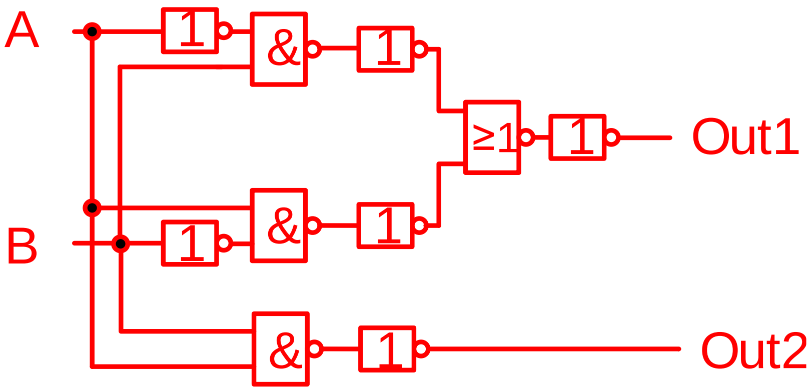


Abbildung 8-1: CMOS-Schaltung

A) Übertragen Sie die in Abbildung 8-1 dargestellte CMOS-Schaltung in eine Gatterschaltung. Stellen Sie alle Gatter explizit dar. **4**



Musterlösung

B) Welche Boolsche Funktion wird für Out1 und Out2 realisiert? Vereinfachen sie den Ausdruck so weit wie möglich. **2**

$Out1(A,B) = \overline{\overline{\overline{\bar{a}b}\ V\ \overline{a\bar{b}}}} = \bar{a}b\ V\ a\bar{b} = a\ XOR\ b$ $\quad$ $Out2(A,B) = \overline{\overline{ab}} = ab$

C) Welche grundlegende Schaltung wird durch die CMOS-Schaltung in Abbildung 8-1 realisiert? **1**

Halbaddierer

Aufgabe 8.2 Analyse von CMOS-Schaltungen

Gegeben sei die in Abbildung 8-2 dargestellte CMOS-Schaltung.

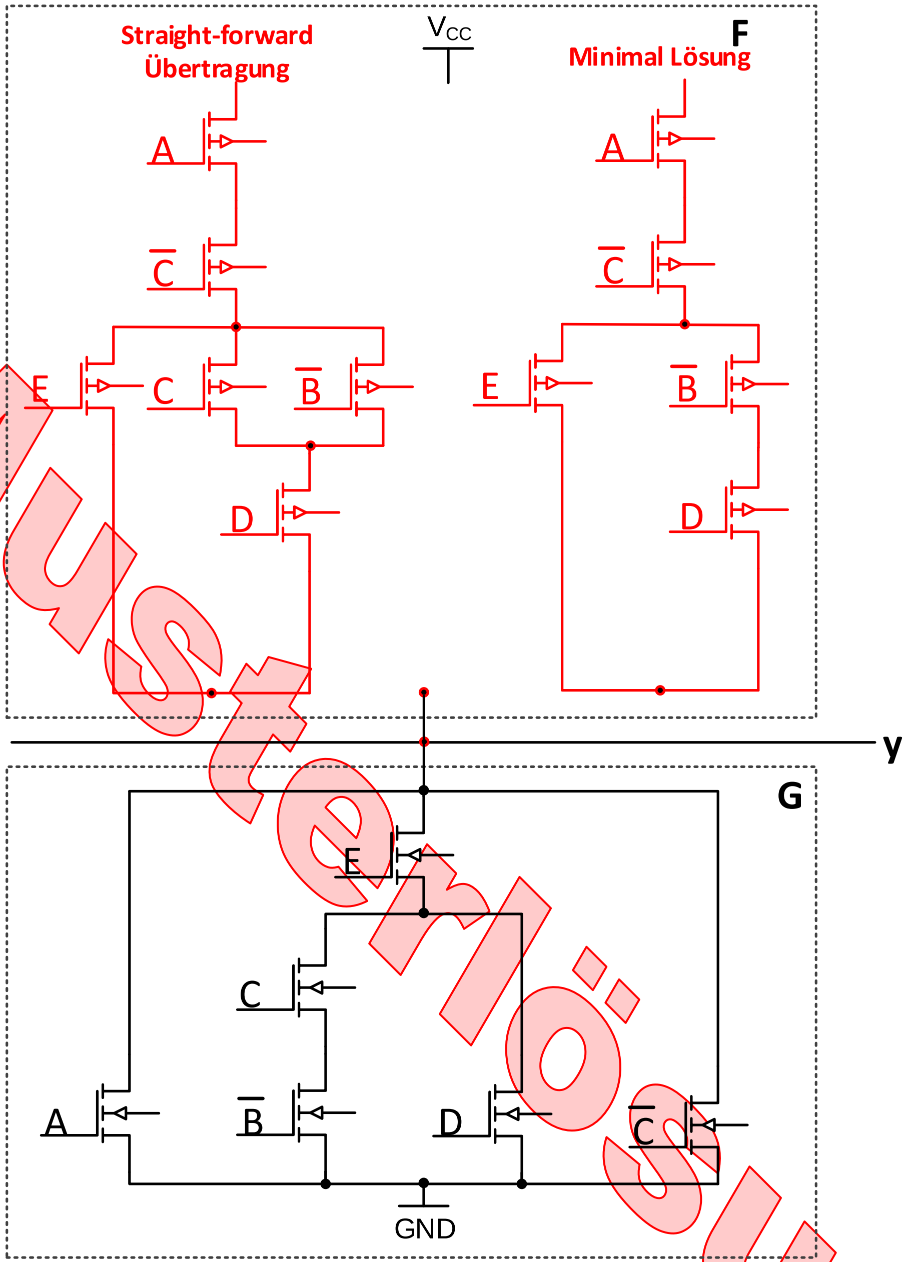


Abbildung 8-2: CMOS-Schaltung 2

Musterlösung

A) Bestimmen die Funktion G, welche sich aus der CMOS-Schaltung des unteren Kastens aus Abbildung 8-2 ableiten lässt. **2**

$$G = \left(\left(\left(\bar{b}\,\&\,C\right) + d\right)\&\,e\right) + a + \bar{c}$$

B) Entwickeln Sie aus der Funktion G aus Aufgabenteil A) die Funktion F, welche den pMOS-Teil der Schaltung definiert. Vereinfachen Sie die Funktion solange, bis nur noch Und- und Oder-Verknüpfungen und bitweise Negationen auftreten. Ergänzen Sie Abbildung 8-2 um den bestimmten pMOS-Teil.

3

$$F = \bar{G}$$

$$= \overline{\left(\left((\bar{b} \,\&\, c) + d\right) \&\, e\right) + a + \bar{c}}$$

$$= \overline{\left(\left((\bar{b} \,\&\, c) + d\right) \&\, e\right)} \;\&\, \bar{a} \;\&\, c$$

$$= \left(\overline{\left((\bar{b} \,\&\, c) + d\right)} + \bar{e}\right) \&\, \bar{a} \;\&\, c$$

$$= \left(\left((\overline{\bar{b} \,\&\, c}) \,\&\, \bar{d}\right) + \bar{e}\right) \&\, \bar{a} \;\&\, c$$

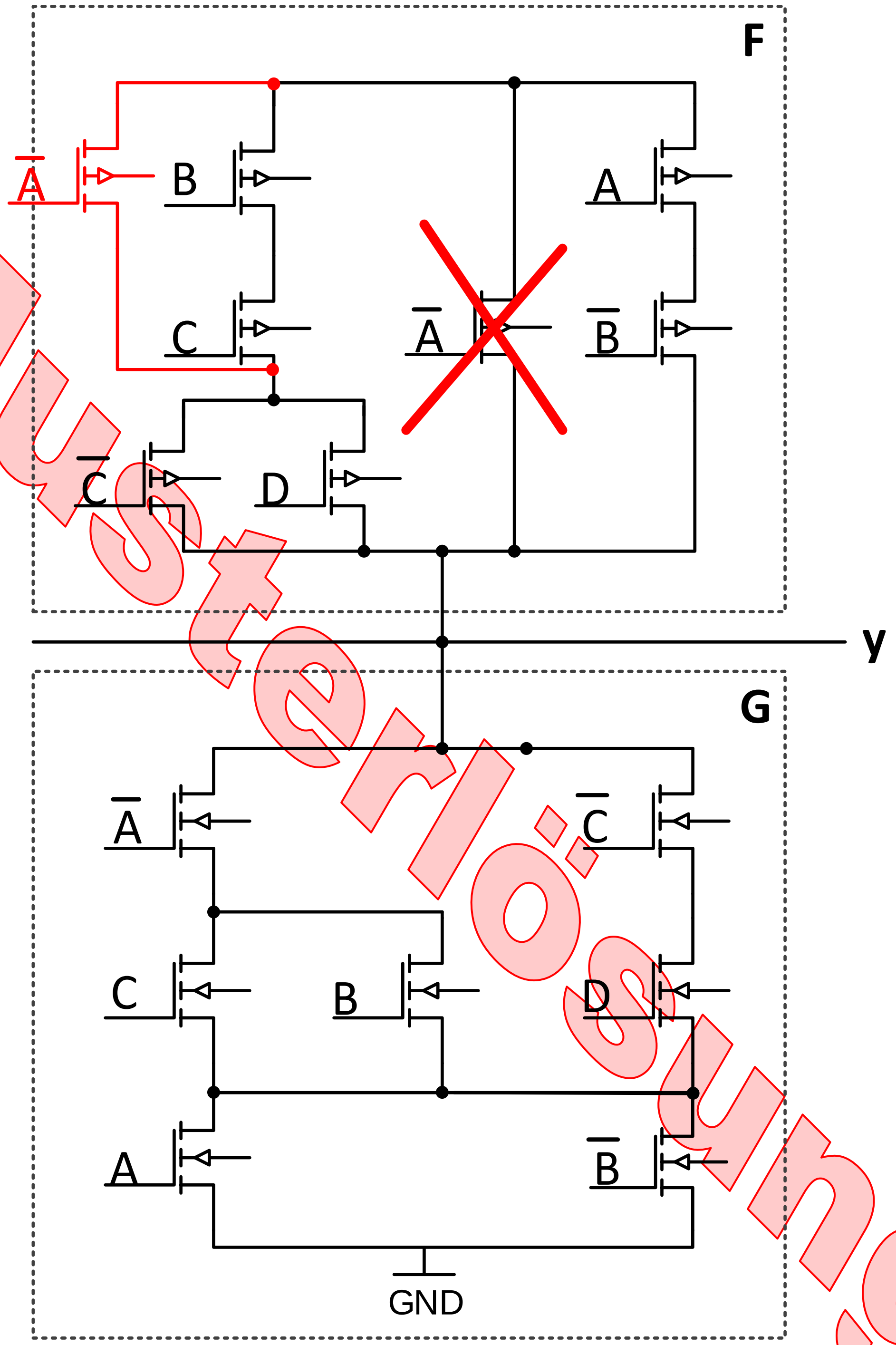
$$= \left(\left((b + \bar{c}) \,\&\, \bar{d}\right) + \bar{e}\right) \&\, \bar{a} \;\&\, c$$ (Abb. 8.3 links)

$$= \left(b \,\&\, \bar{d} + \bar{e}\right) \&\, \bar{a} \;\&\, c$$ ... noch weiter minimiert (not c entfällt) (Abb. 8.3 rechts)

Musterlösung

Aufgabe 8.3 Korrektur von CMOS-Schaltungen

In Abbildung 8-3 ist eine CMOS-Schaltung gegeben. Diese soll in den folgenden Teilaufgaben analysiert werden.



Musterlösung

Abbildung 8-3: CMOS-Schaltung 3

Überprüfen Sie für die Schaltung in Abbildung 8-3, ob die Bedingung für Wohldefiniertheit erfüllt ist, indem sie die boolschen Ausdrücke *geschickt* umformen. Falls eine Bedingung nicht erfüllt ist, geben sie im *Pull-Up Netz* der Schaltung an, an welcher Stelle dieses verändert werden müsste, um Wohldefiniertheit zu garantieren.

5

$$Zu\ erfüllende\ Bedingung: F = \bar{G}$$

$$\bar{G} = \overline{\left(a+\bar{b}\right) \& \left((d \,\&\, \bar{c}\,) + \left(\bar{a} \,\&\, (b+c)\right)\right)}$$

$$= \overline{\left(a+\bar{b}\right)} + \overline{\left((d \,\&\, \bar{c}\,) + \left(\bar{a} \,\&\, (b+c)\right)\right)}$$

$$= (\bar{a} \,\&\, b) + \left(\overline{(d \,\&\, \bar{c}\,)} \;\&\; \overline{\left(\bar{a} \,\&\, (b+c)\right)}\right)$$

$$= (\bar{a} \,\&\, b) + \left(\left(\bar{d} + c\right) \;\&\; \left(a + \overline{(b+c)}\right)\right)$$

$$= (\bar{a} \,\&\, b) + 0 + \left(\left(\bar{d} + c\right) \;\&\; \left(a + \left(\bar{b} \,\&\, \bar{c}\right)\right)\right)$$

$$(Grün\ macht\ anschaulich)$$

$$F = (\,\bar{a} \,\&\, b) + a + \left(\left(\bar{d} + c\right) \,\&\, \left(0 + \left(\bar{b} \,\&\, \bar{c}\right)\right)\right)$$

$$(Im\ Endeffekt\ nur\ De\ Morgan)$$

Alternativ: $\bar{F}$ umgeformt

$$\bar{F} = \overline{(\bar{a} \,\&\, b) + a + \left(\left(\bar{d} + c\right) \,\&\, \left(\bar{b} \,\&\, \bar{c}\right)\right)}$$

$$= \left(\overline{\bar{a} \,\&\, b}\right) \,\&\, \bar{a} \,\&\, \left(\overline{\left(\bar{d} + c\right) \,\&\, \left(\bar{b} \,\&\, \bar{c}\right)}\right)$$

$$= \left(a+\bar{b}\right) \,\&\, \bar{a} \,\&\, \left(\left(\overline{\bar{d} + c}\right) + \left(\overline{\bar{b} \,\&\, \bar{c}}\right)\right)$$

$$= \left(a+\bar{b}\right) \,\&\, \bar{a} \,\&\left((d \,\&\, \bar{c}) + (b+c)\right)$$

$$= \left(a+\bar{b}\right) \,\&\, \bar{a} \,\&\, \left((d \,\&\, \bar{c}) + \left(1 \,\&\, (b+c)\right)\right)$$

$$(Grün\ macht\ anschaulich)$$

$$G = \left(a+\bar{b}\right) \,\&\, 1 \,\&\, \left((d \,\&\, \bar{c}\,) + \left(\bar{a} \,\&\, (b+c)\right)\right)$$

Musterlösung

Zusätzliches Lösungsblatt

Aufgabe________

Musterlösung