Klausur im WS2016/2017
Klausur Digitaltechnik

Institut für Technik der Informationsverarbeitung – ITIV
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

Klausur Digitaltechnik
Datum: 14.03.2017
Name: Chuck Norris
Matr. Nr.: 10.03.1940
ID: ∞

Hörsaal: Ryan, Oklahoma
Platz: $\oint$

Hinweise zur Klausur

Hilfsmittel:

- Als Hilfsmittel sind drei Seiten vorgegeben und ein DIN A4 Blatt selbst geschriebene Formelsammlung zugelassen.
- Verwenden Sie zum Bearbeiten der Aufgaben nur dokumentenechte Schreibgeräte – keinen Bleistift, keine Rotstifte!
- Alle nicht genannten Hilfsmittel sind untersagt. Dies beinhaltet jegliche Kommunikation mit anderen Personen sowie die Benutzung eines Taschenrechners.

Klausurdauer:
Die Prüfungsdauer für die Klausur beträgt 120 Minuten.

Klausurunterlagen:
Die Klausurunterlagen bestehen aus insgesamt 27 Seiten Aufgabenblättern (inklusive dieses Titelblatt, 8 Aufgabenblöcke und 1 zusätzliches Lösungsblatt) und 3 Seiten Formelsammlung. **Bitte prüfen Sie vor der Bearbeitung der Aufgaben auf jeder Seite oben Ihre Matrikelnummer sowie Ihre ID und zusätzlich Ihren Namen auf der ersten Seite.** Falls Sie zusätzliche Blätter zur Lösung der Aufgaben benötigen, fragen Sie nach zusätzlichem Lösungspapier bei der Aufsicht. Vermeiden Sie generell das Beschreiben der Rückseiten. Die Verwendung von eigenen Blättern ist nicht erlaubt. Geben Sie zu jeder Aufgabe einen detaillierten Rechenweg an. Lösungen ohne Rechenweg können trotz richtigem Ergebnis zu Punktabzug führen.

Klausurabgabe:
In den letzten 30 Minuten der Klausur ist eine vorzeitige Abgabe der Klausur nicht möglich. Am Ende der Klausur bleiben Sie bitte sitzen. Alle Aufgaben- und Lösungsblätter sowie dieses Deckblatt sind in den ausgehändigten Umschläge abzugeben. Diese werden von der Aufsicht eingesammelt.

		Seite	$\approx$ Pkt. [%]	Punkte
Aufgabe 1:	Allgemeine Fragen	2	12	
Aufgabe 2:	Mengen, Relationen und Graphen	5	11	
Aufgabe 3:	Optimale Codes	8	13	
Aufgabe 4:	Zahlensysteme	12	12	
Aufgabe 5:	Boolsche Algebra	14	12	
Aufgabe 6:	Minimierung	17	12	
Aufgabe 7:	Automaten	21	11	
Aufgabe 8:	CMOS und Gatter	24	11	
				$\sum$

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen

Aufgabe 1.1: Codierung

A) Geben Sie den Wertebereich einer 128 Bit langen Zahl im Dezimalsystem unter der Annahme an, dass es sich um eine vorzeichenlose Binärzahl handelt.

B) Geben Sie nun den Wertebereich einer 128 Bit langen Zahl im Dezimalsystem unter der Annahme an, dass es sich um eine vorzeichenbehaftete Binärzahl in der Zweierkomplement-Darstellung handelt.

C) Beschreiben Sie kurz was ein Gray Code ist und welchen Vorteil dieser bietet. Beschreiben Sie weiterhin kurz, welche Bedeutung der Zusatz "zyklisch" bei einem Gray Code hat?

D) Wann gilt bei einem n aus m Code die Präfixfreiheit? Begründen Sie Ihre Antwort.

E) Mit welchen Verfahren können Burstfehler erkannt werden, wenn Störungen genau 6 Bits beeinflussen? Nennen Sie 2 Verfahren und die entsprechend zu wählenden Parameter bzw. Randbedingungen Ihrer genannten Verfahren, um 6 Bit Störung erkennen zu können.

Aufgabe 1.2: Verschiedenes

A) Worin unterscheidet sich der Medwedew-Automat vom allgemeinen Moore-Automaten?

B) Vereinfachen Sie den boolischen Ausdruck $(a \wedge b) \vee a$ soweit wie möglich

C) Kann ein Kernimplikant von anderen Primimplikanten vollständig überdeckt sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

D) Mit welcher relativen Auftrittswahrscheinlichkeit muss ein Zeichen auftreten, damit sein Informationsgehalt 1 Bit beträgt. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 1.3: Digitalisierung

A) Gegeben sei das in Abbildung 1.1 eingezeichnete Signal. Zeichnen Sie das entsprechend digitalisierte Signal darunter.

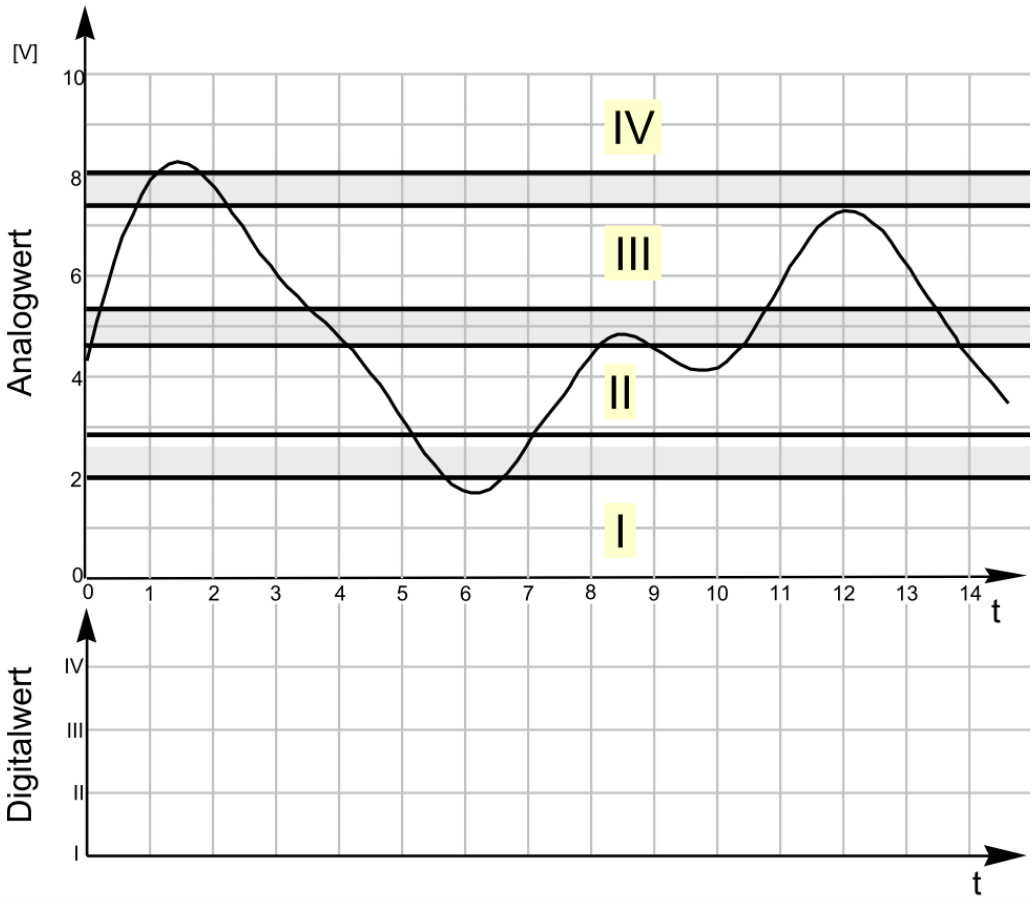


Abbildung 1.1: Signalverlauf

B) Wie viele Bits werden in einem Speicher mindestens benötigt um 200 Abtastpunkte des Signals aus Aufgabe 1.3 A) zu speichern? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Mengen, Relationen und Graphen

Aufgabe 2.1: Mengen

Gegeben seien folgende Mengen

$$U = \{0, 1\}$$
$$V = \{x | x \text{ ist Primzahl}\}$$
$$W = \{1, 2, 3, 5, 8\}$$

A) Bestimmen Sie die folgenden Kardinalitäten:

$$|U^3| = \qquad |UxW| =$$
$$|V| = \qquad |U \cup W| =$$
$$|U \cap V| = \qquad |V \cap W| =$$
$$|P(U \cap V)| = \qquad |U \cap V \cap W| =$$

Aufgabe 2.2: Relationen

A) Geben Sie die Definition für eine reflexive Relation an.

B) Worin unterscheiden sich eine Ordnungsrelation und eine strenge Ordnungsrelation? Geben Sie je ein Beispiel an.

Aufgabe 2.3: Graphentheorie

Gegeben sei der Graph G in Abbildung 2.1.

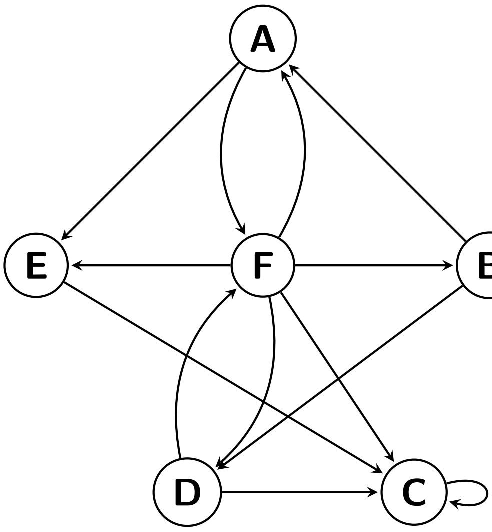


Abbildung 2.1: Graph G

A) Ist der Graph G planar? Begründen Sie Ihre Antwort.

B) Bestimmen Sie die Adjazenzmatrix des Graphen G.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
A						
B						
C						
D						
E						
F						

Tabelle 2.1: Adjanzenzmatrix zu Graph G

C) Zeichnen Sie nun den Graphen H nach der angegebenen Adjanzenzmatrix (Tabelle 2.2).

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	0	1	0	0	0	0
B	0	0	0	0	1	0	0
C	1	0	0	1	0	1	0
D	0	0	1	0	1	0	0
E	0	1	0	1	0	0	1
F	0	0	1	0	0	0	0
G	0	0	0	0	1	0	0

Tabelle 2.2: Adjazenzmatrix zu Graph H

D) Teilen Sie die Knoten des Graphen H so in Mengen auf, dass der Graph H bipartit wird, und geben Sie die jeweiligen Mengen an.

Aufgabe 3: Optimale Codes

Firma X entwickelt Getränkeautomaten. Um Geld zu sparen, will die Firma das kleinstmögliche Speichermodul einsetzen. Deswegen sind Sie verantwortlich dafür, dass jedes Getränk einen Code mit optimaler Länge hat. Dafür brauchen Sie die folgende Information:

Aus den Statistiken vom Jahr 2007 der Firma X ist bekannt, dass Orangensaft sechs Mal seltener als Cola gekauft wird. Kaffee wird zwei Mal so häufig wie Apfelschorle und Apfelschorle zwei Mal so häufig wie Orangensaft ausgewählt. Weiterhin ist bekannt, dass Bier sechs Mal so häufig wie Cola gekauft wird. Schließlich zeigt die Statistik, dass Wein und Sekt zwei Mal seltener als Orangensaft selektiert werden.

A) Füllen Sie die Spalten *Häufigkeit* und *Wahrscheinlichkeit* in der Tabelle 3.1 mithilfe des vorhergehenden Textes aus.

Getränk	**Häufigkeit**	**Wahrscheinlichkeit**
Sekt (a)		
Wein (b)		
Orangensaft (c)		
Apfelschorle (d)		
Kaffee (e)		
Cola (f)		
Bier (g)		

Tabelle 3.1: Statistiken 2007

B) Welche mittlere Codewortlänge ergibt sich für eine Codierung, falls alle Codewörter binär und mit gleicher Länge codiert werden. Geben Sie dafür die Berechnungsvorschrift sowie die ermittelte mittlere Codewortlänge an.

C) Anhand welcher Quelleneigenschaft kann die Kodiereffizienz einer ermittelten Codierung beurteilt werden? Geben Sie deren Namen an und beschreiben Sie kurz in eigenen Worten, was es besagt. Geben Sie außerdem deren Formel zur Berechnung an.

D) Jeden Tag werden die Verkäufe von Getränkeautomaten gespeichert, sodass die Firma Statistiken zusammenstellen kann. In einer Stunde wurde folgender Bitstrom gespeichert:

00011110100100001

Verwenden Sie den Shannon-Fano Baum in der Abbildung 3.1, um die verkaufte Anzahl von jedem Getränk zu berechnen. Füllen Sie die Tabelle 3.2 mit Ihren Ergebnissen aus.

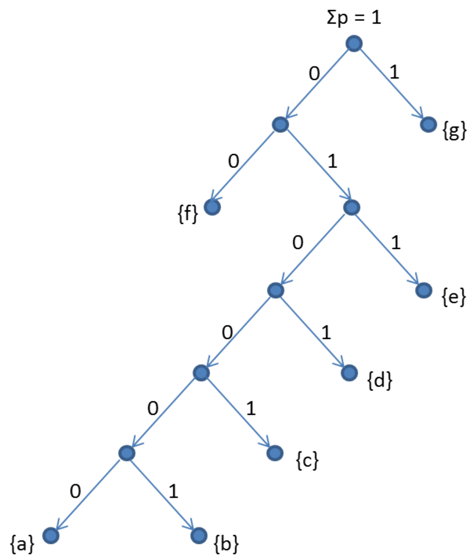


Abbildung 3.1: Shannon-Fanø Codierbaum

Getränk	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**g**
Anzahl verkaufter Getränke							

Tabelle 3.2: Anzahl der verkauften Getränke

E) Welche Anzahl an Bytes kann im Speicher am Tag im Mittel gegenüber einer binär mit gleicher Länge codierten Übertragung eingespart werden, wenn davon auszugehen ist, dass pro Tag 10.000 Getränke verkauft werden und die mittlere Codewortlänge für den Code 1,4 betragen soll?

F) Zehn Jahre später hat die Firma X die Statistiken aktualisiert. Die neuen Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten sind in der Tabelle 3.3 gezeigt.
Bestimmen Sie eine optimale Codierung nach dem **Huffman** Verfahren für die Daten aus Tabelle 3.3 und tragen Sie diese anschließend in Tabelle 3.3 ein. Der Lösungsweg muss nachvollziehbar sein und der vollständige Codierbaum angegeben werden!
Hinweise: linke Äste mit '0', rechte Äste mit '1' codieren. Knoten mit höherer Wahrscheinlichkeit rechts. Benutzen Sie die Buchstaben a,b,...,g zur Identifizierung der Getränke, wie in der Tabelle 3.3 gezeigt wird.

Getränk	**Häufigkeit**	**Wahrscheinlichkeit**	**Huffman Code**
Sekt (a)	2	2/70	
Wein (b)	1	1/70	
Orangensaft (c)	6	6/70	
Apfelschorle (d)	16	16/70	
Kaffee (e)	20	20/70	
Cola (f)	15	15/70	
Bier (g)	10	10/70	

Tabelle 3.3: Statistiken 2017

G) Geben Sie die Formel zur Berechnung der mittleren Codewortlänge für die Codierung von der Aufgabe 3 F) an. Berechnen Sie anschließend diesen Wert soweit wie möglich.

Aufgabe 4: Zahlensysteme

Aufgabe 4.1: Umrechnung von Zahlensystemen

A) Vervollständigen Sie die Tabelle 4.1, indem Sie die offenen Felder durch die entsprechende Konvertierung ergänzen.

Dezimal	**Binär**	**Oktal**	**Hexadezimal**
596_D			
	11000001101_B		
		1763_O	
			$D53_H$

Tabelle 4.1: Umrechnung von Zahlensystemen

Aufgabe 4.2: Rechenoperationen

A) Gegeben sei der folgende Code: 33 32 20 2D 20 34 38
Ein System empfängt den oben genannten ASCII-Code in Hexadezimal Format. Decodieren Sie den ASCII-Code und führen Sie anschließend die darin codierte Operation im Binärsystem aus. Geben Sie dabei alle Zwischenschritte an.

B) Führen Sie eine Subtraktion der Zahl 52_D von der Zahl 28_D (28_D - 52_D) im STIBITZ-Code durch. Stellen Sie Ihren Lösungsweg ausführlich dar.

Aufgabe 4.3: Fließkommazahl

A) Abbildung 4.1 zeigt eine Darstellung von Fließkommazahlen mit 16 Bit. Das höchstwertige Bit stellt das Vorzeichen V dar, die nachfolgenden sechs Bits den Exponenten E und die niederwertigsten neun Bits die Mantisse M.
Stellen Sie die Zahl $49{,}3125_D$ in der angegebenen normierten 16-Bit-Fließkommazahlendarstellung dar. Geben Sie die Zwischenschritte bei der Umrechnung an.

V	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_8	M_7	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Abbildung 4.1: 16bit Fließkommazahlenformat

Aufgabe 5: Boolsche Algebra

A) Zeigen Sie mit Boolescher Algebra, dass die De Morgansche Regel $\overline{(a\&b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$ gilt.

B) Definieren Sie den Begriff Axiomensystem.

Gegeben sei folgende Wahrheitstabelle der Funktion $X(c, b, a)$:

a	b	c	Y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Tabelle 5.1: Funktion $X(c, b, a)$

C) Leiten Sie aus der Wahrheitstabelle 5.1 die dazugehörige DNF für $X(c, b, a)$ ab.

D) Geben Sie eine disjunktive Minimalform der Funktion $X(c, b, a)$ an.

E) Gegeben sei folgende boolesche Funktion: $Y = (b\bar{c}d) \vee (\bar{a}\bar{b}\bar{d}) \vee (\bar{a}bc) \vee (a\bar{b}cd)$
Entwickeln Sie den Ausdruck Y mit Hilfe des Booleschen Entwicklungssatzes in der Reihenfolge d, c, b, a. Geben Sie alle Zwischenergebnisse an und tragen sie das Ergebnis in die unten stehende Tabelle 5.2 ein. Eine Umformung des Ausdrucks ist nicht gestattet.

(d, c, b, a)	Y	(d, c, b, a)	Y
$(0, 0, 0, 0)$		$(1, 0, 0, 0)$	
$(0, 0, 0, 1)$		$(1, 0, 0, 1)$	
$(0, 0, 1, 0)$		$(1, 0, 1, 0)$	
$(0, 0, 1, 1)$		$(1, 0, 1, 1)$	
$(0, 1, 0, 0)$		$(1, 1, 0, 0)$	
$(0, 1, 0, 1)$		$(1, 1, 0, 1)$	
$(0, 1, 1, 0)$		$(1, 1, 1, 0)$	
$(0, 1, 1, 1)$		$(1, 1, 1, 1)$	

Tabelle 5.2: Ergebnis des Entwicklungssatzes

F) Gegeben sei die folgende Funktion

$$Z(a,b,c,d) = \bar{a}(\bar{c}(1) \vee c(\bar{b}(\bar{d}(0) \vee d(1)) \vee b(0))) \vee a(\bar{b}(1) \vee b(\bar{d}(1) \vee d(0)))$$

Die bereits entwickelte Funktion Z soll für eine Field Programmable Gate Array (FPGA) Realisierung mit 8:1 Multiplexern umgesetzt werden. Die Eingangsliterale a, b und c sollen dabei ausschließlich als Steuersignale genutzt werden. Zeichnen Sie die minimale Multiplexerschaltung.

Aufgabe 6: Minimierung

Aufgabe 6.1: Symmetriediagramme

y		a	a		
	1 $_{0}$	0 $_{1}$	- $_{5}$	- $_{4}$	
b	1 $_{2}$	0 $_{3}$	1 $_{7}$	1 $_{6}$	
b	0 $_{10}$	0 $_{11}$	- $_{15}$	0 $_{14}$	d
	1 $_{8}$	0 $_{9}$	1 $_{13}$	1 $_{12}$	d
			c	c	

Abbildung 6.1: Symmetriediegramm einer Schaltfunktion

A) Gegeben sei das Symmetriediagramm aus Abbildung 6.1. Freistellen sollen zunächst zu “1” gesetzt werden. Geben Sie für die dargestellte Schaltfunktion die **konjunktive** Normalform (KNF) an.

B) Legen Sie nun die Freistellen so fest, dass die Schaltfunktion aus Abbildung 6.1 optimal minimiert werden kann und bestimmen sie in diesem Fall eine **disjunktive** Minimalform (DMF). Geben Sie außerdem an, welche Terme der DMF zu den Kernen zählen.

Aufgabe 6.2: Nelson/Petrick Verfahren

A) Gegeben ist der folgende Petrickausdruck:
$PA = (a \vee d)\ \&(a \vee c \vee e \vee g)\ \&(b \vee d)\ \&(d \vee g)\ \&(b \vee e)\ \&(a \vee f)\ \&(b \vee d \vee e)\ \&(a \vee e \vee f)$

Ergänzen Sie die untenstehende Überdeckungstabelle (Tabelle 6.1) entsprechend des gegebenen Pertickausdruck, ohne diesen zu vereinfachen. Die überdeckenden Größen sind durch die Präsenzvariablen a, b, c, d, e, f und g gegeben. Die zu überdeckenden Größen E_i werden entsprechend der Reihenfolge wie Sie im Petrickausdruck auftauchen (links nach rechts), aufsteigend von E_1 bis E_8 indiziert.

p_i/E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
a								
b								
c								
d								
e								
f								
g								

Tabelle 6.1: Überdeckungstabelle für den Petrickausdruck

B) Im Folgenden sei nun eine neue andere Überdeckungstabelle gegeben:

p_i/E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8
p_1					X		X	X
p_2	X	X						
p_3			X	X	X			X
p_4						X		
p_5		X	X	X	X			
p_6	X						X	
p_7		X	X					

Tabelle 6.2: neue Überdeckungstabelle eines anderen Petrick-Verfahrens

Wenden Sie die Regeln zur Streichung von Kernen sowie die Spalten- und Zeilendominanzregeln auf Tabelle 6.2 an, soweit dies möglich ist. Markieren Sie hierbei die Kerne eindeutig durch Einkreisen. Geben Sie weiterhin für jede gestrichene Spalte und Zeile die dominierte, die dominierende und die gestrichene Zeile bzw. Spalte in der Reihenfolge des Streichens in Tabelle 6.3 an. Eine eventuell entstehende zyklische Resttabelle muss nicht weiter behandelt werden. Eine fertige und optimale Lösung ist in dieser Teilaufgabe nicht nötig.

Dominierte Zeile/Spalte	**Dominierende Zeile/Spalte**	**gestrichene Zeile/Spalte**

Tabelle 6.3: Abfolge der Streichungen aus Tabelle 6.2

C) Wenden Sie nun die Zeilendominanzregel auf die bereits reduzierte Tabelle 6.4 an. Welche Zeile(n) können gestrichen werden? Streichen Sie die entsprechende(n) Zeile(n) und die Spalte(n), die durch dominierende Zeilen überdeckt werden. Geben Sie die dominierte(n) und zugehörigen dominierende(n) Zeile(n), sowie die streichbaren Zeile(n) in der Tabelle 6.5 an. Beachten Sie dabei, dass minimale Kosten (gegeben in gate equivalent (GE)) entstehen sollen. Entstehende Kerne müssen beim Ablauf auch berücksichtigt werden. Führen Sie also das Patrick-Verfahren bis zum Ende durch.

p_i/E_i	E_1	E_2	E_4	E_7	E_{10}	E_{13}	E_{14}	$Kosten$
a				X				6 GE
c		X	X			X	X	4 GE
d			X			X		1 GE
g	X	X						5 GE
j	X						X	4 GE
n		X		X	X	X		3 GE
p	X						X	2 GE
r			X		X		X	8 GE

Tabelle 6.4: Reduzierte Überdeckungstabelle

Dominierende Zeile	**Dominierte Zeile**	**gestrichene Zeile**

Tabelle 6.5: Abfolge der Streichungen aus Tabelle 6.4

D) Geben Sie die Präsenzvariablen (p_i) für die in Teilaufgabe 6.2 C) gefundenen Überdeckung sowie die daraus resultierenden Gesamtkosten an.

Aufgabe 7: Automaten

Aufgabe 7.1: Automatenanalyse

Gegeben sei folgendes Ablaufdiagramm eines Automaten (Abbildung 7.1)

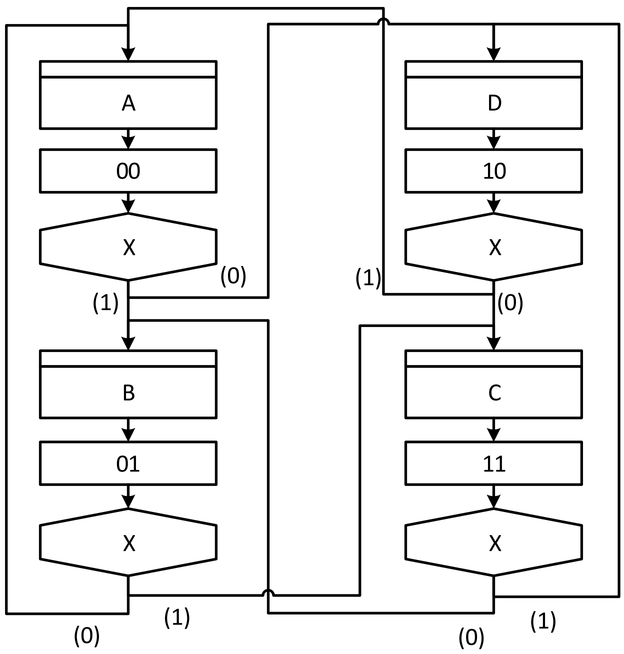


Abbildung 7.1: Ablaufdiagramm

A) Füllen Sie nun die Ablauftabelle (Tabelle 7.1) aus. Tragen Sie dazu für jeden Zustand und jede mögliche Eingabe den Folgezustand sowie die Ausgabe ein.

Zustand	**Eingabe**	**Folgezustand**	**Ausgabe**
S^v	E^v	S^{v+1}	A
A	0		
	1		
B	0		
	1		
C	0		
	1		
D	0		
	1		

Tabelle 7.1: Ablauftabelle

B) Geben Sie den Automatentyp des Automaten an, der in Abbildung 7.1 dargestellt ist. Begründen Sie Ihre Aussage.

C) Welche Funktion wird duch den Automaten in Abbildung 7.1 realisiert?

D) Welche Funktion hat die Eingabe X des Automaten aus Abbildung 7.1?

Aufgabe 7.2: Realisierung von Automaten mit FlipFlops

A) Der Zustandsautomat aus Tabelle 7.2 soll mit einem *T-FlipFlop* (mit dem Eingang t_0) für das erste Bit S_0, einem *RS-FlipFlop* (mit den Eingängen r_1 und s_1) für das zweite Bit S_1 und einem unbekannten FlipFlop (mit den Eingängen x_2 und y_2) für das dritte Bit S_2 realisiert werden.
Ergänzen Sie in der Ablauftabelle die fehlenden Ansteuerbits für die Eingänge t_0, r_1 und s_1 der FlipFlops.

Zustand	**Eingabe**	**Folgezustand**	**FlipFlop Ansteuerung**				
$S^v = (S_0^v, S_1^v, S_2^v)$	$E^v = (E_0^v, E_1^v)$	S^{v+1}	t_0	r_1	s_1	x_2	y_2
0,0,0	1,1	0,0,1				0	1
0,0,0	-,-	0,0,0				0	0
0,0,1	-,0	0,0,1				0	1
0,0,1	-,1	0,1,1				0	0
0,1,0	-,0	0,1,0				1	0
0,1,0	-,1	0,0,0				0	0
0,1,1	0,0	0,1,1				0	1
0,1,1	-,1	0,1,0				1	0
0,1,1	1,0	1,0,0				1	1
1,0,0	-,0	1,0,0				1	0
1,0,0	-,1	0,1,0				0	0

Tabelle 7.2: Ablauftabelle eines unbekannten Zustandsautomaten

B) Geben Sie die charakteristische Gleichung für ein T-FlipFlop an.

C) Um welchen Typ von FlipFlop handelt es sich bei dem unbekannten FlipFlop mit den Eingängen x_2 und y_2? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 8: CMOS und Gatter

Aufgabe 8.1: Analyse einer CMOS Schaltung

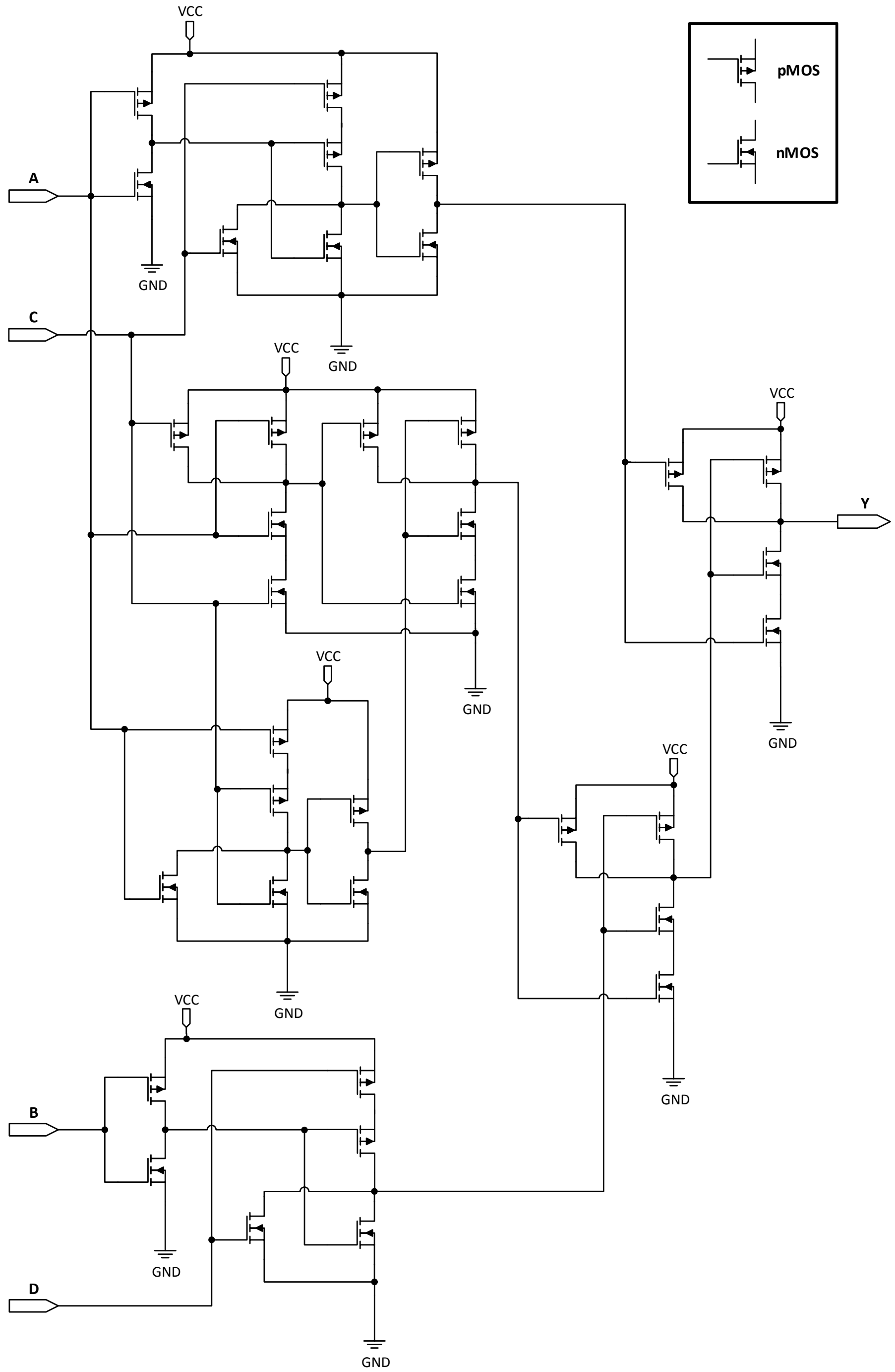


Abbildung 8.1: CMOS-Schaltung mit 4 Eingängen (A, B, C, D) und einem Ausgang (Y)

A) Gegeben sei die CMOS Schaltung aus Abbildung 8.1. Zeichnen Sie eine äquivalente Schaltung aus Logikgattern, die dieselbe Logikfunktion realisiert. Stellen Sie alle Gatter explizit dar.

B) Geben Sie nun die durch Abbildung 8.1 realisierte Schaltfunktion in Positiv-Logik an (nur *und*/*oder* Operationen, kein *nand*/*nor*). Der *nicht* Operator soll dabei ausschließlich auf einzelne Literale, nicht aber auf die Ergebnisse einer anderen logischen Operation angewendet werden. (Hinweis: Es ist nicht notwendig, die Funktion darüber hinaus noch weiter zu vereinfachen oder auf eine Normalform zu bringen).

Aufgabe 8.2: Umwandlung von NMOS Logik in CMOS Logik

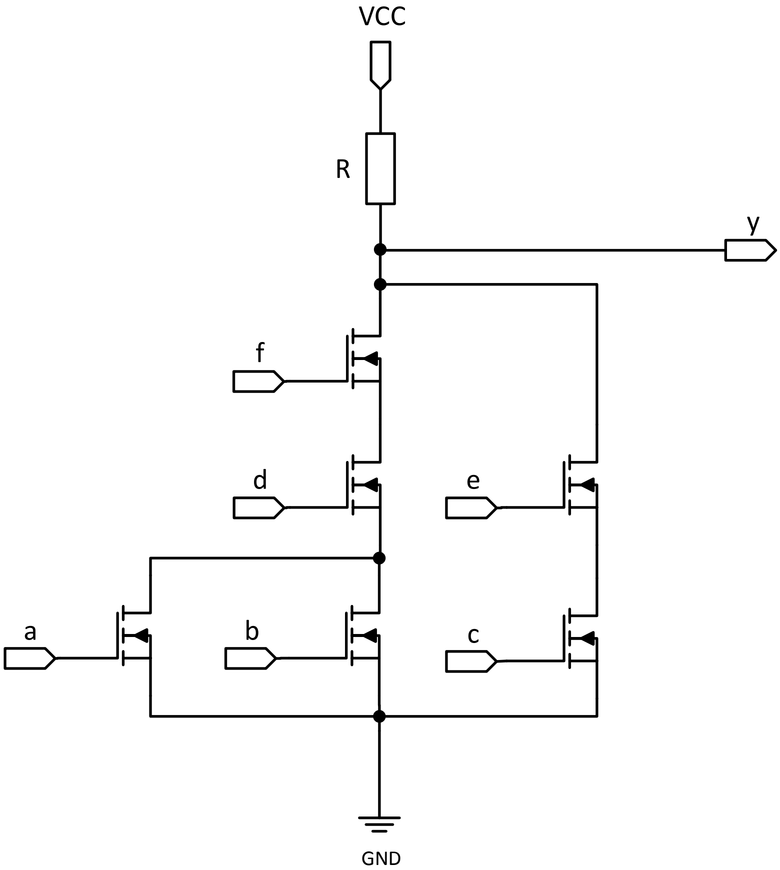


Abbildung 8.2: NMOS-Schaltung mit 6 Eingängen a-f und einem Ausgang y

A) Abbildung 8.2 zeigt eine Logikschaltung in NMOS Technik. Beschreiben Sie kurz wie daraus eine äquivalente CMOS Schaltung erstellt werden kann?

B) Entwickeln Sie nun eine CMOS-Schaltung, die äquivalent zu der NMOS Schaltung aus Abbildung 8.2 ist. Ermitteln Sie dazu zunächst die pull-up-Funktion F und die pull-down-Funktion G. Zeichnen Sie anschließend die zugehörige CMOS-Schaltung unter Verwendung des vorgegebenen Vordrucks 8.3.

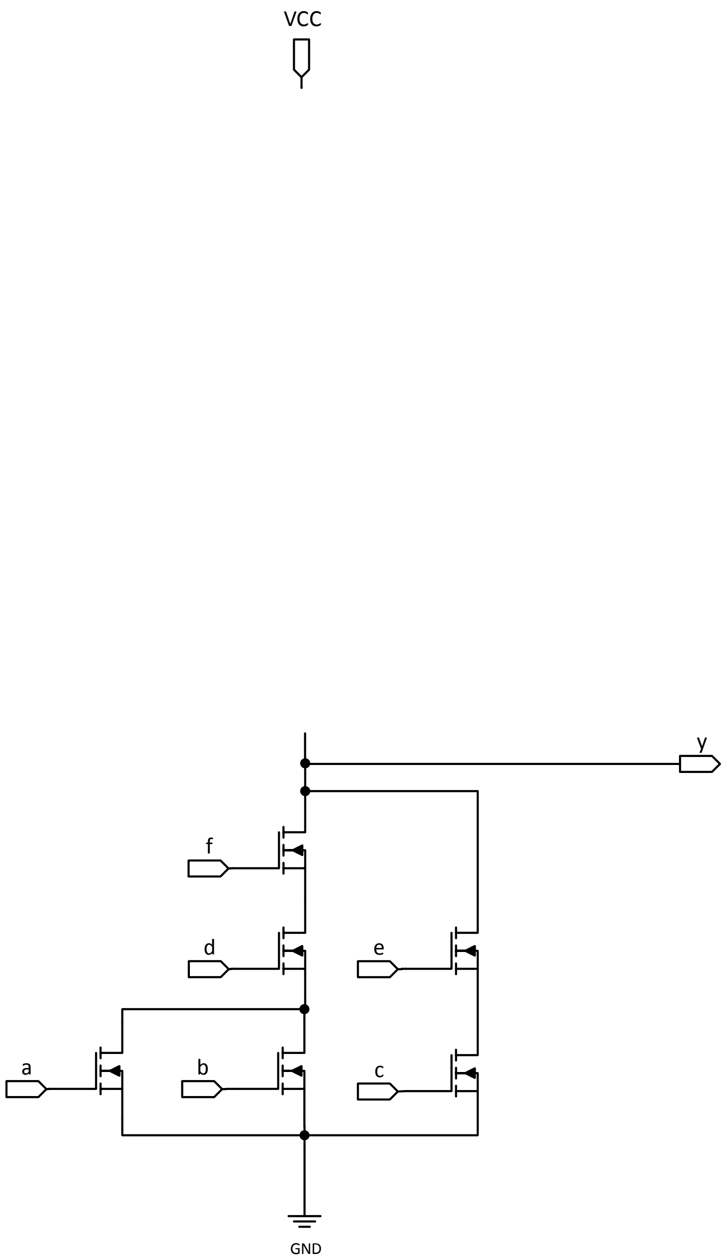


Abbildung 8.3: Entwickelte CMOS Schaltung

Zusätzliches Lösungsblatt:

Formelblatt Digitaltechnik

Huntingtonschen Axiome für alle $a,b,\mathrm{I},\mathrm{O} \in K$; $\bar{a} = k \in K$

Abgeschlossenheit:	(H1)	$a \top b \in K$	$a \perp b \in K$
Kommutativgesetz:	(H2)	$a \top b = b \top a$	$a \perp b = b \perp a$
Distributivgesetz:	(H3)	$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)$	$(a \perp b) \top c = (a \top c) \perp (b \top c)$
Neutrales Element:	(H4)	$\mathrm{I} \top a = a$	$\mathrm{O} \perp a = a$
Komplement:	(H5)	$a \top k = \mathrm{O}$	$a \perp k = \mathrm{I}$

Abgeleitete Regeln

R1a:	$\bar{0} = 1$	R1b:	$\bar{1} = 0$
R2a:	$0 \vee 0 = 0$	R2b:	$1 \,\&\, 1 = 1$
R3a:	$1 \vee 1 = 1$	R3b:	$0 \,\&\, 0 = 0$
R4a:	$1 \vee 0 = 1$	R4b:	$1 \,\&\, 0 = 0$
R5a:	$a \vee 0 = a$	R5b:	$a \,\&\, 0 = 0$
R6a:	$a \vee 1 = 1$	R6b:	$a \,\&\, 1 = a$
R7a:	$a \vee a = a$	R7b:	$a \,\&\, a = a$
R8a:	$a \vee \bar{a} = 1$	R8b:	$a \,\&\, \bar{a} = 0$
R9:	$\overline{(\bar{a})} = \bar{\bar{a}} = a$		

Assoziative Gesetze:

R10a: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee b \vee c$ R10b: $(a \,\&\, b) \,\&\, c = a \,\&\, (b \,\&\, c) = a \,\&\, b \,\&\, c$

Absorptionsgesetze:

R11a: $(a \vee b) \,\&\, a = a$ R11b: $(a \,\&\, b) \vee a = a$

De Morgan:

R12a: $\overline{(a \vee b)} = \bar{a} \,\&\, \bar{b}$ R12b: $\overline{(a \,\&\, b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$

Umwandlung DNF ↔ KNF

$$OR(AND(l_i)) \xleftrightarrow{R9} OR\left(AND(\bar{\bar{l_i}})\right) \xleftrightarrow{R12a} OR\left(\overline{OR(\bar{l_i})}\right) \xleftrightarrow{R12b} \overline{AND\left(OR(\bar{l_i})\right)} \xleftrightarrow{H3}$$

$$\overline{OR\left(AND(\bar{l_k})\right)} \xleftrightarrow{R12a} AND\left(\overline{AND(\bar{l_k})}\right) \xleftrightarrow{R12b} AND\left(OR(\bar{\bar{l_k}})\right) \xleftrightarrow{R9} AND\left(OR(l_k)\right)$$

Weitere Funktionen

Implikation $a \to b = \bar{a} + b$

Äquivalenz $a \equiv b = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$

Inklusion $f \le g \Rightarrow f \cdot \bar{g} = 0$

Transitivität der Inklusion

$(f \le g) \cdot (g \le h) \Rightarrow f \le h$

Tautologie $f = g \Leftrightarrow f \equiv g = 1$

$f \le g \Leftrightarrow \bar{f} + g = 1$

XOR-Regeln $x \oplus y = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$

$x + y = x \cdot y \oplus x \oplus y$

$x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$

$\bar{x} = x \oplus 1$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$

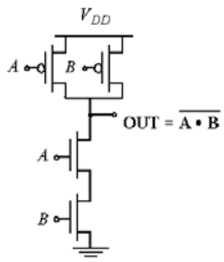
Multiplexer $f = x \cdot a + \bar{x} \cdot b$

Entwicklungssatz

Boolescher Entwicklungssatz $f = x \cdot f_x + \bar{x} \cdot f_{\bar{x}}$

Dualer Entwicklungssatz $f = (\bar{x} + f_x) \cdot (x + f_{\bar{x}})$

CMOS Schaltungen



CMOS (wohl definiert) $v_1 = \overline{v_0}$

CMOS (kein Kurzschluss) $v_1 \cdot v_0 = 0$

CMOS (Vollständigkeit) $v_1 + v_0 = 1$

Addierer

Halbaddierer $s_i = a_i \oplus b_i$ $c_{i+1} = a_i \cdot b_i$

Volladdierer $s_i = a_i \oplus b_i \oplus c_i$

$c_{i+1} = a_i \cdot b_i + (a_i \oplus b_i) \cdot c_i$

Carry-Look-ahead $c_{i+1} = g_i + p_i \cdot c_i$

Generate $g_i = a_i \cdot b_i$

Propagate $p_i = a_i \oplus b_i$

Informationsgehalt

Informationsgehalt H_e eines Zeichens: $H_e = \mathrm{ld}\,\frac{1}{p}$

Informationsgehalt H einer Quelle: $H = \sum_{i=1}^{N} p(i) \cdot \mathrm{ld}\,\frac{1}{p(i)}$

mit der Auftrittswahrscheinlichkeit $p(i)$ und $\sum_{i=1}^{N} p(i) = 1$

a,b,x,y,z : boolesche Variablen l : Literal f,g : boolesche Funktionen v_1 : p-Netz v_0 : n-Netz
s : Summe/Zustand c : Carry i : Eingang δ : Transitionsfunktion λ : Ausgabefunktion

Codierung

Allgemeiner Aufbau einer polyadischen Zahl:

$$N = dn * Rn + \ldots + d1 * R1 + d0 * R0$$

mit N Zahl im Zahlensystem; R Basis; R^i Wertigkeit; d_i Ziffer der i-ten Stelle; Z Menge der Ziffer $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, R-1\}$

ASCII-Tabelle

LSB	MSB							
Binär	000	001	010	011	100	101	110	111
	Steuerzeichen			Großbuchstaben			Kleinbuchstaben	
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	„	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Anzahl Codewörter im (k aus m)-Code:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Korrigierbare Fehleranzahl bei ungerader HD:

$$F_k = \frac{(d-1)}{2}$$

Erkennbare Fehleranzahl: $F_e = d - 1$

Gleitkommadarstellung gemäß IEEE 754-Standard

Vorzeichen	Exponent								Mantisse							
V									2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	...	2^{-22}	2^{-23}
Bit 31	30							23	22							0

Exponent E	Mantisse M	Wert
255	≠0	ungültig (NAN)
255	0	$-1^V \cdot \infty$ (±unendlich)
0 < E < 255	**M**	**$-1^V \cdot 2^{E-127} \cdot (1,M)$**
0	≠ 0	$-1^V \cdot 2^{-126} \cdot (0,M)$
0	0	$-1^V \cdot 0$

Minimierung - Allgemeine Vorgehensweise:

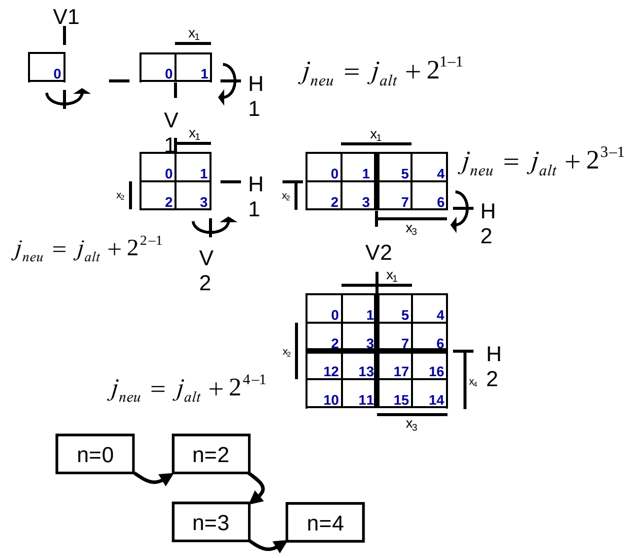
1) **Kerne** bestimmen und **Streichen aller überdeckten Spalten** (@ Einsstellen) („leergewordene“ Zeilen können auch gestrichen werden)

2) **Spaltendominanzen** finden und **dominierende Spalten streichen**

3) **Zeilendominanzen** finden und **dominierte Zeilen streichen**, nach Möglichkeit (-> **Kosten ci beachten**!)

4) Schritte **1-3 wiederholen**, bis **Überdeckungstabelle nicht reduzierbar** -> keine Kerne und Dominanzen mehr (ggf. noch zyklische Resttabelle auflösen)

Entwicklung eines Symmetriediagramms



FlipFlops (charakteristische Gleichungen)

RS-FlipFlop: $q_k^{v+1} = S^v \vee (q_k^v \,\&\, \overline{R}^v)$

q^v	q^{v+1}	R	S
0	0	-	0
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	-

D-FlipFlop: $q_k^{v+1} = D^v$

q^v	q^{v+1}	D
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

JK-FlipFlop: $q^{v+1} = (\overline{K} \,\&\, q^v) \vee (J \,\&\, \overline{q}^v)$

q^v	q^{v+1}	K	J
0	0	-	0
0	1	-	1
1	0	1	-
1	1	0	-

T-FlipFlop: $q^{v+1} = (T \,\&\, \overline{q}^v) \vee (\overline{T} \,\&\, q^v)$

q^v	q^{v+1}	T
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Automaten

A_h^v Ausgangsvektor;

S_k^v Zustandsvektor;

E_g^v Eingangsvektor

Transitionsgleichungen

$$s_i^{v+1} = \delta_i\left(S_k^v, E_g^v\right), mit\ s_i^{v+1} \in S_k^{v+1}$$

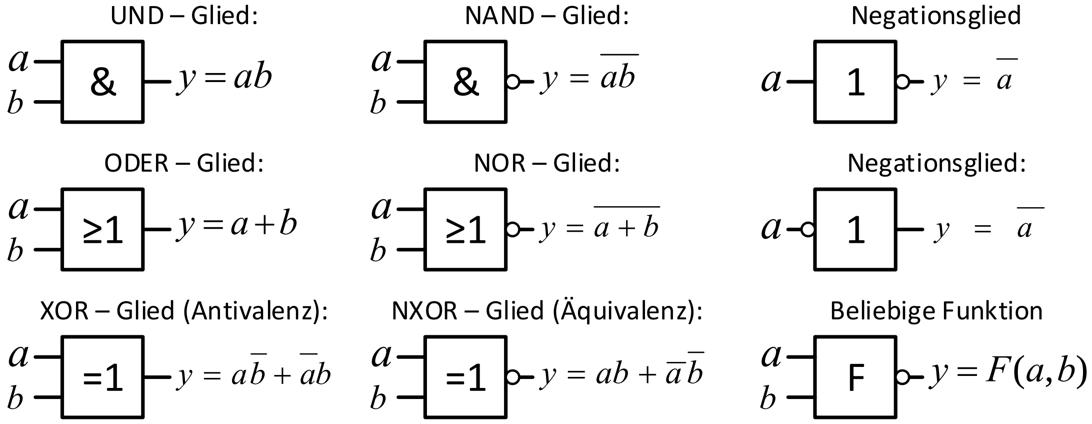
Ausgabefunktionen Medwedew $A_h^v = S_k^v$

Ausgabefunktionen Moore $A_h^v = \lambda_i\left(S_k^v\right)$

Ausgabefunktionen Mealy $A_h^v = \lambda_i\left(S_k^v, E_g^v\right)$

a, b, x, y, z : boolesche Variablen l: Literal f, g : boolesche Funktionen v_1 : p-Netz v_0 : n-Netz
s : Summe/Zustand c : Carry i : Eingang δ : Transitionsfunktion λ : Ausgabefunktion

Schaltsymbole

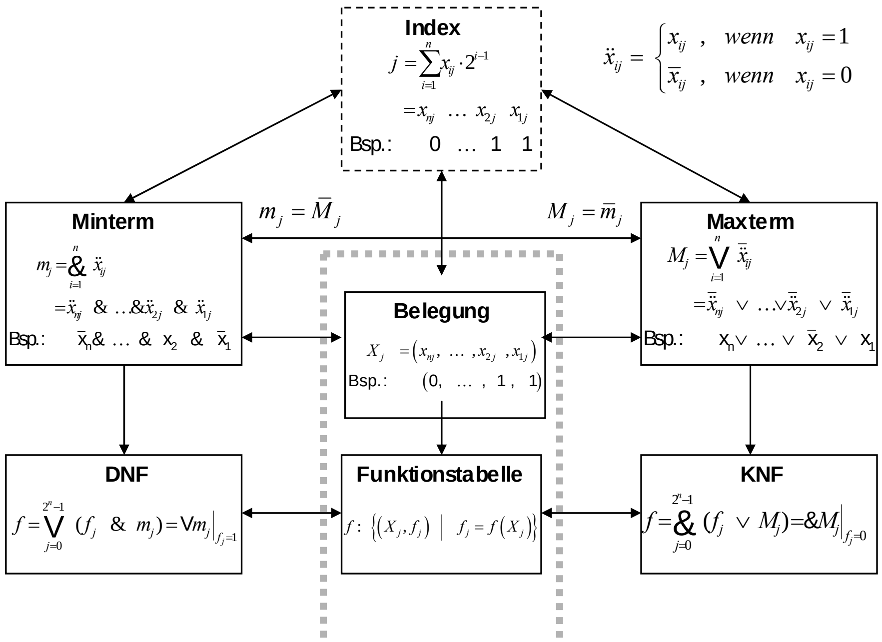


Zusammenstellung der wichtigsten Basissysteme

Zahl der Operatoren	Namen	Zeichen	Darstellung mit UND, ODER, NICHT	Darstellung von $\overline{a}$	$a\&b$	$a \vee b$
3	NICHT UND ODER	$y=\overline{a}$ $y=a\&b$ $y=a\vee b$	-	$\overline{a}$ - -	- $a\&b$ -	- - $a\vee b$
2	NICHT UND	$y=\overline{a}$ $y=a\&b$	-	$\overline{a}$ -	- $a\&b$	$a\vee b=\overline{\overline{a\vee b}}=\overline{\overline{a}\&\overline{b}}$
2	NICHT ODER	$y=\overline{a}$ $y=a\vee b$	-	$\overline{a}$ -	$a\&b=\overline{\overline{a\&b}}$ $=\overline{\overline{a}\vee\overline{b}}$	- $a\vee b$
2	UND ANTIVALENZ (Konstante 1)	$y=a\&b$ $y=a\oplus b$	$y=a\&b$ $y=\overline{a}\&b\vee a\&\overline{b}$	$\overline{a}=\overline{a}\&1\vee a\&\overline{1}$ $=a\oplus 1$	$a\&b$ -	$a\vee b$ $=a\oplus b\oplus(a\&b)$
1	NAND	$y=a\overline{\&}b$	$y=\overline{a\&b}$ $=\overline{a}\vee\overline{b}$	$\overline{a}=\overline{a\&a}=a\overline{\&}a$ oder $\overline{a}=\overline{a\&1}=a\overline{\&}1$	$a\&b=\overline{\overline{a\&b}}$ $=\overline{a\overline{\&}b}$ $=(a\overline{\&}b)\overline{\&}(a\overline{\&}b)$	$a\vee b=\overline{\overline{a}\&\overline{b}}$ $=\overline{a}\overline{\&}\overline{b}$ $=(a\overline{\&}a)\overline{\&}(b\overline{\&}b)$
1	NOR	$y=a\overline{\vee}b$	$y=\overline{a\vee b}$ $=\overline{a}\&\overline{b}$	$\overline{a}=\overline{a\vee a}=a\overline{\vee}a$ oder $\overline{a}=\overline{a\vee 0}=a\overline{\vee}0$	$a\&b=\overline{\overline{a}\vee\overline{b}}$ $=\overline{a}\overline{\vee}\overline{b}$ $=(a\overline{\vee}a)\overline{\vee}(b\overline{\vee}b)$	$a\vee b=\overline{\overline{a\vee b}}$ $=\overline{a\overline{\vee}b}$ $=(a\overline{\vee}b)\overline{\vee}(a\overline{\vee}b)$

Hauptsatz der Schaltalgebra

Beziehungen zwischen den Begriffen



a,b,x,y,z : boolesche Variablen l: Literal f,g : boolesche Funktionen v_1: p-Netz v_0: n-Netz
s : Summe/Zustand c : Carry i : Eingang δ : Transitionsfunktion λ : Ausgabefunktion