

Klausur (WS 2018/2019)

Digitaltechnik



Institut für Technik der Informationsverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

Klausur: Digitaltechnik
Datum: 19. März 2019

Teilnehmer:

Matr.-Nr.:
ID:

Hörsaal:
Platz:

Es gelten die folgenden Regelungen:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer
 - einem doppelseitig und handschriftlich beschriebenen DIN-A4-Blatt.
- Nutzen Sie nur **dokumentenechte Schreibgeräte** – keine Bleistifte oder rote Farbe!
- Die Verwendung von eigenem Papier ist nicht zugelassen.
- Vermeiden Sie das Beschreiben der Rückseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie Zusatzblätter von der Aufsicht.
 - Versehen Sie solche Blätter unbedingt mit Ihrer Matrikelnummer.
 - Ordnen Sie jedes zusätzliche Lösungsblatt einer Aufgabe eindeutig zu.

Die vorliegende Klausur besteht aus **35 Blättern** und einer dreiseitigen Formelsammlung.

	Seite	≈ Pkt. in %	Punkte
Aufgabe 1: Allgemeine Fragen	2	11	
Aufgabe 2: Automaten	5	12	
Aufgabe 3: Boolesche Algebra	9	12	
Aufgabe 4: CMOS und Gatter	14	14	
Aufgabe 5: Optimale Codes	21	12	
Aufgabe 6: Minimierung	25	12	
Aufgabe 7: Optimale Codes	28	12	
Aufgabe 8: Zahlensysteme	32	12	
			Σ

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen

Aufgabe 1.1: Codierung und Zahlensysteme

- A) Wie viele Binärstellen sind mindestens nötig um 60 Zeichen zu codieren (ohne Fehlererkennung)?

- B) Welche ist die größte darstellbare Zahl bei Verwendung der 2er-Komplementdarstellung mit 5 bit?

- C) Wie viele Symbole werden im Tetrahexagesimalsystem (Basis 64) benötigt, um eine 40-stellige Binärzahl darzustellen? Begründen Sie Ihre Antwort.

- D) Welche minimale Hammingdistanz weist der Stibitz-Code auf? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein Beispiel.

- E) Wie viele gültige Codewörter gibt es bei einem 7 aus 8 Code? Geben Sie zwei gültige Codewörter explizit an.

- F) Geben Sie jeweils die DMF der Funktionen $a \equiv b$ sowie $a \oplus b$ an.

- G) In Abbildung 1.1 ist ein CMOS-Schaltkreis und eine dazugehörige unvollständige Funktionstabelle gegeben. Vervollständigen Sie die Funktionstabelle und benennen Sie die realisierte Schaltfunktion.

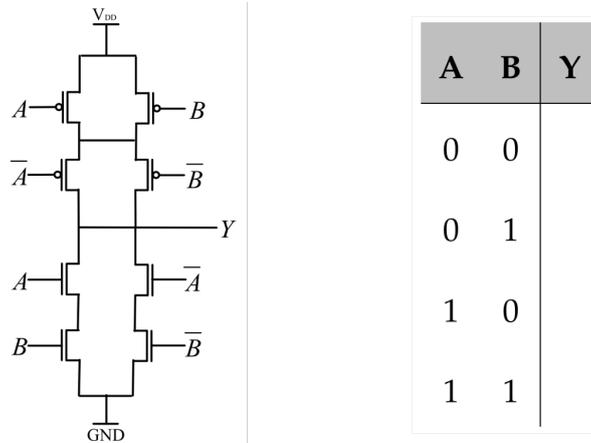


Abbildung 1.1: CMOS Schaltkreis und Funktionstabelle

Aufgabe 1.2: Blocksicherung

Bei einer Datenübertragung wird der Bitstrom 0111 0100 0110 000 empfangen. Über die Codierung wissen Sie lediglich, dass Blocksicherung mit doppelter Quersummenergänzung ohne Scrambling verwendet wurde und die Übertragung fehlerfrei ist.

- A) Geben Sie die Nutzdatenwörter aus dem empfangenen Bitstrom in der richtigen Reihenfolge an. Begründen Sie Ihre Antwort!

- B) Angenommen, Sie wenden auf die oben genannte Übertragung ein Scrambling an, wie lautet dann der resultierende modifizierte Bitstrom?

- C) Welchen Vorteil hat Scrambling bei der Blocksicherung?

Aufgabe 1.3: Digitalisierung

- A) Geben Sie vier unterschiedliche Signaltypen an.

- B) Erklären Sie die "weiche" Diskrimination.

- C) Wie viele Bits werden in einem Speicher mindestens benötigt um 800 Abtastpunkte eines Signals mit vier Quantisierungsstufen zu speichern? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2: Automaten



Aufgabe 2.1: Automatendarstellung

Ein allgemeiner Moore-Automat ist anhand des Graphen in Abbildung 2.1 dargestellt.

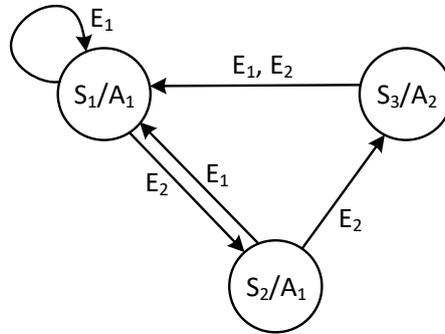


Abbildung 2.1: Allgemeiner Moore-Automat

- A) Eine Methode zur Darstellung des Verhaltens eines Automaten ist die Automatentafel. Wie wird sie gebildet? Erklären Sie dabei den Unterschied in der Darstellung zwischen Mealy- und Moore-Automaten.



- B) Füllen Sie die Automatentafel in Tabelle 2.1 entsprechend dem Automaten von Abbildung 2.1 aus. Achten Sie dabei auf eine richtige Beschriftung der Spalten.



S^v	S^{v+1}	
S_1		
S_2		
S_3		

Tabelle 2.1: Automatentafel vom Moore-Automaten in Abb. 2.1

Aufgabe 2.2: Automatenanalyse

Gegeben sei folgendes Ablaufdiagramm eines Automaten (Abbildung 2.2).

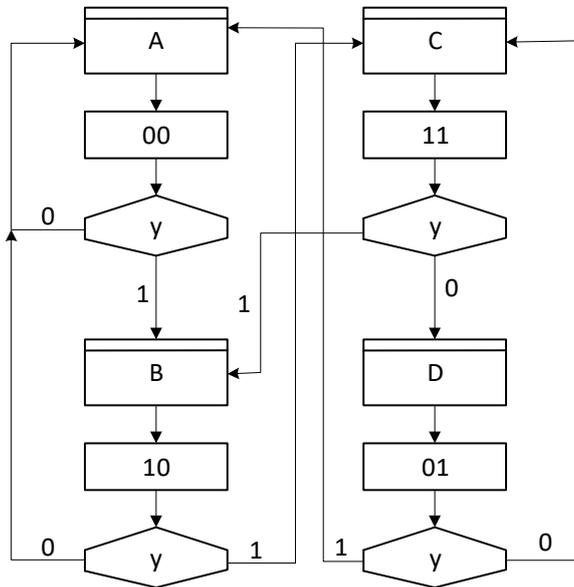


Abbildung 2.2: Ablaufdiagramm eines Automaten

- A) Füllen Sie nun die Ablauftabelle (Tabelle 2.2) aus. Tragen Sie hierzu für jeden Zustand und jede mögliche Eingabe den codierten Folgezustand sowie die Ausgabe ein. Verwenden Sie für die Codierung des Folgezustandes (alphabetisch aufsteigend: A, B, etc.) den Gray-Code mit dem initialen Codewort 00.



Zustand	Eingabe	Folgezustand (codiert)	Ausgabe
S^v	$E^v = y$	S^{v+1}	A
A	0		
	1		
B	0		
	1		
C	0		
	1		
D	0		
	1		

Tabelle 2.2: Ablauftabelle des Automaten in Abb. 2.2

B) Welchen Typ hat der Automat von Abbildung 2.2? Begründen Sie Ihre Antwort.



Aufgabe 2.3: Realisierung von Automaten mit FlipFlops

A) Der Zustandsautomat aus Tabelle 2.3 soll mit einem *RS-FlipFlop* (mit den Eingängen r_0 und s_0) für das erste Bit S_0 und einem *JK-FlipFlop* (mit den Eingängen j_1 und k_1) für das zweite Bit S_1 realisiert werden. Ergänzen Sie in der Ablauf-tabelle die fehlenden Ansteuerbits für die Eingänge s_0 und j_1 der FlipFlops. Verwenden Sie nach Möglichkeit "don't care" Stellen.



Zustand $S^v = (S_0^v, S_1^v)$	Eingabe $E^v = (E_0^v, E_1^v)$	Folgezustand S^{v+1}	FlipFlop Ansteuerung			
			s_0	r_0	j_1	k_1
0,0	0,0	0,0		-		-
	0,1	1,1		0		-
	1,0	1,1		0		-
	1,1	0,1		-		-
0,1	0,0	0,0		-		1
	0,1	0,1		-		0
	1,0	0,1		-		0
	1,1	1,0		0		1
1,0	0,0	0,0		1		-
	0,1	0,1		1		-
	1,0	0,1		1		-
	1,1	0,0		1		-
1,1	0,0	1,0		0		1
	0,1	0,0		1		1
	1,0	0,1		1		0
	1,1	1,1		0		0

Tabelle 2.3: Ablauf-tabelle eines unbekanntem Zustandsautomaten

- B) Die Ansteuerfunktionen für die FlipFlops sollen nun minimiert werden. Geben Sie mit Hilfe der in Abbildung 2.3 vorgegebenen Symmetriediagramme jeweils eine disjunktive minimale Ansteuerfunktion für die beiden Eingänge r_0 und k_1 an.

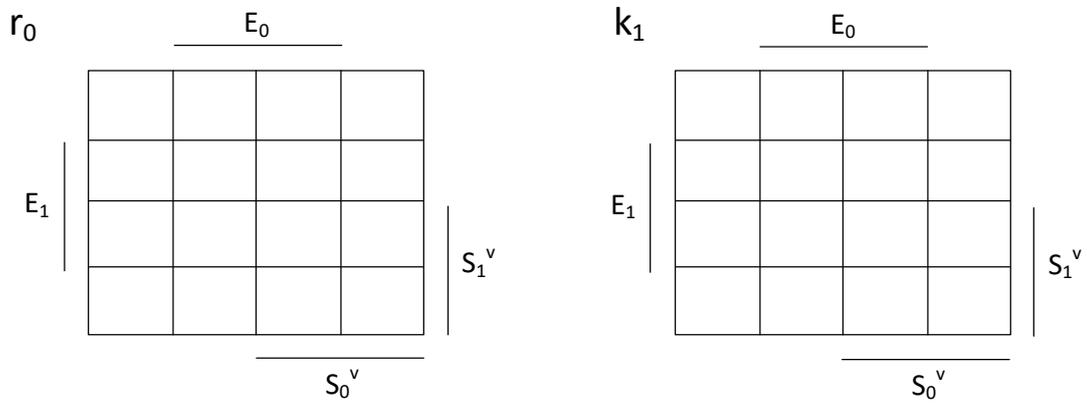


Abbildung 2.3: Symmetriediagramme für Ansteuerfunktionen

Aufgabe 3: Boolesche Algebra

Aufgabe 3.1: Axiome und Regeln der Booleschen Algebra

- A) Nennen Sie *zwei* grundlegende Forderungen, die ein Axiomensystem (z. B. die 5 Huntington'schen Axiome) erfüllen muss.

- B) Gegeben sei die Boolesche Algebra $BA = [K, \top, \perp, \neg, O, I]$ nach Huntington. Ferner sei M eine Menge mit beliebig vielen Elementen und MA eine Mengenalgebra über M . Wie lässt sich die Mengenalgebra MA auf die gegebene BA abbilden? Vervollständigen Sie dazu die untenstehende Tabelle.

$BA:$	K	\top	\perp	\neg	O	I
$MA:$						

- C) Geben Sie den *dualen* Satz zu der Regel $a \vee 0 = a$ an.

Aufgabe 3.2: Beweis eines Satzes mittels Boolescher Algebra

Im folgenden soll die Gültigkeit des Satzes

$$x \cdot (y \oplus z) = (x \cdot y) \oplus (x \cdot z) \quad (3.1)$$

mittels der Huntington'schen Axiome (H1 - H5) und der Regeln (R1 - R12) aus dem Formelblatt bewiesen werden. Zusätzlich zu den genannten Regeln darf die Definition der XOR Beziehung $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$ verwendet werden. Die übrigen XOR Regeln aus der Formelsammlung dürfen *nicht* verwendet werden. Für den Nachweis sollen beide Seiten von Gleichung (3.1) auf den selben Ausdruck zurückgeführt werden.

- A) Führen Sie den Beweis für Satz (3.1) indem Sie die Einzelschritte für jede Seite der Gleichung zeilenweise in die zugehörige Tabelle (siehe unten) eintragen. Geben Sie jeweils die Nummer des verwendeten Satzes gemäß Formelblatt an (oder „XOR“ für die XOR Definition). In jedem Einzelschritt darf *genau eine* Regel/Axiom auf beliebig viele Teilausdrücke angewendet werden. (*Hinweis:* Die Verwendung des Kommutativgesetzes H2 sowie das Weglassen unnötiger Klammern muss nicht explizit angegeben werden.)

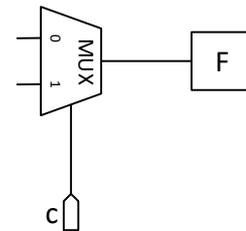


Linke Seite

Regel	Term
-	$x \cdot (y \oplus z)$

Aufgabe 3.3: Schaltfunktionen und Entwicklungssatz

- A) Gegeben sei die Schaltfunktion $F(c, b, a) = (a \vee \bar{b} \vee c) \wedge (a \vee b \vee \bar{c}) \wedge (a \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \wedge (\bar{a} \vee b \vee \bar{c})$ in konjunktiver Normalform (KNF). Vervollständigen Sie die unten abgebildete 2-zu-1 Multiplexer-Schaltung, um die Funktion zu realisieren. (*Hinweis:* Es ist nicht erforderlich die Schaltung bzw. die Schaltfunktion zu minimieren oder zu entwickeln.)



- B) Was besagt der Hauptsatz der Schaltalgebra?



C) Wozu wird der Entwicklungssatz der Schaltalgebra typischerweise verwendet?



D) Gegeben sei die Logikfunktion $G(c, b, a) = \bar{a}(b \oplus (c \vee a))$. Für diese Funktion soll nun die *Disjunktive Normalform (DNF)* mit Hilfe des Entwicklungssatzes der Schaltalgebra bestimmt werden. Entwickeln Sie die Funktion dazu sukzessive nach den einzelnen Variablen und vervollständigen Sie die nachfolgende Tabelle mit den Restfunktionen. Ermitteln Sie anschließend die DNF anhand der Ergebnisse.



$G_{DNF}(c, b, a) = [\bar{c} \wedge G(0, b, a)] \vee [c \wedge G(1, b, a)]$ mit	
$G(0, b, a) =$	$G(1, b, a) =$
$G(0, b, a) = [\bar{b} \wedge G(0, 0, a)] \vee [b \wedge G(0, 1, a)]$	$G(1, b, a) = [\bar{b} \wedge G(1, 0, a)] \vee [b \wedge G(0, 1, a)]$
$G(0, 0, a) =$	$G(1, 0, a) =$
$G(0, 1, a) =$	$G(1, 1, a) =$
$G(0, 0, a) = [\bar{a} \wedge G(0, 0, 0)] \vee [a \wedge G(0, 0, 1)]$	$G(1, 0, a) = [\bar{a} \wedge G(1, 0, 0)] \vee [a \wedge G(1, 0, 1)]$
$G(0, 0, 0) =$	$G(1, 0, 0) =$
$G(0, 0, 1) =$	$G(1, 0, 1) =$
$G(0, 1, a) = [\bar{a} \wedge G(0, 1, 0)] \vee [a \wedge G(0, 1, 1)]$	$G(1, 1, a) = [\bar{a} \wedge G(1, 1, 0)] \vee [a \wedge G(1, 1, 1)]$
$G(0, 1, 0) =$	$G(1, 1, 0) =$
$G(0, 1, 1) =$	$G(1, 1, 1) =$

Aufgabe 4: CMOS und Gatter

Aufgabe 4.1: Allgemeine Fragen

- A) Nennen Sie den ausgeschriebenen Begriff zum Buchstaben „C“ im Akronym CMOS und erklären Sie die Bedeutung dieses Begriffs im Kontext der CMOS-Schaltungen.

- B) Zeichnen Sie eine NOR-Schaltung mit den zwei Eingängen a und b und dem Ausgang y in CMOS Technologie. Verwenden Sie **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

- C) Zeichnen Sie erneut eine NOR-Schaltung mit den zwei Eingängen a und b und dem Ausgang y in CMOS Technologie. Verwenden Sie nun **negative Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '0'.



Aufgabe 4.2: Schaltungsanalyse

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben eine **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

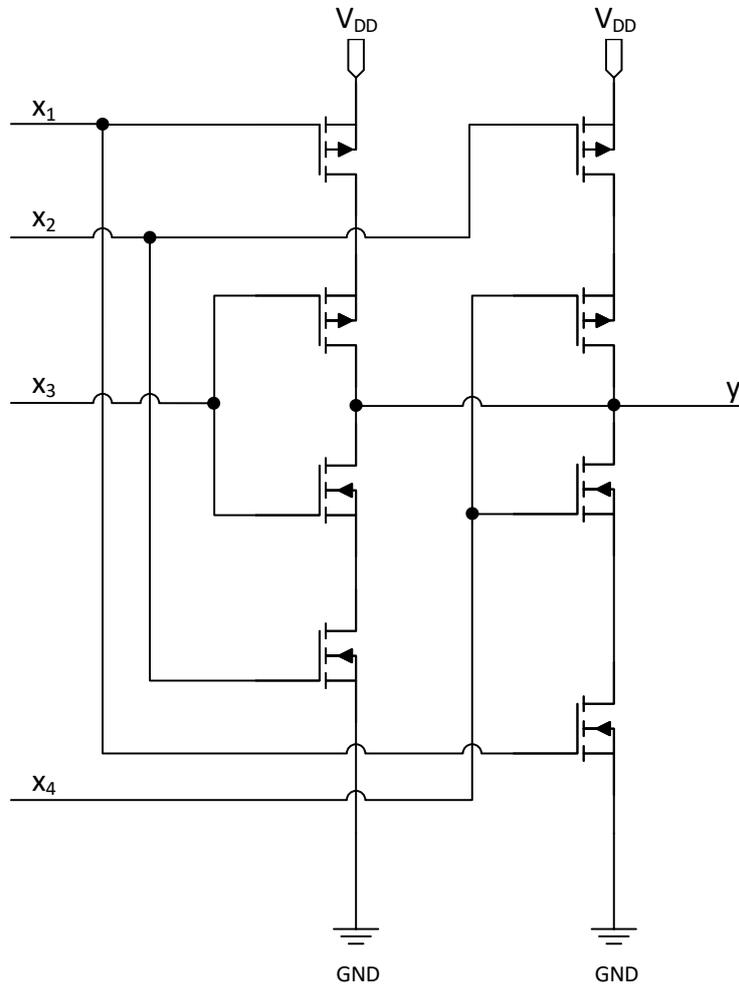


Abbildung 4.1: Schaltung 1

Betrachten Sie im Folgenden Schaltung 1 in Abbildung 4.1. Die Funktion $F = \bar{x}_1 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_4$ für das Pullup- und die Funktion $G = x_2 x_3 \vee x_1 x_4$ für das Pulldown- Netz sind gegeben.

A) Prüfen Sie algebraisch, ob Schaltung 1 wohldefiniert ist.

B) Prüfen Sie algebraisch, ob Schaltung 1 kurzschlussfrei ist.

C) Vervollständigen Sie die Funktionstabelle für die Pullup-Funktion F und die Pulldown-Funktion G und markieren Sie alle Kurschlüsse. Kennzeichnen sie weiterhin Eingangskombinationen, die dazu führen, dass die Schaltung Hochohmig wird. Markieren Sie dazu in den Zeilen der entsprechenden Eingangskombinationen die entsprechende Spalte mit einem x .

x_1	x_2	x_3	x_4	F	G	Kurzschluss	Hochohmig
0	0	0	0				
0	0	0	1				
0	0	1	0				
0	0	1	1				
0	1	0	0				
0	1	0	1				
0	1	1	0				
0	1	1	1				
1	0	0	0				
1	0	0	1				
1	0	1	0				
1	0	1	1				
1	1	0	0				
1	1	0	1				
1	1	1	0				
1	1	1	1				

In Schaltung 2 (Abbildung 4.2) wird Schaltung 1 (Abbildung 4.1) mit zwei vorgeschalteten Invertern erweitert.

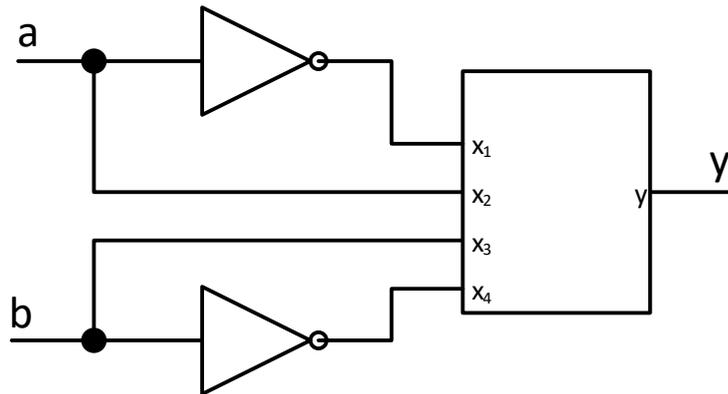


Abbildung 4.2: Schaltung 2

D) Setzen Sie nun a und b in die Funktionen F und G ein, sodass die entstehenden Gleichungen F' und G' Schaltung 2 (Abbildung 4.2) beschreiben. Geben Sie dann die Funktionstabelle zu dieser Schaltung an.

a	b	y

E) Um welche aus der Vorlesung bekannte Funktion handelt es sich?

- F) Gibt es für Schaltung 2 (Abbildung 4.2) Eingangskombinationen, die einen Kurzschluss oder einen Hochohmig Zustand am Ausgang y der Schaltung verursachen? Beachten Sie, dass Schaltung 1 (Abbildung 4.1) als Teilschaltung verwendet wird und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4.3: Schaltungssynthese

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben eine **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

Im Folgenden soll die Funktion $y = \bar{a}b \vee a\bar{b}$ in CMOS Technologie realisiert werden.

- A) Stellen Sie die Funktion ausschließlich mit NAND und NOT Operationen dar.

- B) Zeichnen Sie den Schaltplan zu Ihrer Lösung aus A). Verwenden Sie ausschließlich NAND Gatter und Inverter.

- C) Zeichnen Sie nun die Schaltung aus B) als CMOS-Schaltung aus PMOS und NMOS Transistoren.

- D) Nennen Sie einen Vorteil von Schaltung 2 aus Abbildung 4.2 im Vergleich zu Ihrer Schaltung aus C).

Aufgabe 5: Optimale Codes



Aufgabe 5.1: Shannon-Fano-Verfahren

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle S . Gemäß der in Tabelle 7.1 dargestellten Auftrittswahrscheinlichkeiten erzeugt sie Symbole aus dem Zeichenvorrat $Y = \{A, B, C, D, E, F\}$.

Symbol	A	B	C	D	E	F
Wahrscheinlichkeit	$\frac{3}{53}$	$\frac{7}{53}$	$\frac{13}{53}$	$\frac{10}{53}$	$\frac{5}{53}$	$\frac{15}{53}$
Codewort						

Tabelle 5.1: Auftrittswahrscheinlichkeiten und Codewörter der von S erzeugten Symbole

- A) Wenden Sie das Shannon-Fano-Verfahren an, um die von S erzeugten Symbole zu codieren. Sortieren Sie die Symbole dafür mit aufsteigenden Auftrittswahrscheinlichkeiten von links nach rechts und erzeugen Sie den vollständigen Codierbaum. Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baums eine „0“ und den rechten Ästen des Baums eine „1“ zu. Tragen Sie die Codewörter, die sich ergeben, in die dafür vorgesehenen Felder in Tabelle 7.1 ein.



B) Codieren Sie das Wort „CBCAE“ unter Verwendung der in A) erzeugten Codierung.

C) Wie lautet die allgemeine Formel zur Berechnung der mittleren Codewortlänge eines Codes über dem N -elementigen Zeichenvorrat $X = \{x_1, \dots, x_N\}$? Nehmen Sie an, dass $p(x_i)$ die Auftrittswahrscheinlichkeit und $m(x_i)$ die Codewortlänge eines $x_i \in X$ bezeichnet.

D) Bestimmen Sie die mittlere Codewortlänge der in A) erzeugten Codierung und geben Sie diese als vollständig gekürzter Bruch an.

E) Welche mittlere Codewortlänge ergibt sich, wenn alle Symbole, die von S erzeugt werden, binär und mit Codewörtern gleicher Länge codiert werden sollen?

Aufgabe 5.2: Huffman-Verfahren

A) Welches informationstheoretische Maß dient bei der Codierung einer Quelle als größte untere Schranke der mittleren Codewortlänge \bar{m} ? Geben Sie dessen Bezeichnung und eine allgemeingültige Formel zur Berechnung an. Benennen Sie dabei alle als Teil der Berechnungsvorschrift verwendeten Größen.

Betrachtet wird nun die Mensch-Maschine-Schnittstelle eines eingebetteten Systems. Sie erlaubt es dem Nutzer, die Konfiguration des Systems zu modifizieren. Um die Benutzereingabe entgegenzunehmen, kommen fünf Tasten zur Anwendung. Gemäß ihrer Funktionalität werden die Tasten im Folgenden als RESET, INC, DEC, PREV und NEXT bezeichnet.

Tastendrücke, die über die Lebensdauer des Systems hinweg getätigt werden, sollen zu Diagnosezwecken in einem nichtflüchtigen Speicher protokolliert werden. Um dies effizient zu realisieren, soll eine Huffman-Codierung der Tastendruckereignisse erfolgen.

Taste	RESET	INC	DEC	PREV	NEXT
Häufigkeit	2	41	29	16	12
Wahrscheinlichkeit					
Codewort					

Tabelle 5.2: Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten und Codewörter der Tastendrücke

- B) Bei einem Testlauf haben sich die in Tabelle 7.2 dargestellten Tastendruckhäufigkeiten ergeben. Nehmen Sie an, dass diese Häufigkeiten repräsentativ für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Tastendrücke sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten und tragen Sie diese in dezimaler Form oder als vollständig gekürzter Bruch in Tabelle 7.2 ein.
- C) Erzeugen Sie auf Basis der in B) bestimmten Wahrscheinlichkeiten eine Huffman-Codierung der Tastendruckereignisse. Ordnen Sie den Knoten mit der niedrigeren Auftrittswahrscheinlichkeit dabei immer als linkes Kind an und konstruieren Sie den vollständigen Codierbaum. Weisen Sie den linken Ästen des Baums eine „1“ und den rechten Ästen des Baums eine „0“ zu. Beschriften Sie die Blätter des Baums mit den dazugehörigen Tastendruckereignissen. Tragen Sie die Codewörter, die sich ergeben, in Tabelle 7.2 ein.

- D) Bestimmen Sie die mittlere Codewortlänge der im Zuge von C) erzeugten Codierung und geben Sie diese in dezimaler Form oder als vollständig gekürzter Bruch an.

Abschließend zeigt Tabelle 7.3 eine alternative präfixfreie Codierung für die oben beschriebenen Tastendruckereignisse. Bei ihrer Erzeugung ist als Zielalphabet nicht das binäre Alphabet $T_2 = \{0, 1\}$, sondern das ternäre Alphabet $T_3 = \{0, 1, 2\}$ zur Anwendung gekommen.

Taste	RESET	INC	DEC	PREV	NEXT
Codewort	10	2	0	12	11

Tabelle 5.3: Codierung des Tastendrucke für ein ternäres Zielalphabet

- E) Gegeben sei nun eine Folge von Tastendruckereignissen. Codiert man sie nach dem Code in Tabelle 7.3, erhält man das Wort „210111122“. Wie lautet die zugrundeliegende Folge?

Aufgabe 6: Minimierung

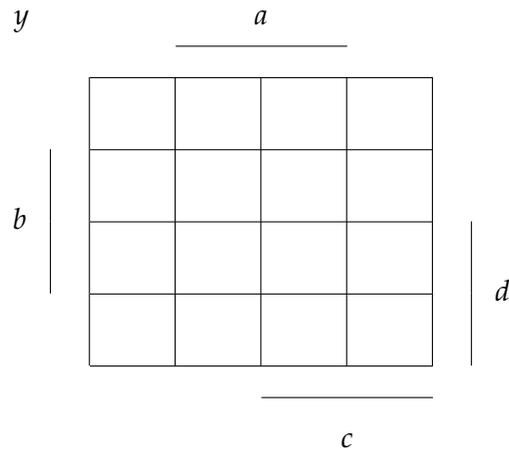


Aufgabe 6.1: Symmetriediagramme

A) Gegeben sei eine Schaltfunktion y in Minimalform wie folgt:

$$y = (a \wedge \bar{b}) \vee (a \wedge c) \vee (\bar{b} \wedge d) \vee (\bar{a} \wedge b \wedge \bar{c} \wedge \bar{d})$$

Füllen Sie das leere Symmetriediagramm im Folgenden anhand der gegebenen Schaltfunktion y aus. Es sollen dabei alle Kästchen ausgefüllt werden. Das Symmetriediagramm muss am Ende vollständig definiert sein.



B) Was wird unter dem Begriff Primterm verstanden?



- C) Gegeben sei das Symmetriediagramm aus Abbildung 6.1. Bestimmen Sie aus dem dort gegebenen Symmetriediagramm zwei unterschiedliche disjunktive Minimalformen (DMF) der Schaltfunktion, die sich mindestens in einem Primimplikanten unterscheiden. Zur grafischen Hilfestellung wurde das Symmetriediagramm zweimal abgebildet.

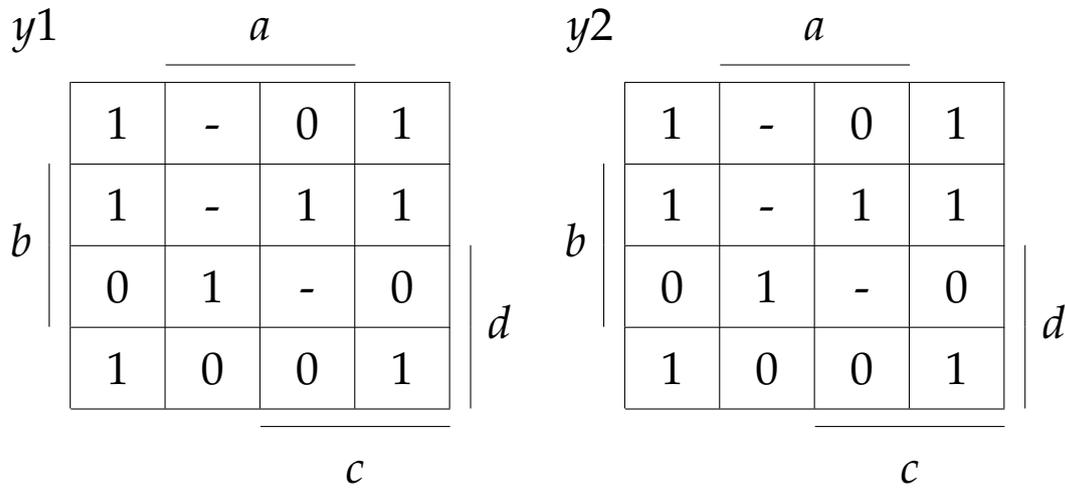


Abbildung 6.1: Symmetriediagramm einer Schaltfunktion

- D) Bei welchen Termen aus Aufgabe C) handelt es sich um Kerne?



Aufgabe 6.2: Nelson/Petrick Verfahren

A) Im folgenden sei eine Überdeckungstabelle gegeben:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
p_1	X		X		X	X				
p_2		X		X					X	X
p_3			X	X			X	X		X
p_4					X	X	X			X
p_5	X	X			X		X	X		

Tabelle 6.1: Überdeckungstabelle des Petrick-Verfahrens

Wenden Sie die Regeln zur Streichung von Kernen sowie die Spalten- und Zeilendominanzregeln des Petrick-Verfahrens auf Tabelle 6.1 an. Gehen Sie dabei entsprechend der folgenden Reihenfolge: **Kerne -> Spaltendominanz -> Zeilendominanz** vor. Die Kosten der Terme sind identisch. Nutzen sie die unten stehende Tabelle für ihre Antwort und tragen sie alle Schritte vollständig ein.

Hinweis: Geben Sie unter "Regel" an, welche Dominanzregel zum Tragen kommt (Kern, Spalten-, Zeilendominanz), unter "Streichbar" welche Spalten/Zeilen gestrichen werden und unter "Begründung" wieso die genannten Zeilen oder Spalten gestrichen werden können, also welche andere Zeile/Spalte sie dominiert bzw von welcher sie dominiert werden.

Regel	Streichbar	Begründung

Welches Ergebnis erhalten Sie nachdem Sie die Minimierung vollständig durchgeführt haben?

Aufgabe 7: Optimale Codes



Aufgabe 7.1: Shannon-Fano-Verfahren

Gegeben sei eine gedächtnislose Quelle S . Gemäß der in Tabelle 7.1 dargestellten Auftrittswahrscheinlichkeiten erzeugt sie Symbole aus dem Zeichenvorrat $Y = \{A, B, C, D, E, F\}$.

Symbol	A	B	C	D	E	F
Wahrscheinlichkeit	$\frac{3}{53}$	$\frac{7}{53}$	$\frac{13}{53}$	$\frac{10}{53}$	$\frac{5}{53}$	$\frac{15}{53}$
Codewort						

Tabelle 7.1: Auftrittswahrscheinlichkeiten und Codewörter der von S erzeugten Symbole

- A) Wenden Sie das Shannon-Fano-Verfahren an, um die von S erzeugten Symbole zu codieren. Sortieren Sie die Symbole dafür mit aufsteigenden Auftrittswahrscheinlichkeiten von links nach rechts und erzeugen Sie den vollständigen Codierbaum. Weisen Sie den linken Ästen des entstehenden Baums eine „0“ und den rechten Ästen des Baums eine „1“ zu. Tragen Sie die Codewörter, die sich ergeben, in die dafür vorgesehenen Felder in Tabelle 7.1 ein.



B) Codieren Sie das Wort „CBCAE“ unter Verwendung der in A) erzeugten Codierung.

C) Wie lautet die allgemeine Formel zur Berechnung der mittleren Codewortlänge eines Codes über dem N -elementigen Zeichenvorrat $X = \{x_1, \dots, x_N\}$? Nehmen Sie an, dass $p(x_i)$ die Auftrittswahrscheinlichkeit und $m(x_i)$ die Codewortlänge eines $x_i \in X$ bezeichnet.

D) Bestimmen Sie die mittlere Codewortlänge der in A) erzeugten Codierung und geben Sie diese als vollständig gekürzter Bruch an.

E) Welche mittlere Codewortlänge ergibt sich, wenn alle Symbole, die von S erzeugt werden, binär und mit Codewörtern gleicher Länge codiert werden sollen?

Aufgabe 7.2: Huffman-Verfahren

A) Welches informationstheoretische Maß dient bei der Codierung einer Quelle als größte untere Schranke der mittleren Codewortlänge \bar{m} ? Geben Sie dessen Bezeichnung und eine allgemeingültige Formel zur Berechnung an. Benennen Sie dabei alle als Teil der Berechnungsvorschrift verwendeten Größen.

Betrachtet wird nun die Mensch-Maschine-Schnittstelle eines eingebetteten Systems. Sie erlaubt es dem Nutzer, die Konfiguration des Systems zu modifizieren. Um die Benutzereingabe entgegenzunehmen, kommen fünf Tasten zur Anwendung. Gemäß ihrer Funktionalität werden die Tasten im Folgenden als RESET, INC, DEC, PREV und NEXT bezeichnet.

Tastendrücke, die über die Lebensdauer des Systems hinweg getätigt werden, sollen zu Diagnosezwecken in einem nichtflüchtigen Speicher protokolliert werden. Um dies effizient zu realisieren, soll eine Huffman-Codierung der Tastendruckereignisse erfolgen.

Taste	RESET	INC	DEC	PREV	NEXT
Häufigkeit	2	41	29	16	12
Wahrscheinlichkeit					
Codewort					

Tabelle 7.2: Häufigkeiten, Wahrscheinlichkeiten und Codewörter der Tastendrücke

- B) Bei einem Testlauf haben sich die in Tabelle 7.2 dargestellten Tastendruckhäufigkeiten ergeben. Nehmen Sie an, dass diese Häufigkeiten repräsentativ für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der einzelnen Tastendrücke sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten und tragen Sie diese in dezimaler Form oder als vollständig gekürzter Bruch in Tabelle 7.2 ein.
- C) Erzeugen Sie auf Basis der in B) bestimmten Wahrscheinlichkeiten eine Huffman-Codierung der Tastendruckereignisse. Ordnen Sie den Knoten mit der niedrigeren Auftrittswahrscheinlichkeit dabei immer als linkes Kind an und konstruieren Sie den vollständigen Codierbaum. Weisen Sie den linken Ästen des Baums eine „1“ und den rechten Ästen des Baums eine „0“ zu. Beschriften Sie die Blätter des Baums mit den dazugehörigen Tastendruckereignissen. Tragen Sie die Codewörter, die sich ergeben, in Tabelle 7.2 ein.

- D) Bestimmen Sie die mittlere Codewortlänge der im Zuge von C) erzeugten Codierung und geben Sie diese in dezimaler Form oder als vollständig gekürzter Bruch an.

Abschließend zeigt Tabelle 7.3 eine alternative präfixfreie Codierung für die oben beschriebenen Tastendruckereignisse. Bei ihrer Erzeugung ist als Zielalphabet nicht das binäre Alphabet $T_2 = \{0, 1\}$, sondern das ternäre Alphabet $T_3 = \{0, 1, 2\}$ zur Anwendung gekommen.

Taste	RESET	INC	DEC	PREV	NEXT
Codewort	10	2	0	12	11

Tabelle 7.3: Codierung des Tastendrucke für ein ternäres Zielalphabet

- E) Gegeben sei nun eine Folge von Tastendruckereignissen. Codiert man sie nach dem Code in Tabelle 7.3, erhält man das Wort „210111122“. Wie lautet die zugrundeliegende Folge?

Aufgabe 8: Zahlensysteme



Aufgabe 8.1: Umrechnung von Zahlensystemen

- A) Vervollständigen Sie die Tabelle 8.1, indem Sie die offenen Felder durch die entsprechende Konvertierung ergänzen.



Hexadezimal	Dezimal	Oktal	Binär
	2048 _D		
FDB _H			
		344 _O	
			0001 0010 0011 _B

Tabelle 8.1: Umrechnung von Zahlensystemen

- B) Konvertieren Sie die Zahl 421₅ (Basis 5) in das Zahlensystem mit der Basis 9 um. Geben Sie dabei die für die Umrechnung nötigen Zwischenschritte an.



Aufgabe 8.2: Fließkommazahl

Abbildung 8.1 zeigt eine Darstellung von Fließkommazahlen nach dem IEEE-754-2008-Standard mit halber Genauigkeit (16 Bit). Das höchstwertige Bit stellt das Vorzeichen V dar, die nachfolgenden fünf Bits den Exponenten E und die niederwertigsten zehn Bits die Mantisse M.



Abbildung 8.1: 16-Bit-Fließkommazahlenformat

- A) Konvertieren Sie $17,25_D$ in das oben definierte Fließkommaformat. Sollte eine solche Konvertierung nicht möglich sein, begründen Sie dies. Geben Sie das Ergebnis andernfalls in binärer und in hexadezimaler Form an.

- B) Konvertieren Sie 0_D in das oben definierte Fließkommaformat. Sollte eine solche Konvertierung nicht möglich sein, begründen Sie dies. Geben Sie das Ergebnis andernfalls in binärer und in hexadezimaler Form an.

- C) Konvertieren Sie die Zahl $12,0_D * 2^{16}$ in das oben definierte Fließkommaformat. Sollte eine solche Konvertierung nicht möglich sein, begründen Sie dies. Geben Sie das Ergebnis andernfalls in binärer und in hexadezimaler Form an.

D) Berechnen Sie unter Verwendung des Stibitz-Codes folgende Aufgabe:



$$-17 - 12$$

Hinweis: Rechnen Sie mit einem geeigneten Komplement

Zusatzblatt zu Aufgabe :