Klausur (WS 2019/2020)
Digitaltechnik

Institut für Technik der Informationsverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

Klausur: Digitaltechnik
Datum: 3. März 2020

Teilnehmer:
Matr.-Nr.:
ID:

Hörsaal:
Platz:

Es gelten die folgenden Regelungen:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer
  - einem doppelseitig und handschriftlich beschriebenen DIN-A4-Blatt.
- Nutzen Sie nur **dokumentenechte Schreibgeräte** – keine Bleistifte oder rote Farbe!
- Die Verwendung von eigenem Papier ist nicht zugelassen.
- Vermeiden Sie das Beschreiben der Rückseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie Zusatzblätter von der Aufsicht.
  - Versehen Sie solche Blätter unbedingt mit Ihrer Matrikelnummer.
  - Ordnen Sie jedes zusätzliche Lösungsblatt einer Aufgabe eindeutig zu.

Die vorliegende Klausur besteht aus **35 Blättern** und einer dreiseitigen Formelsammlung.

		Seite	≈ Pkt. in %	Punkte
Aufgabe 1:	Allgemeine Fragen	2	11	
Aufgabe 2:	Zahlensysteme	6	13	
Aufgabe 3:	Boolsche Algebra	10	13	
Aufgabe 4:	Minimierung	15	12	
Aufgabe 5:	CMOS und Gatter	19	12	
Aufgabe 6:	Automaten	24	12	
Aufgabe 7:	Mengen, Relationen und Graphen	28	12	
Aufgabe 8:	Optimale Codes	31	12	
				$\sum$

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen

Aufgabe 1.1: Signale

A) Welcher Vorteil besitzt eine weiche Diskrimination gegenüber einer harten Diskrimination und wie wird diese realisiert?

B) Geben Sie den Signalverlauf eines analogen und eines digitalen Signals an. Das Signal muss eine zeitliche Änderung besitzen und eindeutig hinsichtlich der Charakteristiken unterscheidbar sein.

Aufgabe 1.2: Fehlerkorrektur

A) Nennen Sie zwei unterschiedliche Verfahren zur Fehlererkennung.

B) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm für einen Code mit drei Binärstellen und beschriften Sie dieses.

C) Ein Gray-Code-Zähler liefert folgende Ausgabe:

0	1	1
0	1	0
0	1	1
1	1	0
0	0	0
1	0	1
1	0	0
0	0	1
1	0	0
0	0	0
0	0	1

Es ist bekannt, dass zwei fehlerhafte Codewörter nicht nacheinander auftreten können und die Ausgabe nach einem fehlerbehafteten Codewort korrekt ist. Ist die Ausgabe des Zählers fehlerbehaftet? Korrigieren Sie mögliche Fehler.

Aufgabe 1.3: Überdeckungstabelle

A) Gegeben sei die Überdeckungstabelle 1.1. Bestimmen Sie für diese die minimale Überdeckung, bestehend aus maximal großen Mengen.

	a	b	c	d	e	f
{a,c}	x		x			
{a,d}	x			x		
{a,d,e}	x			x	x	
{b,e}		x			x	
{c,d,e}			x	x	x	
{d,f}				x		x

Tabelle 1.1: Überdeckungstabelle

Aufgabe 1.4: Schaltfunktionen und Funktionstabelle

A) Gegeben Sie die Funktionstabelle für die Funktion $Y(x_2, x_1, x_0) = y_{345_O}$ an und bestimmen Sie die kanonische konjunktive Normalform.

x_2	x_1	x_0	y
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Tabelle 1.2: Funktionstabelle

B) Gegeben sei $y_1 = a \wedge b$, $y_2 = f_2(c, y_1)$ und die Funktionstabelle 1.3. Geben Sie an, ob die Schaltfunktion y_2 vollständig definiert ist und begründen Sie die Antwort.

a	b	c	y_1	y_2
0	0	0		0
0	1	0		0
1	0	1		1
1	1	1		0

Tabelle 1.3: Funktionstabelle y_2

Aufgabe 1.5: Zahlensysteme

A) Konvertieren Sie die Zahl $B007_H$ aus dem Hexadezimalsystem in ein Zahlensystem mit dem Radix vier.

Aufgabe 2: Zahlensysteme

Aufgabe 2.1: Umrechnung von Zahlensystemen

A) Vervollständigen Sie Tabelle 2.1, indem Sie die entsprechende Konvertierung in die offenen Felder eintragen.

Hexadezimal	**Dezimal**	**Oktal**	**Binär**
		1634_O	
	1406_D		
			$0001\ 0111\ 1111_B$
$1D4_H$			

Tabelle 2.1: Umrechnung von Zahlensystemen

B) Geben Sie die Zahl 201_{12} dem allgemeinen Aufbau einer polyadischen Zahl entsprechend an und wandeln Sie diese anschließend in das Tetradezimalsystem (*Basis*14) um.

Aufgabe 2.2: Fließkommazahlen

Abbildung 2.1 zeigt den Aufbau des bfloat16 Gleitkommaformats. Es setzt sich aus einem Bit für das Vorzeichen, acht Bit für den Exponenten und sieben Bit für die Mantisse zusammen und wird beispielsweise in Tensor-Prozessoren für maschinelles Lernen eingesetzt.

V	E_7	E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Abbildung 2.1: Aufbau des bfloat16 Gleitkommaformats

A) Konvertieren Sie die Dezimalzahl $19,75_D$ in das Gleitkommaformat nach Abbildung 2.1 und tragen Sie anschließend das Ergebnis in Tabelle 2.2 ein.

V	E_7	E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Tabelle 2.2: Ergebnis der Konvertierung

B) Berechnen Sie die in Tabelle 2.3 dargestellte Operation mithilfe der Zweierkomplementbildung. Tragen Sie das Ergebnis anschließend in die Tabelle ein und geben Sie es außerdem als Dezimalzahl an.

	V	E_7	E_6	E_5	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0
	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
-	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
=																

Tabelle 2.3: Subtraktion von bfloat16 Gleitkommazahlen

Aufgabe 2.3: Stibitz Code

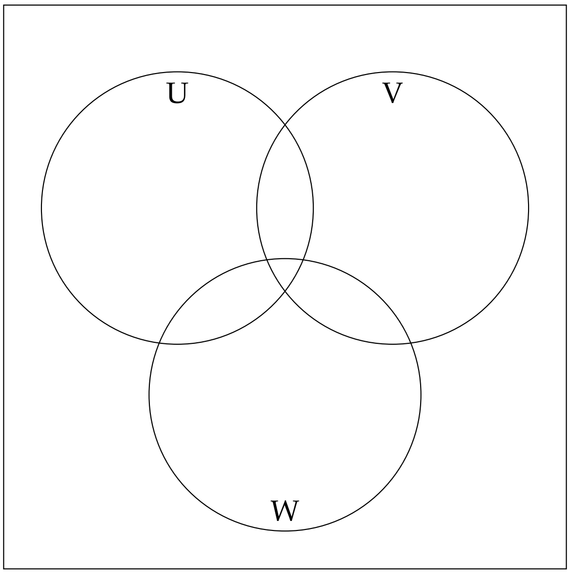
A) Berechnen Sie unter Verwendung des Stibitz Codes die folgende Aufgabe:

$$94_D + 58_D$$

Aufgabe 3: Boolsche Algebra

Aufgabe 3.1: Allgemeine Fragen

A) Gegeben sei die Beziehung $Y = \left(C_M(W) \cap V\right) \cup (U \cap W)$ in der Mengenalgebra MA. Zeichnen Sie die zu der Menge Y gehörige Fläche in das untenstehenden Mengendiagramm ein. Geben Sie außerdem die analoge Beziehung in der Schaltalgebra an.



B) Was sagt das Dualitätsprinzip der Boolschen Algebra $BA = [K, \top, \bot, \bar{\ }, O, I]$ aus?

C) Wie lautet der *duale* Satz zu $a \wedge \overline{a} = 0$?

Aufgabe 3.2: Beweis eines Satzes mittels Boolscher Algebra

Im folgenden soll die Gültigkeit des Satzes zur *Transitivität der Inklusion*

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \ \Rightarrow \ a \leq c \tag{3.1}$$

mittels der Huntingtonschen Axiome (H1 - H5) und der Regeln (R1 - R12) aus dem Formelblatt bewiesen werden. Es dürfen nur die genannten Regeln sowie die folgenden beiden Beziehungen verwendet werden:

- Inklusion (B1): $f \leq g \quad \hat{=} \quad \overline{f} \vee g$
- Implikation (B2): $a \Rightarrow b \quad \hat{=} \quad \overline{a} \vee b$

Die übrigen Regeln aus der Formelsammlung dürfen **nicht** verwendet werden. Für den Nachweis soll die Gleichung zunächst in einen schaltalgebraischen Ausdruck umgewandelt und dieser dann auf den Wert 1 zurückgeführt werden.

A) Führen Sie den Beweis für Satz (3.1) indem Sie die Einzelschritte zeilenweise in die vorgedruckte Tabelle (siehe unten) eintragen. Geben Sie jeweils die Nummer des verwendeten Satzes gemäß Formelblatt an (oder die oben genannten Bezeichnungen B1 und B2). In jedem Einzelschritt darf **genau eine** Regel/Axiom auf beliebig viele Teilausdrücke angewendet werden. (*Hinweis:* Die Verwendung des Kommutativgesetzes H2, des Assoziativitätsgesetzes R10a/R10b sowie das Weglassen unnötiger Klammern muss nicht explizit angegeben werden.)

Regel	Term
-	$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \ \Rightarrow \ a \leq c$

Bitte umblättern →

Regel	Term

Aufgabe 3.3: Entwicklungssatz der Schaltalgebra

A) Wie lautet der *Duale* Boolesche Entwicklungssatz für eine boolsche Funktion $f(d,c,b,a)$ in Abhängigkeit von f_d und $f_{\overline{d}}$? Geben Sie die Argumente von f, f_d und $f_{\overline{d}}$ explizit an.

B) Nun gelte $f(d,c,b,a) = a\big(b \oplus (dc)\big) \vee \overline{a}\big(c \oplus (d \vee b)\big)$ für die boolsche Funktion f aus der vorherigen Teilaufgabe. Bestimmen Sie die Funktion $f_{\overline{d}}$ aus dem Dualen Booleschen Entwicklungssatz.

C) Gegeben sei eine weitere Schaltfunktion $g(c,b,a) = (a \oplus b) \vee c\overline{b}a$. Entwickeln Sie diese Funktion mit Hilfe des Entwicklungssatzes der Schaltalgebra sukzessive nach allen Parametern und vervollständigen Sie die nachfolgende Tabelle mit den Restfunktionen.

$g(c,b,a)$	
$g_{\overline{c}}(b,a) =$	$g_c(b,a) =$

$g_{\overline{c}}(b,a)$	$g_c(b,a)$
$g_{\overline{c}\overline{b}}(a) =$	$g_{c\overline{b}}(a) =$
$g_{\overline{c}b}(a) =$	$g_{cb}(a) =$

$g_{\overline{c}\overline{b}}(a)$	$g_{c\overline{b}}(a)$
$g_{\overline{c}\overline{b}\overline{a}} =$	$g_{c\overline{b}\overline{a}} =$
$g_{\overline{c}\overline{b}a} =$	$g_{c\overline{b}a} =$
$g_{\overline{c}b}(a)$	$g_{cb}(a)$
$g_{\overline{c}b\overline{a}} =$	$g_{cb\overline{a}} =$
$g_{\overline{c}ba} =$	$g_{cba} =$

D) Gegeben sei die Schaltfunktion

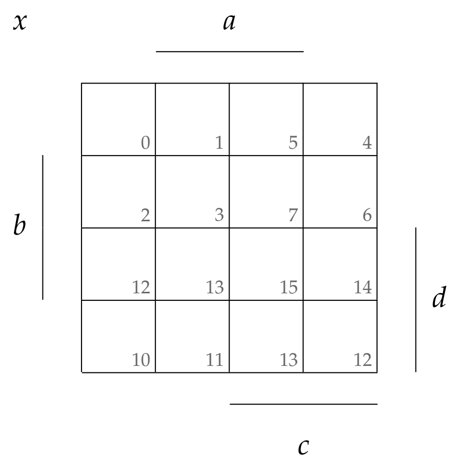
$$y(d,c,b,a) \;=\; d \cdot \Big(1c \vee \overline{c} \cdot \big(b \cdot (1a \vee 0\overline{a}) \vee 0\overline{b}\big)\Big) \;\vee\; \overline{d} \cdot \Big(0c \cdot \vee \overline{c} \cdot \big(b(0a \vee 1\overline{a}) \vee 1\overline{b}\big)\Big) \;,$$

die vollständig mit dem boolschen Entwicklungssatz entwickelt wurde. Zeichnen Sie eine Schaltung aus 2-zu-1 Multiplexern, die diese Funktion realisiert.

Aufgabe 4: Minimierung

Aufgabe 4.1: Symmetriediagramme

A) Gegeben sei eine unvollständig definierte Schaltfunktion $x = (d, c, b, a)$ durch ihre Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und ihre Freistellenmenge $\{X_j\}_-$:
$\{X_j\}_1 = \{(-, 0, 0, 0), (-, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$
$\{X_j\}_- = \{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, -), (1, 1, -, 0)\}$
Tragen sie die Null-, Eins- und Freistellen in das leere Symmetriediagramm ein. Es sollen dabei alle Kästchen ausgefüllt werden. Geben Sie anschließend alle **Primimplikate** an.



B) Gegeben ist die Schaltfunktion $y = (d, c, b, a)$ durch das nachfolgende Symmetriediagramms und der dazugehörigen KNF:
$KNF = (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (a \vee \overline{b} \vee \overline{c} \vee d) \wedge (a \vee b \vee \overline{c} \vee d) \wedge (a \vee b \vee c \vee \overline{d})$

y		a	a		
	0_{0}	1_{1}	1_{5}	0_{4}	
b	$-_{2}$	$-_{3}$	1_{7}	0_{6}	
b	$-_{12}$	$-_{13}$	1_{15}	1_{14}	d
	0_{10}	$-_{11}$	$-_{13}$	1_{12}	d
			c	c	

Bestimmen Sie die Primimplikanten der Schaltfunktion y durch Anwendung des Nelson-Verfahrens auf die KNF.

C) Vervollständigen Sie die Einsstellen-Überdeckungstabelle für die Schaltfunktion y aus Aufgabenteil B).

Primimplikant	Einsstelle						Präsenzvariable
	1	5	7	12	14	15	
	X	X	X			X	p_0
					X	X	p_1
				X	X	X	p_2

D) Geben Sie für die Schaltfunktion y aus Aufgabenteil B) den vollständig vereinfachten Petrickausdruck sowie die disjunktive Normalform (DNF) an.

Aufgabe 4.2: Nelson/Petrick Verfahren

A) Im folgenden sei eine Überdeckungstabelle gegeben:

	A	B	C	D	E	F	G	H
p_1						X		X
p_2	X		X		X			
p_3				X	X		X	
p_4	X			X			X	
p_5			X	X		X		
p_6		X				X		

Tabelle 4.1: Überdeckungstabelle des Petrick-Verfahrens

Wenden Sie die Regeln zur Streichung von Kernen sowie die Spalten- und Zeilendominanzregeln des Petrick-Verfahrens auf Tabelle 4.1 an. Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung vorgestellt jedes Mal in der Reihenfolge: **Kerne** → **Spalten** → **Zeilen** vor, d.h. die Regel zur Spaltendominanz kann nur angewendet werden wenn es aktuell keinen Kern gibt und Zeilendominanz nur wenn sich weder die Regeln zur Kern- noch zur Spaltendominanz anwenden lassen. Die Kosten jedes Terms betragen 1, demnach ist die Lösung mit den wenigsten Termen zu bevorzugen. Tragen sie in die unten stehende Tabelle alle Schritte mit der jeweils angewendeten Regel und der streichbaren Spalten und Zeilen an. Geben Sie unter „Begründung“ an wieso die von Ihnen genannten Zeilen oder Spalten gestrichen werden können, also welche andere Zeile/Spalte sie dominiert bzw. von welcher sie dominiert werden.

Regel	Streichbar	Begründung

B) Geben Sie alle minimalen Lösungen in Abhängigkeit von den Präsenzvariablen an.

Aufgabe 5: CMOS und Gatter

Aufgabe 5.1: Allgemeine Fragen

A) Zeichnen Sie die abstrahierte Struktur einer CMOS Schaltung aus Pullup- und Pulldown Netz (PUN/PDN), N Eingängen und einem Ausgang y.

B) In der Praxis ist der Aufwand eine neue CMOS Schaltung aus einzelnen Transistoren zu erstellen vergleichsweise hoch, da die Transistoren dafür manuell platziert werden müssen. Wie können prinzipiell komplexere digitale Schaltfunktionen umgesetzt werden, ohne für jede Funktion ein eigenes Pullup- / Pulldown-Netz zu entwerfen? Welcher Satz garantiert, dass dies für jede Schaltfunktion möglich ist?

Aufgabe 5.2: Fehlerkorrektur

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben eine **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

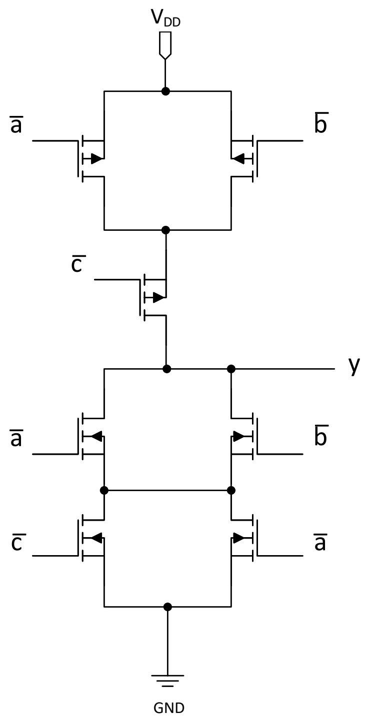


Abbildung 5.1: CMOS Schaltung

A) Finden Sie algebraisch in der Schaltung aus Abbildung 5.1 vorhandene Kurzschlüsse. Geben Sie die Eingangskombinationen, die Kurzschlüsse erzeugen, in der Form (a, b, c) an.

B) Finden Sie algebraisch in der Schaltung aus Abbildung 5.1 Eingangskombinationen, für die der Ausgang nicht definiert ist. Geben Sie diese Eingangskombinationen in der Form (a, b, c) an.

C) Bestimmen Sie ein neues Pullup-Netzwerk, sodass die Schaltung wohldefiniert ist. Passen Sie in Abbildung 5.1 die Eingänge des Pullup-Netzes entsprechend an.

Aufgabe 5.3: Schaltungssynthese

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben eine **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

A) Geben Sie die Gleichungen für den Summen-Ausgang und den Carry-Ausgang eines Halbaddierers an. Sie dürfen die Indizes der Variablen weglassen.

B) Formen Sie diese Gleichung um, sodass nur **NOR**- und NOT-Operationen verwendet werden.

C) Zeichnen Sie den Schaltplan aus NOR- und Inverter-Gattern zu den Funktionen $y_1 = \overline{\overline{a \vee \overline{b}} \vee \overline{\overline{a} \vee b}}$ und $y_2 = \overline{a \vee \overline{b}}$. Inverter müssen explizit als eigene Gatter dargestellt werden.

D) Zeichnen Sie die CMOS-Schaltung zur Funktion $y_1 = \overline{\overline{a \vee \overline{b}} \vee \overline{\overline{a} \vee b}}$.

Aufgabe 6: Automaten

Aufgabe 6.1: Automatendarstellung

A) Geben Sie den Automatentypen des in Abbildung 6.1 gezeigten Automaten an.
Es gilt $A_i = S_i$.

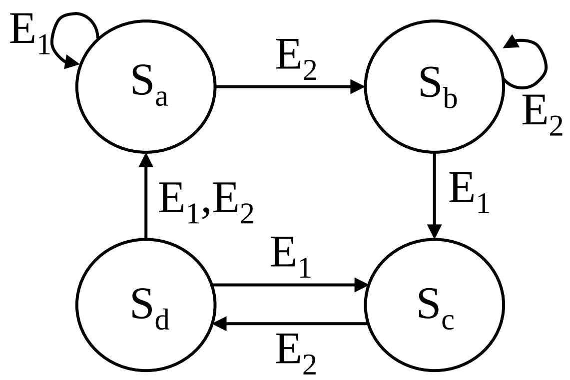


Abbildung 6.1: Automatengraph

B) Was sind die Unterschiede in Bezug auf die Ausgabe zwischen Mealy-, Medwedew- und Moore-Automaten?

Aufgabe 6.2: Automatenanalyse

In Abbildung 6.2 ist das Ablaufdiagramm eines zu betrachtenden Automaten gegeben.

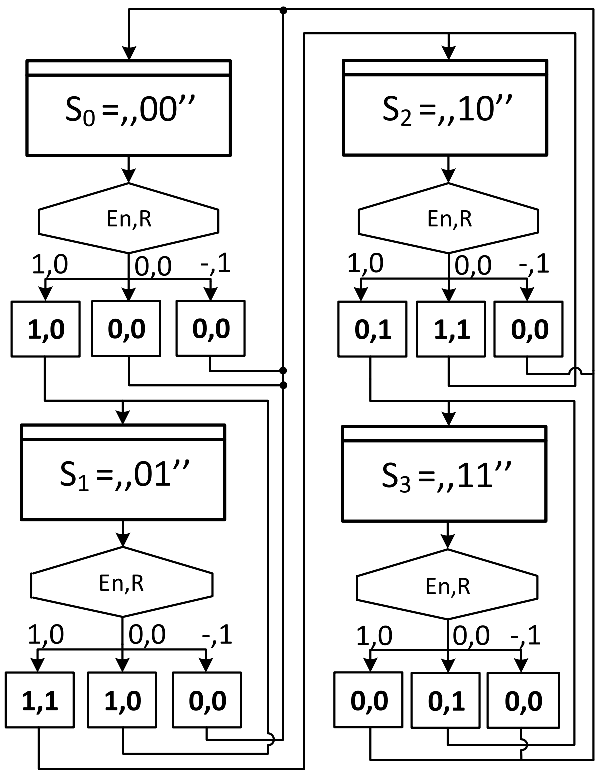


Abbildung 6.2: Ablaufdiagramm der Automaten

A) Füllen Sie die Tabelle 6.1 entsprechend des Automaten aus Abbildung 6.2 aus. Geben Sie hierbei immer die Codierung des Folgezustandes an.

Zustand S^v	Eingabe $E^v = En, R$	Folgezustand (codiert) S^{v+1}	Ausgabe A
S_1	0,0		
	1,1		
S_2	0,1		
	1,0		
S_3	0,0		
	1,0		

Tabelle 6.1: Ablauftabelle des Automaten von Abbildung 6.2

B) Welche Funktionalität erfüllt der in Abbildung 6.2 gezeigte Automat?

Aufgabe 6.3: Realisierung von Automaten mit FlipFlops

A) Der Zustandsautomat aus Tabelle 6.2 soll mit einem *T-FlipFlop* für das erste Bit S_0 und einem *JK-FlipFlop* (mit den Eingängen j_1 und k_1) für das zweite Bit S_1 realisiert werden. Ergänzen Sie in der Ablauftabelle die fehlenden Ansteuerbits für die Eingänge t_0, j_1 und k_1 der FlipFlops. Verwenden Sie nach Möglichkeit „don't care"-Stellen.

Zustand	Eingabe	Folgezustand	FlipFlop-Ansteuerung		
$S^v = (S_0^v, S_1^v)$	$E^v = En, R$	S^{v+1}	t_0	j_1	k_1
0,0	0,0	0,0			
	0,1	1,1			
	1,0	1,1			
	1,1	0,1			
0,1	0,0	0,0			
	0,1	0,1			
	1,0	0,1			
	1,1	1,0			
1,0	0,0	0,0			
	0,1	0,1			
	1,0	0,1			
	1,1	0,0			
1,1	0,0	1,0			
	0,1	0,0			
	1,0	0,1			
	1,1	1,1			

Tabelle 6.2: Ablauftabelle eines Zustandsautomaten

B) Die Ansteuerfunktionen für die FlipFlops sollen nun minimiert werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der in Abbildung 6.3 vorgegebenen Symmetriediagramme jeweils eine disjunktive minimale Ansteuerfunktion für t_0 und k_1 und geben Sie diese an.

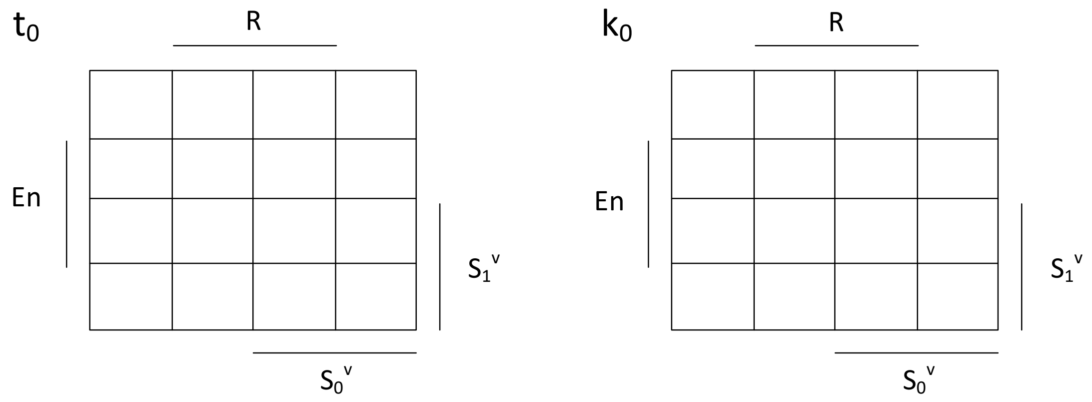


Abbildung 6.3: Symmetriediagramme zur bestimmung der Ansteuerfunktionen

Aufgabe 7: Mengen, Relationen und Graphen

Aufgabe 7.1: Mengen

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$H = \{2, 5, 6, 8, 9, 10, k, i, t\}$$
$$I = \{5, 9, 10\}$$
$$K = \{x \mid x \in H \text{ und (x ist eine gerade Zahl oder x = k)}\}$$
$$B = \left\{a \mid a \in H \text{ und (a ist eine ungerade Zahl oder } (a-2)^2 = 64 \text{ gilt)}\right\}$$
$$Q = \{b \mid b \in I \text{ und b ist eine gerade Zahl}\}$$

A) Geben Sie die Elemente der Mengen K, B und Q an.

$K =$

$B =$

$Q =$

B) Bestimmen Sie die Ergebnisse der folgenden Mengenoperationen.

$\mathcal{P}(B) =$

$K \cup B =$

$B \cap Q =$

$B \times Q =$

$|K| =$

C) Geben Sie vier beliebige Elemente der Menge $(I \times Q)^2$ an. Bestimmen Sie zudem die Mächtigkeit der Menge.

Aufgabe 7.2: Graphentheorie

Gegeben ist der folgende Graph G (Abbildung 7.2)

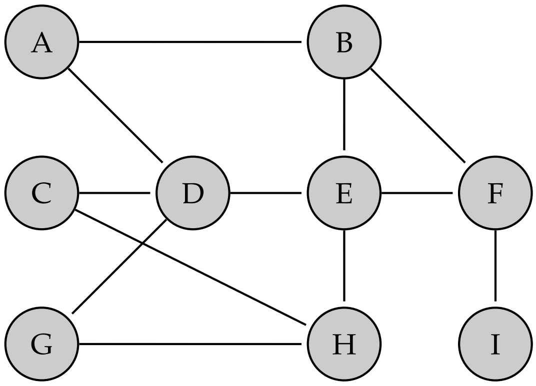


Abbildung 7.1: Graph G

A) Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort mit wenigen Worten.

Ist G gerichtet? __________

Ist G zusammenhängend? __________

Hat G Schleifen? __________

Ist die Adjazenzmatrix von G symmetrisch? __________

Ist der maximale Knotengrad von G 4? __________

Hat die längste Kettenprogression die Länge 5? __________

B) Beschreiben Sie, welche Bedingungen gelten müssen damit zwei Graphen isomorph sind.

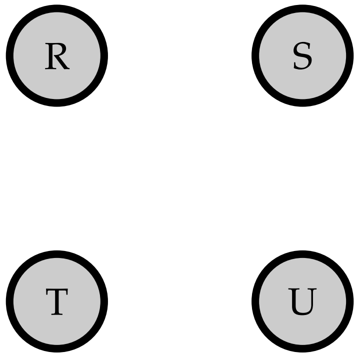
Aufgabe 7.3: Relationen

Die Tabelle 7.3 stellt die Adjazenzmatrix der Relation $W\alpha X$ zwischen W und X dar. W und X sind Elemente der Menge $M_1 = \{R, S, T, U\}$.

	R	S	T	U
R	1	1	1	0
S	0	1	0	1
T	0	1	0	1
U	0	0	1	0

Tabelle 7.1: Matrixdarstellung der Relation

A) Zeichnen Sie den Graphen, welcher der Adjazenzmatrix auf M_1 genügt.



B) Ist die Relation **reflexiv**? Wenn nein, wie müsste der Graph verändert werden damit er reflexiv ist?

C) Ist die Relation **symmetrisch**? Wenn nein, wie müsste der Graph verändert werden damit er symmetrisch ist?

D) Ist die Relation **transitiv**? Was müsste dazu allgemein gelten.

Aufgabe 8: Optimale Codes

Aufgabe 8.1: Allgemeine Fragen

A) Eine gedächtnislose Quelle S generiert Symbole gemäß Tabelle 8.1. Diesen Symbolen sind die ebenfalls in Tabelle 8.1 angegebenen Codewörter zugeorgnet. Zeichnen Sie den dieser Codierung entsprechenden Codierungsbaum unter der Annahme, dass **die linken Äste des Baums einer „0"** und **die rechten Äste einer „1"** entsprechen. Beschriften Sie die Blätter des Baums mit ihren Symbolen und alle Äste mit ihren entsprechenden Bits.

Symbol	A	B	C	D	E	F
Wahrscheinlichkeit	0,18	0,38	0,12	0,14	0,06	0,12
Codewort	10	11	001	011	000	010

Tabelle 8.1: Auftrittswahrscheinlichkeiten und Codewörter der von S erzeugten Quelle

B) Bestimmen Sie die mittlere Codewortlänge der in Tabelle 8.1 gezeigten Codierung und geben Sie diese dezimal oder als vollständig gekürzter Bruch an.

C) Gegeben sei nun eine gedächtnislose Quelle S' mit der Entropie $H(S') = 2{,}59$ Bit. Durch die Anwendung des Shannon-Fano-Verfahrens wurde eine Codierung von S' mit der mittleren Codewortlänge $\bar{m} = 2{,}59$ Bit gefunden. Ist es möglich, durch die Anwendung des Huffman-Verfahrens eine Codierung mit einer geringeren mittleren Codewortlänge zu finden? Begründen Sie Ihre Antwort!

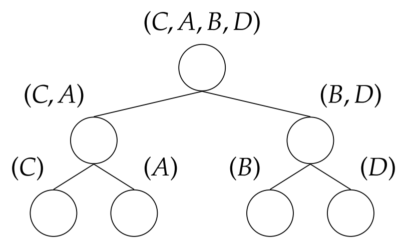
Aufgabe 8.2: Shannon-Fano-Verfahren

A) Gegeben seien die gedächtnislosen Quellen S_1, S_2, S_3 und S_4 sowie absolute Häufigkeiten für die von ihnen erzeugten Symbole. Geben Sie für jede der Quellen an, ob der zu ihr aufgeführte Codierungsbaum aus einer korrekten Anwendung des Shannon-Fano-Verfahrens entstanden ist. Benennen Sie **bei einem fehlerhaften Baum** den Knoten, der nicht korrekt in eine linke und eine rechte Teilmenge zerlegt wurde, und **korrigieren Sie diese Aufteilung**.

Hinweis: *Jeder Baum enthält maximal einen Fehler. Nehmen Sie an, dass die absoluten Häufigkeiten repräsentativ für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Symbole sind und dass die Symbole zu Beginn nach aufsteigender Auftrittswahrscheinlichkeit* ***von links nach rechts*** *sortiert werden.*

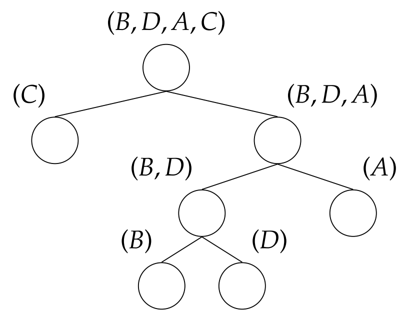
Quelle S_1:

Symbol	A	B	C	D
Häufigkeit	5	7	2	8



Quelle S_2:

Symbol	A	B	C	D
Häufigkeit	42	13	43	28

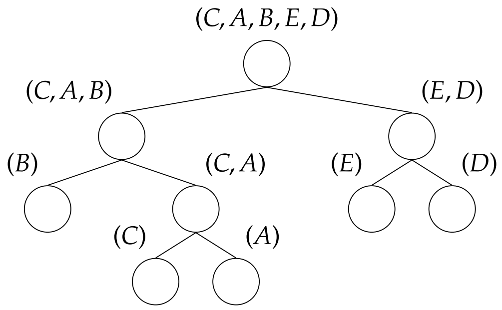


Antwort für S_1:

Antwort für S_2:

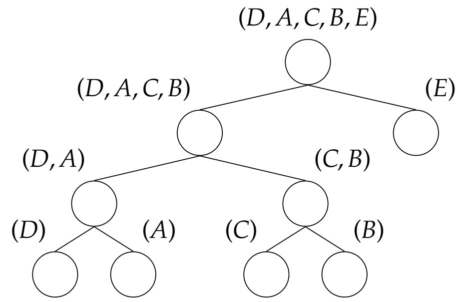
Quelle S_3:

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	16	21	9	33	31



Quelle S_4:

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	7	12	8	6	25



Antwort für S_3:

Antwort für S_4:

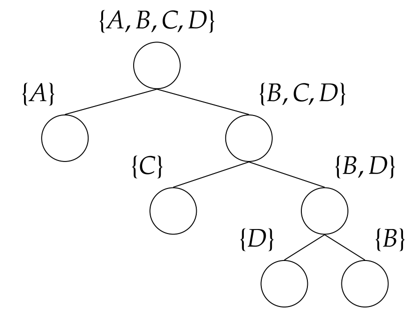
Aufgabe 8.3: Huffman-Verfahren

A) Gegeben seien die gedächtnislosen Quellen S'_1, S'_2, S'_3 und S'_4 sowie absolute Häufigkeiten für die von ihnen erzeugten Symbole. Geben Sie für jede der Quellen an, ob der zu ihr aufgeführte Codierungsbaum aus einer korrekten Anwendung des Huffman-Verfahrens entstanden ist. Beschreiben Sie **bei einem fehlerhaften Baum** kurz, in welchem Schritt des Huffman-Verfahrens ein Fehler aufgetreten ist und **korrigieren Sie diesen Schritt**.

Hinweis: *Jeder Baum enthält maximal einen Fehler. Nehmen Sie an, dass die absoluten Häufigkeiten repräsentativ für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Symbole sind.*

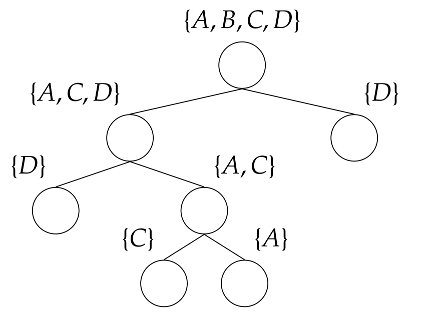
Quelle S'_1:

Symbol	A	B	C	D
Häufigkeit	31	12	16	5



Quelle S'_2:

Symbol	A	B	C	D
Häufigkeit	12	38	7	7

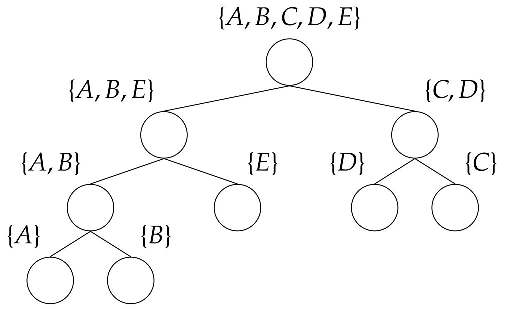


Antwort für S'_1:

Antwort für S'_2:

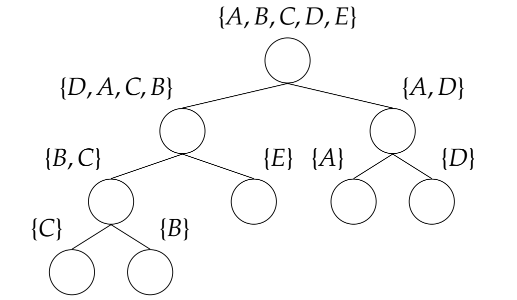
Quelle S_3':

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	11	15	55	41	28



Quelle S_4':

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	34	19	8	36	37



Antwort für S_3':

Antwort für S_4':

B) Betrachtet wird nun eine Quelle S, die Symbole aus dem Zeichenvorrat $\{A, B, C, D, E\}$ erzeugt. Um für diese Quelle einen präfixfreien Code in einem **ternären** Zielalphabet $T_3 = \{0, 1, 2\}$ zu finden, wurde das entsprechende ternäre Huffman-Verfahren angewandt und hat zu dem Codierungsbaum in Abbildung 8.1 geführt. Vervollständigen Sie Tabelle 8.2, indem Sie die Codewörter für alle von S erzeugten Symbole aus dem Baum ablesen.

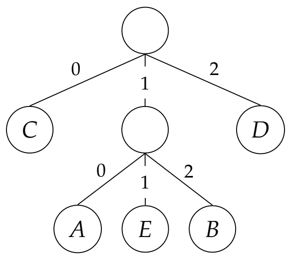


Abbildung 8.1: Codierungsbaum für die Quelle S

Symbol	A	B	C	D	E
Codewort					

Tabelle 8.2: Codierung von S im ternären Zielalphabet

C) Dekodieren Sie die Codewortfolge „101101211102“ unter Verwendung der in B) gefundenen Codewörter und geben Sie die entsprechende Symbolfolge an.

Zusatzblatt zu Aufgabe $\boxed{}$: