Klausur (WS 2020/2021)
Digitaltechnik

Institut für Technik der Informationsverarbeitung
Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Becker

Klausur: Digitaltechnik
Datum: 13. März 2021

Teilnehmer:
Matr.-Nr.:
ID:

Hörsaal:
Platz:

Es gelten die folgenden Regelungen:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Es sind keine Hilfsmittel erlaubt, außer
  - einem doppelseitig und handschriftlich beschriebenen DIN-A4-Blatt.
- Nutzen Sie nur **dokumentenechte Schreibgeräte** – keine Bleistifte oder rote Farbe!
- Die Verwendung von eigenem Papier ist nicht zugelassen.
- Vermeiden Sie das Beschreiben der Rückseiten.
- Bei Bedarf erhalten Sie Zusatzblätter von der Aufsicht.
  - Versehen Sie solche Blätter unbedingt mit Ihrer Matrikelnummer.
  - Ordnen Sie jedes zusätzliche Lösungsblatt einer Aufgabe eindeutig zu.

Die vorliegende Klausur besteht aus **36 Blättern** und einer dreiseitigen Formelsammlung.

		Seite	≈ Pkt. in %	Punkte
Aufgabe 1:	Allgemeine Fragen	2	10	
Aufgabe 2:	Mengen, Relationen und Graphen	5	14	
Aufgabe 3:	Zahlensysteme	10	12	
Aufgabe 4:	Boolsche Algebra	14	12	
Aufgabe 5:	Minimierung	18	13	
Aufgabe 6:	CMOS und Gatter	22	12	
Aufgabe 7:	Optimale Codes	28	12	
Aufgabe 8:	Automaten	32	11	
				Σ

Aufgabe 1: Allgemeine Fragen

A) Was bedeutet Quantisierung eines analogen Signals?

B) Nennen Sie eine geeignete Kodierung für einen ADC (Analog-Digital-Wandler), welcher analoge in digitale Signale wandelt. Die Kodierung soll Analogwerte kontinuierlich wandeln und es soll zu keinen Sprüngen kommen. Fehler durch mögliche Fertigungstoleranzen sollen durch die Kodierung erkannt oder kompensiert werden.

C) Geben Sie die Gesamtzahl der mit Umschaltung darstellbaren Codewörter in Abhängigkeit von Anzahl Bits der CWs (m), Anzahl aller Gruppenübergreifenden Zeichen (i) und Anzahl der Gruppen bzw. Umschaltzeichen (j) an.

D) Sie haben einen Code mit der Eigenschaft $HD_{min} = 7$. Wie viele Fehler können erkannt bzw. korrigiert werden?

E) Wie viele gültige Codewörter besitzt ein 2-aus-5-Code?

F) Nennen Sie drei Basissysteme der Schaltalgebra

G) Gegeben sei $y_1 = a \oplus b$, $y_2 = f_2(c, y_1)$ und die Funktionstabelle 1.1. Geben Sie die Schaltfunktion für y_2 an.

a	b	c	y_1	y_2
0	0	0		0
0	1	0		1
1	0	1		0
1	1	1		0

Tabelle 1.1: Funktionstabelle y_2

H) Konvertieren Sie die Zahl $1AC_{15}$ mit dem Radix 15 in ein ein Zahlensystem mit dem Radix fünf.

I) Konvertieren Sie die Zahl $2A_{16}$ mit dem Radix 16 in ein ein Zahlensystem mit dem Radix vier.

J) Geben Sie die Schaltfunktion für s_i und c_{i+1} eines Volladdierers an.

K) Geben Sie den Unterschied zwischen einem Schaltwerk und Schaltnetz an.

Aufgabe 2: Mengen, Relationen und Graphen

Aufgabe 2.1: Mengen

Gegeben sind die folgenden Mengen:

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$
$$B = \{2^n \mid n \in A\}$$
$$Z = \text{Menge der ganzen Zahlen}$$

A) Geben Sie die Elemente der Menge B an.

$B =$

B) Bestimmen Sie die Ergebnisse der folgenden Mengenoperationen.

$\mathcal{P}(A \cap B) =$

$\mid A \times B \times Z \mid =$

$C_Z(Z) =$

$C_Z(B) =$

$A \cup B =$

$\{A \cap B\} \times B =$

C) Veranschaulichen Sie die drei genannten Mengen in einem Venn-Diagramm.

D) Allgemeine Frage: Wie viele gemeinsame Elemente können zwei disjunkte Mengen maximal besitzen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2.2: Graphentheorie

Gegeben ist der folgende Graph Ω

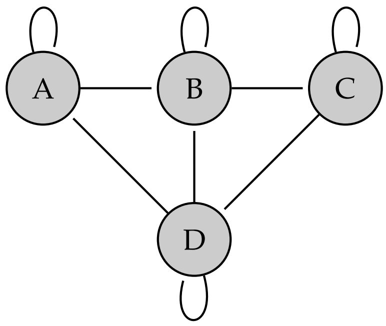


Abbildung 2.1: Graph Ω

A) Beantworten Sie kurz die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antwort mit wenigen Worten.

Ist Ω vollständig? ______________________

Ist Ω zusammenhängend? ______________________

Wie viele Schleifen hat Ω? ______________________

Ist die Adjazenzmatrix von Ω symmetrisch? ______________________

____

Ist Ω reflexiv? ______________________

Ist Ω transitiv? ______________________

Gegeben ist der folgende Graph Π

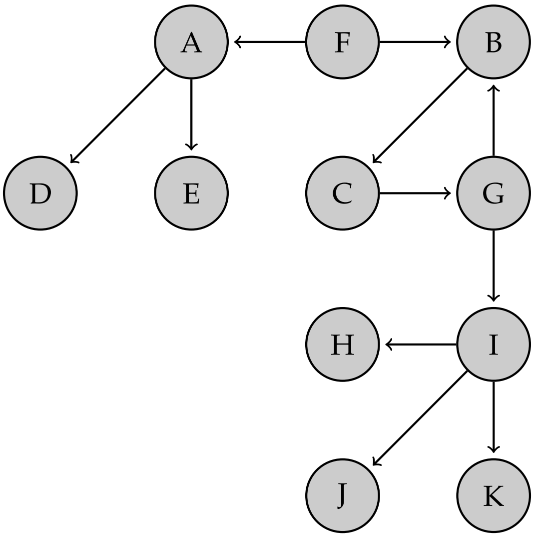


Abbildung 2.2: Graph Π

B) Erklären Sie warum der Graph Π kein Baum ist.

C) Verändern Sie den Graph so, dass er die Baumeigenschaften erfüllt, indem Sie möglichst wenig Kanten entfernen. Markieren Sie die zu entfernenden Kanten. Begründen Sie Ihre Antwort.

D) Nennen Sie die Wurzel Ihres Baums.

Aufgabe 2.3: Relationen

Ein Freund von Ihnen möchte einen neuen Garten bauen und fragt Sie daher um Mithilfe. In der Tabelle 2.1 sind verschiedenen Pflanzenarten und deren Eigenschaften angegeben.

Tabelle 2.1: Informationen verschiedener Pflanzenarten

Pflanze	**Gießmenge pro Woche**	**Sonne**	**Schatten**	**Bemerkungen**
Orchidee	50 - 100 ml		X	
Basilikum	900 - 1300 ml	X		
Salbei	800 - 1200 ml	X	X	Verträgt Basilikum nicht
Koriander	1000 - 1500 ml	X		
Rosen	30 - 300 ml	X	X	
Aloe Vera	10 - 60 ml	X	X	

A) Stellen Sie eine Relationsmatrix für die Pflanzen nach ihren Gießmengen pro Woche und Sonnenverträglichkeit auf, wobei ein X in der Matrix bedeutet, dass diese Sorten zusammen im Garten gepflanzt werden können.

Tabelle 2.2: Überdeckungstabelle

Relation γ	Or	Ba	Sa	Ko	Ro	AV
Orchidee						
Basilikum						
Salbei						
Koriander						
Rosen						
Aloe Vera						

B) Welche Eigenschaften weist die Relation γ auf?

C) Um welche spezielle Relation handelt es sich?

Aufgabe 3: Zahlensysteme

Aufgabe 3.1: Umrechnung von Zahlensystemen

A) Vervollständigen Sie Tabelle 3.1, indem Sie die entsprechende Konvertierung in die offenen Felder eintragen.

Dezimal	Oktal	Binär	Hexadezimal
1269_D			
	1271_O		
		$1100\ 0111_B$	
			359_H

Tabelle 3.1: Umrechnung von Zahlensystemen

B) Wandeln Sie die Zahl $C3_{14}$ in das Undezimalsystem (*Basis*11) um.

Aufgabe 3.2: Fließkommazahlen

Die Genauigkeit eines in einem eingebetteten System verwendeten Gleitkommaformats nach Abbildung 3.1 ist für zukünftige Anwendungen nicht mehr ausreichend. Deshalb haben sich die verantwortlichen Ingenieure entschlossen in zukünftigen Systemen auf das binary16 Gleitkommaformat nach dem IEEE 754-2008 Standard (vgl. Abbildung 3.2) zu setzen.

V	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Abbildung 3.1: Aufbau eines proprietären Gleitkommaformats

V	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_9	M_8	M_7	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Abbildung 3.2: Aufbau des binary16 Gleitkommaformats

A) Geben Sie die Dezimalzahl $-8,125_D$ im alten, proprietären Gleitkommaformat an und tragen Sie das Ergebnis in Tabelle 3.2 ein.

V	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Tabelle 3.2: Umwandlung einer gegebenen Dezimalzahl ins Gleitkommaformat

B) Welche Auswirkung auf die obere Grenze des darstellbaren Zahlenbereichs hat ein Umstieg auf das binary16 Format? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

C) Welchen Nachteil müssen die Ingenieure bei einem Umstieg auf das binary16 Format bedenken?

D) Der folgende Hexdump wurde aus dem Speicher des alten Systems ausgelesen:
0x4180 (bzw. 4180_H)
Tragen Sie die binäre Zahlenfolge dem binary16 Format entsprechend in Tabelle 3.3 ein. Die höchstwertige Ziffer liegt dabei im ersten Speicherbereich. Transformieren Sie das Ergebnis anschließend in das Dezimalsystem.

Speicherbereich 1				Speicherbereich 2				Speicherbereich 3				Speicherbereich 4			
V	E_4	E_3	E_2	E_1	E_0	M_9	M_8	M_7	M_6	M_5	M_4	M_3	M_2	M_1	M_0

Tabelle 3.3: Speicherinhalt im binary16 Format

Aufgabe 3.3: Stibitz Code

A) Was ist der Vorteil des Stibitz Codes beim Korrekturschritt gegenüber dem BCD Code?

B) Berechnen Sie unter Verwendung des Stibitz Codes die folgende Aufgabe:

$$43_D - 156_D$$

Aufgabe 4: Boolsche Algebra

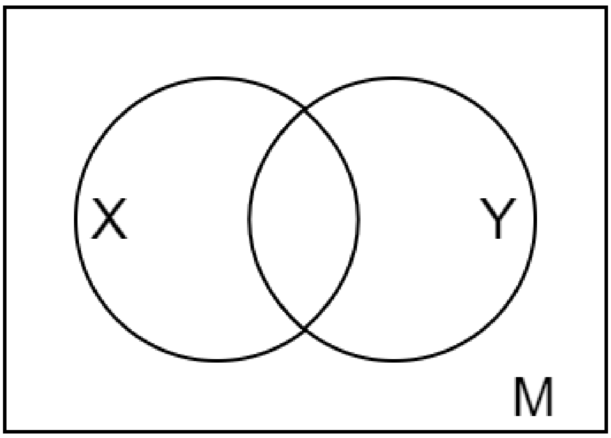
Aufgabe 4.1: Allgemeine Fragen

A) Was sagt das Dualitätsprinzip der booleschen Algebra $BA = [K, \top, \bot, \bar{}\,, O, I]$ aus?

B) Geben Sie den *dualen* Satz zu der Regel $a \vee 1 = 1$ an.

C) Geben Sie den zu R12a (De Morgansche Regel) analogen Satz in der $BA = [K, \top, \bot, \bar{}\,, O, I]$ an.

D) Gegeben sei die Beziehung $Z = \big(C_M(X) \cap C_M(Y)\big) \cup \big(X \cap Y\big)$ in der Mengenalgebra MA. Zeichnen Sie die zu der Menge Z gehörige Fläche in das untenstehende Mengendiagramm ein und geben Sie an um welche aus der Vorlesung bekannte Beziehung es sich handelt.



Aufgabe 4.2: Beweis eines Satzes mittels Boolscher Algebra

Gegeben ist der folgende Ausdruck:

$$\overline{\left(\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge \overline{(\bar{a} \wedge b)}\right)} \wedge b \wedge \overline{(b \vee \bar{a})} \; = \; 0 \tag{4.1}$$

A) Führen Sie den Beweis für die Gleichung (4.1) mit Hilfe der Huntingtonschen Axiome und der Regeln (R1-R12) von dem Formelblatt durch. Nutzen Sie dazu die folgende Tabelle. Tragen Sie die Zwischenschritte zeilenweise ein, maximal ein Schritt pro Zeile. Tragen Sie in die linke Spalte die angewandte Regel ein und in die Rechte das Ergebnis nach Anwendung dieser. (*Hinweis:* Die Verwendung des Kommutativgesetzes H2 sowie des Assoziativitätsgesetzes R10a/R10b muss nicht explizit angegeben werden.)

Regel	Umformung
-	$\overline{\left(\bar{c} \wedge \bar{b} \wedge \overline{(\bar{a} \wedge b)}\right)} \wedge b \wedge \overline{(b \vee \bar{a})}$

Aufgabe 4.3: Entwicklungssatz und Schaltfunktionen

A) Geben Sie die beiden aus der Vorlesung bekannten kanonischen Darstellungsformen von Schaltfunktionen an, sowie die logischen Operationen aus denen sie gebildet werden.

B) Gesucht wird eine Logikfunktion $G(a, b, c)$. Dazu ist die folgende Entwicklung nach dem Entwicklungssatz der Schaltalgebra gegeben. Überführen Sie die Entwicklung mit Hilfe der Tabelle in die entsprechende Logikfunktion und tragen Sie die gefundene Logikfunktion unten ein

$G(0,0,a) = [\overline{a} \wedge G(0,0,0)] \vee [a \wedge G(0,0,1)]$	$G(1,0,a) = [\overline{a} \wedge G(1,0,0)] \vee [a \wedge G(1,0,1)]$
$G(0,0,0) =$ 0	$G(1,0,0) =$ 1
$G(0,0,1) =$ 0	$G(1,0,1) =$ 0
$G(0,1,a) = [\overline{a} \wedge G(0,1,0)] \vee [a \wedge G(0,1,1)]$	$G(1,1,a) = [\overline{a} \wedge G(1,1,0)] \vee [a \wedge G(1,1,1)]$
$G(0,1,0) =$ 1	$G(1,1,0) =$ 0
$G(0,1,1) =$ 0	$G(1,1,1) =$ 1

$G(0,b,a) = [\overline{b} \wedge G(0,0,a)] \vee [b \wedge G(0,1,a)]$	$G(1,b,a) = [\overline{b} \wedge G(1,0,a)] \vee [b \wedge G(0,1,a)]$
$G(0,0,a) =$	$G(1,0,a) =$
$G(0,1,a) =$	$G(1,1,a) =$

$G_{DNF}(c,b,a) = [\,\overline{c} \wedge G(0,b,a)\,] \vee [\,c \wedge G(1,b,a)\,]$ mit	
$G(0,b,a) =$	$G(1,b,a) =$

C) Gegeben ist eine Multiplexerschaltung (Abb. 4.1). Geben Sie die dazugehörige entwickelte Funktion Z an und füllen Sie anschließend die untenstehende Wahrheitstabelle aus.

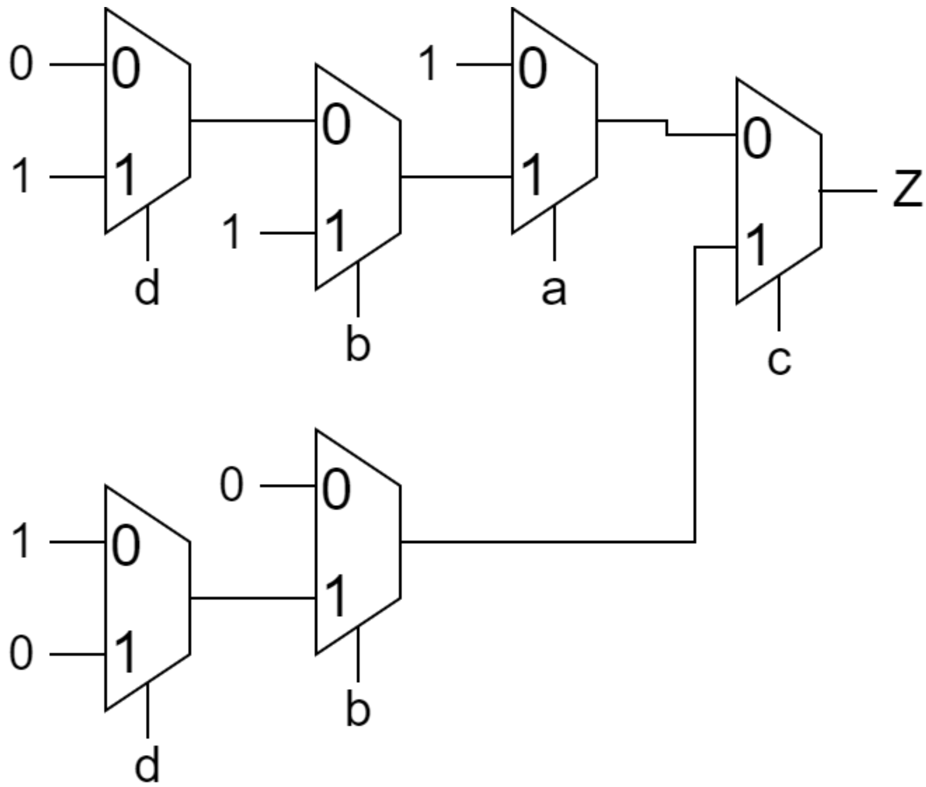


Abbildung 4.1: Multiplexer Implementierung

(d,c,b,a)	Z	(d,c,b,a)	Z
$(0,0,0,0)$		$(1,0,0,0)$	
$(0,0,0,1)$		$(1,0,0,1)$	
$(0,0,1,0)$		$(1,0,1,0)$	
$(0,0,1,1)$		$(1,0,1,1)$	
$(0,1,0,0)$		$(1,1,0,0)$	
$(0,1,0,1)$		$(1,1,0,1)$	
$(0,1,1,0)$		$(1,1,1,0)$	
$(0,1,1,1)$		$(1,1,1,1)$	

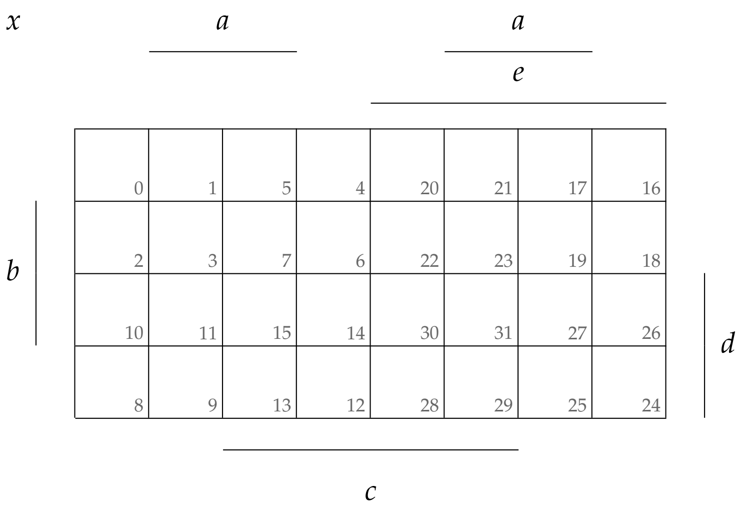
Aufgabe 5: Minimierung

Aufgabe 5.1: Symmetriediagramme

A) Gegeben sei eine unvollständig definierte Schaltfunktion $x = f_1(e, d, c, b, a)$ durch ihre Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und ihre Freistellenmenge $\{X_j\}_-$:

$$\begin{aligned}\{X_j\}_1 &= \{(-,0,0,-,0),(0,1,1,1,1),(-,1,1,0,0),(1,-,0,0,-),\\ &\quad (-,0,0,0,-),(1,0,0,-,-),(1,1,1,-,0),\}\\ \{X_j\}_- &= \{(0,1,1,1,0),(0,0,0,1,1),(0,1,-,0,1),\\ &\quad (1,1,0,1,-),\}\end{aligned}$$

Tragen sie die Null-, Eins- und Freistellen in das leere Symmetriediagramm ein. Es sollen dabei alle Kästchen ausgefüllt werden.



B) Gegeben sei nun das Symmetriediagramm der Schaltfunktion $y = f_2(e, d, c, b, a)$. Markieren Sie alle Primeinsblöcke im Symmetriediagramm und geben Sie anschließend alle Primimplikanten an.

y									
		a	a			a	a		
					e	e	e	e	
	0_{0}	0_{1}	1_{5}	1_{4}	$-_{20}$	0_{21}	1_{17}	1_{16}	
b	0_{2}	0_{3}	1_{7}	$-_{6}$	1_{22}	0_{23}	0_{19}	0_{18}	
b	1_{10}	$-_{11}$	0_{15}	0_{14}	0_{30}	0_{31}	$-_{27}$	1_{26}	d
	$-_{8}$	1_{9}	0_{13}	0_{12}	0_{28}	0_{29}	1_{25}	$-_{24}$	d
			c	c	c	c			

Gegeben sei nun eine vollständig definierte Schaltfunktion $z = f_3(d, c, b, a)$ anhand ihres Symmetriediagramms:

z		a			
	1_{0}	1_{1}	1_{5}	1_{4}	
b	0_{2}	0_{3}	1_{7}	1_{6}	
b	1_{12}	0_{13}	1_{15}	1_{14}	d
	1_{10}	0_{11}	1_{13}	1_{12}	d
			c		

C) Bestimmen Sie für z die konjunktive Normalform (KNF) anhand des Symmetriediagramms.

D) Minimieren Sie die in Aufgabenteil C) gefundene KNF durch algebraische Umformung und geben Sie die Disjunktion der Primterme an.

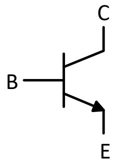
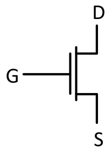
E) Geben Sie für z die disjunktive Minimalform (DMF) an.

F) Unter welcher Bedingung ist ein Primterm nicht Teil der DMF?

Aufgabe 6: CMOS und Gatter

Aufgabe 6.1: Allgemeine Fragen

A) In der untenstehenden Tabelle sind die Schaltbilder zweier unterschiedlicher Transistoren abgebildet. Geben Sie in der zweiten Spalte den grundlegenden Transistortypen und die konkrete Variante an.

Schaltbild	Transistortyp
	
	

B) Was unterscheidet CMOS Schaltungen von Schaltungen nach dem Einschalterprinzip?

C) Was besagt die allgemeine Formulierung von Moores Gesetz? Was besagt Moores Gesetz bezogen auf Transistoren in der CMOS-Technologie?

Aufgabe 6.2: Schaltungssynthese

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben eine **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

A) Ergänzen Sie das Pulldown-Netz zum Pullup-Netz in Abbildung 6.1.

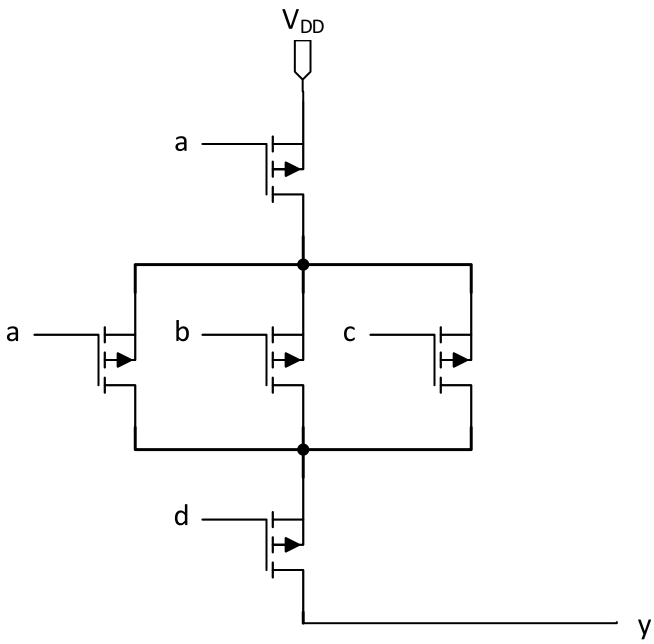


Abbildung 6.1: CMOS Pullup-Netz

B) Formen Sie die Funktion $y = a\,(a \vee b \vee cd) \vee \overline{a}\,(a \vee b \vee cd)$ so um, dass diese nur durch NAND-Operationen (mit beliebig vielen Eingängen) und Invertern dargestellt wird. Sie dürfen die Funktion vereinfachen.

C) Zeichnen Sie den Schaltplan nur aus NAND Gattern (mit beliebig vielen Eingängen) zur Funktion $y = \overline{\overline{ab} \wedge \overline{ac\,\overline{d}} \wedge \overline{acd}}$. Es dürfen **keine Inverter-Gatter** verwendet werden!

D) Zeichnen Sie die Funktion $y = \overline{\overline{acd} \wedge b}$ aus NOR-, NAND- und Inverter-Gatter (mit beliebig vielen Eingängen) als CMOS-Transistor-Schaltung .

Aufgabe 6.3: Schaltungsanalyse

Hinweis: Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben eine **positive Logik**, d.h. der CMOS-Pegel V_{DD} entspricht einer logischen '1'.

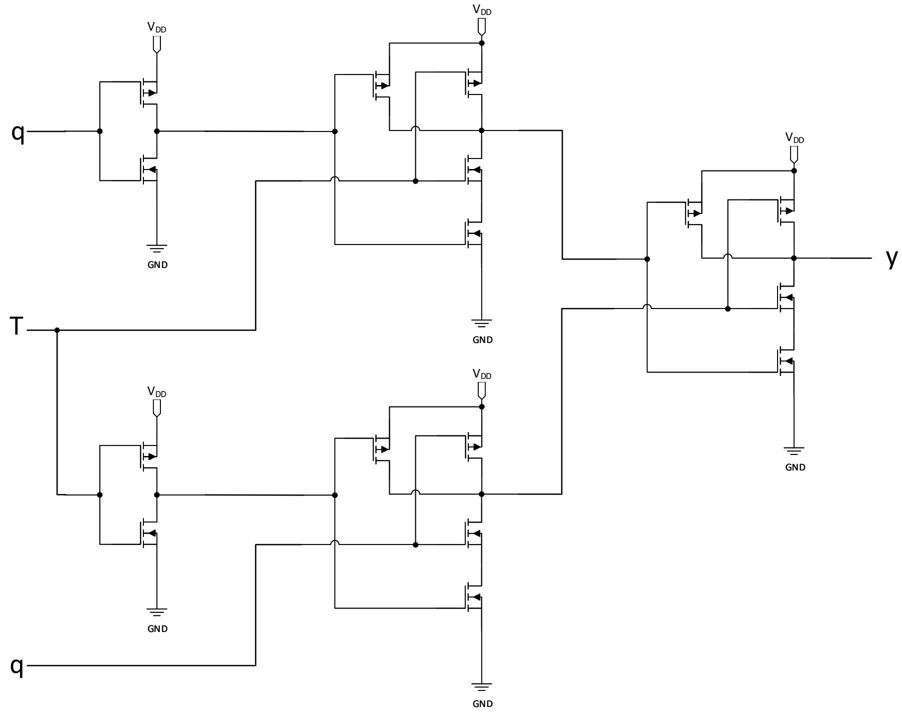


Abbildung 6.2: CMOS-Schaltung

A) Geben Sie die Funktion zur Schaltung in Abbildung 6.2 in disjunktiver Normalform an.

B) Welche aus der Vorlesung bekannte Funktion realisiert die Schaltung in Abbildung 6.2?

C) Gegeben seien die Funktionen für das Pull-Up Netz (F) und für das Pull-Down Netz (G) einer CMOS Schaltung. Berechnen Sie alle Eingangskombinationen die Kurzschlüsse erzeugen und geben Sie diese in der Form (a, b, c, d) an. Der Ansatz muss erkennbar sein.

$$F = ((ab \vee c) \wedge (d \vee b)) \vee a$$
$$G = \overline{a}\,\overline{c} \vee \overline{a}\left(\overline{b} \vee c\right)$$

D) Nennen Sie zwei verschiedene Möglichkeiten, um zu prüfen, ob eine Schaltung wohldefiniert ist. Geben Sie für jede Möglichkeit die verwendeten Formeln an.

Aufgabe 7: Optimale Codes

Aufgabe 7.1: Allgemeine Fragen

A) Eine gedächtnislose Quelle S generiert die in Tabelle 7.1 aufgeführten Symbole x_i mit den jeweils dazu angegebenen Wahrscheinlichkeiten $p(x_i)$. Bestimmen Sie die Entropie der Quelle und geben Sie diese als vollständig gekürzter Bruch an.

x_i	a	b	c	d	e	f	g
$p(x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

Tabelle 7.1: Auftrittswahrscheinlichkeiten der von S erzeugten Symbole

B) Betrachten Sie zusätzlich zur in A) beschriebenen Quelle S die in Tabelle 7.2 gegebene, präfixfreie Codierung für die von S erzeugten Symbole. Bestimmen Sie die mittlere Codewortlänge $\bar{m}$ dieser Codierung und geben Sie diese als vollständig gekürzter Bruch an.

x_i	a	b	c	d	e	f	g
CW_i	0000	1	01	00100	0001	00101	0011

Tabelle 7.2: Codierung für die von S erzeugten Symbole

C) Dekodieren Sie die Codewortfolge „0010101001100001011" unter Verwendung der in Tabelle 7.2 angegebenen Codierung und geben Sie die entsprechende Symbolfolge an.

D) Gegeben ist eine gedächtnislose Quelle $\hat{S}$ mit der Entropie $H(\hat{S}) = 4{,}3$ Bit. Durch die Anwendung des Huffman-Verfahrens auf diese Quelle ergibt sich eine Codierung mit der mittleren Codewortlänge $\bar{m}_1 = 4{,}5$ Bit. Ist es möglich, das Shannon-Fano-Verfahren einzusetzen, um eine Codierung mit einer mittleren Codewortlänge von $\bar{m}_2 < \bar{m}_1$ zu erhalten? Begründen Sie Ihre Antwort!

E) Lesen Sie aus dem in Abbildung 7.1 gegebenen Codierbaum eine präfixfreie Codierung für die Symbole A, B, C, D, E und F ab. Tragen Sie die abgelesenen Codewörter (CW_i) im Anschluss in die entsprechenden Zellen von Tabelle 7.3 ein.

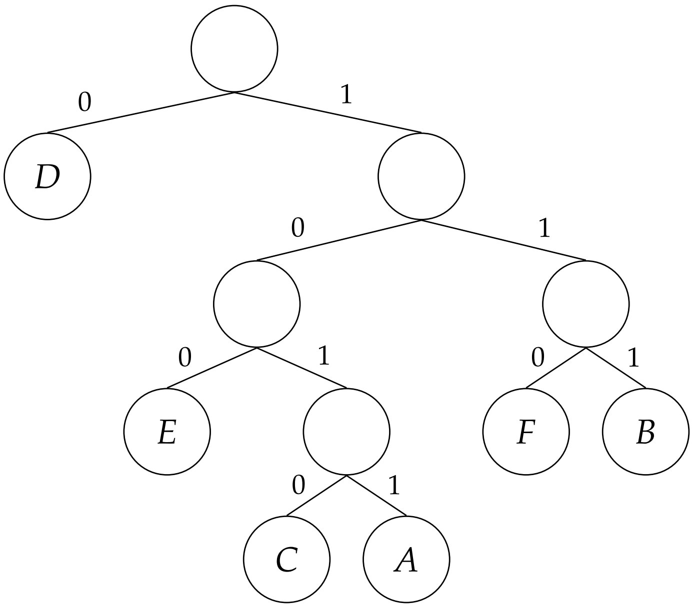


Abbildung 7.1: Codierbaum für die Symbole A, B, C, D, E und F

x_i	A	B	C	D	E	F
CW_i						

Tabelle 7.3: Codierung für die Symbole A, B, C, D, E und F

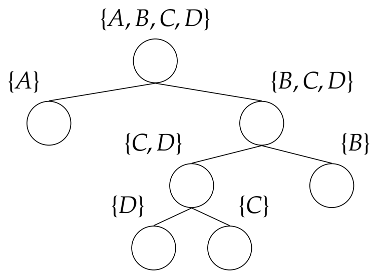
Aufgabe 7.2: Huffman-Verfahren

A) Gegeben sind die gedächtnislosen Quellen S_1, S_2, S_3 und S_4 sowie absolute Häufigkeiten für die von ihnen erzeugten Symbole. Geben Sie für jede der Quellen an, ob der zu ihr aufgeführte Codierungsbaum aus einer korrekten Anwendung des Huffman-Verfahrens entstanden ist. Beschreiben Sie **bei einem fehlerhaften Baum** kurz, in welchem Schritt des Huffman-Verfahrens ein Fehler aufgetreten ist und **korrigieren Sie diesen Schritt**.

Hinweis: *Jeder Baum enthält maximal einen Fehler. Nehmen Sie an, dass die absoluten Häufigkeiten repräsentativ für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Symbole sind.*

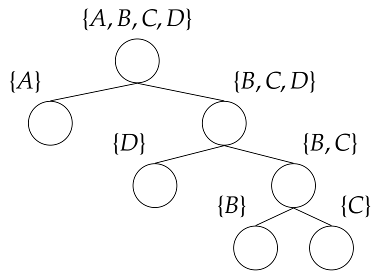
Quelle S_1:

Symbol	A	B	C	D
Häufigkeit	13	7	5	2



Quelle S_2:

Symbol	A	B	C	D
Häufigkeit	25	14	18	20

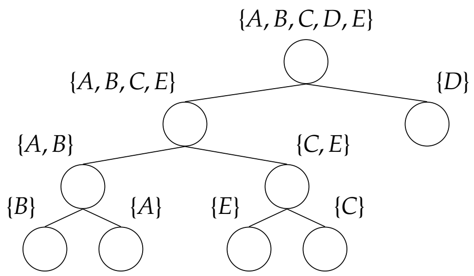


Antwort für S_1:

Antwort für S_2:

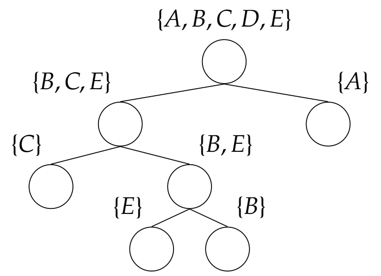
Quelle S_3:

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	12	6	20	53	13



Quelle S_4:

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	40	16	21	41	9



Antwort für S_3:

Antwort für S_4:

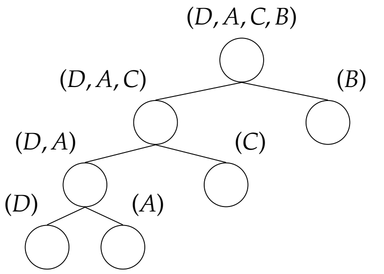
Aufgabe 7.3: Shannon-Fano-Verfahren

A) Gegeben sind die gedächtnislosen Quellen S_1', S_2', S_3' und S_4' sowie absolute Häufigkeiten für die von ihnen erzeugten Symbole. Geben Sie für jede der Quellen an, ob der zu ihr aufgeführte Codierungsbaum aus einer korrekten Anwendung des Shannon-Fano-Verfahrens entstanden ist. Benennen Sie **bei einem fehlerhaften Baum** den Knoten, der nicht korrekt in eine linke und eine rechte Teilmenge zerlegt wurde, und **korrigieren Sie diese Aufteilung**.

Hinweis: *Jeder Baum enthält maximal einen Fehler. Nehmen Sie an, dass die absoluten Häufigkeiten repräsentativ für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Symbole sind und dass die Symbole zu Beginn nach aufsteigender Auftrittswahrscheinlichkeit* ***von links nach rechts*** *sortiert werden.*

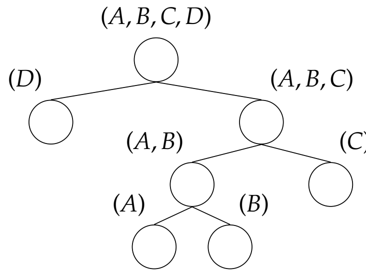
Quelle S_1':

Symbol	A	B	C	D
Häufigkeit	16	27	25	12



Quelle S_2':

Symbol	A	B	C	D
Häufigkeit	3	17	20	27

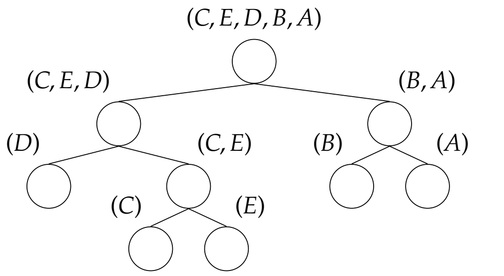


Antwort für S_1':

Antwort für S_2':

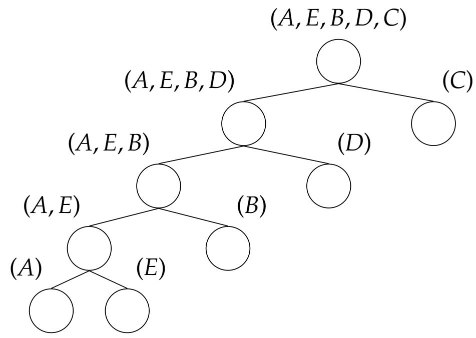
Quelle S_3':

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	58	47	17	23	19



Quelle S_4':

Symbol	A	B	C	D	E
Häufigkeit	10	16	42	20	15



Antwort für S_3':

Antwort für S_4':

Aufgabe 8: Automaten

Aufgabe 8.1: Automatentypen

Der Medwedew-Automat hat eine Ausgabefunktion, welche durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann: $A_h^\nu = S_k^\nu$, wobei A_h^ν die Ausgabe und S_k^ν den Zustand beschreiben.

A) Nennen Sie zwei weitere Automatentypen, erklären Sie jeweils den Unterschied zum Medwedew-Automaten und geben Sie die allgemeine Gleichung der Ausgabefunktion in Abhängigkeit von λ, E, A und S an.

Aufgabe 8.2: Automatenanalyse

Gegeben sei das in Abbildung 8.1 gegebene Ablaufdiagramm eines Automaten.

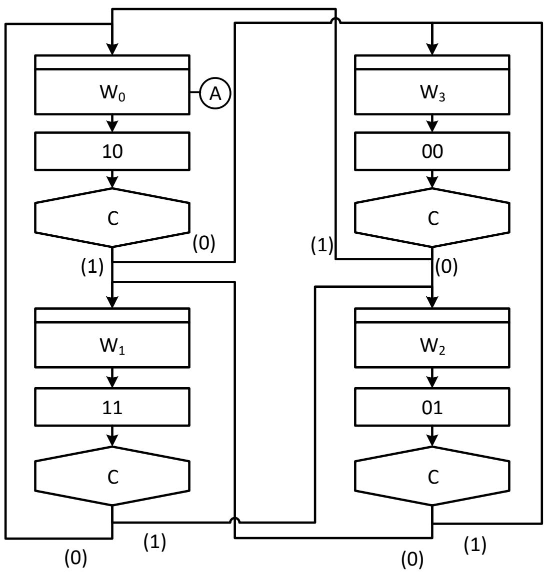


Abbildung 8.1: Ablaufdiagramm

A) Geben Sie den Automatentyp des Automaten an, der in Abbildung 8.1 dargestellt ist. Begründen Sie Ihre Aussage.

B) Welche Funktion wird duch den Automaten in Abbildung 8.1 realisiert?

C) Füllen Sie auf Basis des Ablaufdiagramms in Abbildung 8.1 die Ablauftabelle (Tabelle 8.1) aus. Tragen Sie dazu für jeden Zustand und jede mögliche Eingabe den Folgezustand sowie die Ausgabe ein.

Zustand S^v	**Eingabe** E^v	**Folgezustand** S^{v+1}	**Ausgabe** A^v
W_0	0		
	1		
W_1	0		
	1		
W_2	0		
	1		
W_3	0		
	1		

Tabelle 8.1: Ablauftabelle

Aufgabe 8.3: Realisierung von Automaten mit FlipFlops

A) Der Zustandsautomat aus Tabelle 8.2 soll von einem *JK-FlipFlop* (mit den Eingängen j_1 und k_1) für das zweite Bit Q_1^v und einem *RS-FlipFlop* (mit den Eingängen s_0 und r_0) für das erste Bit Q_0^v realisiert werden. Ergänzen Sie in der unvollständigen Ablauftabelle die fehlenden Ansteuerbits für die Eingänge j_1, k_1, r_0 und s_0 der FlipFlops. Verwenden Sie nach Möglichkeit „don't care"-Stellen.

Zustand	**Eingabe**	**Folgezustand**	**Flipflop-Ansteuerung**			
$S^v = (Q_0^v, Q_1^v)$	$(E^v = E_0, E_1)$	S^{v+1}	s_0	r_0	j_1	k_1
0,0	0,0	0,0	0			
	0,1	0,1	0			
	1,0	1,0	1			
	1,1	1,1	1			
0,1	0,0	0,0	0			
	0,1	0,1	0			
	1,0	1,0	1			
	1,1	1,1	1			
1,0	0,0	0,0	0			
	0,1	0,1	0			
	1,0	1,0	-			
	1,1	1,1	-			
1,1	0,0	0,0	0			
	0,1	0,1	0			
	1,0	1,0	-			
	1,1	1,1	-			

Tabelle 8.2: Ablauftabelle eines Zustandsautomaten

B) Füllen Sie das in Abbildung 8.2 vorgegebene Symmetriediagramm für s_0 auf Basis Ihrer Antwort in Tabelle 8.2 aus. Bestimmen Sie anschließend eine disjunktive minimale Ansteuerfunktion für s_0.

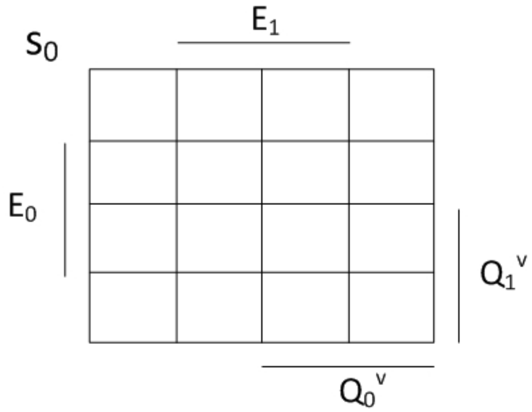


Abbildung 8.2: Symmetriediagramm für s_0

C) Ergänzen Sie die Schaltung in Abbildung 8.3 so, dass ein *JK-FlipFlop* entsteht. Nutzen Sie dafür das *RS-FlipFlop* und so wenig zusätzliche Gatter wie möglich.

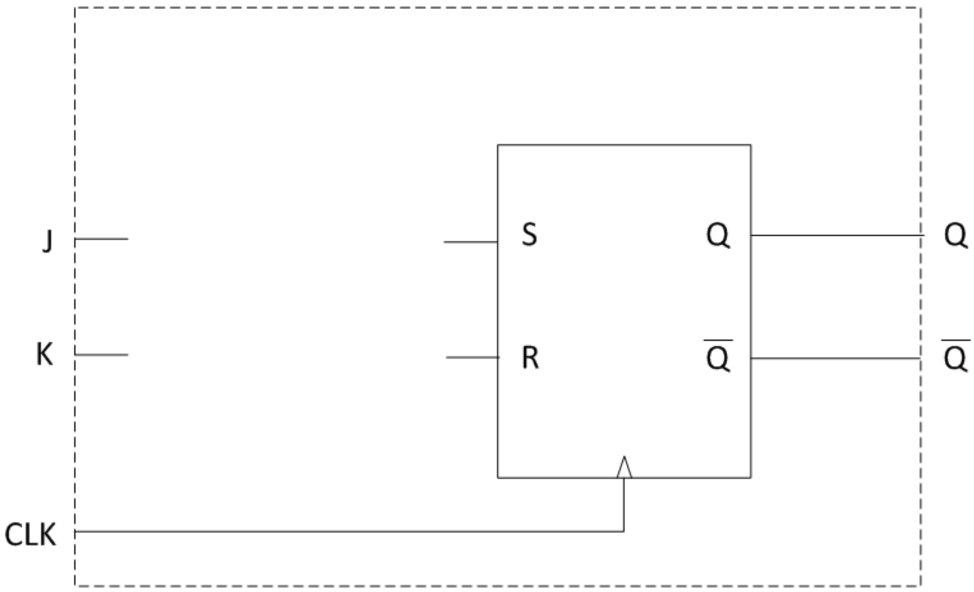


Abbildung 8.3: RS-Flipflop zur Erzeugung eines JK-Flipflops

Zusatzblatt zu Aufgabe $\boxed{}$:

Formelblatt Digitaltechnik

Huntingtonschen Axiome für alle $a, b, \mathrm{I}, \mathrm{O} \in K$; $\overline{a} = k \in K$

Abgeschlossenheit:	(H1)	$a \top b \in K$	$a \perp b \in K$
Kommutativgesetz:	(H2)	$a \top b = b \top a$	$a \perp b = b \perp a$
Distributivgesetz:	(H3)	$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)$	$(a \perp b) \top c = (a \top c) \perp (b \top c)$
Neutrales Element:	(H4)	$\mathrm{I} \top a = a$	$\mathrm{O} \perp a = a$
Komplement:	(H5)	$a \top k = \mathrm{O}$	$a \perp k = \mathrm{I}$

Abgeleitete Regeln

R1a:	$\overline{0} = 1$	R1b:	$\overline{1} = 0$
R2a:	$0 \vee 0 = 0$	R2b:	$1 \,\&\, 1 = 1$
R3a:	$1 \vee 1 = 1$	R3b:	$0 \,\&\, 0 = 0$
R4a:	$1 \vee 0 = 1$	R4b:	$1 \,\&\, 0 = 0$
R5a:	$a \vee 0 = a$	R5b:	$a \,\&\, 0 = 0$
R6a:	$a \vee 1 = 1$	R6b:	$a \,\&\, 1 = a$
R7a:	$a \vee a = a$	R7b:	$a \,\&\, a = a$
R8a:	$a \vee \overline{a} = 1$	R8b:	$a \,\&\, \overline{a} = 0$
R9:	$\overline{(\overline{a})} = \overline{\overline{a}} = a$		

Assoziative Gesetze:

R10a: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee b \vee c$

R10b: $(a \,\&\, b) \,\&\, c = a \,\&\, (b \,\&\, c) = a \,\&\, b \,\&\, c$

Absorptionsgesetze:

R11a: $(a \vee b) \,\&\, a = a$

R11b: $(a \,\&\, b) \vee a = a$

De Morgan:

R12a: $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \,\&\, \overline{b}$

R12b: $\overline{(a \,\&\, b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$

Umwandlung DNF ↔ KNF

$$OR(AND(l_i)) \xleftrightarrow{R9} OR\left(AND(\overline{\overline{l_i}})\right) \xleftrightarrow{R12a} OR\left(\overline{OR(\overline{l_i})}\right) \xleftrightarrow{R12b} \overline{AND\left(OR(\overline{l_i})\right)} \xleftrightarrow{H3}$$

$$\overline{OR\left(AND(\overline{l_k})\right)} \xleftrightarrow{R12a} AND\left(\overline{AND(\overline{l_k})}\right) \xleftrightarrow{R12b} AND\left(OR(\overline{\overline{l_k}})\right) \xleftrightarrow{R9} AND\left(OR(l_k)\right)$$

Weitere Funktionen

Implikation $a \rightarrow b = \overline{a} + b$

Äquivalenz $a \equiv b = a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b}$

Inklusion $f \le g \Rightarrow f \cdot \overline{g} = 0$

Transitivität der Inklusion

$(f \le g) \cdot (g \le h) \Rightarrow f \le h$

Tautologie $f = g \Leftrightarrow f \equiv g = 1$

$f \le g \Leftrightarrow \overline{f} + g = 1$

XOR-Regeln $x \oplus y = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$

$x + y = x \cdot y \oplus x \oplus y$

$x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$

$\overline{x} = x \oplus 1$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$

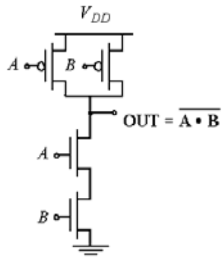
Multiplexer $f = x \cdot a + \overline{x} \cdot b$

Entwicklungssatz

Boolescher Entwicklungssatz $f = x \cdot f_x + \overline{x} \cdot f_{\overline{x}}$

Dualer Entwicklungssatz $f = (\overline{x} + f_x) \cdot (x + f_{\overline{x}})$

CMOS Schaltungen



CMOS (wohl definiert) $v_1 = \overline{v_0}$

CMOS (kein Kurzschluss) $v_1 \cdot v_0 = 0$

CMOS (Vollständigkeit) $v_1 + v_0 = 1$

Addierer

Halbaddierer $s_i = a_i \oplus b_i$ $\quad c_{i+1} = a_i \cdot b_i$

Volladdierer $s_i = a_i \oplus b_i \oplus c_i$

$c_{i+1} = a_i \cdot b_i + (a_i \oplus b_i) \cdot c_i$

Carry-Look-ahead $c_{i+1} = g_i + p_i \cdot c_i$

Generate $g_i = a_i \cdot b_i$

Propagate $p_i = a_i \oplus b_i$

Informationsgehalt

Informationsgehalt H_e eines Zeichens: $H_e = \mathrm{ld}\,\frac{1}{p}$

Informationsgehalt H einer Quelle: $H = \sum_{i=1}^{N} p(i) \cdot \mathrm{ld}\,\frac{1}{p(i)}$

mit der Auftrittswahrscheinlichkeit $p(i)$ und $\sum_{i=1}^{N} p(i) = 1$

a, b, x, y, z : boolesche Variablen $\quad l$: Literal $\quad f, g$: boolesche Funktionen $\quad v_1$: p-Netz $\quad v_0$: n-Netz
s : Summe/Zustand $\quad c$: Carry $\quad i$: Eingang $\quad \delta$: Transitionsfunktion $\quad \lambda$: Ausgabefunktion

Codierung

Allgemeiner Aufbau einer polyadischen Zahl:

$$N = dn * Rn + \ldots + d1 * R1 + d0 * R0$$

mit *N* Zahl im Zahlensystem; *R* Basis; R^i Wertigkeit; d_i Ziffer der i-ten Stelle; *Z* Menge der Ziffer $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, R-1\}$

ASCII-Tabelle

LSB	MSB							
Binär	000	001	010	011	100	101	110	111
	Steuerzeichen			Großbuchstaben			Kleinbuchstaben	
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	„	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Anzahl Codewörter im (*k* aus m)-Code:

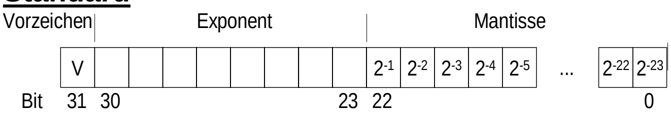
$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Korrigierbare Fehleranzahl bei ungerader HD:

$$F_k = \frac{(d-1)}{2}$$

Erkennbare Fehleranzahl: $F_e = d - 1$

Gleitkommadarstellung gemäß IEEE 754-Standard



Exponent E	Mantisse M	Wert
255	≠0	ungültig (NAN)
255	0	$-1^V \cdot \infty$ (±unendlich)
$\boxed{0 < E < 255}$	M	$\boxed{-1^V \cdot 2^{E-127} \cdot (1,M)}$
0	≠ 0	$-1^V \cdot 2^{-126} \cdot (0,M)$
0	0	$-1^V \cdot 0$

Minimierung - Allgemeine Vorgehensweise:

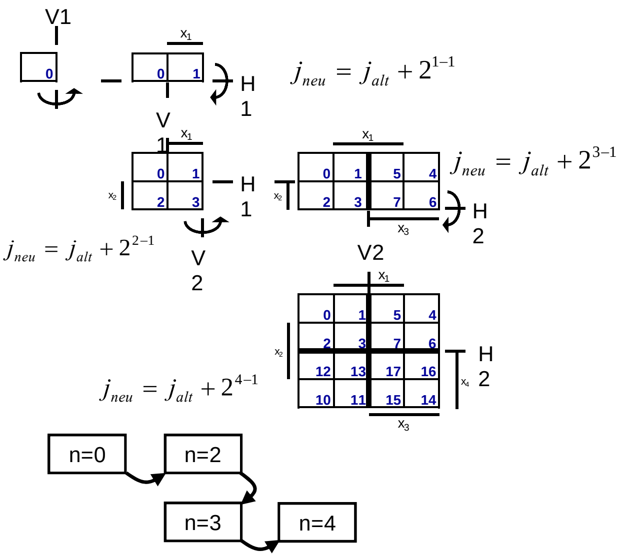
1) **Kerne** bestimmen und **Streichen aller überdeckten Spalten** (@ Einsstellen) („leergewordene" Zeilen können auch gestrichen werden)

2) **Spaltendominanzen** finden und **dominierende Spalten streichen**

3) **Zeilendominanzen** finden und **dominierte Zeilen streichen**, nach Möglichkeit (-> **Kosten ci beachten**!)

4) Schritte **1-3 wiederholen**, bis **Überdeckungstabelle nicht reduzierbar** -> keine Kerne und Dominanzen mehr (ggf. noch zyklische Resttabelle auflösen)

Entwicklung eines Symmetriediagramms



FlipFlops (charakteristische Gleichungen)

RS-FlipFlop: $q_k^{v+1} = S^v \vee (q_k^v \,\&\, \overline{R}^v)$	q^v	q^{v+1}	R	S
	0	0	-	0
	0	1	0	1
	1	0	1	0
	1	1	0	-

D-FlipFlop: $q_k^{v+1} = D^v$	q^v	q^{v+1}	D
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	0
	1	1	1

JK-FlipFlop: $q^{v+1} = (\overline{K} \,\&\, q^v) \vee (J \,\&\, \overline{q}^v)$	q^v	q^{v+1}	K	J
	0	0	-	0
	0	1	-	1
	1	0	1	-
	1	1	0	-

T-FlipFlop: $q^{v+1} = (T \,\&\, \overline{q}^v) \vee (\overline{T} \,\&\, q^v)$	q^v	q^{v+1}	T
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0

Automaten

A_h^v Ausgangsvektor;

S_k^v Zustandsvektor;

E_g^v Eingangsvektor

Transitionsgleichungen

$$s_i^{v+1} = \delta_i\left(S_k^v, E_g^v\right), mit\ s_i^{v+1} \in S_k^{v+1}$$

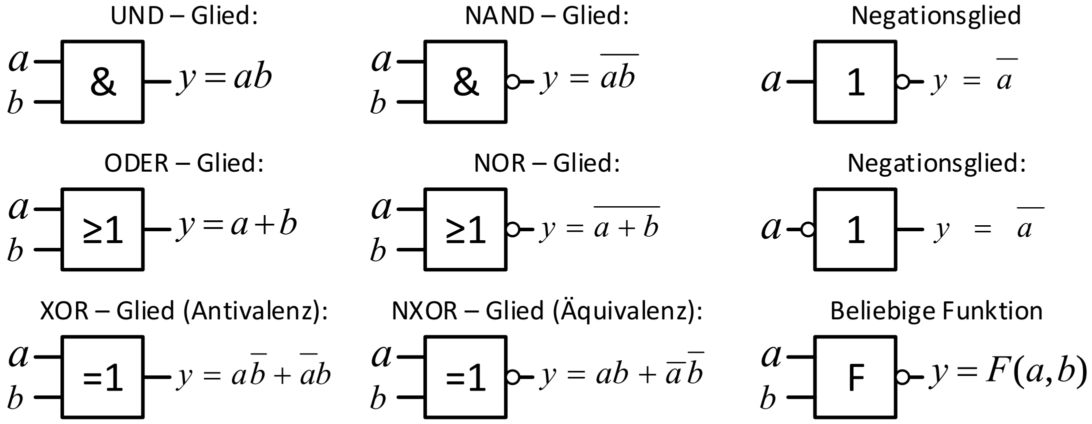
Ausgabefunktionen Medwedew $A_h^v = S_k^v$

Ausgabefunktionen Moore $A_h^v = \lambda_i\left(S_k^v\right)$

Ausgabefunktionen Mealy $A_h^v = \lambda_i\left(S_k^v, E_g^v\right)$

a, b, x, y, z : boolesche Variablen l : Literal f, g : boolesche Funktionen v_1 : p-Netz v_0 : n-Netz
s : Summe/Zustand c : Carry i : Eingang δ : Transitionsfunktion λ : Ausgabefunktion

Schaltsymbole

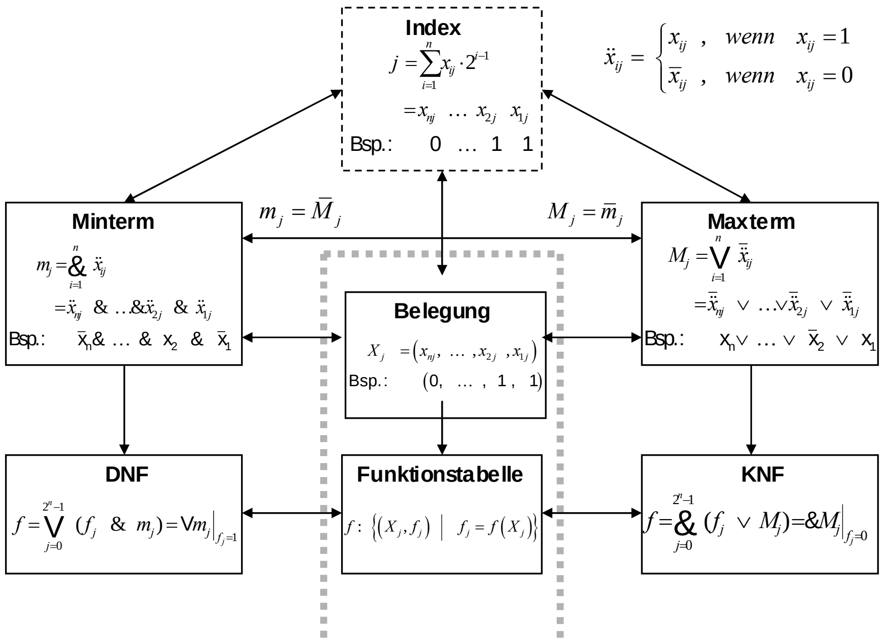


Zusammenstellung der wichtigsten Basissysteme

Zahl der Operatoren	Namen	Zeichen	Darstellung mit UND, ODER, NICHT	Darstellung von $\bar a$	$a\&b$	$a \vee b$
3	NICHT UND ODER	$y=\bar a$ $y=a\&b$ $y=a\vee b$	-	$\bar a$ - -	- $a\&b$ -	- - $a\vee b$
2	NICHT UND	$y=\bar a$ $y=a\&b$	-	$\bar a$ -	- $a\&b$	$a\vee b=\overline{\overline{a\vee b}}=\overline{\bar a\&\bar b}$
2	NICHT ODER	$y=\bar a$ $y=a\vee b$	-	$\bar a$ -	$a\&b=\overline{\overline{a\&b}}$ $=\overline{\bar a\vee\bar b}$	- $a\vee b$
2	UND ANTIVALENZ (Konstante 1)	$y=a\&b$ $y=a\oplus b$	$y=a\&b$ $y=\bar a\&b\vee a\&\bar b$	$\bar a=\bar a\&1\vee a\&\bar 1$ $=a\oplus 1$	$a\&b$ -	$a\vee b$ $=a\oplus b\oplus(a\&b)$
1	NAND	$y=a\bar\& b$	$y=\overline{a\&b}$ $=\bar a\vee\bar b$	$\bar a=\overline{a\&a}=a\bar\& a$ oder $\bar a=\overline{a\&1}=a\bar\& 1$	$a\&b=\overline{\overline{a\&b}}$ $=\overline{a\bar\& b}$ $=(a\bar\& b)\bar\&(a\bar\& b)$	$a\vee b=\overline{\bar a\&\bar b}$ $=\bar a\bar\&\bar b$ $=(a\bar\& a)\bar\&(b\bar\& b)$
1	NOR	$y=a\bar\vee b$	$y=\overline{a\vee b}$ $=\bar a\&\bar b$	$\bar a=\overline{a\vee a}=a\bar\vee a$ oder $\bar a=\overline{a\vee 0}=a\bar\vee 0$	$a\&b=\overline{\bar a\vee\bar b}$ $=\bar a\bar\vee\bar b$ $=(a\bar\vee a)\bar\vee(b\bar\vee b)$	$a\vee b=\overline{\overline{a\vee b}}$ $=\overline{a\bar\vee b}$ $=(a\bar\vee b)\bar\vee(a\bar\vee b)$

Hauptsatz der Schaltalgebra

Beziehungen zwischen den Begriffen



a,b,x,y,z : boolesche Variablen l : Literal f,g : boolesche Funktionen v_1 : p-Netz v_0 : n-Netz
s : Summe/Zustand c : Carry i : Eingang δ : Transitionsfunktion λ : Ausgabefunktion