

Dipl.-Ing. J. Heißwolf

heisswolf@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Digitaltechnik

5. Übung

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen gelten:

1.1 $(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$

indem Sie beide Seiten zur DNF erweitern.

1.2 $(a \& b) \vee (a \not\equiv b) = (a \vee b)$

indem Sie beide Seiten zur KNF erweitern.

Grundlagen

Konjunktion: UND-Verknüpfung, &

Disjunktion: ODER-Verknüpfung, ∨

KNF: $y = \bigwedge_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)$ \Rightarrow UND-Verknüpfung aller Maxterme (Nullblöcke)

Bsp.:
$$y = (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \& (\bar{a} \vee b \vee \bar{c}) \& (a \vee \bar{b} \vee c) \& (a \vee b \vee c)$$

	a			
	0	1	0	1
b	0	1	0	1
	c			

DNF:

$y = \bigvee_{j=0}^{2^n-1} (f_j \& m_j)$ \Rightarrow ODER-Verknüpfung aller Minterme (Einsblöcke)

Bsp.:
$$y = (\bar{a} \& b \& c) \vee (\bar{a} \& \bar{b} \& c) \vee (a \& b \& \bar{c}) \vee (a \& \bar{b} \& \bar{c})$$

	a			
	0	1	0	1
b	0	1	0	1
	c			

1. Aufgabe

1.1 $(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) =$$

1. Aufgabe

1.1 $(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$
$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$
$$= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$
$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$
$$= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$
$$= [abc \vee abc\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc\bar{c} \vee a\bar{b}\bar{c}]$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$
$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$
$$= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$
$$= [abc \vee abc\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc\bar{c} \vee \bar{a}bc\bar{c}]$$
$$= abc \vee abc\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}bc\bar{c}$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$

$$\begin{aligned}(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) &= (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c}) \\ &= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}] \\ &= [abc \vee abc\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc\bar{c} \vee \bar{a}bc\bar{c}] \\ &= abc \vee abc\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}bc\bar{c}\end{aligned}$$

$$(a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& 1 \& c) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$

$$\begin{aligned}(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) &= (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c}) \\ &= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}] \\ &= [abc \vee abc\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc\bar{c} \vee a\bar{b}\bar{c}] \\ &= abc \vee abc\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee a\bar{b}\bar{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \& c) \vee (b \& \bar{c}) &= (a \& 1 \& c) \vee (1 \& b \& \bar{c}) \\ &= [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]\end{aligned}$$

1. Aufgabe

1.1

$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$

$$\begin{aligned}(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) &= (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c}) \\ &= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}] \\ &= [abc \vee abc\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc\bar{c} \vee \bar{a}bc\bar{c}] \\ &= \boxed{abc \vee abc\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}bc\bar{c}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \& c) \vee (b \& \bar{c}) &= (a \& 1 \& c) \vee (1 \& b \& \bar{c}) \\ &= [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}] \\ &= \boxed{abc \vee a\bar{b}c \vee abc\bar{c} \vee \bar{a}bc\bar{c}}\end{aligned}$$

1. Aufgabe

$$1.1 \quad (a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& c) \vee (b \& \bar{c})$$
$$(a \& b) \vee (a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& b \& 1) \vee (a \& c \& 1) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$
$$= [a \& b \& (c \vee \bar{c})] \vee [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$
$$= [abc \vee abc\bar{c}] \vee [abc \vee a\bar{b}c] \vee [abc\bar{c} \vee \bar{a}bc\bar{c}]$$
$$= abc \vee abc\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}bc\bar{c}$$

$$(a \& c) \vee (b \& \bar{c}) = (a \& 1 \& c) \vee (1 \& b \& \bar{c})$$
$$= [a \& (b \vee \bar{b}) \& c] \vee [(a \vee \bar{a}) \& b \& \bar{c}]$$
$$= abc \vee a\bar{b}c \vee abc\bar{c} \vee \bar{a}bc\bar{c}$$

$$abc \vee abc\bar{c} \vee a\bar{b}c \vee \bar{a}bc\bar{c} = abc \vee a\bar{b}c \vee abc\bar{c} \vee \bar{a}bc\bar{c}$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \vee b)$$

$$(a \& b) \vee (a \neq b) =$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \vee b)$$

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \& b) \vee (a \& \bar{b}) \vee (\bar{a} \& b)$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \vee b)$$

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \& b) \vee (a \& \bar{b}) \vee (\bar{a} \& b)$$

$$= [(a \vee a) \& (a \vee \bar{b}) \& (a \vee b) \& (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \& b)$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \vee b)$$

$$\begin{aligned}(a \& b) \vee (a \neq b) &= (a \& b) \vee (a \& \bar{b}) \vee (\bar{a} \& b) \\ &= [(a \vee a) \& (a \vee \bar{b}) \& (a \vee b) \& (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \& b) \\ &= a \vee (\bar{a} \& b)\end{aligned}$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \vee b)$$

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \& b) \vee (a \& \bar{b}) \vee (\bar{a} \& b)$$

$$= [(a \vee a) \& (a \vee \bar{b}) \& (a \vee b) \& (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \& b)$$

$$= a \vee (\bar{a} \& b)$$

$$= a \vee b$$

1. Aufgabe

1.2

$$(a \& b) \vee (a \neq b) = (a \vee b)$$

$$\begin{aligned}(a \& b) \vee (a \neq b) &= (a \& b) \vee (a \& \bar{b}) \vee (\bar{a} \& b) \\ &= [(a \vee a) \& (a \vee \bar{b}) \& (a \vee b) \& (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \& b) \\ &= a \vee (\bar{a} \& b) \\ &= a \vee b\end{aligned}$$

$$a \vee b = a \vee b$$

2. Aufgabe

Ein Hörsaal sei mit vier Glühlampen beleuchtet. Vier Sensoren (g_1 bis g_4) melden mit 0 die Funktion, mit 1 den Ausfall einer Glühlampe. Entwickeln Sie eine Schaltfunktion $f(g_1, g_2, g_3, g_4)$, die beim Ausfall von mindestens zwei Glühlampen den Hausmeister alarmiert ($f=1$). Wenn alle Glühlampen funktionieren, darf der Hausmeister nicht unnötig belästigt werden ($f=0$). Beim Ausfall genau einer Glühlampe darf er, muss aber nicht informiert werden.

2.1

Stellen Sie eine Funktionstabelle für f auf.

2. Aufgabe

2.1 Vorgehensweise:

- Funktionswert $f=0$, wenn alle Variablen gleich Null sind \Rightarrow alle Glühlampen sind funktionsfähig.
- Funktionswert $f=1/0$, d.h. unbestimmt oder „don`t care“, mit einem Strich gekennzeichnet, falls nur eine Variable gleich Eins ist \Rightarrow eine Glühlampe ist defekt
- Funktionswert $f=1$, falls mehr als eine Variable gleich Eins ist \Rightarrow zwei oder mehr Glühlampen sind defekt

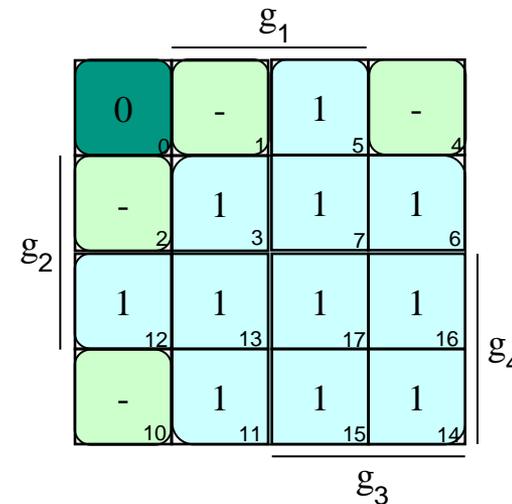
g_4	g_3	g_2	g_1	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	-
0	0	1	0	-
0	0	1	1	1
0	1	0	0	-
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	-
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

2. Aufgabe

2.1 Veranschaulichung mittels Symmetriediagramm:

g_4	g_3	g_2	g_1	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	-
0	0	1	0	-
0	0	1	1	1
0	1	0	0	-
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	-
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

f



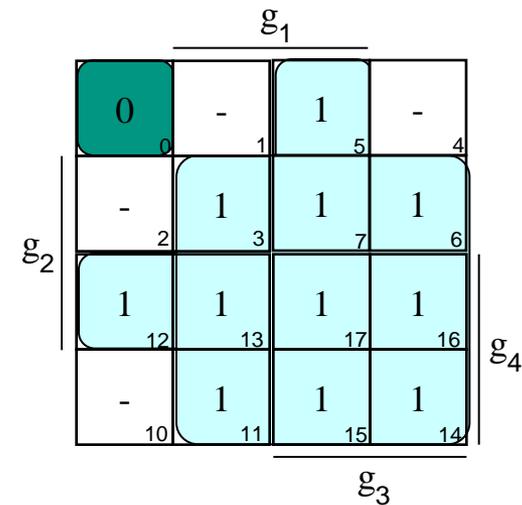
2. Aufgabe

2.2 Geben Sie die Einstellenmenge $\{X_j\}_1$ und die Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$ an.

f

$$\{X_j\}_1 = \{3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$$

$$\{X_j\}_0 = \{0\}$$



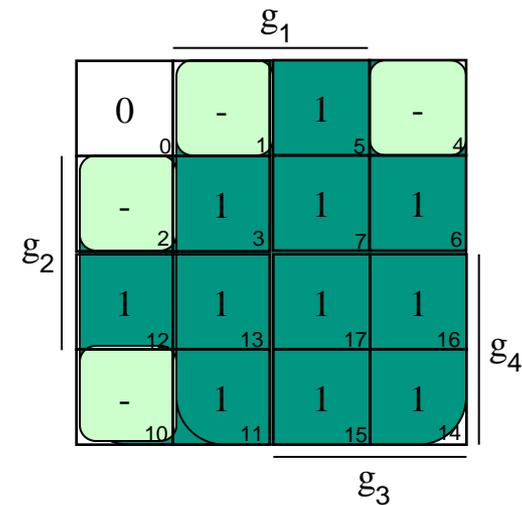
g_1			
0	-	1	-
-	1	1	1
1	1	1	1
-	1	1	1
g_3			
g_2	g_4		

2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

f

KNF: $f =$



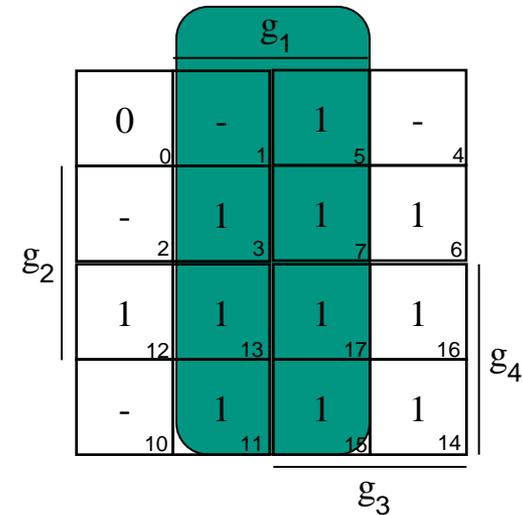
	g_1				
	0	-	1	-	
g_2	-	1	1	1	
	1	1	1	1	
	-	1	1	1	
	g_3				
				g_4	

2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

KNF: $f = g_1$

f



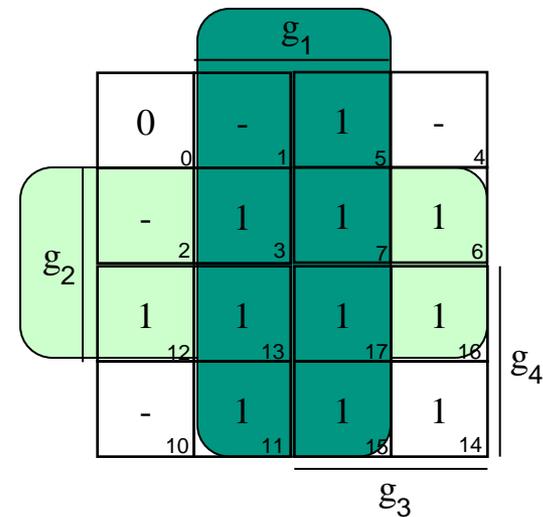
	g_1			
0	-	1	-	
-	1	1	1	
1	1	1	1	
-	1	1	1	

2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

KNF: $f = g_1 \vee g_2$

f

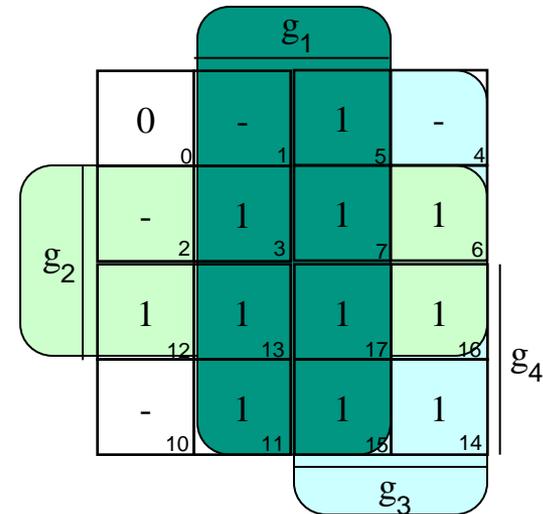


2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

KNF: $f = g_1 \vee g_2 \vee g_3$

f

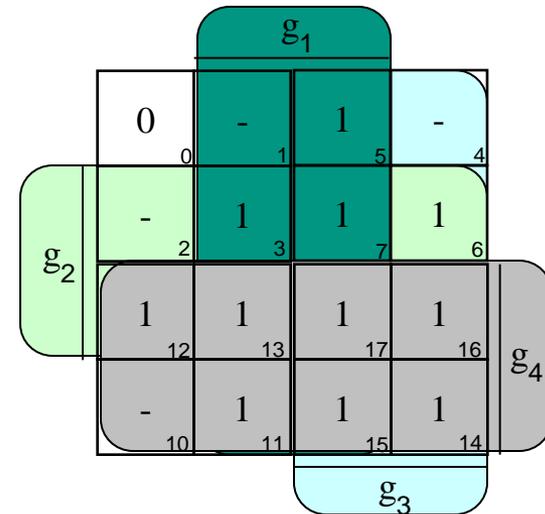


2. Aufgabe

2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar. Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

KNF: $f = g_1 \vee g_2 \vee g_3 \vee g_4$

f



Der Hausmeister wird auch alarmiert, wenn nur eine Glühlampe ausfällt. (f ist die Einsvervollständigung der ursprünglichen Funktion.)

3. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f(x_4, x_3, x_2, x_1)$ durch die Angabe ihrer Minterme $f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$

3.1 Geben Sie f in der im Buch auf S. 118 gezeigten Form mit oktalen Indizes an ($y_{xyz\dots}$).

Minterm:

$$m_j = \bigwedge_{i=1}^n \ddot{x}_{ij} = \ddot{x}_{nj} \& \dots \& \ddot{x}_{2j} \& \ddot{x}_{1j}$$

Bsp.: $\bar{x}_n \& \dots \& x_2 \& \bar{x}_1$

Maxterm:

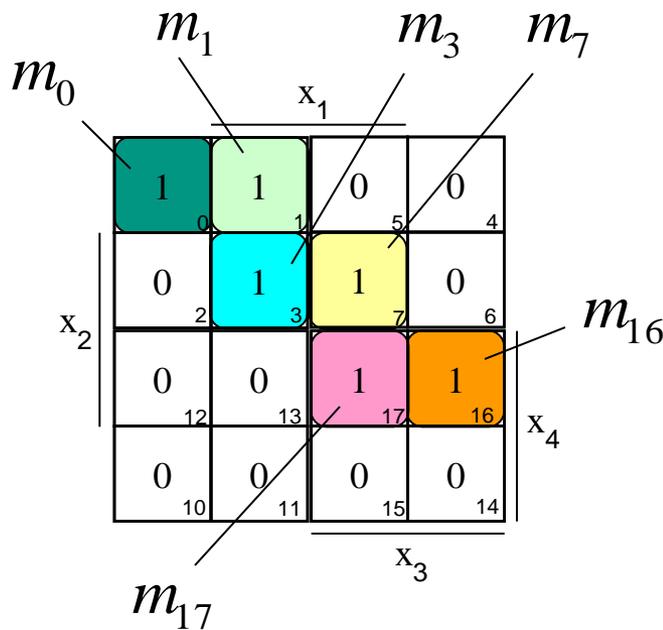
$$m_j = \bigvee_{i=1}^n \bar{\ddot{x}}_{ij} = \bar{\ddot{x}}_{nj} \vee \dots \vee \bar{\ddot{x}}_{2j} \vee \bar{\ddot{x}}_{1j}$$

Bsp.: $x_n \vee \dots \vee \bar{x}_2 \vee x_1$

3. Aufgabe

3.1 Funktionstabelle für

$$f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$$

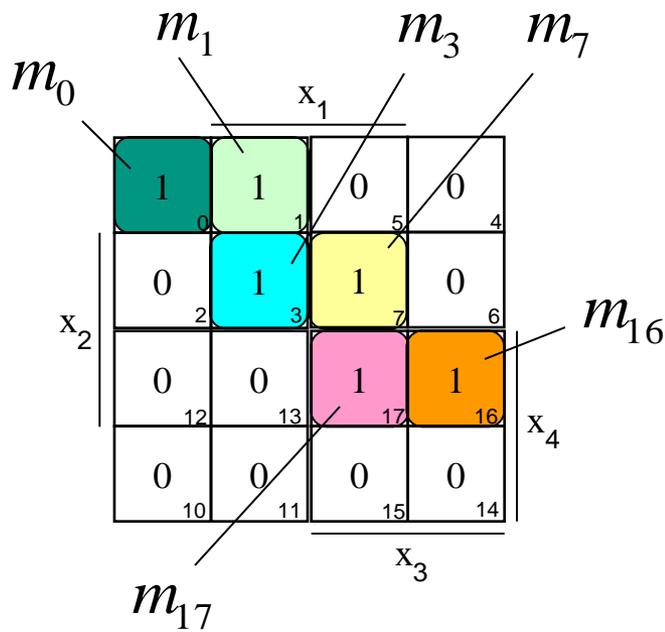


j_0	x_4	x_3	x_2	x_1	f
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
10	1	0	0	0	0
11	1	0	0	1	0
12	1	0	1	0	0
13	1	0	1	1	0
14	1	1	0	0	0
15	1	1	0	1	0
16	1	1	1	0	1
17	1	1	1	1	1

3. Aufgabe

3.1 Funktionstabelle für

$$f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$$



$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \underline{\underline{y_{140213}}}$$

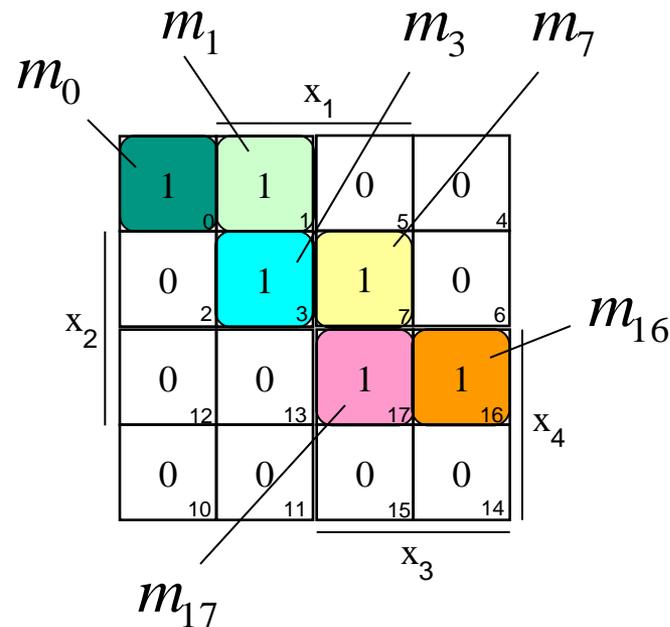
j_0	x_4	x_3	x_2	x_1	f	
0	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	1	1	3
2	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	1	1	
4	0	1	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	
6	0	1	1	0	0	
7	0	1	1	1	1	2
10	1	0	0	0	0	
11	1	0	0	1	0	
12	1	0	1	0	0	0
13	1	0	1	1	0	
14	1	1	0	0	0	
15	1	1	0	1	0	4
16	1	1	1	0	1	
17	1	1	1	1	1	1

Oktalwerte ablesen !!

3. Aufgabe

3.2 Zeichnen Sie f in ein Symmetriediagramm ein.

$$f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$$



3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 =$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$

	x_1				
	1	1	0	0	
	0	1	5	4	
x_2	0	1	1	0	
	2	3	7	6	
	0	0	1	1	
	12	13	17	16	x_4
	0	0	0	0	
	10	11	15	14	
			x_3		

3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$

	x_1				
	1	1	0	0	
	0	1	1	0	
x_2	0	0	1	1	x_4
	0	0	0	0	
	x_3				

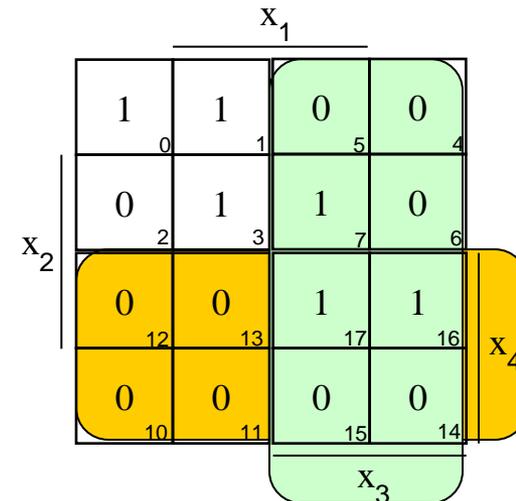
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$



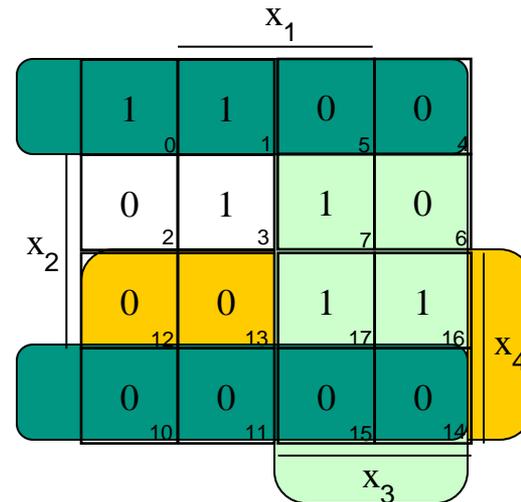
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = \boxed{x_4} \vee \boxed{x_3} \vee \boxed{\bar{x}_2}$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$



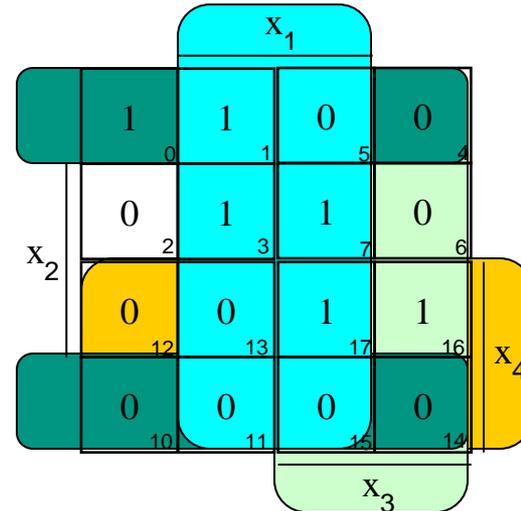
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$



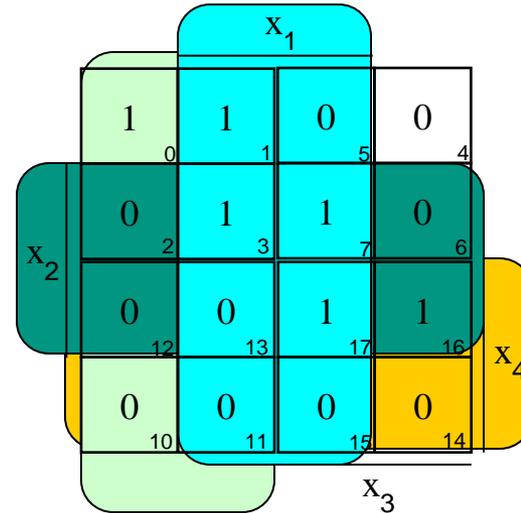
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$$

$$M_5 =$$



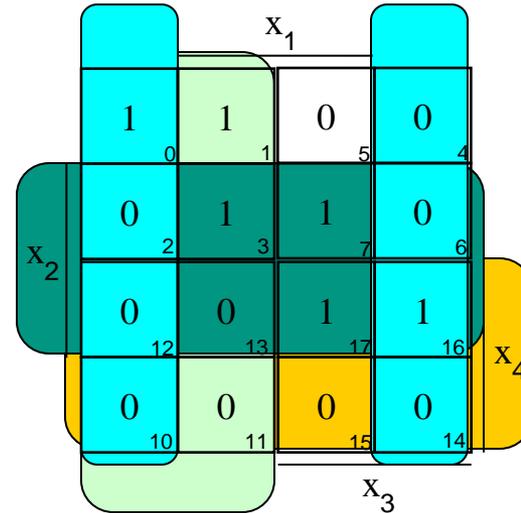
3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$$

$$M_5 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$



3. Aufgabe

3.3 Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$$

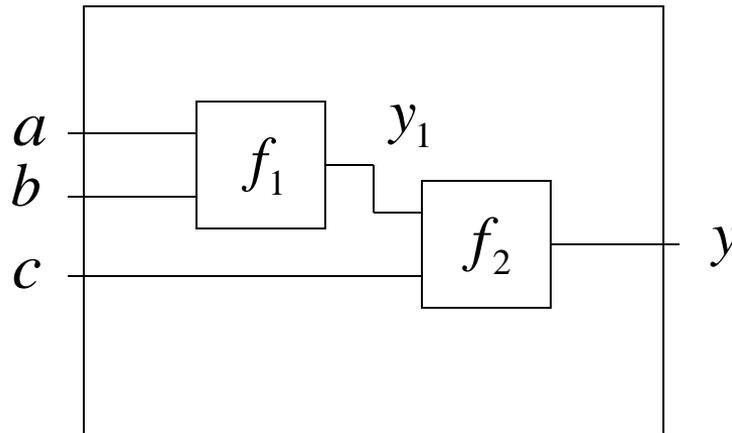
$$M_5 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$

	x_1					
	1	1	0	0		
	0	1	5	4		
x_2	0	1	1	0		
	2	3	7	6		
	0	0	1	1		
	12	13	17	16	x_4	
	0	0	0	0		
	10	11	15	14		
		x_3				

4. Aufgabe

Eine Schaltfunktion besteht, wie im nachfolgenden Bild dargestellt, aus den Teilfunktionen $y_1 = f_1(a,b)$ und $y = y_2 = f_2(c,y_1)$.

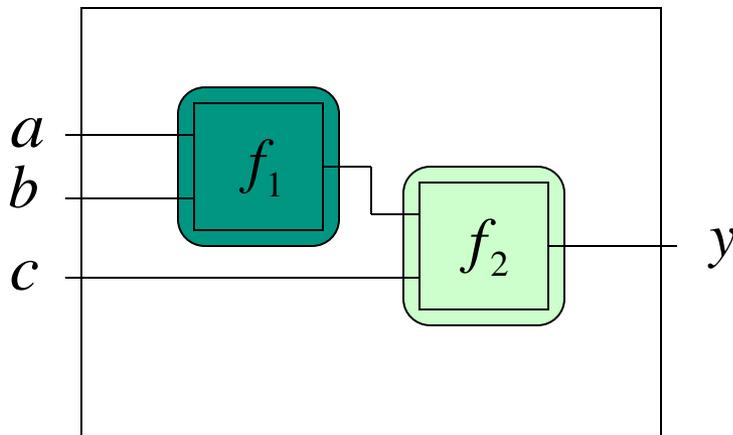
Dafür ist die folgende Funktionstabelle bekannt:



a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

4. Aufgabe

4.1 Ist die Funktion vollständig spezifiziert?



a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

$$y_1 = a \neq b = a \text{ xor } b = a\bar{b} \vee \bar{a}b$$

$$y = y_1 \equiv c = y_1c \vee \bar{y}_1\bar{c}$$

4. Aufgabe

4.2 Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion $y = f(a, b, c)$ auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

4. Aufgabe

4.2 Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion $y = f(a, b, c)$ auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

4. Aufgabe

4.2 Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion $y = f(a, b, c)$ auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	1	0	

4. Aufgabe

4.2 Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion $y = f(a, b, c)$ auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0