Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Übung - Digitaltechnik

1. Übung

Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

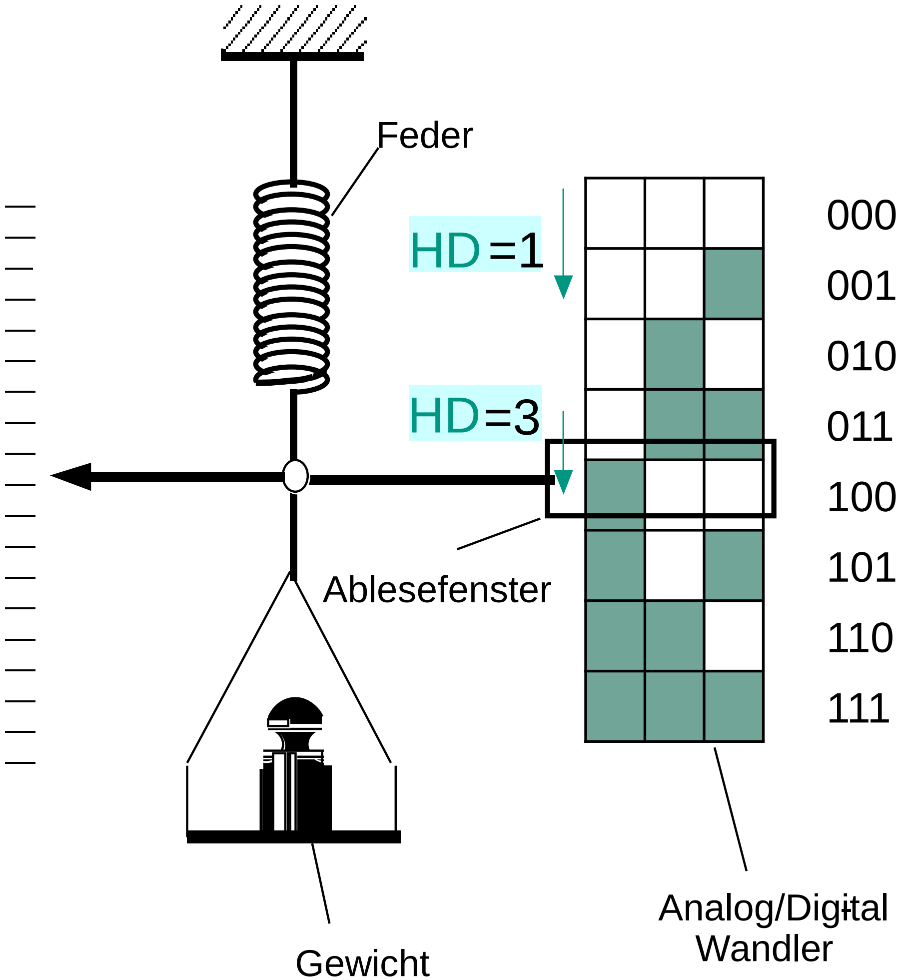
Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Signale und Digitalisieurng

1. Aufgabe - Überlegung



- Annahme:

  Binärstellen schalten nicht völlig gleichzeitig um

- Mögliche fehlerhafte Binärdarstellungen während des Umschaltens:

- 011 $\Rightarrow$ 100
- 111,001,010,101,110,000

1. Aufgabe – Gray-Code

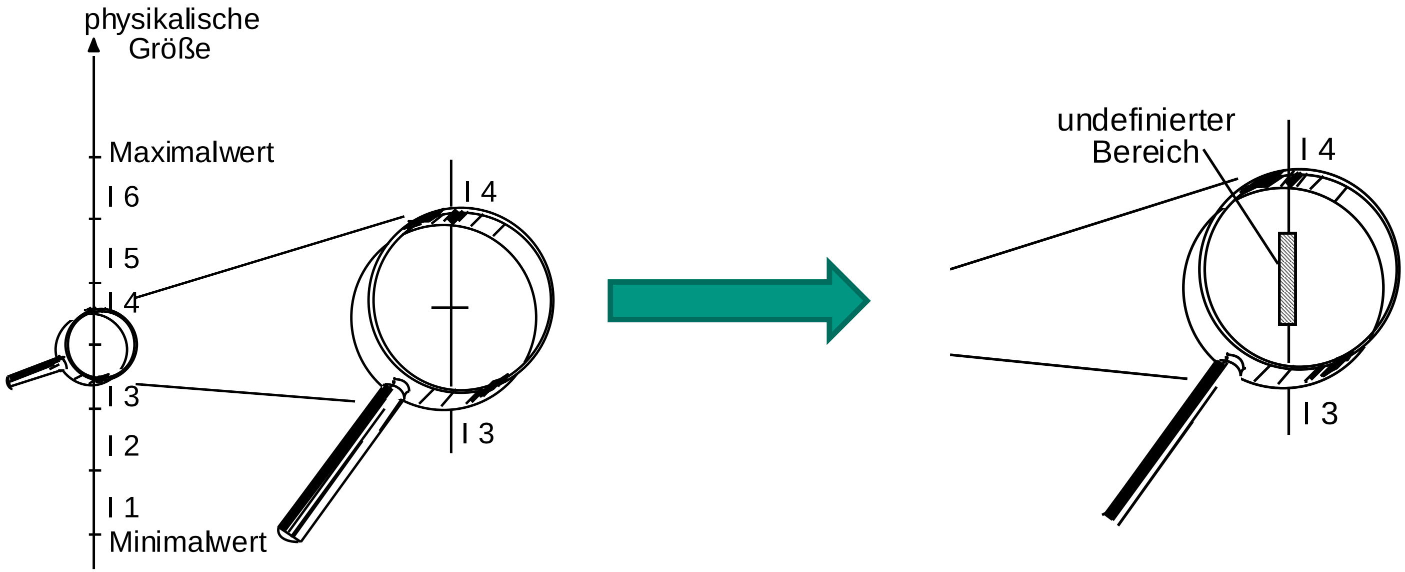
- Das Problem kann umschifft werden durch **einschrittige Codes**
- zwei benachbarte Codewörter besitzen stets eine **Hammingdistanz von eins**
- Beispiele für Gray-Codes (stetige, einschrittige Binärcodes):

linear, m=4		**Zyklisch, m=3**	
0:	0000	0:	000
1:	0001	1:	001
2:	0011	2:	011
3:	0010	3:	010
4:	0110	4:	110
5:	0111	5:	111
6:	0101	6:	101
7:	0100	7:	100
8:	1100	0:	000
9:	1101		

- Während des Umschaltens sind keine fehlerhaften Übergänge in andere Codewörter mehr möglich

1. Aufgabe - „weiche“ Diskrimination

- An den Übergängen zweier Codewörter können **undefinierte Bereiche** eingefügt werden
- **keine Digitalwertzuordnung** in diesen Bereichen; sondern „Festhalten“ des alten Werts, bis der Bereich durchschritten wurde
- **„weiche“ Diskrimination** (Unterscheidung), kein hartes Umschalten



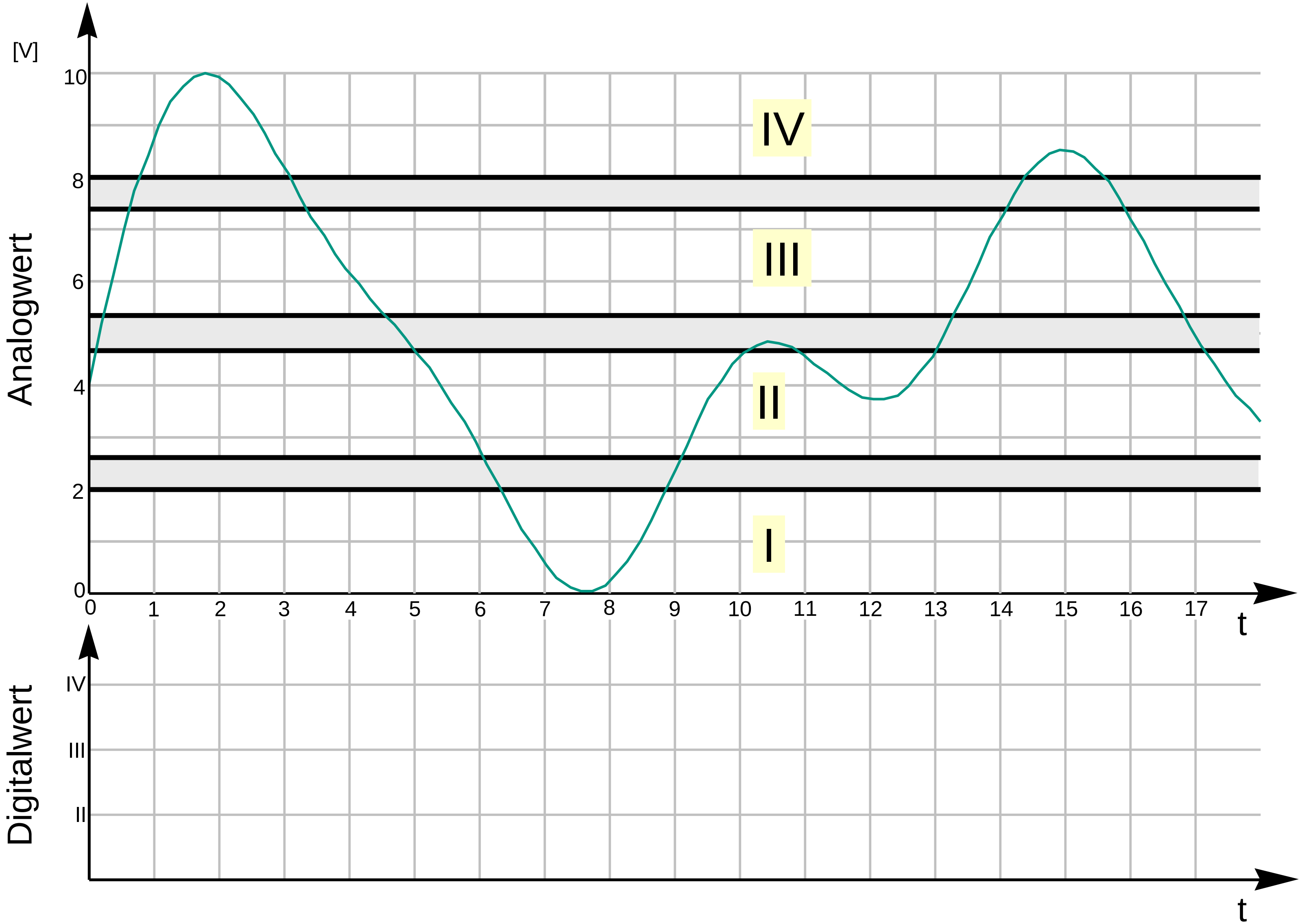
KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

1. Aufgabe

- Undefinierte Bereiche: Intervallgrenze (in °C) · 0,4% · 2

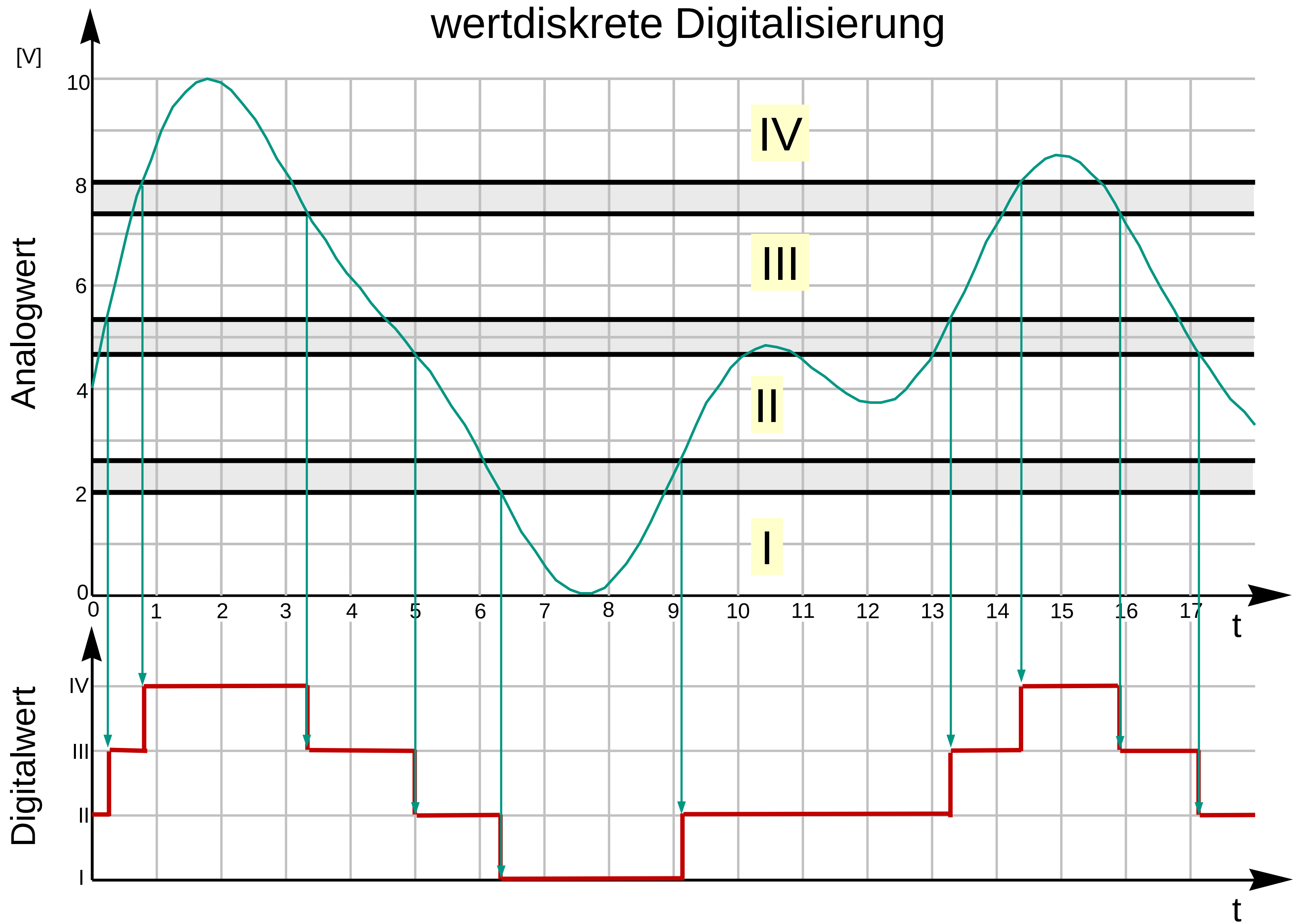
Anzeige	Intervalle	Code	Undefinierter Bereich
aus	< 18,5°	100	
			0,148°
19 °C	18,5° - 19,5°	000	
			0,156°
20 °C	19,5° - 20,5°	001	
			0,164°
21 °C	20,5° - 21,5°	011	
			0,172°
22 °C	21,5° - 22,5°	010	
			0,180°
23 °C	22,5° - 23,5°	110	
			0,188°
24 °C	23,5° - 24,5°	111	
			0,196°
25 °C	24,5° - 25,5°	101	
			0,204°
aus	> 25,5°	100	

2.Aufgabe



KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

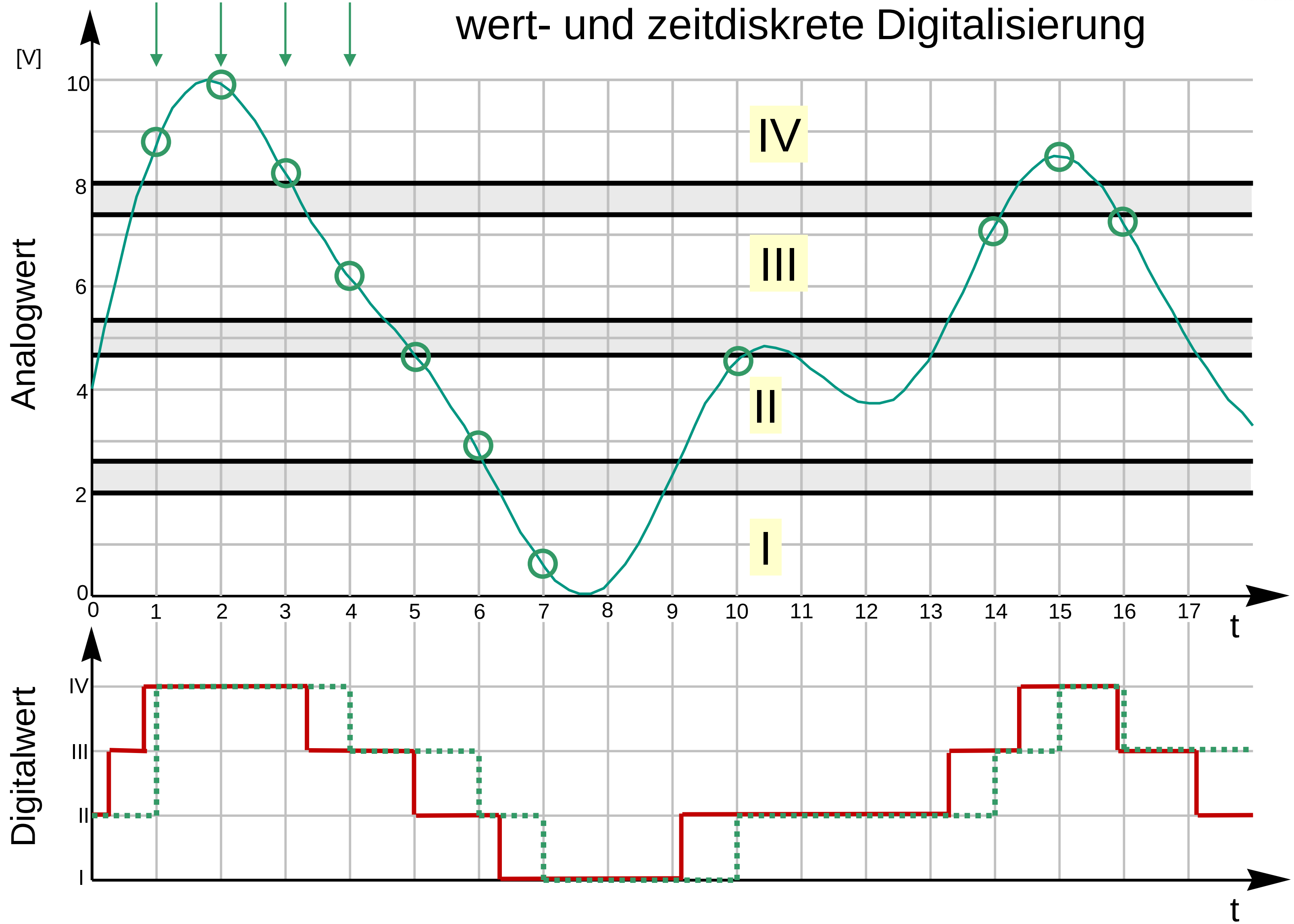
2.Aufgabe



wertdiskrete Digitalisierung
[V]
Analogwert
10
8
6
4
2
0
IV
III
II
I
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
t
Digitalwert
IV
III
II
I
t

2. Aufgabe

wert- und zeitdiskrete Digitalisierung



Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

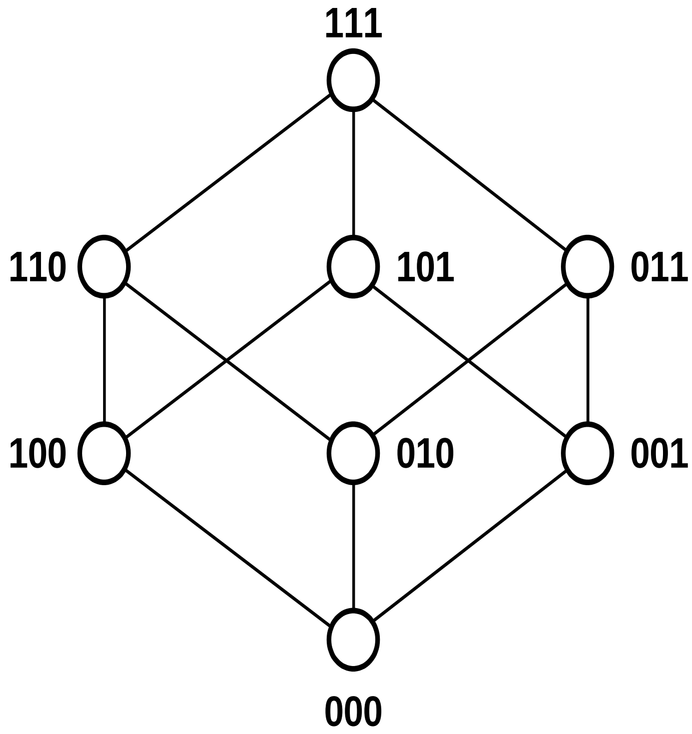
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Fehlererkennung und -korrektur

3. Aufgabe - Überlegung

- Das nachfolgende Bild zeigt ein Hasse-Diagramm, das die Nachbarschaftsbeziehungen für einen Code mit drei Binärstellen darstellt.



Codes für Fehlererkennung

- **Problem in der Praxis**
  Störeinflüsse können bei der Übertragung oder Speicherung von binär kodierten Informationen den Wert der zur Darstellung verwendeten physikalischen Größe verfälschen → Bits „kippen“

- **Lösung:** unbenutzte Codewörter (CW) „geschickt“ nutzen

0010 $\xrightarrow{\text{1 Fehler}}$ **0011** $\xleftarrow{\text{1 Fehler}}$ **0111**

gültiges CW_i | **unbenutztes CW_j, Fehlerfall** | **gültiges CW_k**

- einzelne Bitfehler (1 Bit “kippt“) sind erkennbar bei Codes mit minimaler Hammingdistanz HDmin = 2

  → jeder denkbare Bitfehler führt zu ungültigem
  (d.h. unbenutztem) Codewort

Codes für Fehlererkennung / Fehlerkorrektur

Karlsruhe Institute of Technology

- **2-Fach Fehlererkennung:**

0010 → (1 Fehler) → 0011 ⇄ (2 Fehler) 0111 ← (1 Fehler) ← 1111

gCW_i | $ugCW_j$, Fehlerfall | $ugCW_k$, Fehlerfall | gCW_l

- **1-Fach Fehlerkorrektur:**

0010 → (1 Fehler) → 0011, 0011 ⇢ (Korrektur) ⇢ 0010

0111 ← (1 Fehler) ← 1111, 0111 ⇢ (Korrektur) ⇢ 1111

gCW_i | $ugCW_j$, Fehlerfall | $ugCW_k$, Fehlerfall | gCW_l

- **Es gilt** Bei Codes mit HDmin = 3:
→ Zweifachfehler erkennbar oder Einfachfehler korrigierbar

(minimale) Hamming-Distanz

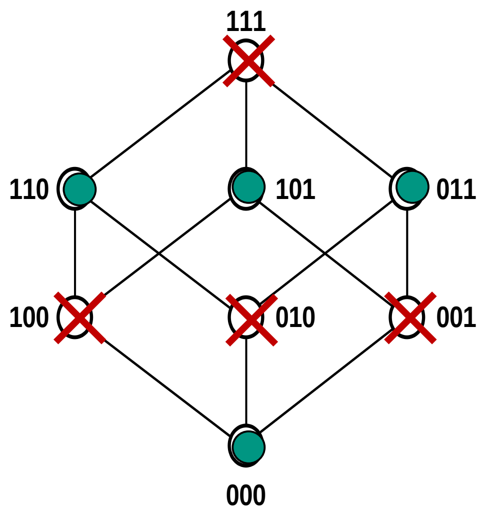
- **Definition:** Hammingdistanz **HD** (auch Hammingabstand genannt)
  - HD_{ij} = Anzahl der Stellen, an denen sich CW_i und CW_j unterscheiden.
- **Definition**: Minimale Hammingdistanz **HDmin** eines Codes
  - $HD_{min}(X) = \min\{HD_{ij} \mid CW_i, CW_j \in X \wedge CW_i \neq CW_j\}$
    = minimale Hammingdistanz, die beim Vergleich aller Codewörter CW_i und CW_j (mit $CW_i \neq CW_j$) auftritt
- Die minimale Hammingdistanz ist eine entscheidende Eigenschaft eines Codes, um Übertragungsfehler erkennen und korrigieren zu können:
- Bei gegebenem $h = HD_{min}(X)$ sind
  - **$h - 1$** Bitfehler **erkennbar** und
  - **$k < h / 2$** Bitfehler **korrigierbar**

3. Aufgabe

- 3.1 Welche Hamming–Distanz müssen die gültigen Codeworte aufweisen, damit Einzelfehler erkannt werden können?
- Wie viele Zeichen können so mit drei Binärstellen maximal codiert werden?

⇒ Für die Erkennung wird eine Hamming–Distanz (HD) von 2 benötigt.

N=3



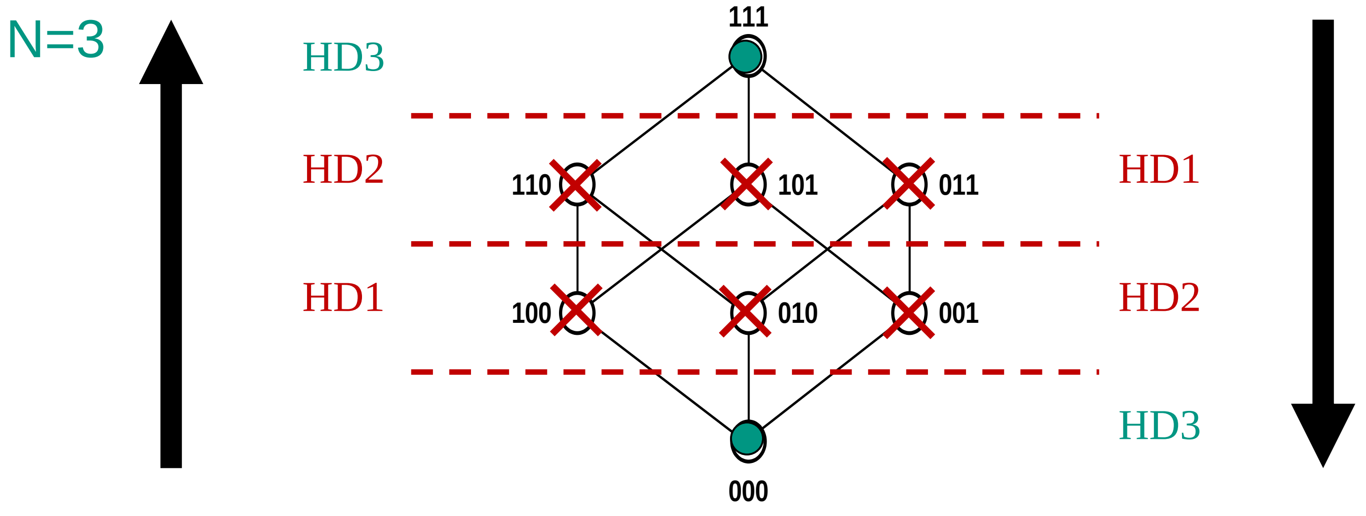
⇒ man erhält damit maximal 4 codierbare Zeichen.

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

3. Aufgabe

- 3.2 Welche Hamming–Distanz müssen die gültigen Codeworte aufweisen, damit die Korrektur von Einzelfehlern möglich ist?
- Wie viele Zeichen können jetzt maximal codiert werden?

$\Rightarrow$ Für die Korrektur wird eine Hamming–Distanz von 3 benötigt;

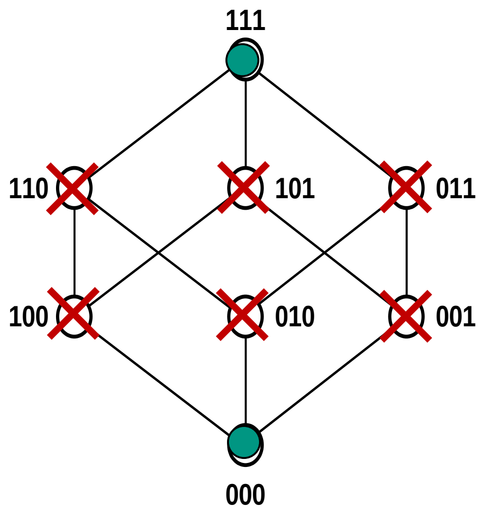


$\Rightarrow$ dann erhält man maximal 2 codierbare Zeichen.

3. Aufgabe

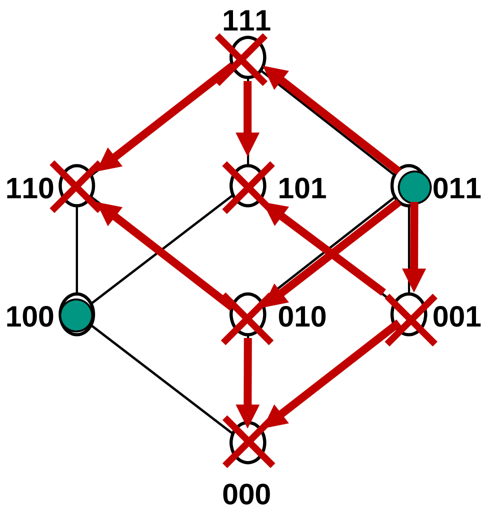
- 3.3 Die beiden Zeichen A und B sollen so codiert werden, dass Einzelfehler korrigierbar sind.
- Wie viele Lösungen sind für die Codierung der beiden Zeichen mit drei Binärstellen möglich? Geben Sie eine Lösung an.

Eine mögliche Lösung:



HD = 3

Eine andere mögliche Lösung:

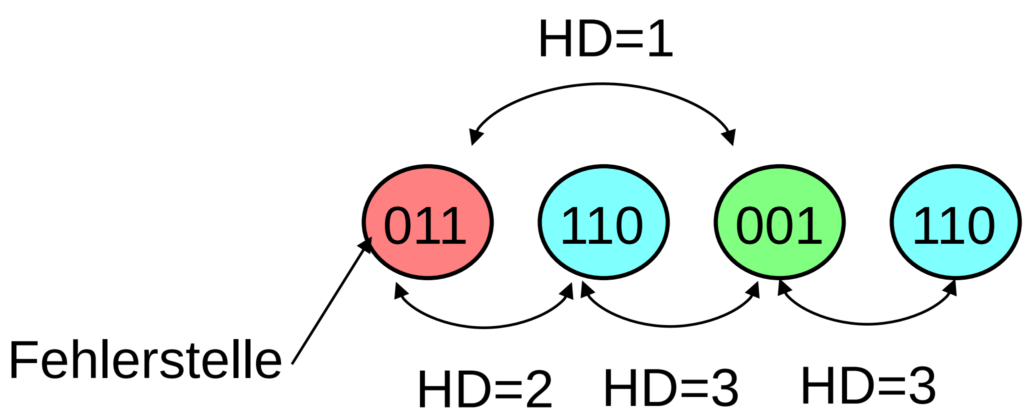


z. B. **A=**000, **B=**111

Es sind insgesamt 8 Lösungen möglich

3. Aufgabe

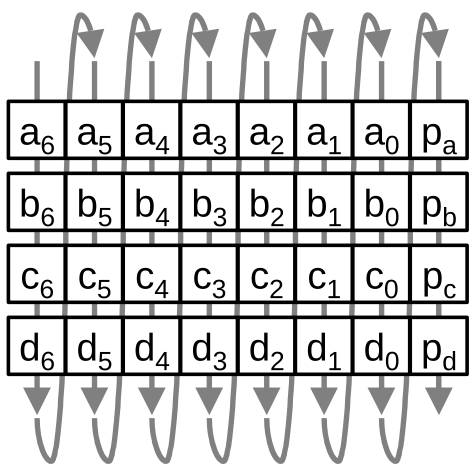
- 3.4 Bei der Datenübertragung mit einer Codierung nach 3.3 wurde genau eine Binärstelle falsch übertragen.
- Die folgenden Daten wurden empfangen: 011110 001110
Korrigieren Sie den Fehler.

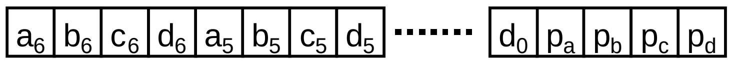


Korrektur: 011 $\Rightarrow$ 001

4. Aufgabe - Überlegung

- 4.1 Für die Übertragung von ASCII-Zeichen über eine störanfällige Übertragungsstrecke soll eine sogenannte Blocksicherung mit Paritätsbits verwendet werden. Dazu wird jedes ASCII-Zeichen um ein Paritätsbit ergänzt. Für die Übertragung von jeweils 4 Zeichen werden dann zuerst alle höchstwertigen Bits übertragen, dann die niederwertigeren.
  Wie viele Fehler sind bei dieser Art der Übertragung maximal erkennbar?





Fehlererkennung durch Parität

- Erklärung des **Paritätsbit** am Beispiel

Dezimal	Binär	gerade Parität	ungerade Parität
0	0000	0000 **0**	0000 **1**
1	0001	0001 **1**	0001 **0**
2	0010	0010 **1**	0010 **0**
3	0011	0011 **0**	0011 **1**
4	0100	0100 **1**	0100 **0**
5	0101	0101 **0**	0101 **1**
6	0110	0110 **0**	0110 **1**
7	0111	0111 **1**	0111 **0**
8	1000	1000 **1**	1000 **0**
9	1001	1001 **0**	1001 **1**

Fehler:	1001	1011 **0**	1011 **1**

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Das Prinzip der Paritätssicherung ist zweidimensional anwendbar
  → Blocksicherungsverfahren mit doppelter Quersummenergänzung

- Nachricht wird in Blöcke von n Codewörtern mit Paritätsbit eingeteilt
  - zusätzlich: am Ende jedes Blocks ein weiteres Codewort einfügen
    → enthält alle Paritätsbits der Spalten

- bei Auftreten von Einfachfehlern lassen sich Spalte und Zeile eindeutig ermitteln:
  → Einfachfehler sind damit korrigierbar
  → gleichzeitig sind noch **weitergehende Fehlererkennungsverfahren** möglich: **Bündelstörung** erkennbar

- **Bündelstörung:** zeitlich konzentrierte Fehler, d.h. über einen Zeitraum ist die Verbindung gestört, können erkannt bzw. behoben werden

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Blocksicherung mittels Paritätsbits

- Zusammenfassung **mehrerer** Codeworte zu einem Block
- Hinzufügen eines **Prüfwortes** (Spaltenparitäten) an jeden Block

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeile mit Fehler (ungerade Parität)

Spalte mit Fehler (ungerade Parität)

- Einfachfehlerkorrektur: Spalte und Zeile **eindeutig** ermittelbar
- Mehrfachfehler: ggf. nicht ermittelbar oder erkennbar

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Beispiel Falsches Paritätsbit

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	0	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeile mit Fehler
(ungerade Parität)

Spalte mit Fehler
(ungerade Parität)

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

- Beispiel Mehrfachfehler (erkennbar)

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	1	0	0	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeilen mit Fehler (ungerade Parität)

Spalten mit Fehler (ungerade Parität)

Fehlererkorrektur durch Blocksicherung

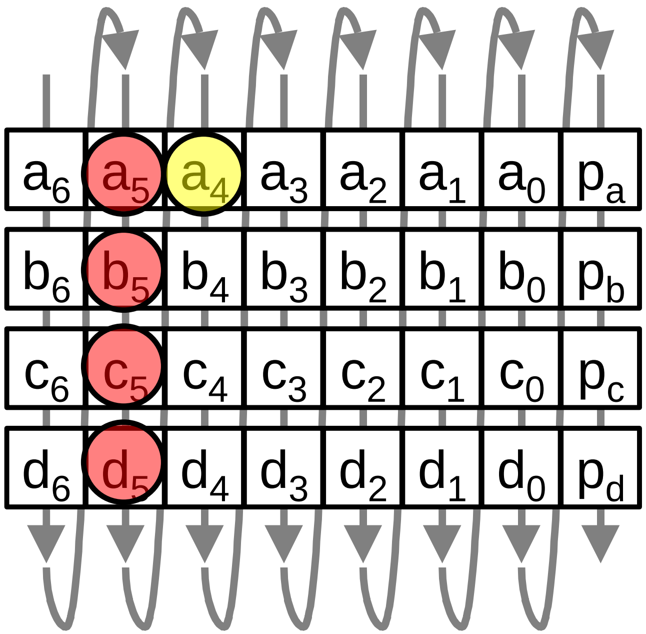
- Beispiel Mehrfachfehler (nicht erkennbar)

Ziffer	Codewörter mit gerader Parität				
5	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
3	0	0	1	1	0
9	1	0	0	1	0
8	1	1	0	1	1
Prüfwort	0	0	1	0	1

Zeilen mit 2 Fehlern
(gleichbleibende, gerade Parität)

Spalten mit 2 Fehlern
(gleichbleibende, gerade Parität)

4. Aufgabe



Mit einem Paritätsbit =>
1 Fehler pro Wort/Zeile erkennbar

Sequentielle Übertragung =>
1 Fehler pro Wort(8 Bit)

Umordnung =>
4 Fehler am Stück pro Block
(32 Bit) erkennbar

Bei 5 Fehlern ist keine Erkennung möglich !!!

4. Aufgabe

- 4.2 Mit welcher Datenübertragungsrate (in bit/s) dürfen die Daten übertragen werden, wenn Störungen von 1ms Dauer auftreten können und diese sicher erkannt werden müssen?

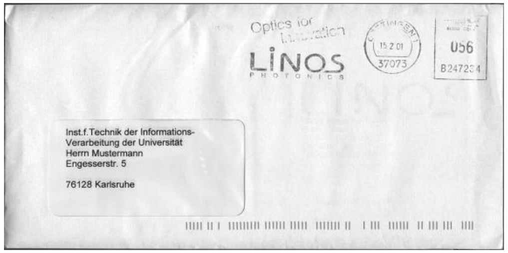
maximal 4 Fehler am Stück erkennbar

=> max. 4 Bits pro ms

=> Maximale Datenübertragungsrate 4000bit/s

5. Aufgabe

- Zur maschinenlesbaren Codierung von Briefen verwendet die Deutsche Post einen Strichcode aus fluoreszierender Farbe. Der Strichcode benutzt zur Codierung der Postleitzahl einen 3-aus-5 Code, bei dem eine 1 durch einen senkrechten Strich dargestellt wird. Bei einer 0 wird kein Strich aufgedruckt. Zudem befinden sich auf dem folgenden Beispiel noch zusätzliche posttechnische Codes.



Strukturierte Codes

- Allgemein Codes legen fest, wie Codewörter zu interpretieren sind

- Beispiel Strukturierter Code
  - Anzahl Wörter im (2 aus 5)-Code: $N = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$
  - m = 5 k = 2

- Folgende Codewörter sind möglich:

00011	00110	01010	10001	10100
00101	01001	01100	10010	11000

- Der (2 aus 5)-Code eignet sich mit seinen 10 Codewörtern besonders zur Darstellung von Dezimalziffern

5. Aufgabe

- 5.4 Zeichnen Sie den Strichcode für die Postleitzahl 76128 in das vorgegebene Raster ein.

7	6	1	2	8
11001	10110	01011	01101	11010

5. Aufgabe

- 5.6 Nun sind vier Postleitzahlen nach dem oben genannten Verfahren codiert worden. Welche der Postleitzahlen sind korrekt, welche sind fehlerhaft?

1	2	3	4	5	5	✓

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 = 20$

5	0	2	2	3	2	f

$5 + 0 + 2 + 2 + 3 + 2 = 14$

6	8	1	2	0	9	f

$6 + 8 + 1 + 2 + 0 + 9 = 26$

7	6	2	2	8	5	✓

$7 + 6 + 2 + 2 + 8 + 5 = 30$