Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

ITIV

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Übung - Digitaltechnik

4. Übung

Institut für Technik der Informationsverarbeitung
ITIV

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

1. Aufgabe: Mengen und Relationen

1. Aufgabe

- Auf der Menge M = { 2, 3, 4, 5, 6, 7 } sei eine Verträglichkeitsrelation folgendermaßen definiert: a α b wenn a und b ein kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) besitzen, das kleiner als 15 ist. (a,b $\in$ M)

- 1.1 Weisen Sie für α die Eigenschaften einer Verträglichkeitsrelation nach!

Die Verträglichkeitsrelation „~“

- Folgende Eigenschaften der Relation müssen nachgewiesen werden:
  - Reflexivität: $x \sim x$
    - „jedes Element ist mit sich selbst verträglich“
  - Symmetrie: aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$
    - „die Verträglichkeit zweier Elemente ist immer paarweise erfüllt“
  - **Nicht** Transitivität: aus $[(x \sim y) \wedge (y \sim z)]$ folgt **nicht** $[x \sim z]$
    - „es gibt keine „Verträglichkeits-Kette“ mehrerer, sondern immer nur „Verträglichkeits-Tupel“ zweier Elemente“
- Relationen lassen sich anschaulich als Graphen darstellen

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

- Eigenschaften
  - reflexiv ?
- ja, wegen der Hauptdiagonale
  - symmetrisch?
- ja, da kommutativ
  - transitiv?
- nein, weil z.B. aus 3 α 2 und 2 α 7 nicht folgt 3 α 7

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

$\rightarrow$ Verträglichkeitsrelation

1. Aufgabe – 1.2

- 1.2 Ist α für beliebige natürliche Zahlen eine Verträglichkeitsrelation, oder nur für die Menge M?

Für beliebige natürliche Zahlen ist die Relation α nicht mehr reflexiv, da Zahlen, die größer als 15 sind, mit sich selbst ein kgV besitzen, das ebenfalls größer als 15 ist.

z.B.: $17 \rightarrow 17 \not\alpha\ 17$

1. Aufgabe – 1.3

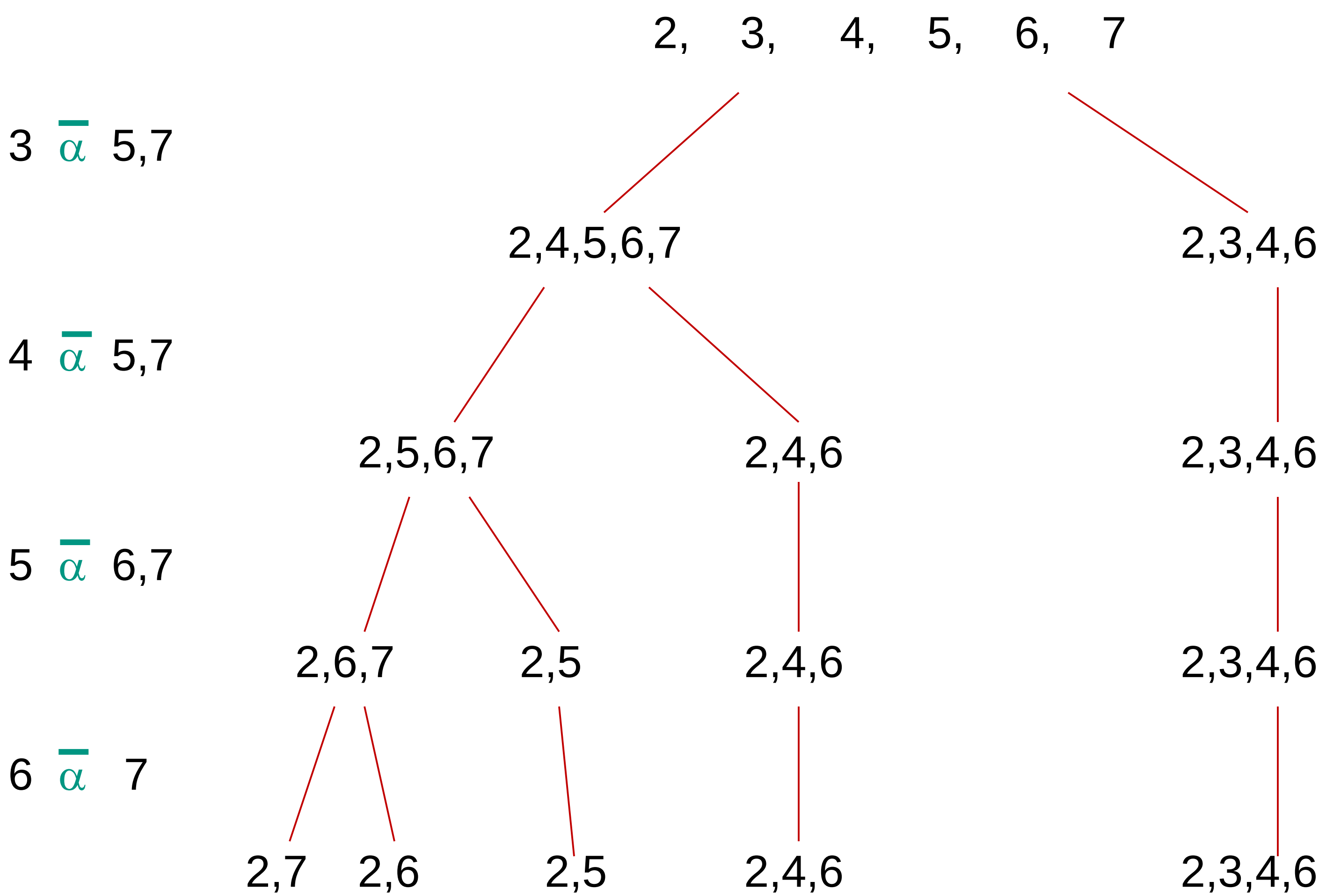
- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

$3 \ \overline{\alpha} \ 5,7$	$4 \ \overline{\alpha} \ 5,7$	$5 \ \overline{\alpha} \ 6,7$	$6 \ \overline{\alpha} \ 7$

- Überdeckung:
- Menge aus Untermengen
  - die insgesamt alle Elemente der Grundmenge enthalten
  - In sich nur verträgliche Elemente enthalten
  - Aus möglichst wenigen Teilmengen besteht

1. Aufgabe – 1.3


2, 3, 4, 5, 6, 7
3 $\bar{\alpha}$ 5,7
2,4,5,6,7
2,3,4,6
4 $\bar{\alpha}$ 5,7
2,5,6,7
2,4,6
2,3,4,6
5 $\bar{\alpha}$ 6,7
2,6,7
2,5
2,4,6
2,3,4,6
6 $\bar{\alpha}$ 7
2,7
2,6
2,5
2,4,6
2,3,4,6

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

- Überdeckung: τ = { { 2, 3, 4, 6 } , { 2, 5 } , {2, 7 } }

Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

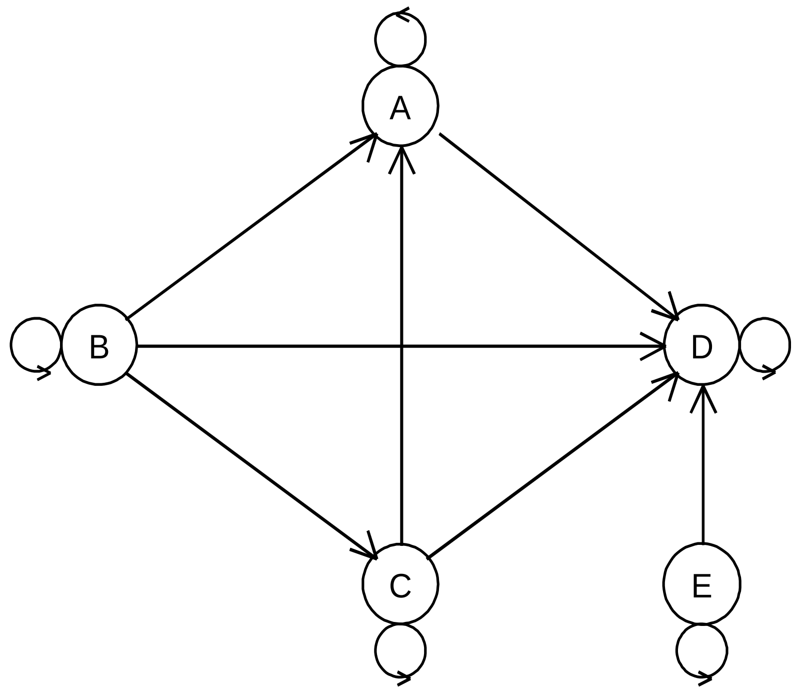
Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

2. Aufgabe: Graphen und Relationen

2. Aufgabe

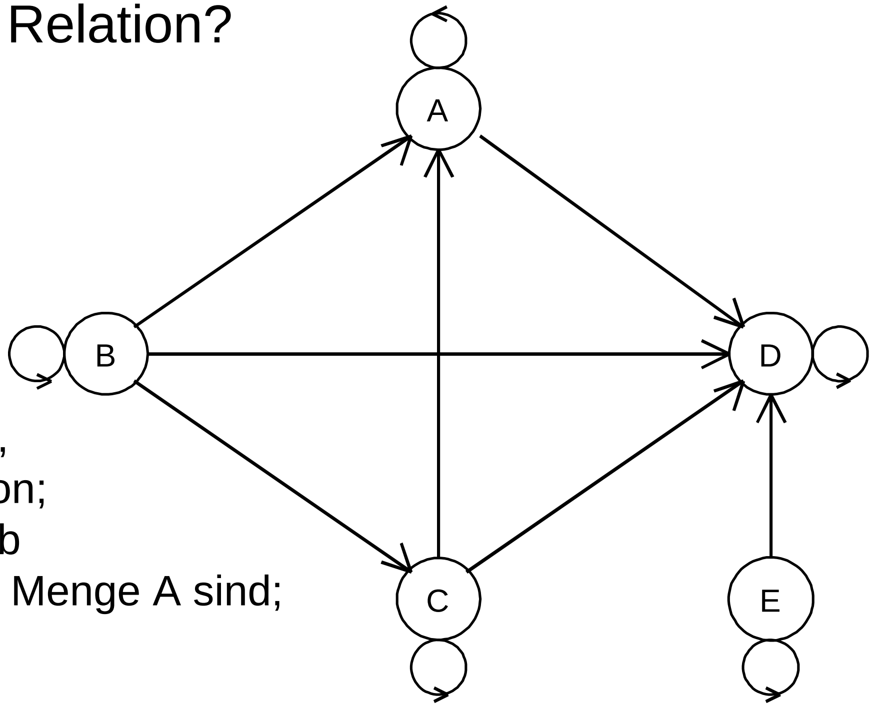
- Der Graph in folgendem Bild repräsentiere eine Relation

2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?



2. Aufgabe

- 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?
  - reflexiv?
    - ja, Schleifen an allen Knoten
  - symmetrisch?
    - nein, keine antiparallelen Kanten
  - antisymmetrisch?
    - ja, wenn (a,b) zur Relation gehört,
      dann gehört (b,a) nicht zur Relation;
      unter der Bedingung, dass a und b
      verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
      $x \alpha y$ und $y \alpha x$ => $x = y$
  - transitiv?
    - ja, $x \alpha y$ und $y \alpha z$ => $x \alpha z$



- Um welche spezielle Relation handelt es sich?
  - Es handelt sich hier um eine Ordnungsrelation.
    (antisymmetrische Quasiordnung = Halbordnung)

Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

ITIV

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

3. Aufgabe: Relationen

3. Aufgabe

- In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage:

  was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz?

- Man sollte meinen, dass nichts besser ist als ewiges Glück.
  Andererseits ist ein Lebkuchenherz sicherlich besser als nichts.
  “Besser” ist bekanntlich eine transitive Relation.

- Was folgt daraus?
  - transitiv: aus x α y und y α z folgt x α z:

- Lebkuchenherz besser als nichts
  UND
- nichts besser als ewiges Glück

=> Lebkuchenherz besser als ewiges Glück

Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

4. Aufgabe: Graphen

Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

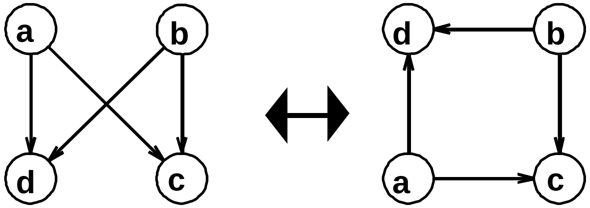
- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Entarteter Graph

- Kantenmenge ist leer.

Isomorpher Graph

- “Graphen lassen sich ineinander überführen”



Vollständiger Graph

- Jeder Knoten ist über eine Kante mit jedem anderen Knoten verbunden.

Einfacher Graph

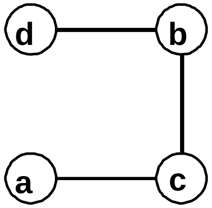
- Zwischen zwei Knoten gibt es höchstens eine Kante.

Gerichteter Graph

- Enthält mindestens eine gerichtete Kante.

Zusammenhängender Graph

- Es existiert vom jedem Knoten eine Kantenprogression (Kantenfolge) zu jedem anderen Knoten.



Eigenschaften von Graphen

streng zusammenhängender Graph

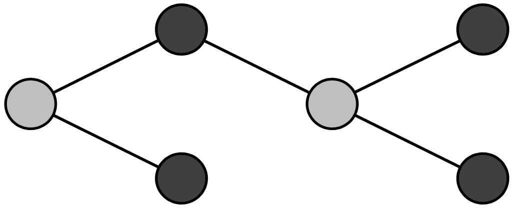
- Bei gerichteten Graphen: Jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar (Kantenrichtung beachten).

zyklischer Graph

- gerichteter Graph mit mindestens einem Zyklus (auch Schleife).

bipartiter Graph

- zwei Knotenmengen, wobei keine Kante Knoten aus derselben Menge verbindet .



planarer Graph

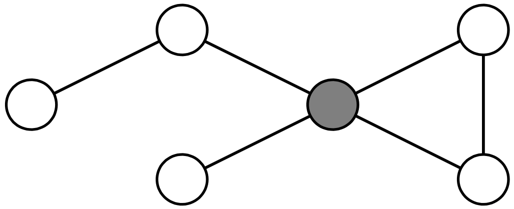
- es existiert ein zugehöriger isomorpher Graph, der in der Ebene überschneidungsfrei ist.

gewichteter Graph

- enthält gewichtete Knoten oder Kanten (z.B.: Entfernungen, Kosten, ...)

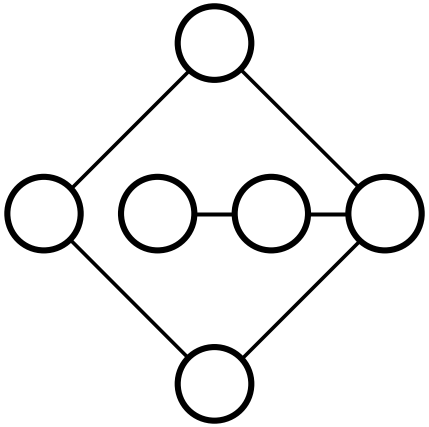
Kanten-/Knoteneigenschaft

- Kanteneigenschaften
  - Schleife
    - verbindet einen Knoten mit sich selbst.
- Knoteneigenschaften
  - Grad $d(g)$
    - Anzahl der inzidenten Kanten eines Knotens.
  - Ausgangsgrad $d^+(g)$
    - Anzahl der abgehenden Kanten.
  - Eingangsgrad $d^-(g)$
    - Anzahl der ankommenden Kanten.
  - benachbarte Knoten $V'(g)$
    - sind über eine Kante miteinander verbunden.
    - bei gerichteten Graphen Unterscheidung in: Vorgänger: $V'_1(g)$; Nachfolger: $V'_2(g)$
  - Artikulation
    - Knoten, nach dessen Entnahme der Graph in isolierte Teilgraphen zerfällt:

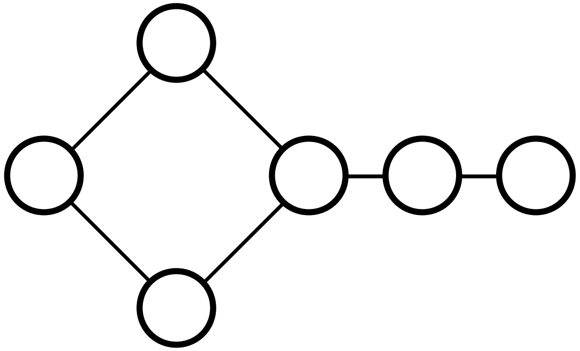


4. Aufgabe

- 4.1 Zeichen Sie den zu Graph 1 bzw. zu Graph 2 zugehörigen dualen Graphen
  (Kennzeichnen Sie dabei die überführten Knoten eindeutig):

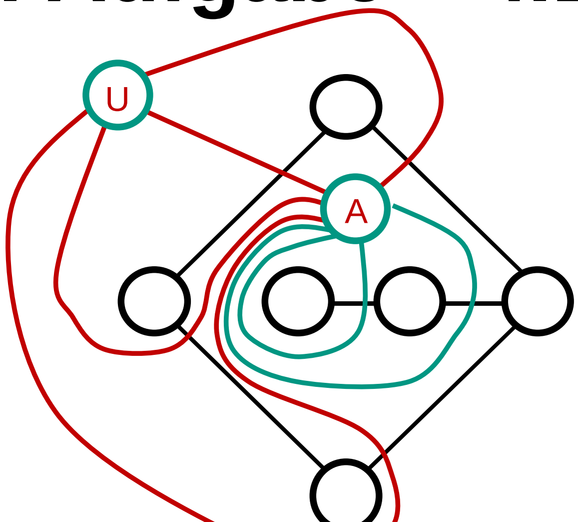


Graph 1

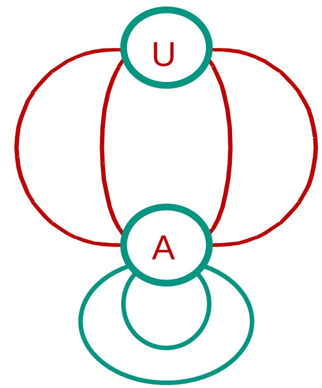


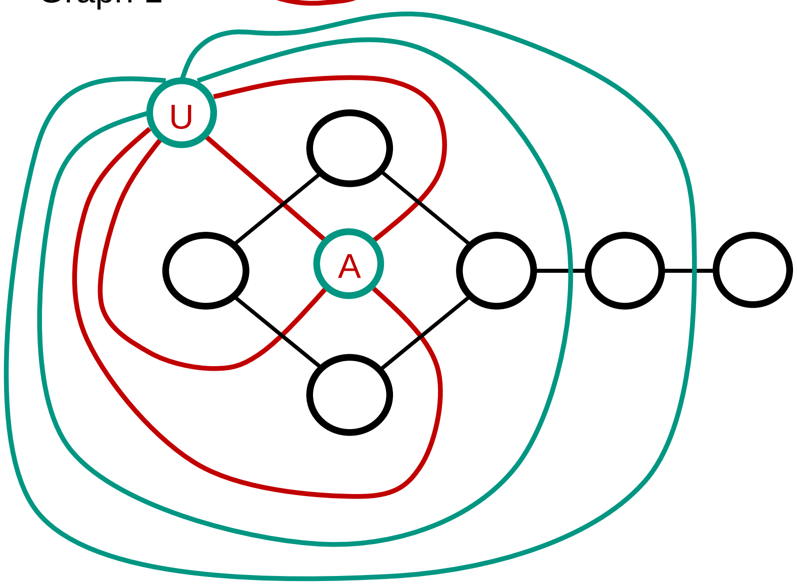
Graph 2

4. Aufgabe – 4.1

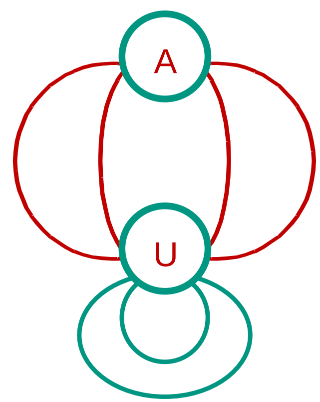


Graph 1





Graph 2



=> Duale Graphen sind isomorph

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

5. Aufgabe: boolische Algebra

5. Aufgabe

- Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Huntingtonschen Axiome, dass folgende Regeln für jede boolesche Algebra gelten.
  - Hinweis: Folgendes Vorgehen bietet sich häufig an: Erweiterung mit einem neutralen Element. Ersetzen des neutralen Elements nach H5. Anwendung des Distributivgesetzes.
  - Ein **Axiomensystem** (auch: Axiomatisches System) ist ein System von ***grundlegenden Aussagen*** (Axiomen) die ohne Beweis angenommen und aus denen alle Sätze (Theoreme) des Systems logisch abgeleitet werden

- Aufgabe 5.1 $a \top a = a$ $\quad$ $a \perp a = a$
- Aufgabe 5.2 $a \top \mathrm{O} = \mathrm{O}$ $\quad$ $a \perp \mathrm{I} = \mathrm{I}$
- Aufgabe 5.3 $a \top (a \perp b) = a$ $\quad$ $a \perp (a \top b) = a$

Huntingtonschen Axiome

Allgemeine Boolesche Algebra: $[K, \top, \bot, \overline{}, O, I]$

H3: Distributivgesetz

$(x \bot y) \top z =$	$(x \top y) \bot z =$	$\forall x, y, z \in K$
$(x \top z) \bot (y \top z)$	$(x \bot z) \top (y \bot z)$	

H4: Neutrales Element

$I \top x = x$	$O \bot x = x$	$x, O, I \in K$

H5: Komplement

$x \bot k = I$	$x \top k = O$	$x, k \in K$
		$\overline{x} = k$

$\Longleftrightarrow$ Dualität!!!

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

5. Aufgabe – 5.1

$$
\begin{aligned}
a \top a &= (a \top a) \perp \mathrm{O} && \text{(H4)} \\
&= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) && \text{(H5)} \\
&= a \top (a \perp \bar{a}) && \text{(H3)} \\
&= a \top \mathrm{I} && \text{(H5)} \\
&= \underline{\underline{\;a\;}} && \text{(H4)} \\
a \perp a &= (a \perp a) \top \mathrm{I} && \text{(H4)} \\
&= (a \perp a) \top (a \perp \bar{a}) && \text{(H5)} \\
&= a \perp (a \top \bar{a}) && \text{(H3)} \\
&= a \perp \mathrm{O} && \text{(H5)} \\
&= \underline{\underline{\;a\;}} && \text{(H4)}
\end{aligned}
$$

5. Aufgabe – 5.2

$$
\begin{aligned}
a \top O &= (a \top O) \perp O && \text{(H4)} \\
&= (a \top O) \perp (a \top \overline{a}) && \text{(H5)} \\
&= a \top (O \perp \overline{a}) && \text{(H3)} \\
&= a \top \overline{a} && \text{(H4)} \\
&= \underline{\underline{O}} && \text{(H5)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \perp I &= (a \perp I) \top I && \text{(H4)} \\
&= (a \perp I) \top (a \perp \overline{a}) && \text{(H5)} \\
&= a \perp (I \top \overline{a}) && \text{(H3)} \\
&= a \perp \overline{a} && \text{(H4)} \\
&= \underline{\underline{I}} && \text{(H5)}
\end{aligned}
$$

5. Aufgabe – 5.3

$$
\begin{aligned}
a \top (a \perp b) &= (a \perp \mathrm{O}) \top (a \perp b) && \text{(H4)} \\
&= a \perp (\mathrm{O} \top b) && \text{(H3)} \\
&= a \perp \mathrm{O} && \text{(5.2)} \\
&= \underline{\underline{a}} && \text{(H4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a \perp (a \top b) &= (a \top \mathrm{I}) \perp (a \top b) && \text{(H4)} \\
&= a \top (\mathrm{I} \perp \mathrm{b}) && \text{(H3)} \\
&= a \top \mathrm{I} && \text{(5.2)} \\
&= \underline{\underline{a}} && \text{(H4)}
\end{aligned}
$$

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

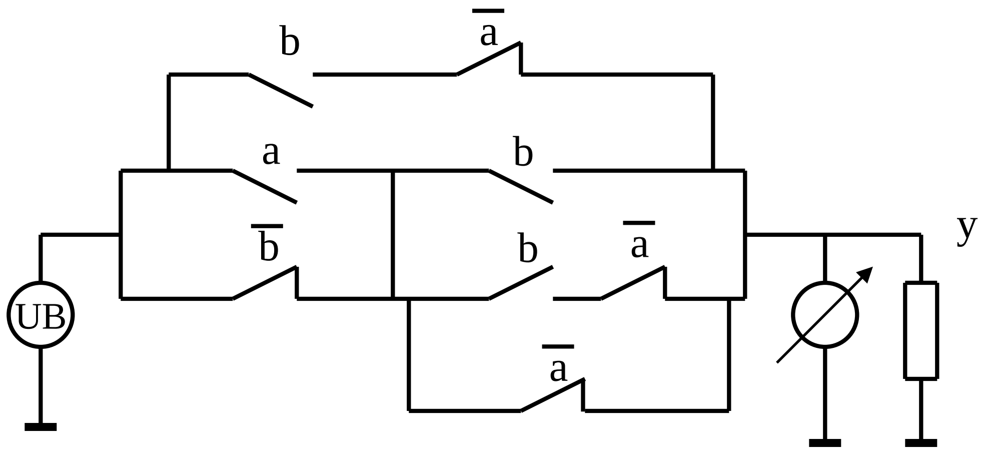
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

6. Aufgabe: Relaisschaltnetz

6. Aufgabe

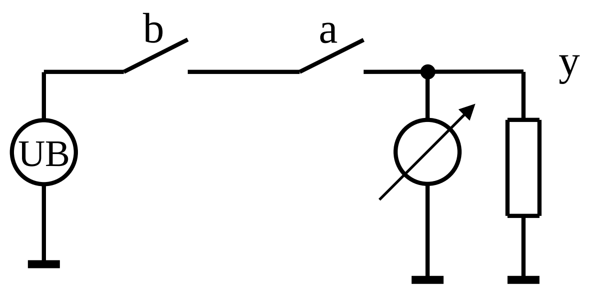
- Gegeben sei das im Bild dargestellte Relaisschaltnetz



- 6.1 Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.

Schaltnetze

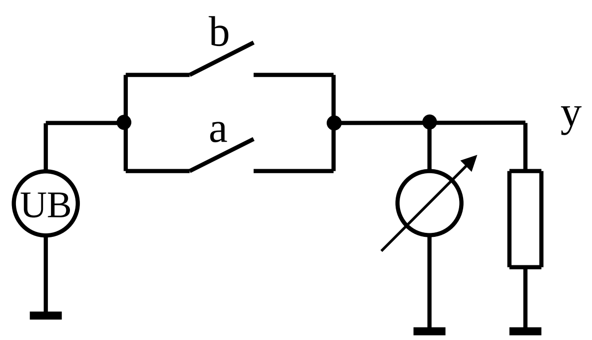
- Serienschaltung



a	b	y
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

y = a & b

- Parallelschaltung

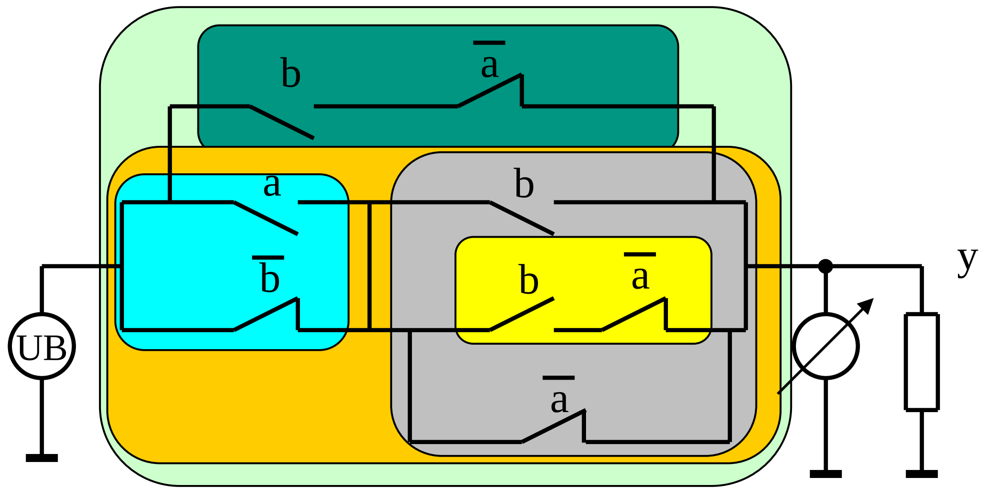


a	b	y
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

y = a v b

6. Aufgabe

- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y = \left[\left(\left(b \,\&\, \bar{a} \right) \vee b \vee \bar{a} \right) \,\&\, \left(a \vee \bar{b} \right) \right] \vee b \,\&\, \bar{a}$$

Beziehungen der Schaltalgebra

- Regeln für ein Element
  - R5a $a \vee 0 = a$ — R5b $a \& 1 = a$
  - R6a $a \vee 1 = 1$ — R6b $a \& 0 = 0$
  - R7a $a \vee a = a$ — R7b $a \& a = a$
  - R8a $a \vee \overline{a} = 1$ — R8b $a \& \overline{a} = 0$

- Regeln für zwei oder mehr Elemente
  - R10a $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$ — R10b $a \& (b \& c) = (a \& b) \& c = a \& b \& c$
    - (assoziative Gesetze)
  - R11a $a \vee (a \& b) = a$ — R11b $a \& (a \vee b) = a$
    - (Absorptionsgesetze)
  - R12a $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \& \overline{b}$ — R12b $\overline{(a \& b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$
    - DeMorgansche Regeln

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$y = b \,\&\, \overline{a} \vee [\, (a \vee \overline{b}) \,\&\, (b \vee \overline{a} \vee (b \,\&\, \overline{a})) \,]$$

$$= b \,\&\, \overline{a} \vee [\, (a \vee \overline{b}) \,\&\, (b \vee \overline{a}) \,]$$

$$= b \,\&\, \overline{a} \vee [\, ((a \vee \overline{b}) \,\&\, b) \vee ((a \vee \overline{b}) \,\&\, \overline{a}) \,]$$

$$= b \,\&\, \overline{a} \vee [\, (a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, \overline{b}) \vee (a \,\&\, \overline{a}) \vee (\overline{b} \,\&\, \overline{a}) \,]$$

$$= b \,\&\, \overline{a} \vee (a \,\&\, b) \vee (\overline{b} \,\&\, \overline{a})$$

$$= b \,\&\, (\overline{a} \vee a) \,\&\, (\overline{a} \vee b) \vee (\overline{b} \,\&\, \overline{a})$$

$$= b \,\&\, 1 \vee (\overline{b} \,\&\, \overline{a}) = b \vee (\overline{b} \,\&\, \overline{a})$$

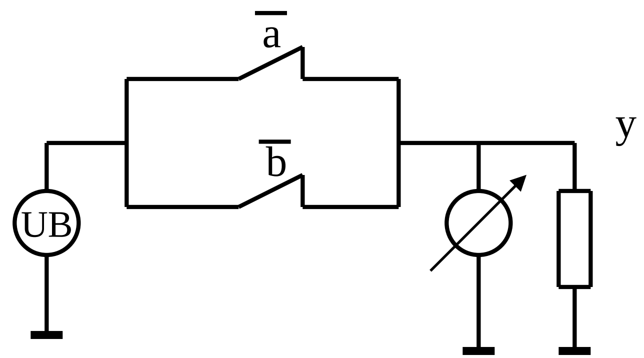
$$= b \vee \overline{a}$$

$\Rightarrow$ Implikation, a impliziert b, a $\rightarrow$ b

6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y = \underbrace{\overline{a \ \& \ b}}_{\text{R12b}} = \overline{a} \vee \overline{b}$$



Fröhliche Weihnachten und

einen guten Rutsch ins Neue Jahr !!!