

Felix Pistorius
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

Übung - Digitaltechnik

4. Übung

Felix Pistorius
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

1. Aufgabe: Mengen und Relationen

1. Aufgabe

- Auf der Menge $M = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$ sei eine Verträglichkeitsrelation folgendermaßen definiert: $a \alpha b$ wenn a und b ein kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches) besitzen, das kleiner als 15 ist. ($a, b \in M$)
- 1.1 Weisen Sie für α die Eigenschaften einer Verträglichkeitsrelation nach!

Die Verträglichkeitsrelation „ $\sim$ “

- Folgende Eigenschaften der Relation müssen nachgewiesen werden:
 - **Reflexivität:** $x \sim x$
 - „jedes Element ist mit sich selbst verträglich“
 - **Symmetrie:** aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$
 - „die Verträglichkeit zweier Elemente ist immer paarweise erfüllt“
 - **Nicht Transitivität:** aus $[(x \sim y) \wedge (y \sim z)]$ folgt **nicht** $[x \sim z]$
 - „es gibt keine „Verträglichkeits-Kette“ mehrerer, sondern immer nur „Verträglichkeits-Tupel“ zweier Elemente“
- Relationen lassen sich anschaulich als Graphen darstellen

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2						
3						
4						
5						
6						
7						

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2					
3		3				
4			4			
5				5		
6					6	
7						7

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

■ Eigenschaften

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

■ Eigenschaften

■ reflexiv ?

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

- Eigenschaften

- reflexiv ?

- ja, wegen der Hauptdiagonale

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

- Eigenschaften

- reflexiv ?

- ja, wegen der Hauptdiagonale

- symmetrisch?

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

- Eigenschaften

- reflexiv ?

- ja, wegen der Hauptdiagonale

- symmetrisch?

- ja, da kommutativ

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

- Eigenschaften

- reflexiv ?

- ja, wegen der Hauptdiagonale

- symmetrisch?

- ja, da kommutativ

- transitiv?

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

- Eigenschaften

- reflexiv ?

- ja, wegen der Hauptdiagonale

- symmetrisch?

- ja, da kommutativ

- transitiv?

- nein, weil z.B. aus $3 \alpha 2$ und $2 \alpha 7$ nicht folgt $3 \alpha 7$

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

1. Aufgabe – 1.1

- Eigenschaften

- reflexiv ?

- ja, wegen der Hauptdiagonale

- symmetrisch?

- ja, da kommutativ

- transitiv?

- nein, weil z.B. aus $3 \alpha 2$ und $2 \alpha 7$ nicht folgt $3 \alpha 7$

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

→ Verträglichkeitsrelation

1. Aufgabe – 1.2

- 1.2 Ist α für beliebige natürliche Zahlen eine Verträglichkeitsrelation, oder nur für die Menge M ?

1. Aufgabe – 1.2

- 1.2 Ist α für beliebige natürliche Zahlen eine Verträglichkeitsrelation, oder nur für die Menge M ?

Für beliebige natürliche Zahlen ist die Relation α **nicht mehr reflexiv**, da Zahlen, die größer als 15 sind, mit sich selbst ein kgV besitzen, das ebenfalls größer als 15 ist.

z.B.: $17 \rightarrow 17 \alpha 17$

1. Aufgabe – 1.2

- 1.2 Ist α für beliebige natürliche Zahlen eine Verträglichkeitsrelation, oder nur für die Menge M ?

Für beliebige natürliche Zahlen ist die Relation α **nicht mehr reflexiv**, da Zahlen, die größer als 15 sind, mit sich selbst ein kgV besitzen, das ebenfalls größer als 15 ist.

z.B.: $17 \rightarrow 17 \not\alpha 17$

1. Aufgabe – 1.3

- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

1. Aufgabe – 1.3

- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

- Überdeckung:

1. Aufgabe – 1.3

- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

- Überdeckung:
- Menge aus Untermengen
 - die insgesamt alle Elemente der Grundmenge enthalten
 - In sich nur verträgliche Elemente enthalten
 - Aus möglichst wenigen Teilmengen besteht

1. Aufgabe – 1.3

- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

- Überdeckung:
- Menge aus Untermengen
 - die insgesamt alle Elemente der Grundmenge enthalten
 - In sich nur verträgliche Elemente enthalten
 - Aus möglichst wenigen Teilmengen besteht

1. Aufgabe – 1.3

- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

- Überdeckung:
- Menge aus Untermengen
 - die insgesamt alle Elemente der Grundmenge enthalten
 - In sich nur verträgliche Elemente enthalten
 - Aus möglichst wenigen Teilmengen besteht

3 $\bar{\alpha}$ 5,7

1. Aufgabe – 1.3

- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

- Überdeckung:
- Menge aus Untermengen
 - die insgesamt alle Elemente der Grundmenge enthalten
 - In sich nur verträgliche Elemente enthalten
 - Aus möglichst wenigen Teilmengen besteht

$$\boxed{3 \overline{\alpha} 5,7} \quad \boxed{4 \overline{\alpha} 5,7}$$

1. Aufgabe – 1.3

- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

- Überdeckung:
- Menge aus Untermengen
 - die insgesamt alle Elemente der Grundmenge enthalten
 - In sich nur verträgliche Elemente enthalten
 - Aus möglichst wenigen Teilmengen besteht

3 $\bar{\alpha}$ 5,7	4 $\bar{\alpha}$ 5,7	5 $\bar{\alpha}$ 6,7
----------------------	----------------------	----------------------

1. Aufgabe – 1.3

- 1.3 Geben Sie eine Überdeckung von M an

kgV	2	3	4	5	6	7
2	2	6	4	10	6	14
3	6	3	12	15	6	21
4	4	12	4	20	12	28
5	10	15	20	5	30	35
6	6	6	12	30	6	42
7	14	21	28	32	42	7

- Überdeckung:
- Menge aus Untermengen
 - die insgesamt alle Elemente der Grundmenge enthalten
 - In sich nur verträgliche Elemente enthalten
 - Aus möglichst wenigen Teilmengen besteht

3 $\bar{\alpha}$ 5,7	4 $\bar{\alpha}$ 5,7	5 $\bar{\alpha}$ 6,7	6 $\bar{\alpha}$ 7
----------------------	----------------------	----------------------	--------------------

1. Aufgabe – 1.3

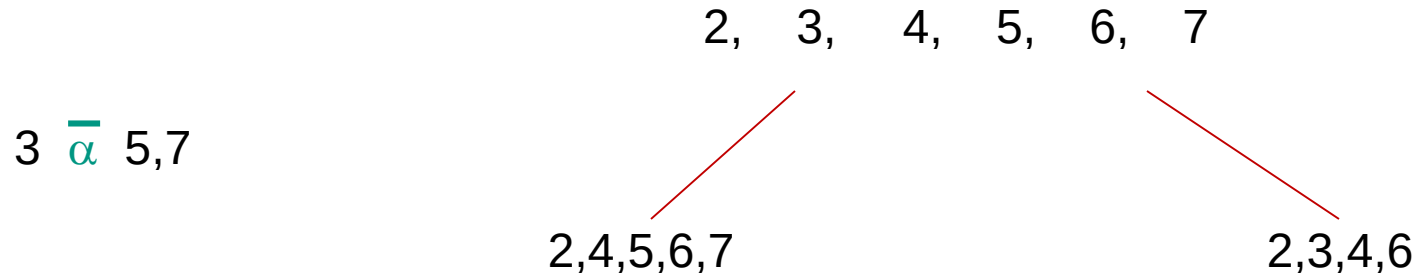
2, 3, 4, 5, 6, 7

1. Aufgabe – 1.3

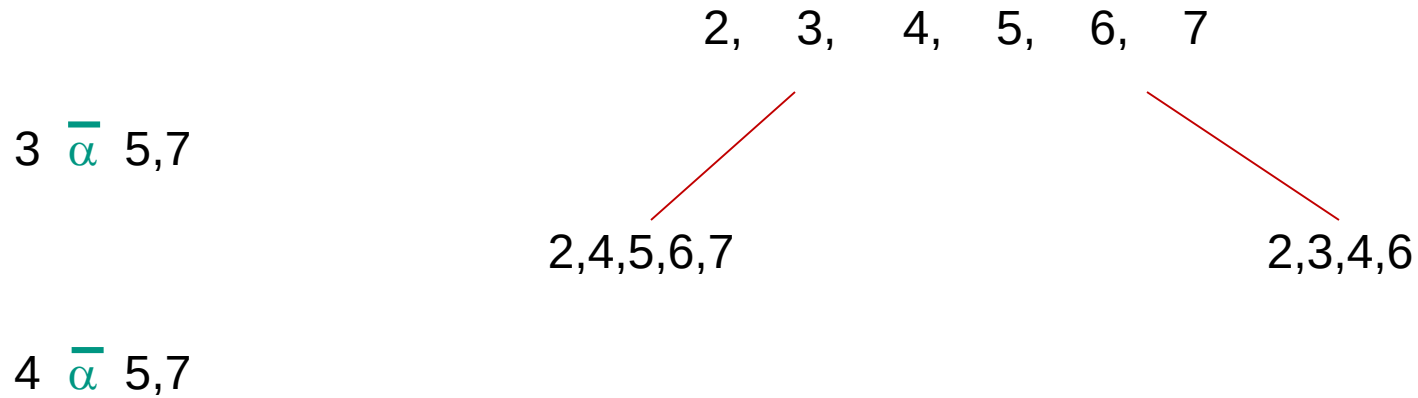
2, 3, 4, 5, 6, 7

3 $\bar{\alpha}$ 5,7

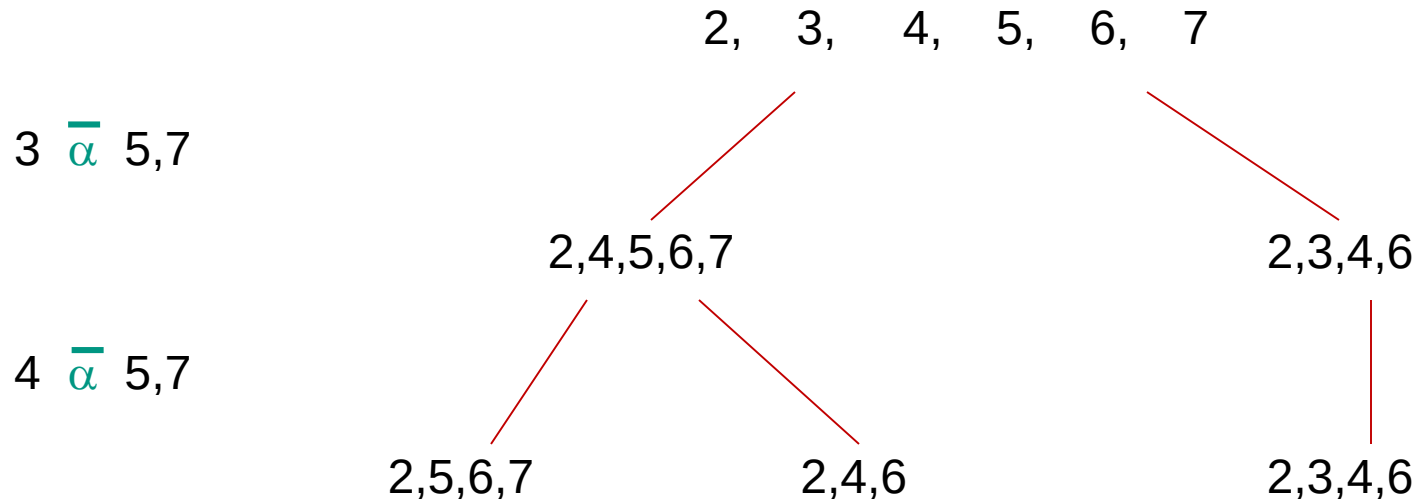
1. Aufgabe – 1.3



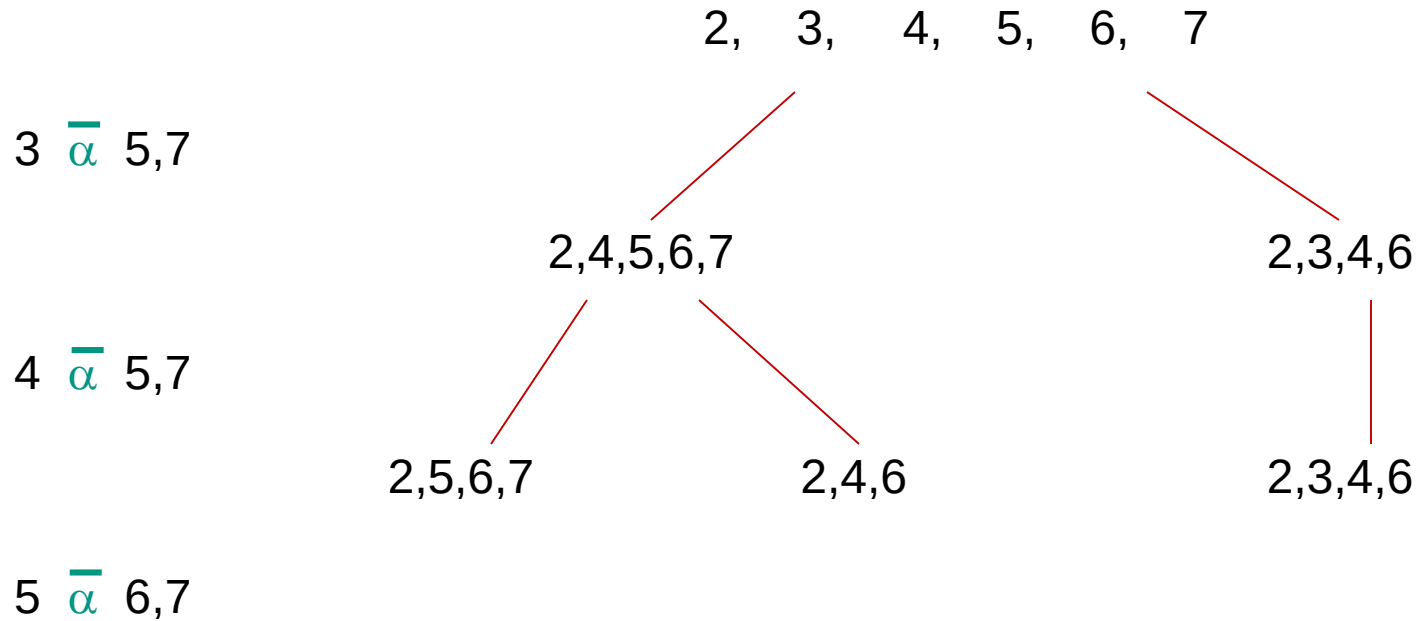
1. Aufgabe – 1.3



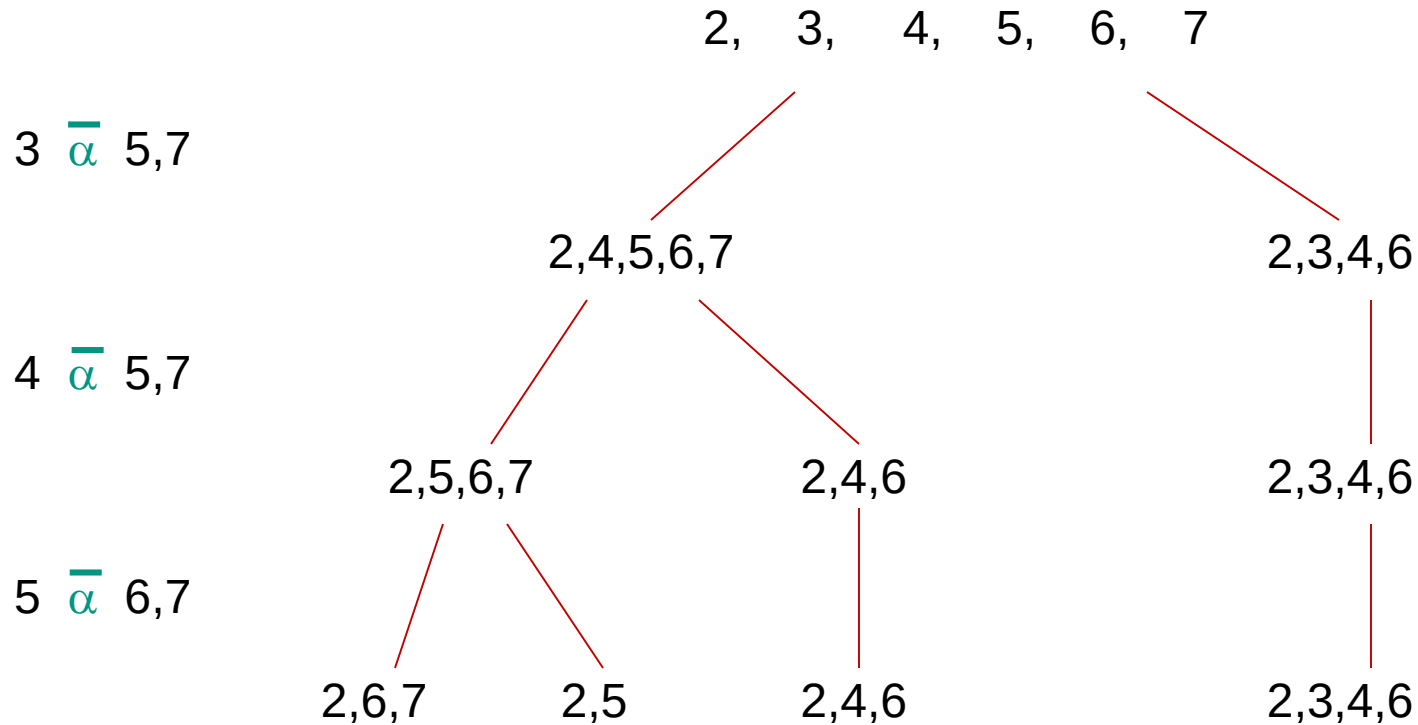
1. Aufgabe – 1.3



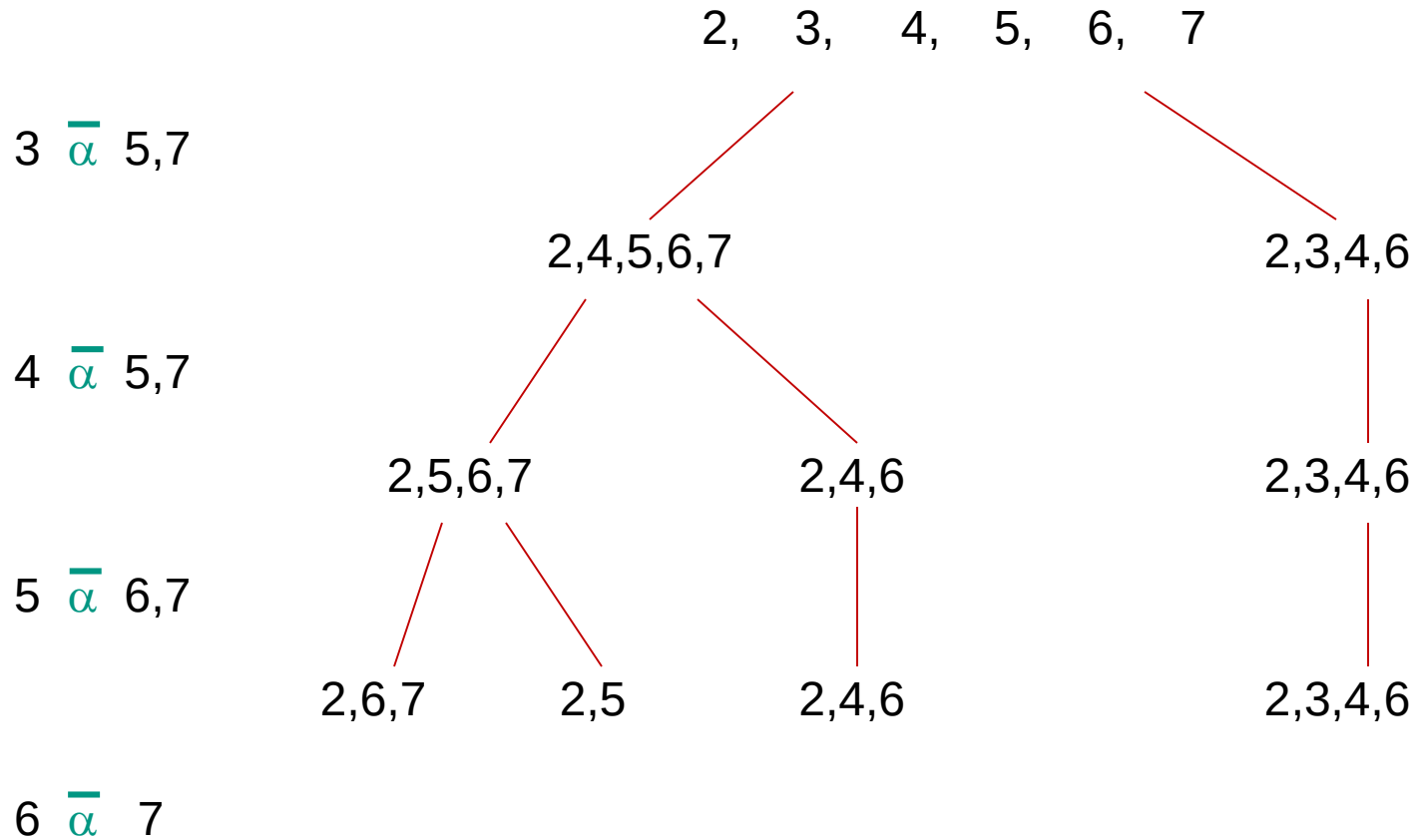
1. Aufgabe – 1.3



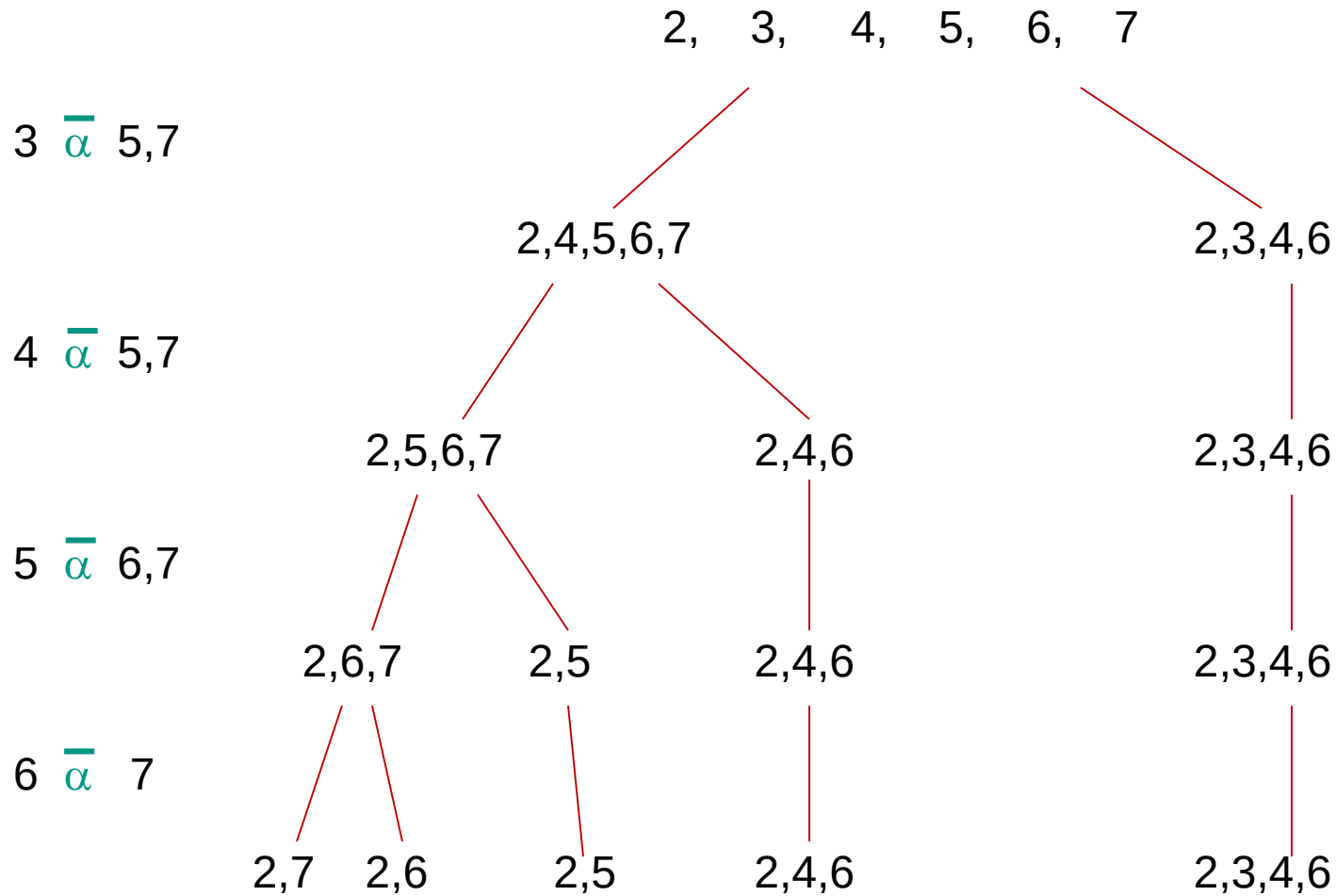
1. Aufgabe – 1.3



1. Aufgabe – 1.3



1. Aufgabe – 1.3



1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
--	---	---	---	---	---	---

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

1. Aufgabe – Überdeckungstabelle

	2	3	4	5	6	7
2,7	x					x
2,6	x				x	
2,5	x			x		
2,4,6	x		x		x	
2,3,4,6	x	x	x		x	

✗ Überdeckung: $\tau = \{ \{2, 3, 4, 6\}, \{2, 5\}, \{2, 7\} \}$

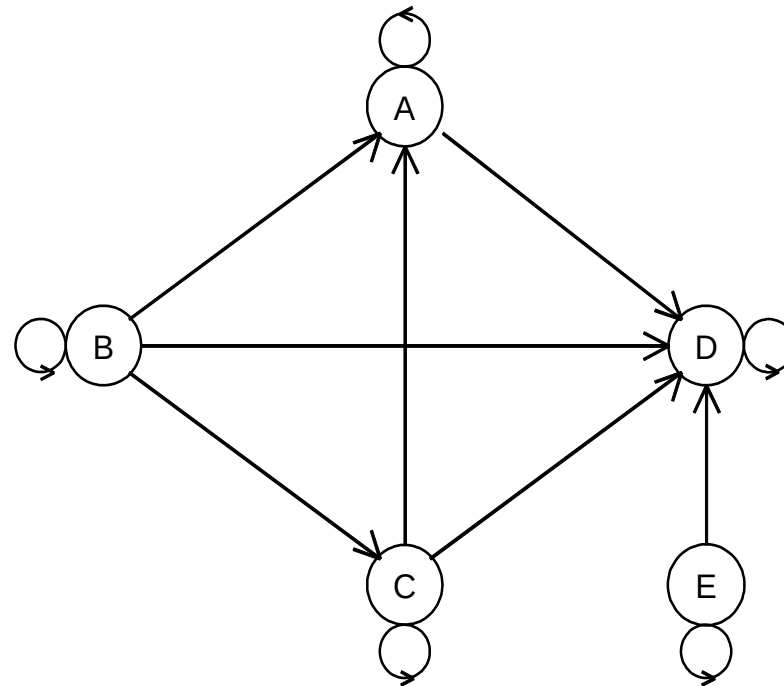
Felix Pistorius
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

2. Aufgabe: Graphen und Relationen

2. Aufgabe

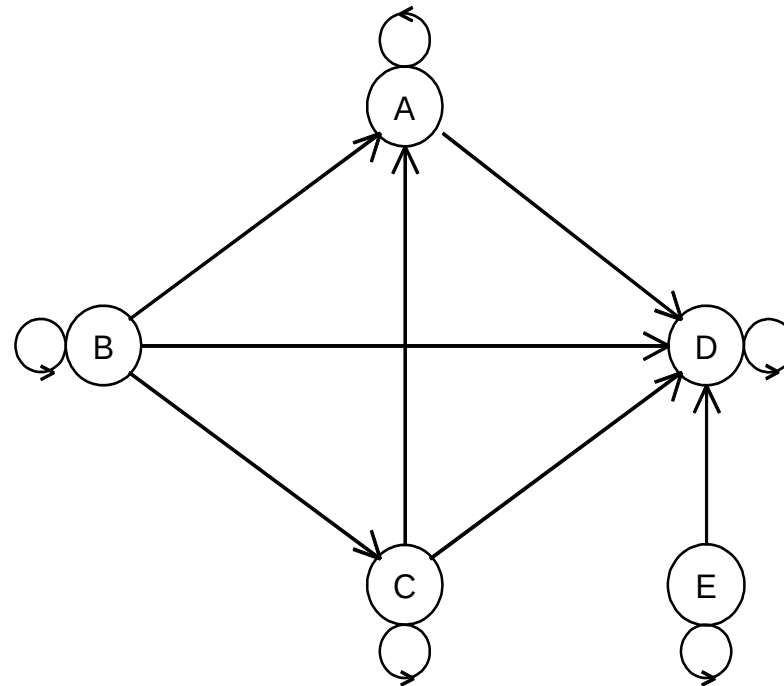
- Der Graph in folgendem Bild repräsentiere eine Relation



2. Aufgabe

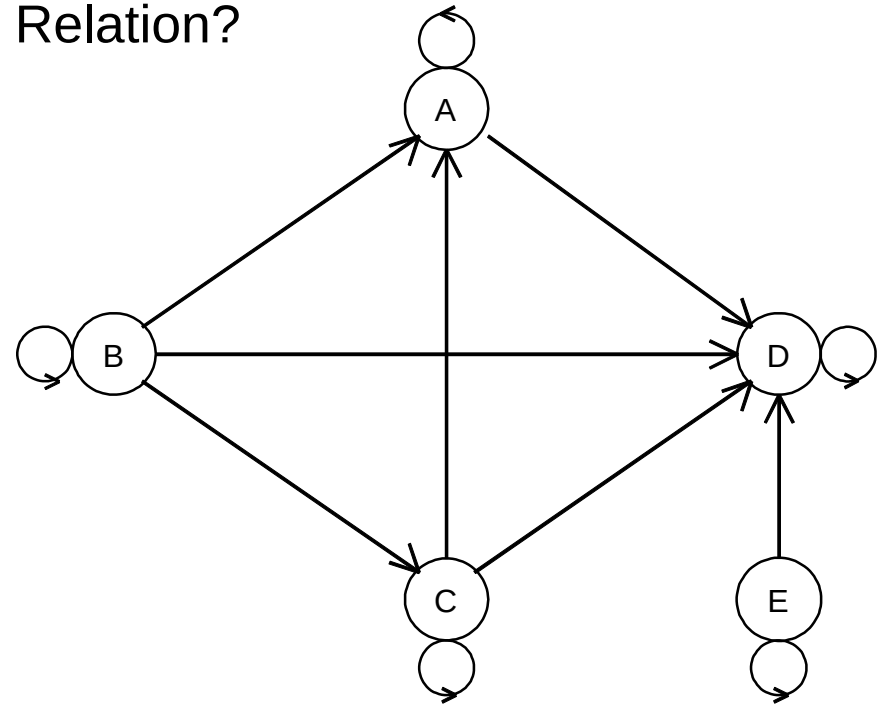
- Der Graph in folgendem Bild repräsentiere eine Relation

2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?



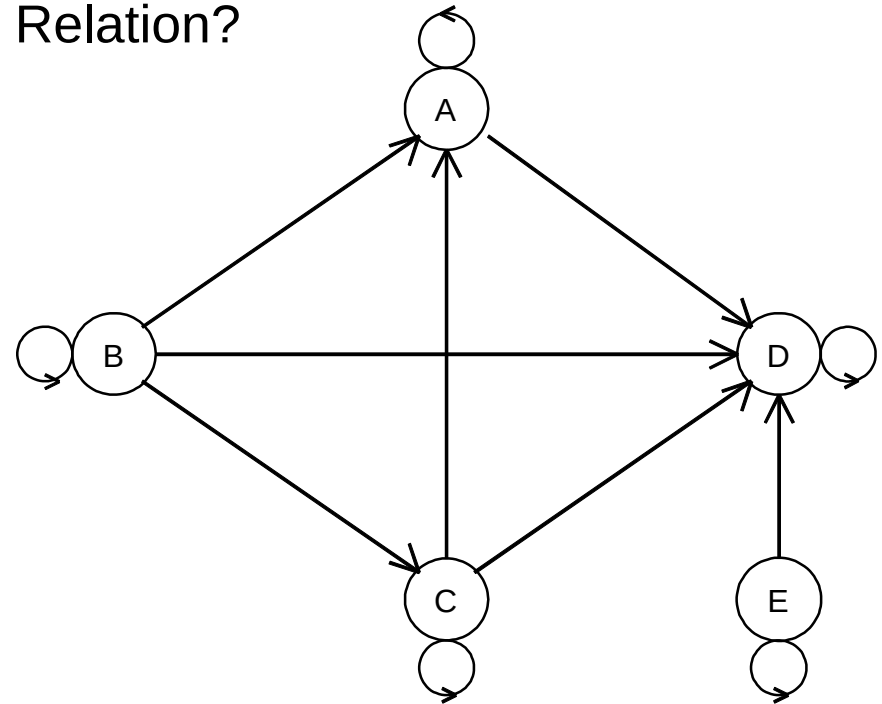
2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?



2. Aufgabe

- 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?
 - reflexiv?

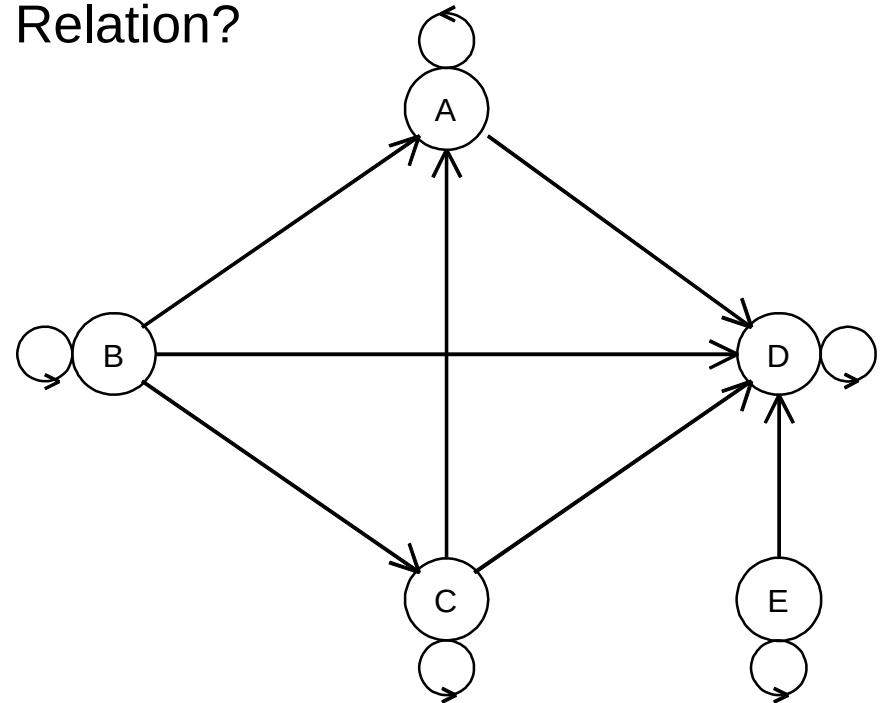


2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

■ reflexiv?

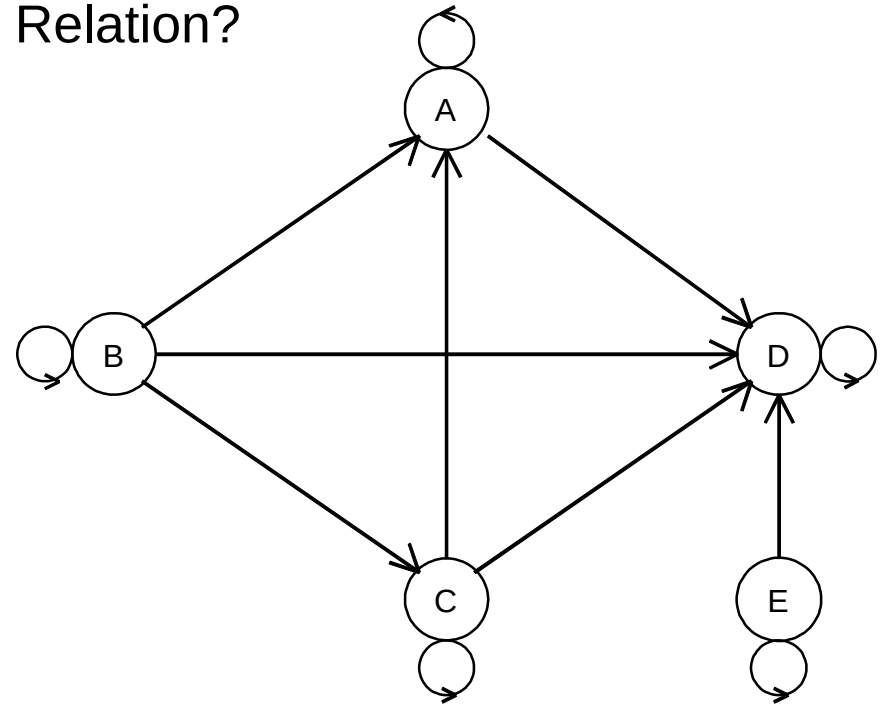
- ja, Schleifen an allen Knoten



2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

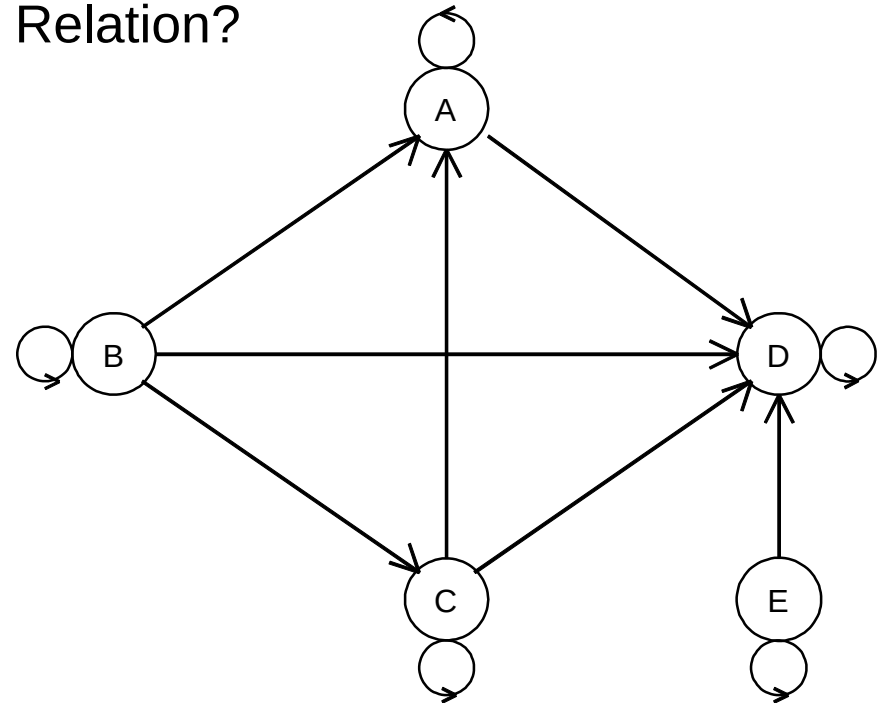
- reflexiv?
 - ja, Schleifen an allen Knoten
- symmetrisch?



2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

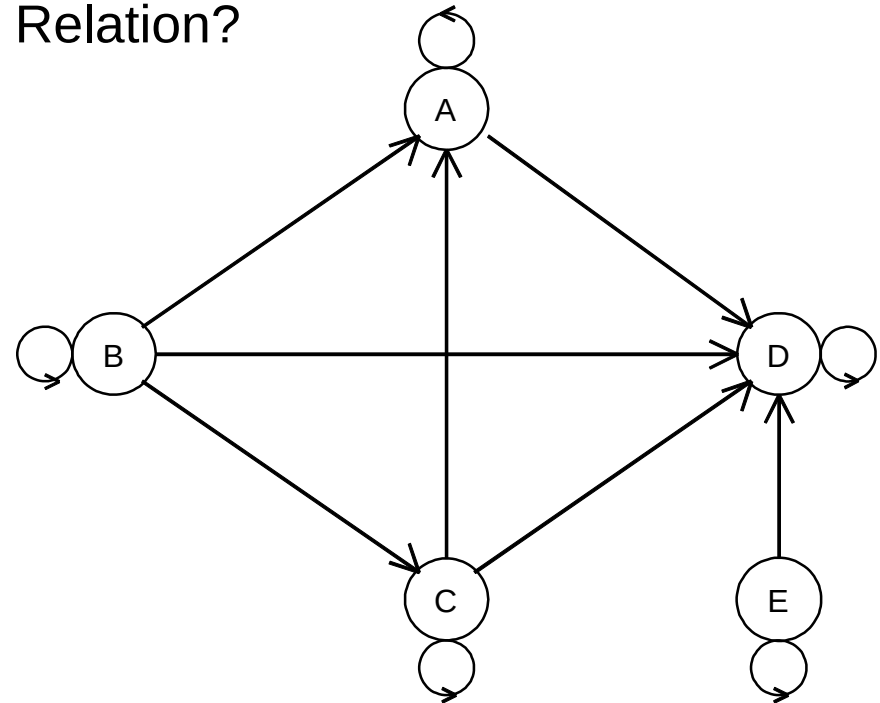
- reflexiv?
 - ja, Schleifen an allen Knoten
- symmetrisch?
 - nein, keine antiparallelen Kanten



2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

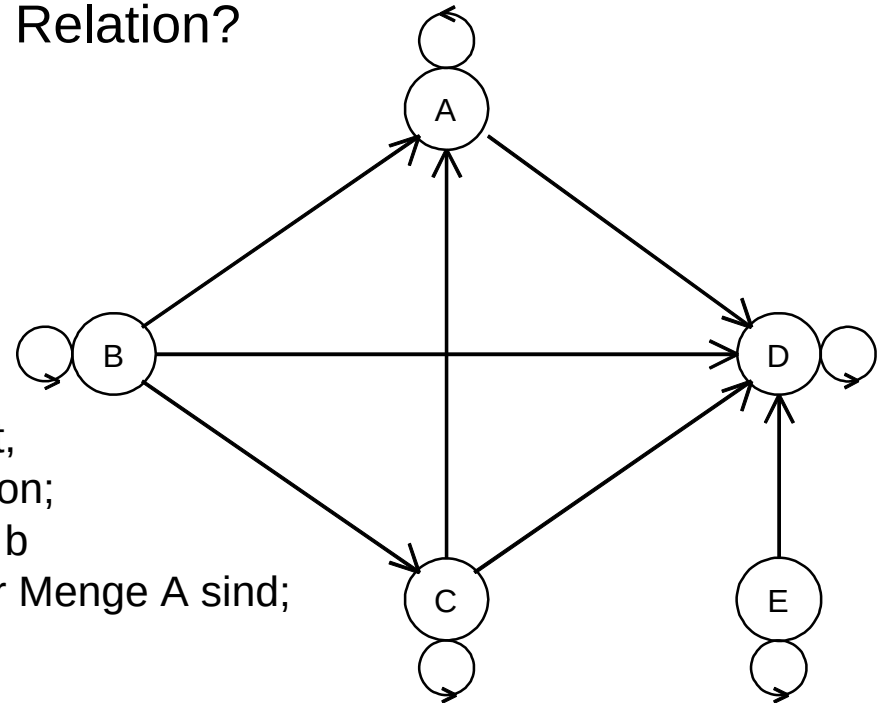
- reflexiv?
 - ja, Schleifen an allen Knoten
- symmetrisch?
 - nein, keine antiparallelen Kanten
- antisymmetrisch?



2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

- reflexiv?
 - ja, Schleifen an allen Knoten
- symmetrisch?
 - nein, keine antiparallelen Kanten
- antisymmetrisch?
 - ja, wenn (a,b) zur Relation gehört, dann gehört (b,a) nicht zur Relation; unter der Bedingung, dass a und b verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
 $x \alpha y$ und $y \alpha x \Rightarrow x = y$



2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

■ reflexiv?

- ja, Schleifen an allen Knoten

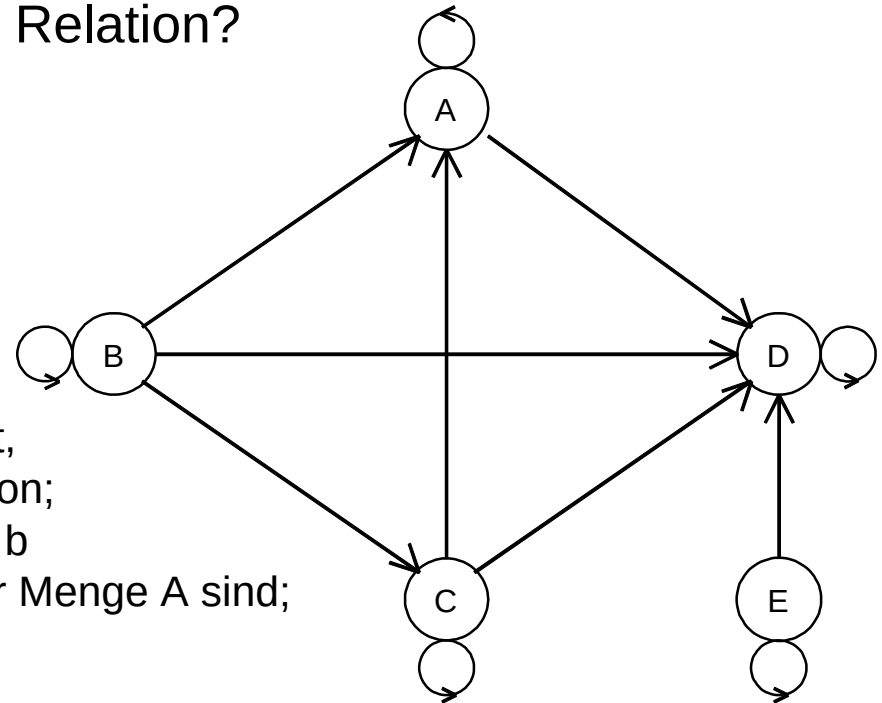
■ symmetrisch?

- nein, keine antiparallelen Kanten

■ antisymmetrisch?

- ja, wenn (a,b) zur Relation gehört, dann gehört (b,a) nicht zur Relation; unter der Bedingung, dass a und b verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
 $x \alpha y$ und $y \alpha x \Rightarrow x = y$

■ transitiv?



2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

■ reflexiv?

- ja, Schleifen an allen Knoten

■ symmetrisch?

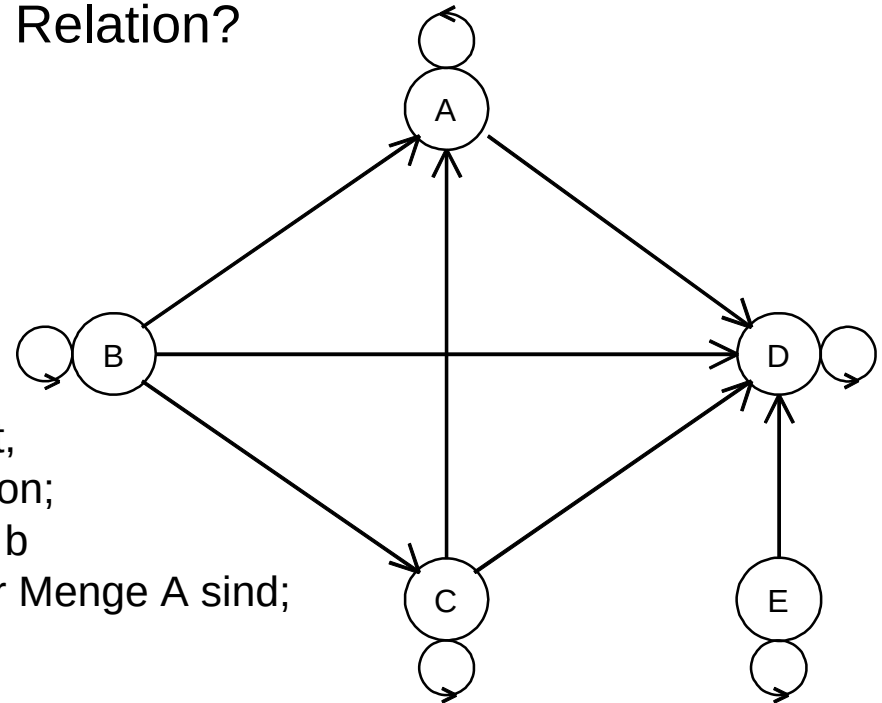
- nein, keine antiparallelen Kanten

■ antisymmetrisch?

- ja, wenn (a,b) zur Relation gehört, dann gehört (b,a) nicht zur Relation; unter der Bedingung, dass a und b verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
 $x \alpha y$ und $y \alpha x \Rightarrow x = y$

■ transitiv?

- ja, $x \alpha y$ und $y \alpha z \Rightarrow x \alpha z$



2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

■ reflexiv?

- ja, Schleifen an allen Knoten

■ symmetrisch?

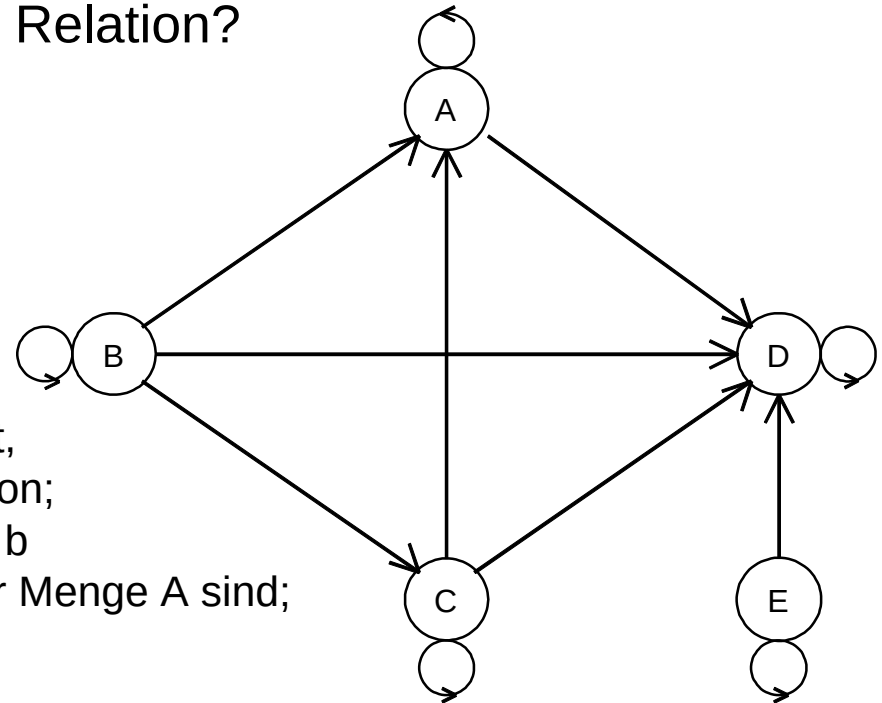
- nein, keine antiparallelen Kanten

■ antisymmetrisch?

- ja, wenn (a,b) zur Relation gehört, dann gehört (b,a) nicht zur Relation; unter der Bedingung, dass a und b verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
 $x \alpha y$ und $y \alpha x \Rightarrow x = y$

■ transitiv?

- ja, $x \alpha y$ und $y \alpha z \Rightarrow x \alpha z$



■ Um welche spezielle Relation handelt es sich?

2. Aufgabe

■ 2.1 Welche Eigenschaften hat die Relation?

■ reflexiv?

- ja, Schleifen an allen Knoten

■ symmetrisch?

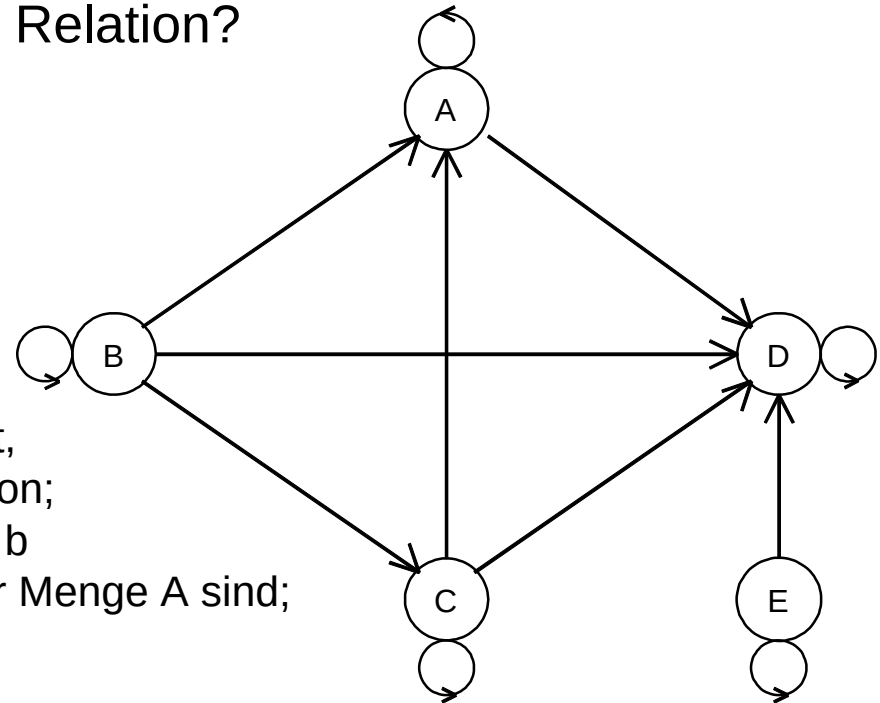
- nein, keine antiparallelen Kanten

■ antisymmetrisch?

- ja, wenn (a,b) zur Relation gehört, dann gehört (b,a) nicht zur Relation; unter der Bedingung, dass a und b verschiedene Elemente aus einer Menge A sind;
 $x \alpha y$ und $y \alpha x \Rightarrow x = y$

■ transitiv?

- ja, $x \alpha y$ und $y \alpha z \Rightarrow x \alpha z$



■ Um welche spezielle Relation handelt es sich?

- Es handelt sich hier um eine **Ordnungsrelation**.
(antisymmetrische Quasiordnung = Halbordnung)

Felix Pistorius
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

3. Aufgabe: Relationen

3. Aufgabe

- In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage:
was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz?
- Man sollte meinen, dass nichts besser ist als ewiges Glück.
Andererseits ist ein Lebkuchenherz sicherlich besser als nichts.
“Besser” ist bekanntlich eine transitive Relation.

3. Aufgabe

- In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage:
was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz?
- Man sollte meinen, dass nichts besser ist als ewiges Glück.
Andererseits ist ein Lebkuchenherz sicherlich besser als nichts.
“Besser” ist bekanntlich eine transitive Relation.
- Was folgt daraus?
 - transitiv: aus $x \alpha y$ und $y \alpha z$ folgt $x \alpha z$:

3. Aufgabe

- In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage:
was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz?
- Man sollte meinen, dass nichts besser ist als ewiges Glück.
Andererseits ist ein Lebkuchenherz sicherlich besser als nichts.
“Besser” ist bekanntlich eine transitive Relation.
- Was folgt daraus?
 - transitiv: aus $x \alpha y$ und $y \alpha z$ folgt $x \alpha z$:
- Lebkuchenherz besser als nichts
UND

3. Aufgabe

- In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage:
was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz?
- Man sollte meinen, dass nichts besser ist als ewiges Glück.
Andererseits ist ein Lebkuchenherz sicherlich besser als nichts.
“Besser” ist bekanntlich eine transitive Relation.
- Was folgt daraus?
 - transitiv: aus $x \alpha y$ und $y \alpha z$ folgt $x \alpha z$:
- Lebkuchenherz besser als nichts
UND
- nichts besser als ewiges Glück

3. Aufgabe

- In der Vorweihnachtszeit stellt sich die Frage:
was besser ist: ewiges Glück oder ein Lebkuchenherz?
- Man sollte meinen, dass nichts besser ist als ewiges Glück.
Andererseits ist ein Lebkuchenherz sicherlich besser als nichts.
“Besser” ist bekanntlich eine transitive Relation.
- Was folgt daraus?
 - transitiv: aus $x \alpha y$ und $y \alpha z$ folgt $x \alpha z$:
- Lebkuchenherz besser als nichts
UND
- nichts besser als ewiges Glück

=> **Lebkuchenherz besser als ewiges Glück**

Felix Pistorius
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

4. Aufgabe: Graphen

Eigenschaften von Graphen

Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Entarteter Graph

- Kantenmenge ist leer.

Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

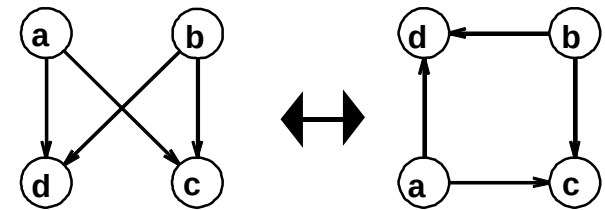
- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Entarteter Graph

- Kantenmenge ist leer.

Isomorpher Graph

- “Graphen lassen sich ineinander überführen”



Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Entarteter Graph

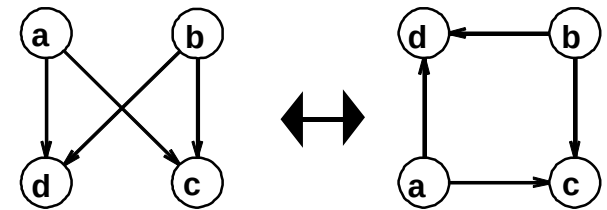
- Kantenmenge ist leer.

Isomorpher Graph

- “Graphen lassen sich ineinander überführen”

Vollständiger Graph

- Jeder Knoten ist über eine Kante mit jedem anderen Knoten verbunden.



Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Entarteter Graph

- Kantenmenge ist leer.

Isomorpher Graph

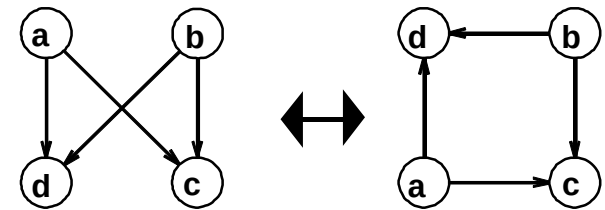
- “Graphen lassen sich ineinander überführen”

Vollständiger Graph

- Jeder Knoten ist über eine Kante mit jedem anderen Knoten verbunden.

Einfacher Graph

- Zwischen zwei Knoten gibt es höchstens eine Kante.



Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

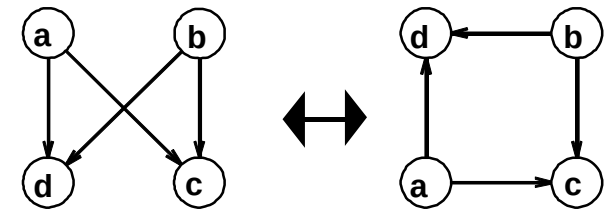
- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Entarteter Graph

- Kantenmenge ist leer.

Isomorpher Graph

- “Graphen lassen sich ineinander überführen”



Vollständiger Graph

- Jeder Knoten ist über eine Kante mit jedem anderen Knoten verbunden.

Einfacher Graph

- Zwischen zwei Knoten gibt es höchstens eine Kante.

Gerichteter Graph

- Enthält mindestens eine gerichtete Kante.

Eigenschaften von Graphen

Endlicher Graph

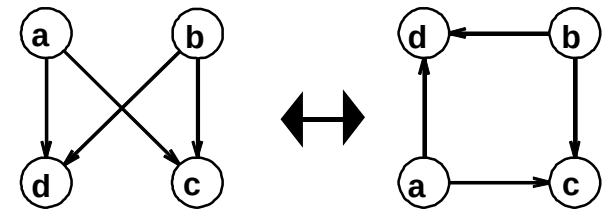
- Kanten- und Knotenmenge sind endlich.

Entarteter Graph

- Kantenmenge ist leer.

Isomorpher Graph

- “Graphen lassen sich ineinander überführen”



Vollständiger Graph

- Jeder Knoten ist über eine Kante mit jedem anderen Knoten verbunden.

Einfacher Graph

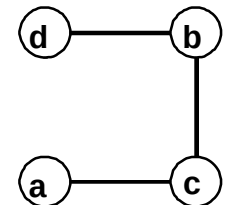
- Zwischen zwei Knoten gibt es höchstens eine Kante.

Gerichteter Graph

- Enthält mindestens eine gerichtete Kante.

Zusammenhängender Graph

- Es existiert von jedem Knoten eine Kantenprogression (Kantenfolge) zu jedem anderen Knoten.



Eigenschaften von Graphen

streng zusammenhängender Graph

- Bei gerichteten Graphen: Jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar (Kantenrichtung beachten).

Eigenschaften von Graphen

streng zusammenhängender Graph

- Bei gerichteten Graphen: Jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar (Kantenrichtung beachten).

zyklischer Graph

- gerichteter Graph mit mindestens einem Zyklus (auch Schleife).

Eigenschaften von Graphen

streng zusammenhängender Graph

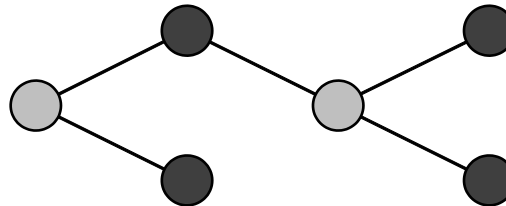
- Bei gerichteten Graphen: Jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar (Kantenrichtung beachten).

zyklischer Graph

- gerichteter Graph mit mindestens einem Zyklus (auch Schleife).

bipartiter Graph

- zwei Knotenmengen, wobei keine Kante Knoten aus derselben Menge verbindet .



Eigenschaften von Graphen

streng zusammenhängender Graph

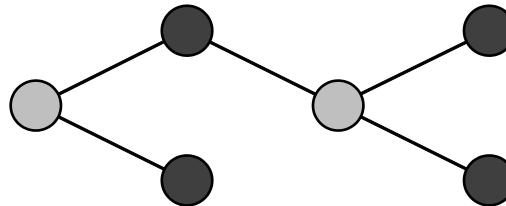
- Bei gerichteten Graphen: Jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar (Kantenrichtung beachten).

zyklischer Graph

- gerichteter Graph mit mindestens einem Zyklus (auch Schleife).

bipartiter Graph

- zwei Knotenmengen, wobei keine Kante Knoten aus derselben Menge verbindet .



planarer Graph

- es existiert ein zugehöriger isomorpher Graph, der in der Ebene überschneidungsfrei ist.

Eigenschaften von Graphen

streng zusammenhängender Graph

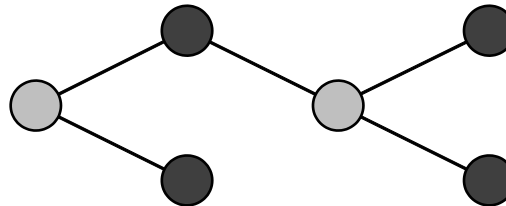
- Bei gerichteten Graphen: Jeder Knoten ist von jedem Knoten aus erreichbar (Kantenrichtung beachten).

zyklischer Graph

- gerichteter Graph mit mindestens einem Zyklus (auch Schleife).

bipartiter Graph

- zwei Knotenmengen, wobei keine Kante Knoten aus derselben Menge verbindet .



planarer Graph

- es existiert ein zugehöriger isomorpher Graph, der in der Ebene überschneidungsfrei ist.

gewichteter Graph

- enthält gewichtete Knoten oder Kanten (z.B.: Entfernungen, Kosten, ...)

Kanten-/Knoteneigenschaft

- Kanteneigenschaften
 - Schleife
 - verbindet einen Knoten mit sich selbst.

Kanten-/Knoteneigenschaft

- Kanteneigenschaften
 - Schleife
 - verbindet einen Knoten mit sich selbst.
- Knoteneigenschaften

- Kanteneigenschaften
 - Schleife
 - verbindet einen Knoten mit sich selbst.
- Knoteneigenschaften
 - Grad $d(g)$
 - Anzahl der inzidenten Kanten eines Knotens.

- Kanteneigenschaften
 - Schleife
 - verbindet einen Knoten mit sich selbst.
- Knoteneigenschaften
 - Grad $d(g)$
 - Anzahl der inzidenten Kanten eines Knotens.
 - Ausgangsgrad $d^+(g)$
 - Anzahl der abgehenden Kanten.
 - Eingangsgrad $d^-(g)$
 - Anzahl der ankommenden Kanten.

■ Kanteneigenschaften

■ Schleife

- verbindet einen Knoten mit sich selbst.

■ Knoteneigenschaften

■ Grad $d(g)$

- Anzahl der inzidenten Kanten eines Knotens.

■ Ausgangsgrad $d^+(g)$

- Anzahl der abgehenden Kanten.

■ Eingangsgrad $d^-(g)$

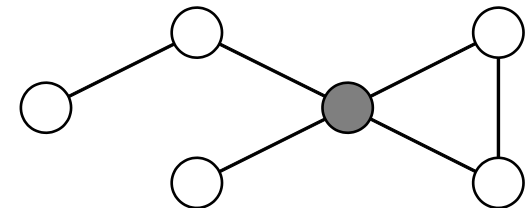
- Anzahl der ankommenden Kanten.

■ benachbarte Knoten $V'(g)$

- sind über eine Kante miteinander verbunden.
- bei gerichteten Graphen Unterscheidung in: Vorgänger: $V'_1(g)$; Nachfolger: $V'_2(g)$

■ Artikulation

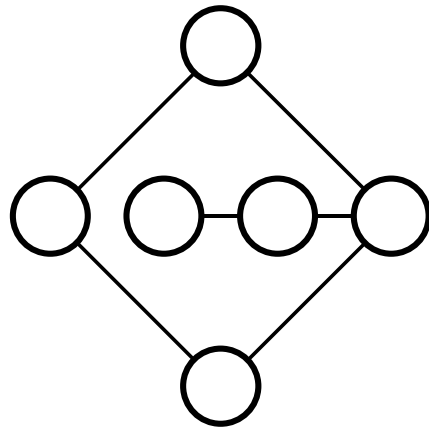
- Knoten, nach dessen Entnahme der Graph in isolierte Teilgraphen zerfällt:



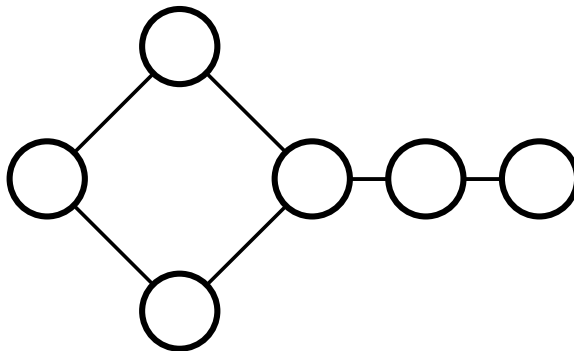
4. Aufgabe

- 4.1 Zeichnen Sie den zu Graph 1 bzw. zu Graph 2 zugehörigen **dualen Graphen**

(Kennzeichnen Sie dabei die überführten Knoten eindeutig):

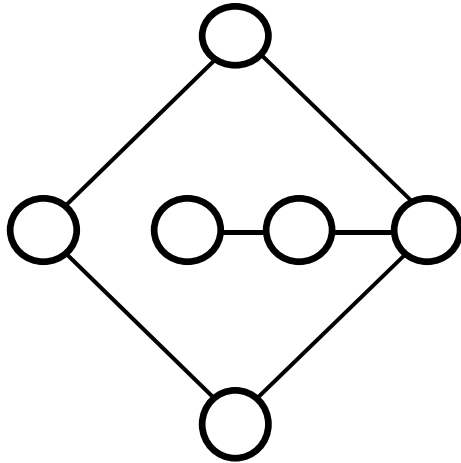


Graph 1



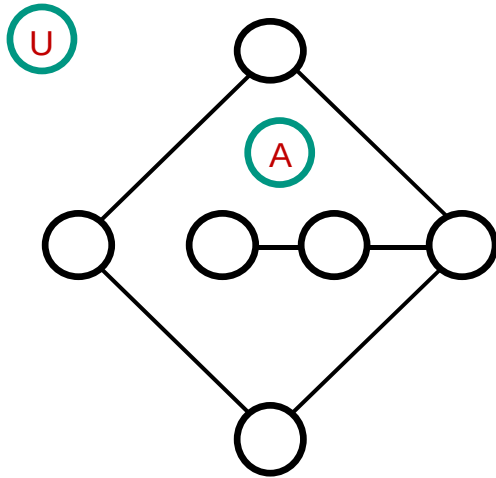
Graph 2

4. Aufgabe – 4.1

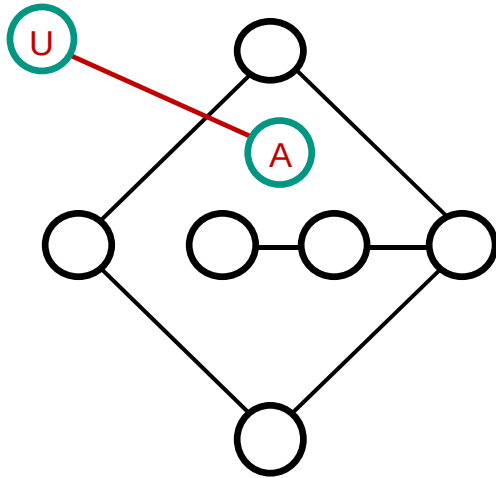


Graph 1

4. Aufgabe – 4.1



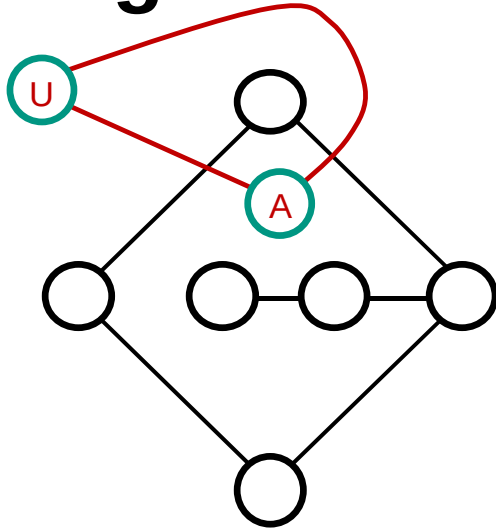
4. Aufgabe – 4.1



Graph 1



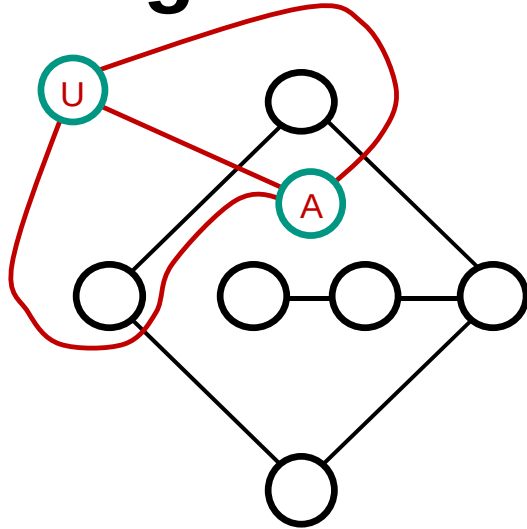
4. Aufgabe – 4.1



Graph 1



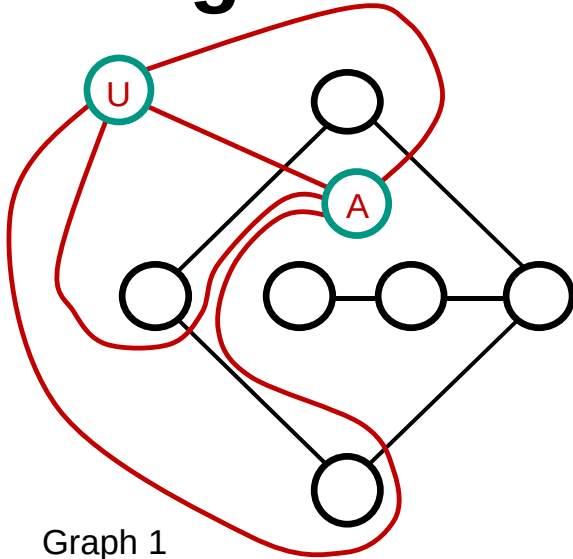
4. Aufgabe – 4.1



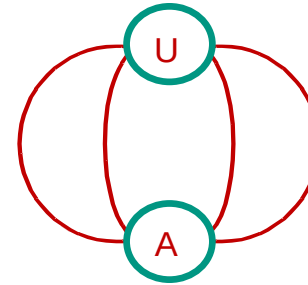
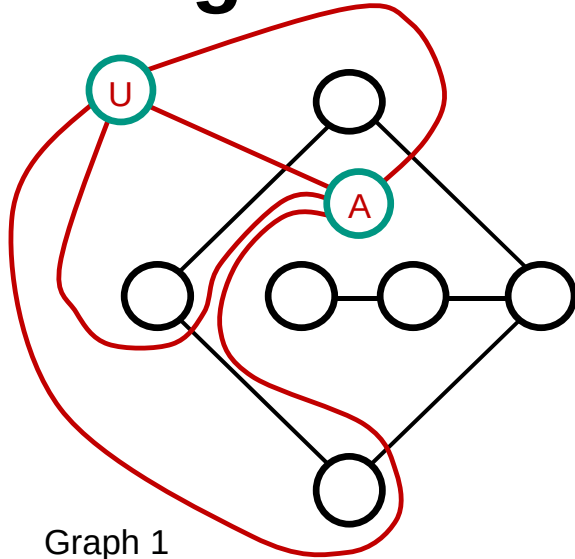
Graph 1



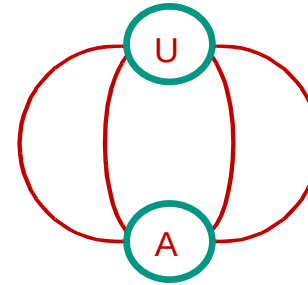
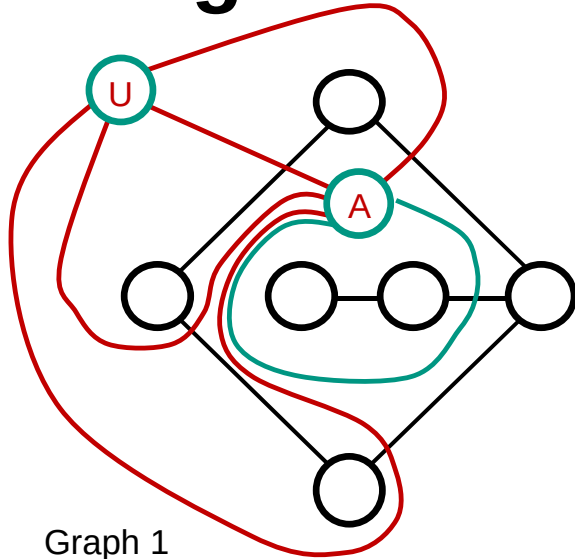
4. Aufgabe – 4.1



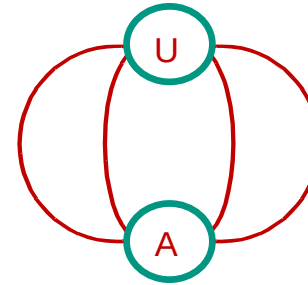
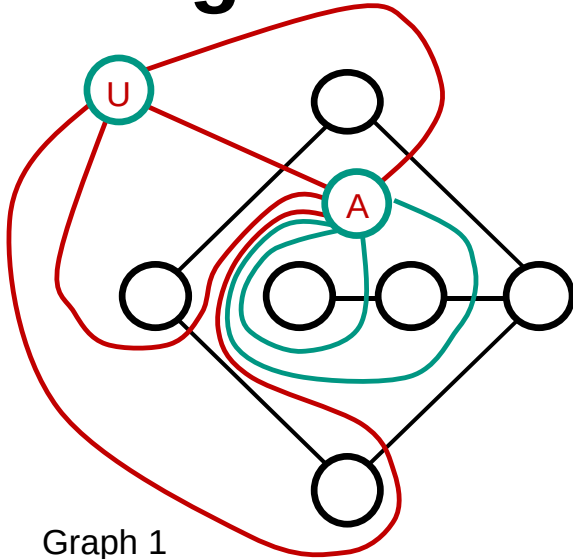
4. Aufgabe – 4.1



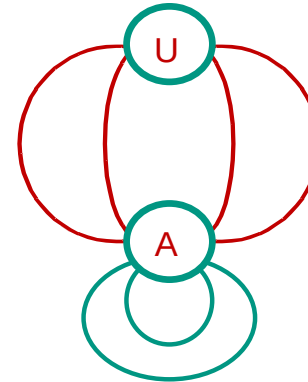
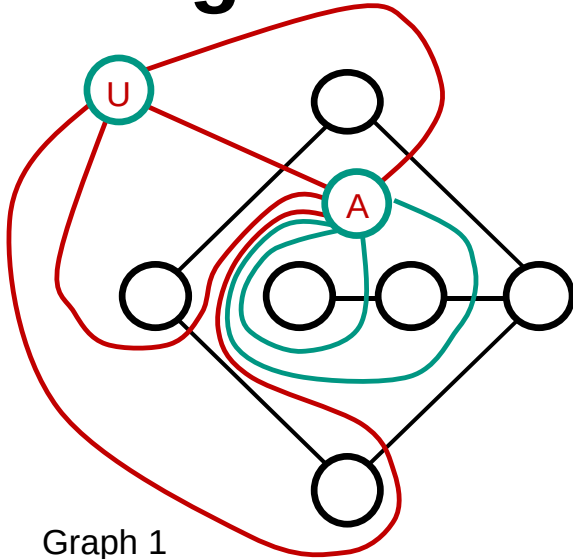
4. Aufgabe – 4.1



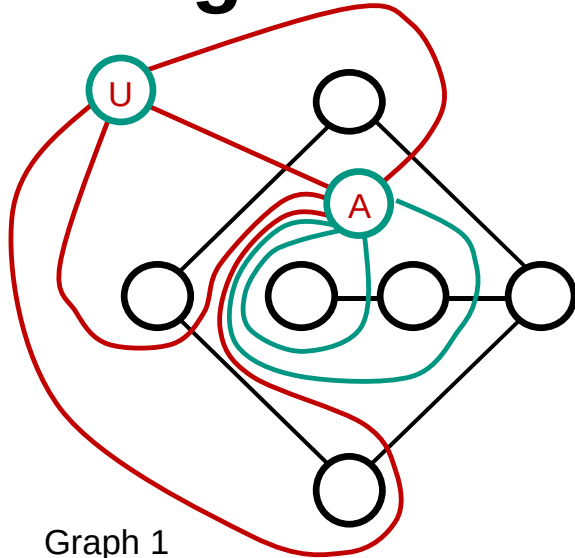
4. Aufgabe – 4.1



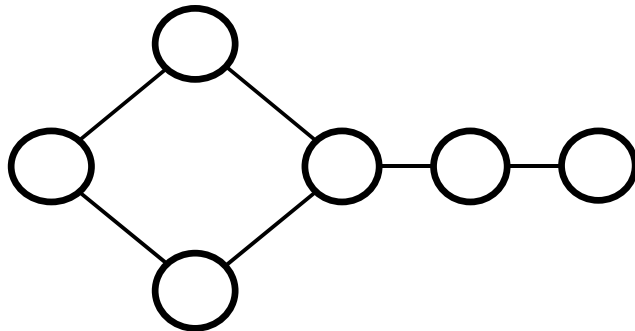
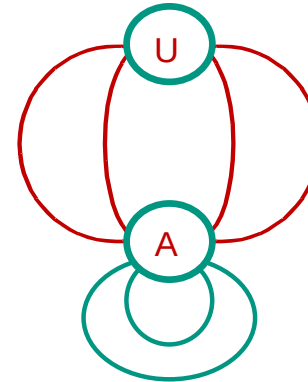
4. Aufgabe – 4.1



4. Aufgabe – 4.1

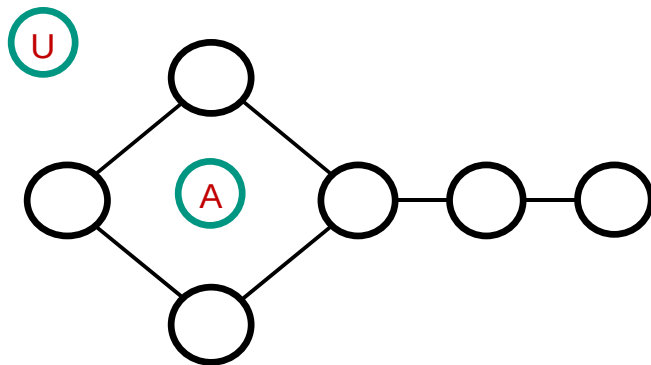
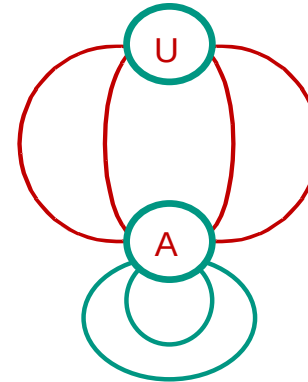
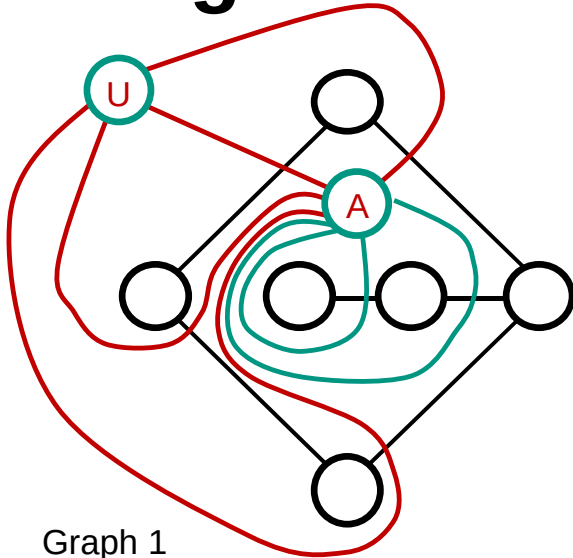


Graph 1

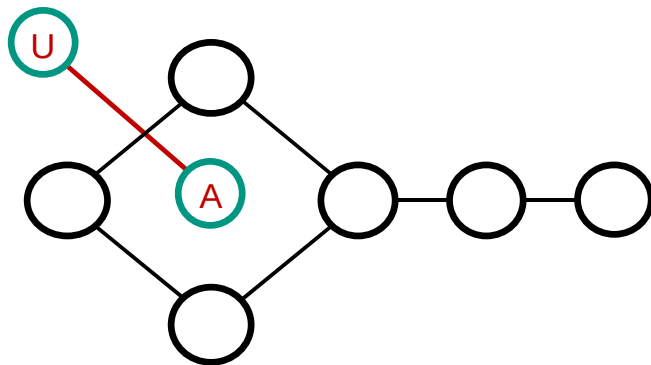
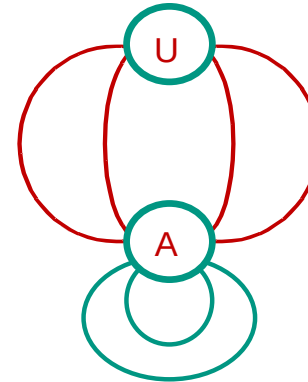
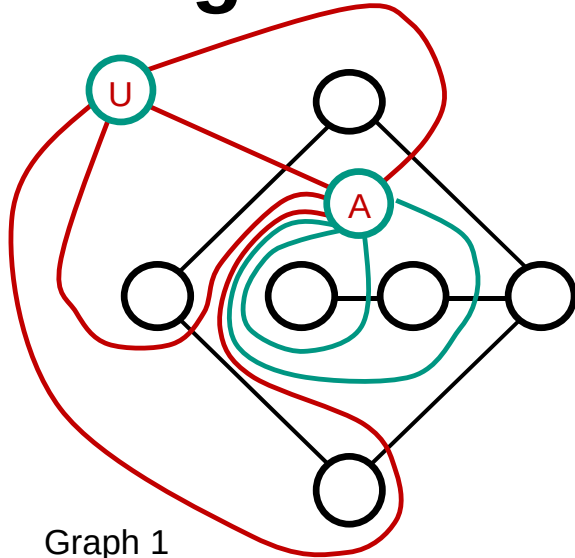


Graph 2

4. Aufgabe – 4.1

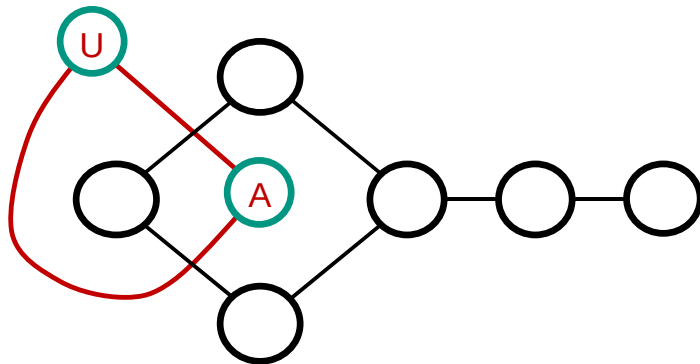
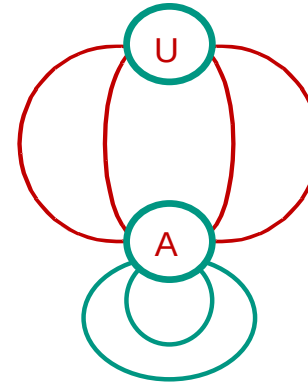
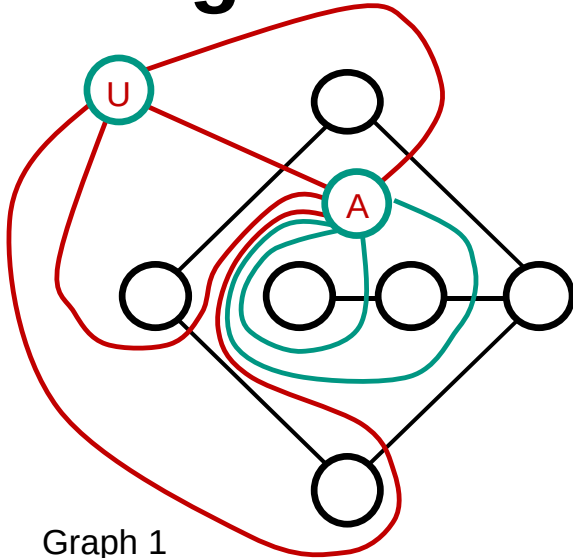


4. Aufgabe – 4.1



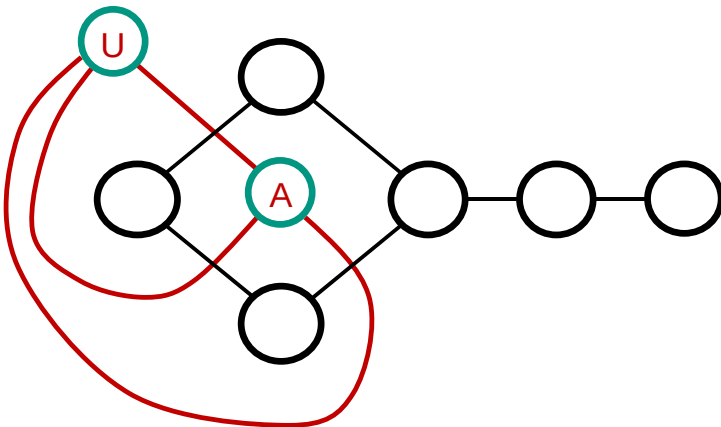
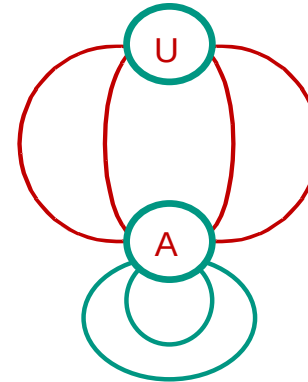
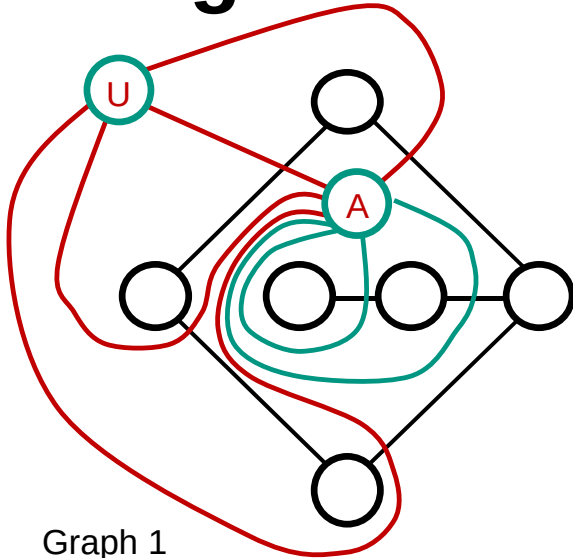
Graph 2

4. Aufgabe – 4.1

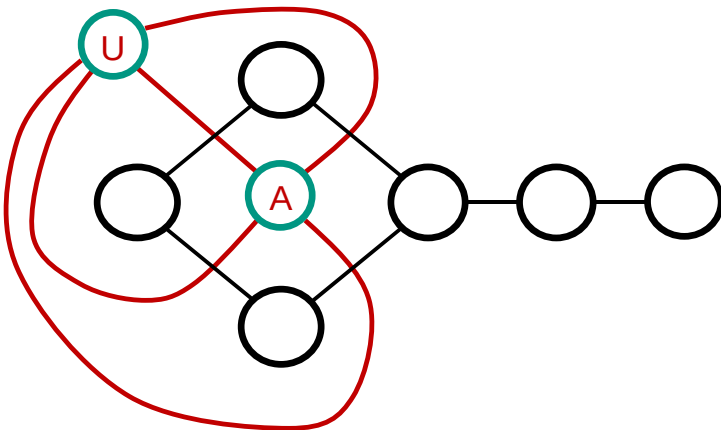
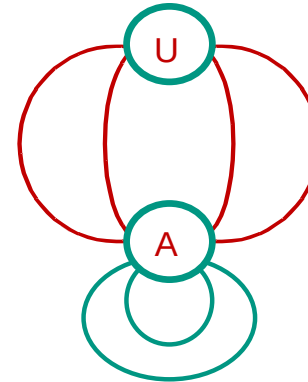
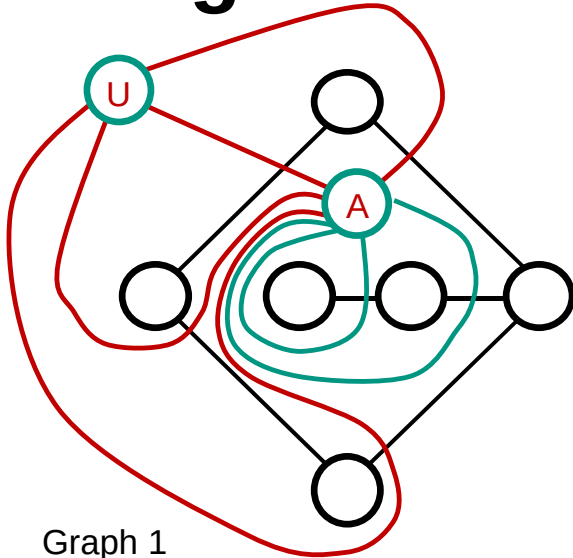


Graph 2

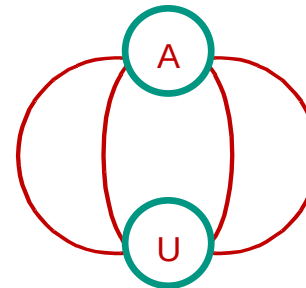
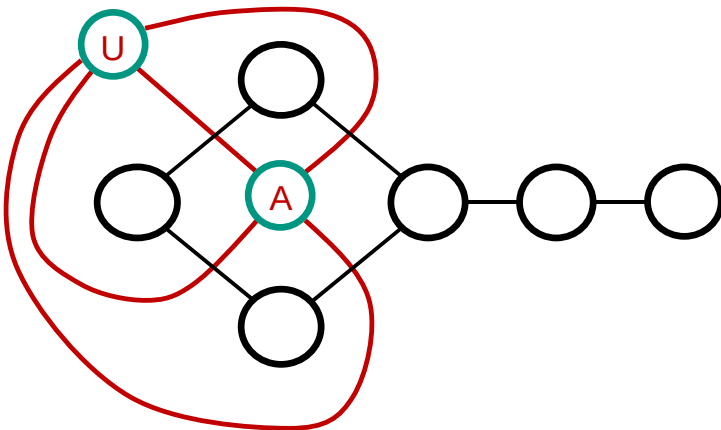
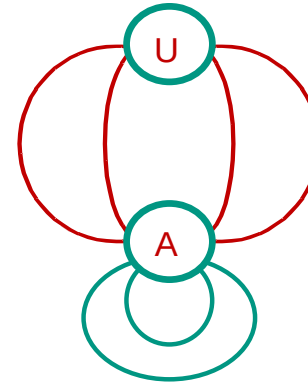
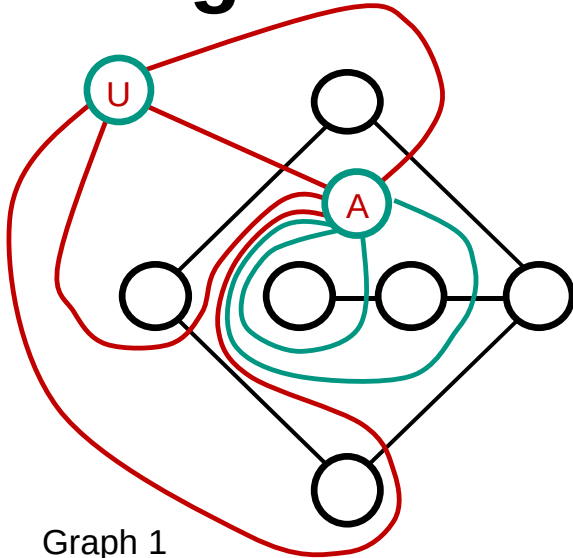
4. Aufgabe – 4.1



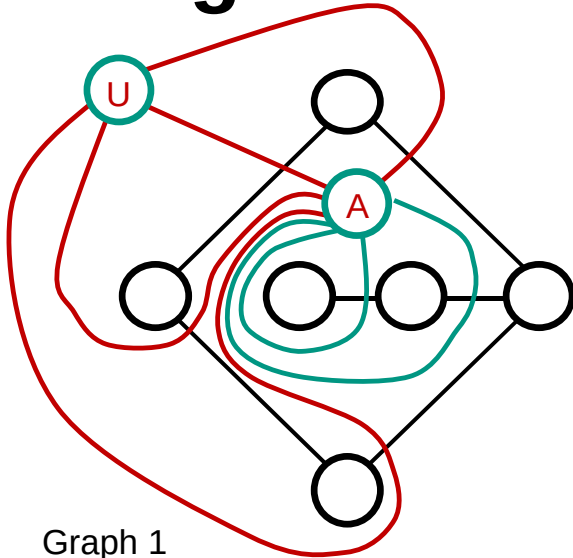
4. Aufgabe – 4.1



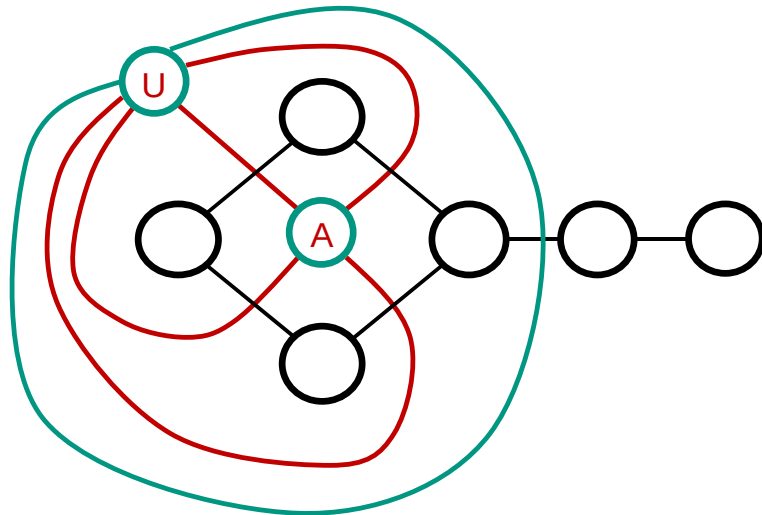
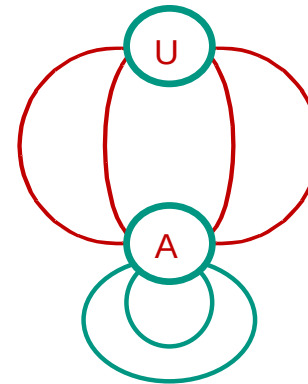
4. Aufgabe – 4.1



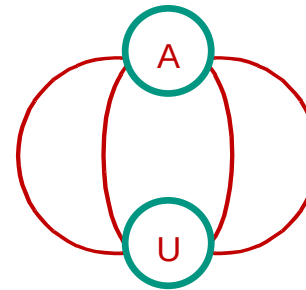
4. Aufgabe – 4.1



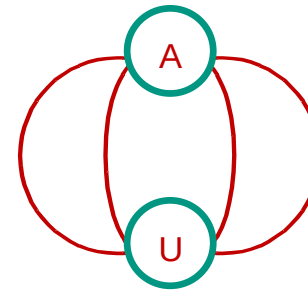
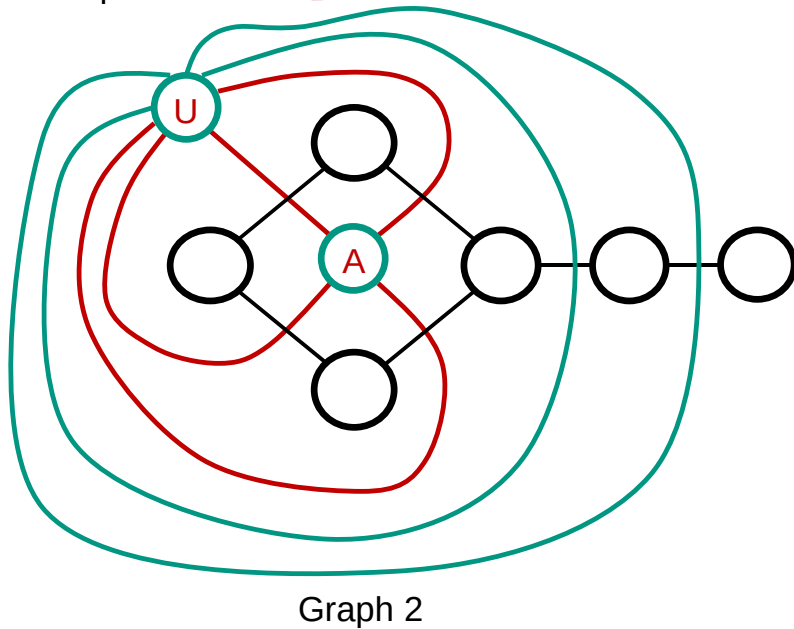
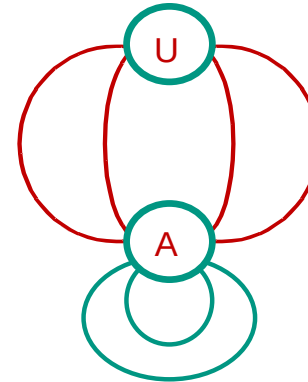
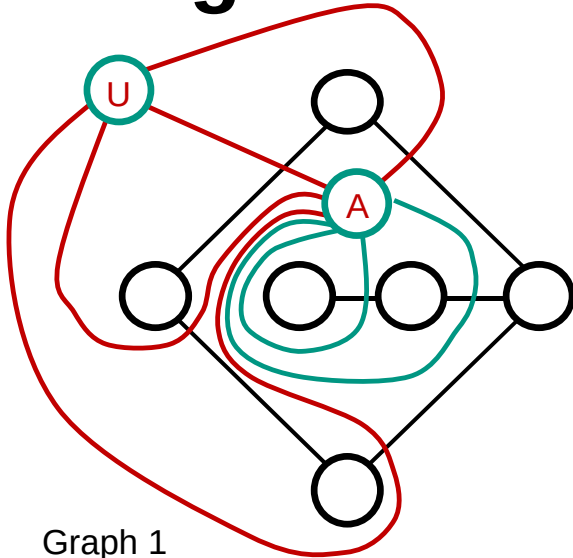
Graph 1



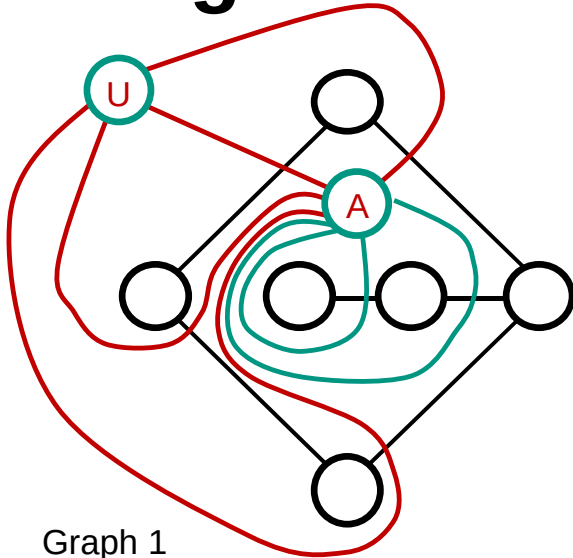
Graph 2



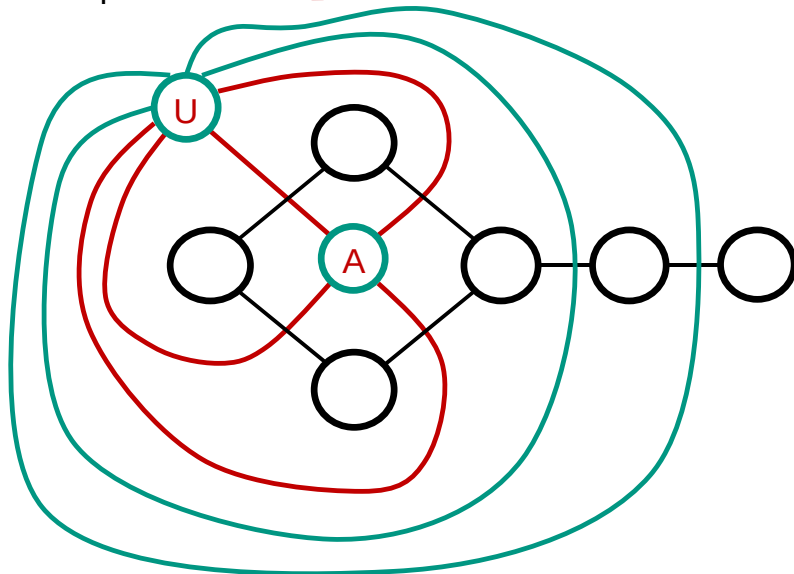
4. Aufgabe – 4.1



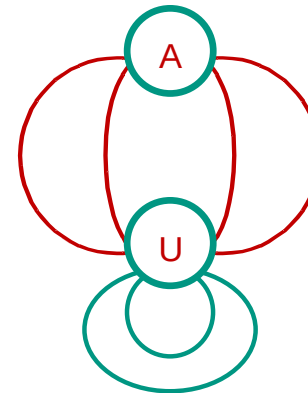
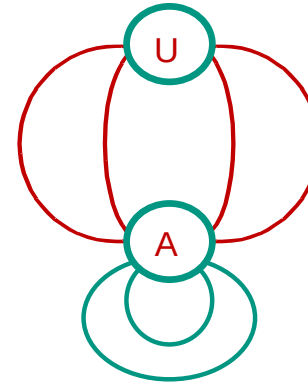
4. Aufgabe – 4.1



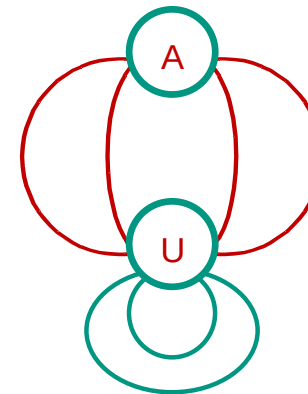
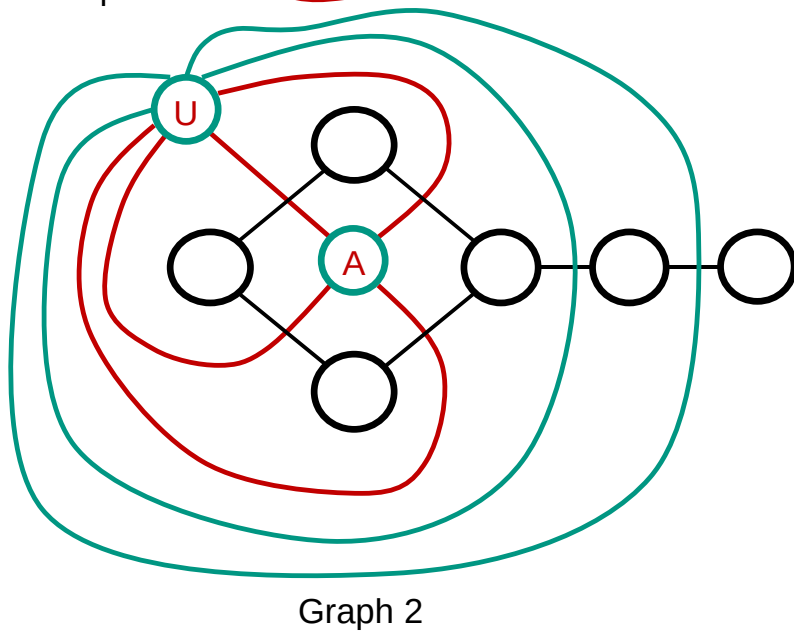
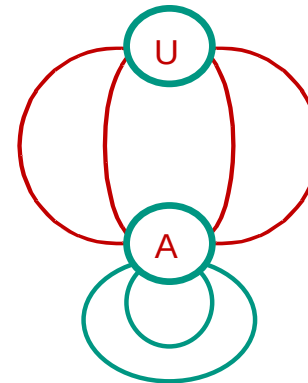
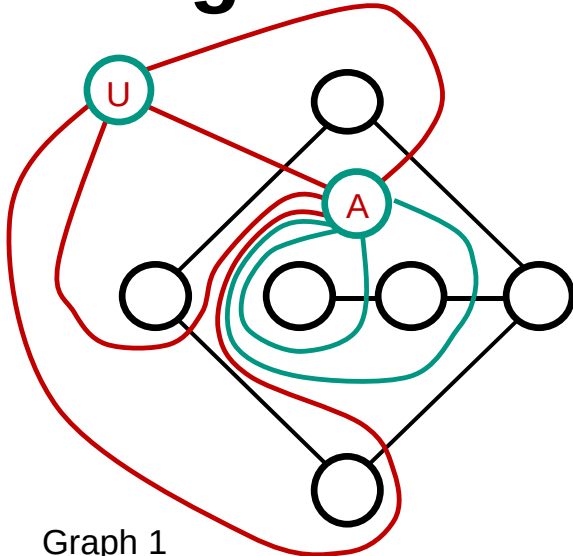
Graph 1



Graph 2



4. Aufgabe – 4.1



=> Duale Graphen sind isomorph

Felix Pistorius
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

5. Aufgabe: boolische Algebra

5. Aufgabe

- Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Huntington'schen Axiome, dass folgende Regeln für jede boolesche Algebra gelten.
 - Hinweis: Folgendes Vorgehen bietet sich häufig an: Erweiterung mit einem neutralen Element. Ersetzen des neutralen Elements nach H5. Anwendung des Distributivgesetzes.

5. Aufgabe

- Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Huntingtonschen Axiome, dass folgende Regeln für jede boolesche Algebra gelten.
 - Hinweis: Folgendes Vorgehen bietet sich häufig an: Erweiterung mit einem neutralen Element. Ersetzen des neutralen Elements nach H5. Anwendung des Distributivgesetzes.
 - Ein **Axiomensystem** (auch: Axiomatisches System) ist ein System von grundlegenden Aussagen (**Axiomen**) die ohne Beweis angenommen und aus denen alle Sätze (**Theoreme**) des Systems logisch abgeleitet werden

5. Aufgabe

- Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Huntington'schen Axiome, dass folgende Regeln für jede boolesche Algebra gelten.
 - Hinweis: Folgendes Vorgehen bietet sich häufig an: Erweiterung mit einem neutralen Element. Ersetzen des neutralen Elements nach H5. Anwendung des Distributivgesetzes.
 - Ein **Axiomensystem** (auch: Axiomatisches System) ist ein System von grundlegenden Aussagen (Axiomen) die ohne Beweis angenommen und aus denen alle Sätze (Theoreme) des Systems logisch abgeleitet werden
- Aufgabe 5.1 $a \top a = a$ $a \perp a = a$

5. Aufgabe

- Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Huntington'schen Axiome, dass folgende Regeln für jede boolesche Algebra gelten.
 - Hinweis: Folgendes Vorgehen bietet sich häufig an: Erweiterung mit einem neutralen Element. Ersetzen des neutralen Elements nach H5. Anwendung des Distributivgesetzes.
 - Ein **Axiomensystem** (auch: Axiomatisches System) ist ein System von **grundlegenden Aussagen** (**Axiomen**) die ohne Beweis angenommen und aus denen alle Sätze (**Theoreme**) des Systems logisch abgeleitet werden

■ Aufgabe 5.1 $a \top a = a$

$$a \perp a = a$$

■ Aufgabe 5.2 $a \top 0 = 0$

$$a \perp 1 = 1$$

5. Aufgabe

- Beweisen Sie unter ausschließlicher Benutzung der Huntingtonschen Axiome, dass folgende Regeln für jede boolesche Algebra gelten.
 - Hinweis: Folgendes Vorgehen bietet sich häufig an: Erweiterung mit einem neutralen Element. Ersetzen des neutralen Elements nach H5. Anwendung des Distributivgesetzes.
 - Ein **Axiomensystem** (auch: Axiomatisches System) ist ein System von grundlegenden Aussagen (Axiomen) die ohne Beweis angenommen und aus denen alle Sätze (Theoreme) des Systems logisch abgeleitet werden

■ Aufgabe 5.1 $a \top a = a$

$$a \perp a = a$$

■ Aufgabe 5.2 $a \top O = O$

$$a \perp I = I$$

■ Aufgabe 5.3 $a \top (a \perp b) = a$

$$a \perp (a \top b) = a$$

Huntingtonschen Axiome

Allgemeine Boolesche Algebra: $[K, \top, \perp, \bar{}, O, I]$

H3: Distributivgesetz

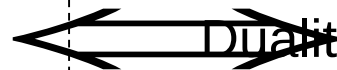
$$\begin{array}{lll}
 (x \perp y) \top z = & (x \top y) \perp z = & \forall x, y, z \in K \\
 (x \top z) \perp (y \top z) & (x \perp z) \top (y \perp z) &
 \end{array}$$

H4: Neutrales Element

$$\begin{array}{lll}
 I \top x = x & O \perp x = x & x, O, I \in K
 \end{array}$$

H5: Komplement

$$\begin{array}{lll}
 x \perp k = I & x \top k = O & x, k \in K \\
 & & \bar{x} = k
 \end{array}$$

 Dualität!!!

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a =$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp O \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp 0 \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp 0 \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp 0 \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp a =$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp 0 \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp a = (a \perp a) \top I \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp 0 \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp a = (a \perp a) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp a) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp 0 \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp a = (a \perp a) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp a) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp a = (a \perp a) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp a) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.1

$$a \top a = (a \top a) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top a) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp a = (a \perp a) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp a) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (\text{H5})$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O =$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \bar{a} \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \bar{a} \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{O}} \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \bar{a} \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{O}} \quad (\text{H5})$$

$$a \perp I =$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top a \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{O}} \quad (\text{H5})$$

$$a \perp I = (a \perp I) \top I \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \bar{a} \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{O}} \quad (\text{H5})$$

$$a \perp I = (a \perp I) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp I) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \bar{a} \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{O}} \quad (\text{H5})$$

$$a \perp I = (a \perp I) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp I) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \perp (I \top \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \bar{a} \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{O}} \quad (\text{H5})$$

$$a \perp I = (a \perp I) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp I) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \perp (I \top \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp \bar{a} \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.2

$$a \top O = (a \top O) \perp O \quad (\text{H4})$$

$$= (a \top O) \perp (a \top \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \top (O \perp \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top \bar{a} \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{O}} \quad (\text{H5})$$

$$a \perp I = (a \perp I) \top I \quad (\text{H4})$$

$$= (a \perp I) \top (a \perp \bar{a}) \quad (\text{H5})$$

$$= a \perp (I \top \bar{a}) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp a \quad (\text{H4})$$

$$= \underline{\underline{I}} \quad (\text{H5})$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) =$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp (a \top b) =$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp (a \top b) = (a \top I) \perp (a \top b) \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp (a \top b) = (a \top I) \perp (a \top b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \top (I \perp b) \quad (\text{H3})$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp (a \top b) = (a \top I) \perp (a \top b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \top (I \perp b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (5.2)$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp (a \top b) = (a \top I) \perp (a \top b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \top (I \perp b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (5.2)$$

$$= a \quad (\text{H4})$$

5. Aufgabe – 5.3

$$a \top (a \perp b) = (a \perp O) \top (a \perp b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \perp (O \top b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \perp O \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

$$a \perp (a \top b) = (a \top I) \perp (a \top b) \quad (\text{H4})$$

$$= a \top (I \perp b) \quad (\text{H3})$$

$$= a \top I \quad (5.2)$$

$$= \underline{\underline{a}} \quad (\text{H4})$$

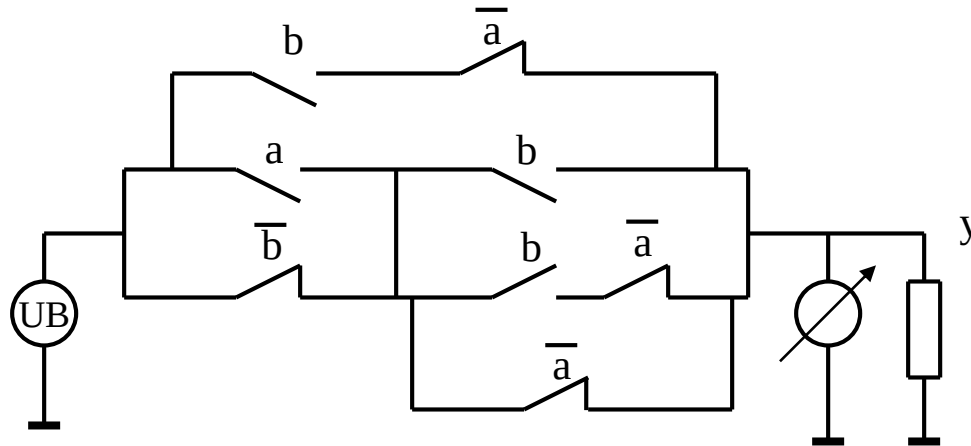
Felix Pistorius
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

6. Aufgabe: Relaisschaltnetz

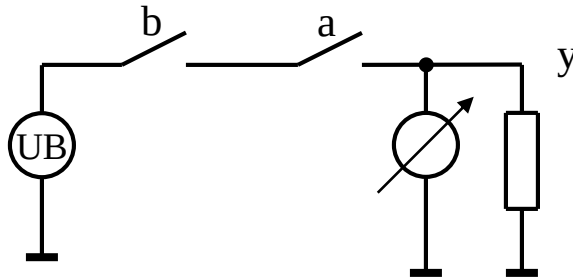
6. Aufgabe

- Gegeben sei das im Bild dargestellte Relaisschaltnetz



- 6.1 Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.

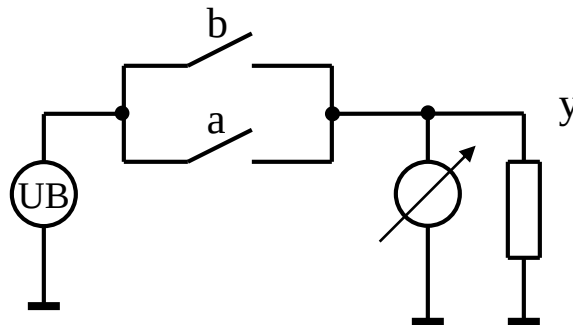
■ Serienschaltung



a	b	y
L	L	L
L	H	L
H	L	L
H	H	H

$$y = a \& b$$

■ Parallelschaltung

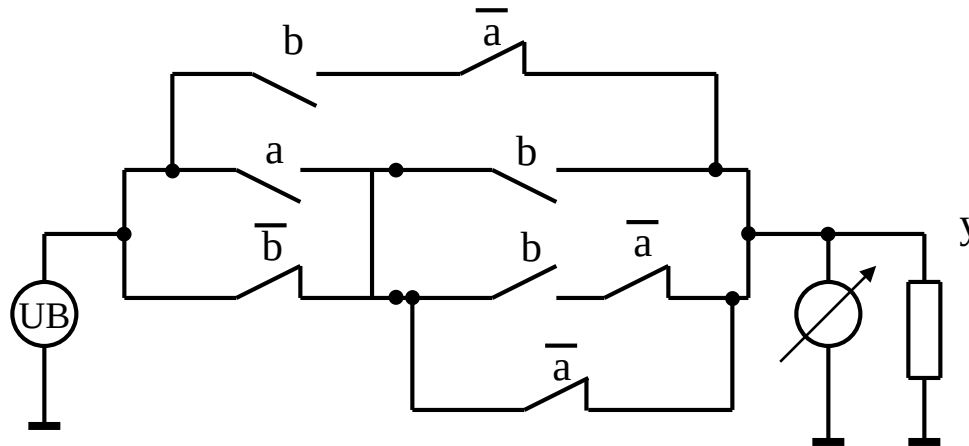


a	b	y
L	L	L
L	H	H
H	L	H
H	H	H

$$y = a \vee b$$

6. Aufgabe

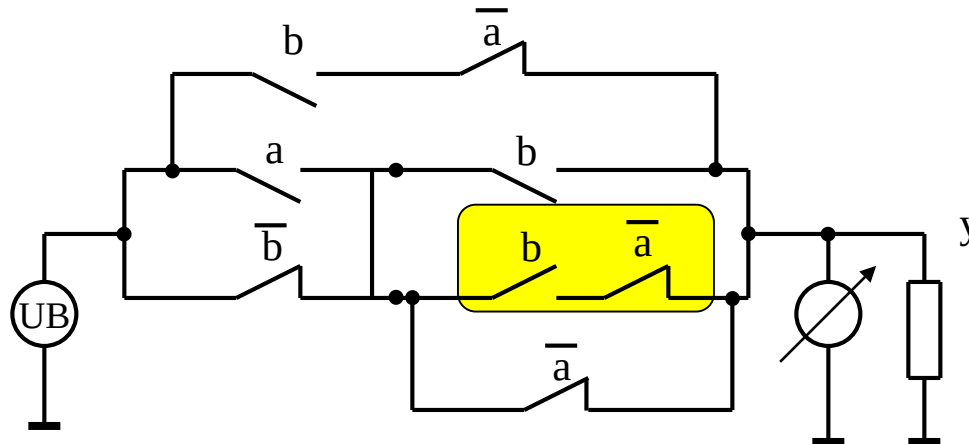
- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y =$$

6. Aufgabe

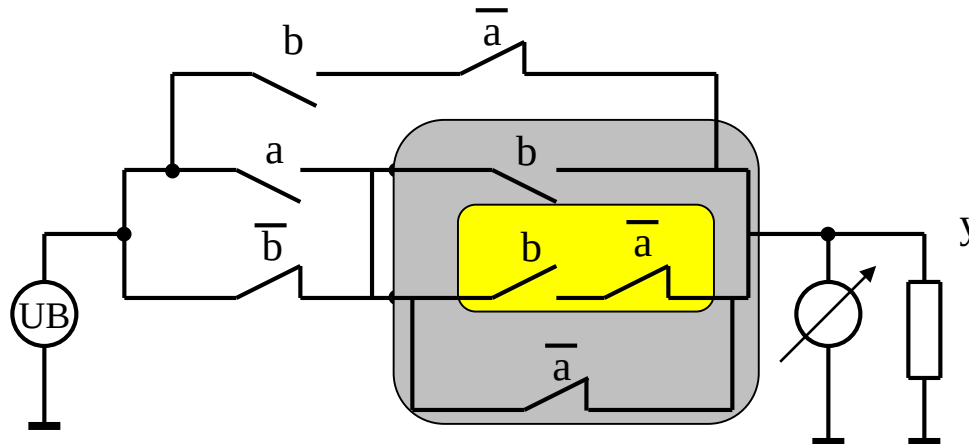
- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y = (b \& \bar{a})$$

6. Aufgabe

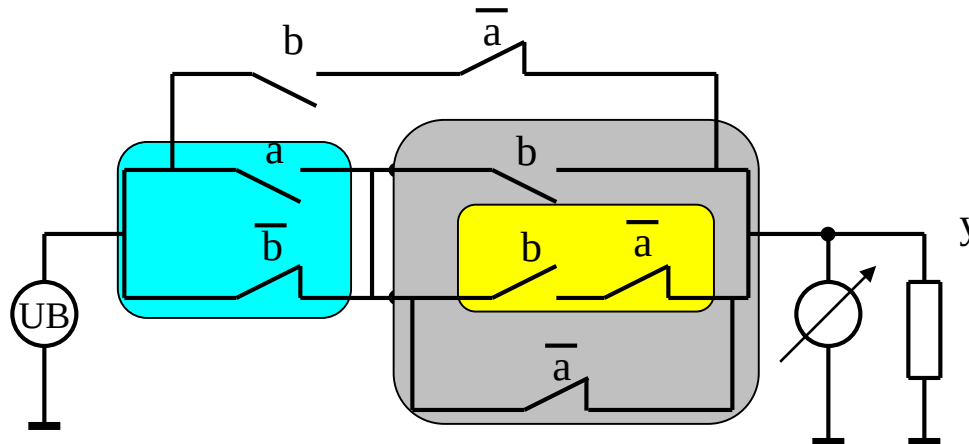
- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y = ((b \& \bar{a}) \vee b \vee \bar{a})$$

6. Aufgabe

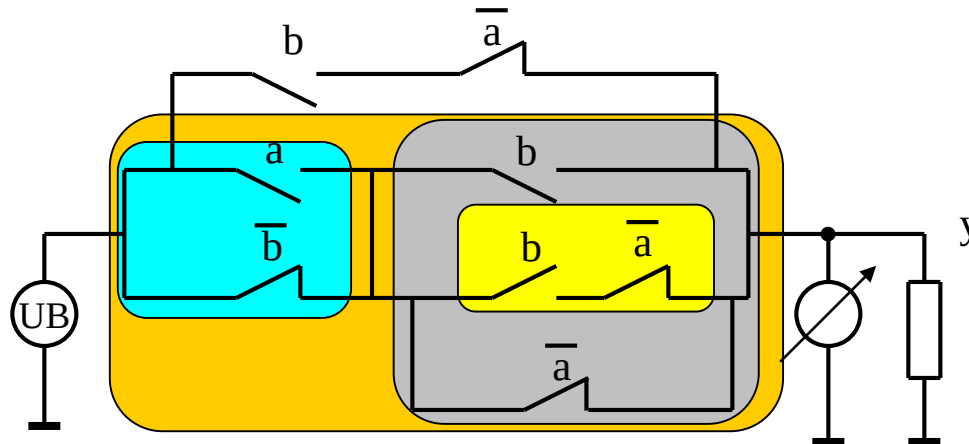
- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y = ((b \& \bar{a}) \vee b \vee \bar{a}) \& (a \vee \bar{b})$$

6. Aufgabe

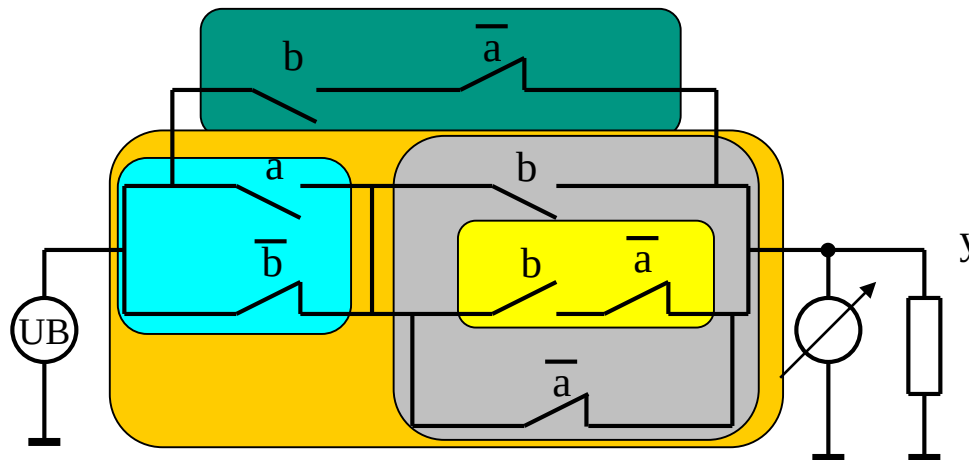
- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y = [((b \& \bar{a}) \vee b \vee \bar{a}) \& (a \vee \bar{b})]$$

6. Aufgabe

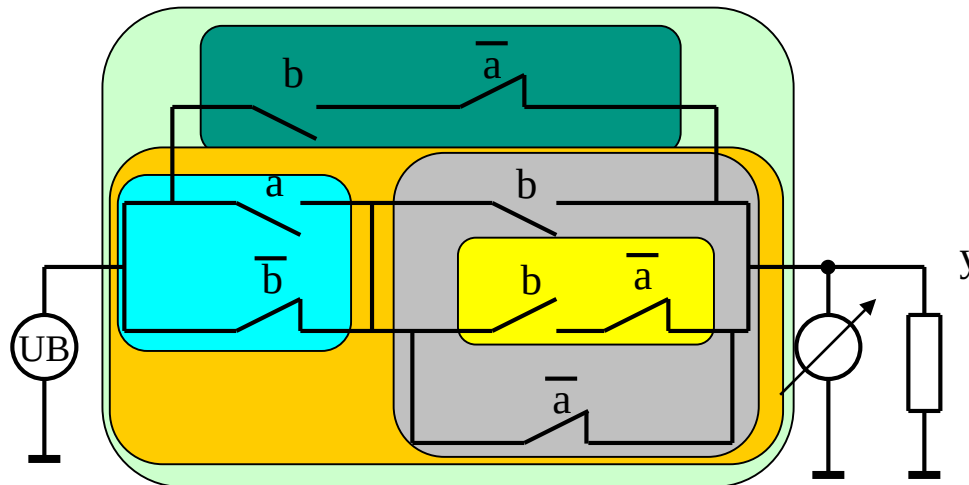
- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y = [((b \& \bar{a}) \vee b \vee \bar{a}) \& (a \vee \bar{b})] \vee b \& \bar{a}$$

6. Aufgabe

- Bilden Sie daraus den entsprechenden schaltalgebraischen Ausdruck und vereinfachen Sie ihn.



$$y = [((b \& \bar{a}) \vee b \vee \bar{a}) \& (a \vee \bar{b})] \vee b \& \bar{a}$$

■ Regeln für ein Element

■ R5a $a \vee 0 = a$

■ R6a $a \vee 1 = 1$

■ R7a $a \vee a = a$

■ R8a $a \vee \bar{a} = 1$

R5b $a \& 1 = a$

R6b $a \& 0 = 0$

R7b $a \& a = a$

R8b $a \& \bar{a} = 0$

■ Regeln für zwei oder mehr Elemente

■ R10a $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$

■ (assoziative Gesetze)

R10b $a \& (b \& c) = (a \& b) \& c = a \& b \& c$

■ R11a $a \vee (a \& b) = a$

■ (Absorptionsgesetze)

R11b $a \& (a \vee b) = a$

■ R12a $\overline{(a \vee b)} = \bar{a} \& \bar{b}$

■ DeMorgansche Regeln

R12b $\overline{(a \& b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$y = b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))]$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

R11a

$$y = b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))]$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned} y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\ &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \end{aligned}$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned} y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\ &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \end{aligned}$$

H3 - Distributivgesetz

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})]\end{aligned}$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})]\end{aligned}$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned} y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\ &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\ &= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\ &= b \& \bar{a} \vee [\underbrace{(a \& b) \vee (b \& \bar{b})}_{R8b} \vee \underbrace{(a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})}_{R8b}] \end{aligned}$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a})\end{aligned}$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a})\end{aligned}$$

H3

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& (a \vee \bar{a}) \& (a \vee b) \vee (\bar{b} \& \bar{a})\end{aligned}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{R8b}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{R11b}}$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& (a \vee \bar{a}) \& (a \vee b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& 1 \vee (\bar{b} \& \bar{a})\end{aligned}$$

R5b

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& (a \vee \bar{a}) \& (a \vee b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& 1 \vee (\bar{b} \& \bar{a}) = b \vee (\bar{b} \& \bar{a})\end{aligned}$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& (a \vee \bar{a}) \& (a \vee b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& 1 \vee (\bar{b} \& \bar{a}) = b \vee (\bar{b} \& \bar{a})\end{aligned}$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& (a \vee \bar{a}) \& (a \vee b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& 1 \vee (\bar{b} \& \bar{a}) = b \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \vee \bar{a}\end{aligned}$$

6. Aufgabe – 6.1 Vereinfachung

$$\begin{aligned}y &= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a} \vee (b \& \bar{a}))] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [((a \vee \bar{b}) \& b) \vee ((a \vee \bar{b}) \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee [(a \& b) \vee (b \& \bar{b}) \vee (a \& \bar{a}) \vee (\bar{b} \& \bar{a})] \\&= b \& \bar{a} \vee (a \& b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& (a \vee \bar{a}) \& (a \vee b) \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \& 1 \vee (\bar{b} \& \bar{a}) = b \vee (\bar{b} \& \bar{a}) \\&= b \vee \bar{a} \Rightarrow \text{Implikation, a impliziert b, } a \rightarrow b\end{aligned}$$

6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y =$$

6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y = \overline{a \ \& \ b}$$

6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y = \overline{\underbrace{a \ \& \ b}_{\text{R12b}}}$$

6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y = \overline{\underbrace{a \ \& \ b}_{\text{R12b}}} =$$

6. Aufgabe

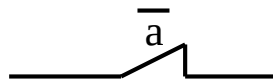
- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y = \overline{\underbrace{a \ \& \ b}_{\text{R12b}}} = \bar{a} \ \vee \ \bar{b}$$

6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

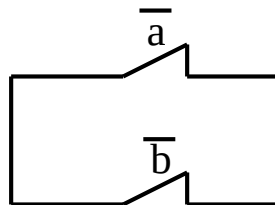
$$y = \overline{\underbrace{a \& b}_{\text{R12b}}} = \bar{a} \vee \bar{b}$$



6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

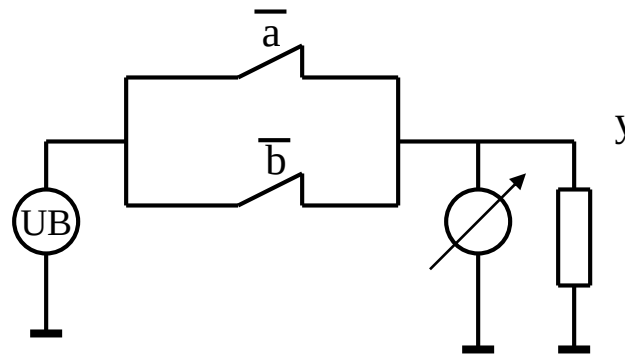
$$y = \overline{\underbrace{a \& b}_{\text{R12b}}} = \bar{a} \vee \bar{b}$$



6. Aufgabe

- 6.2 Entwerfen Sie ein Relaisschaltnetz, das die negative Konjunktion realisiert.

$$y = \overbrace{a \& b}^{\text{R12b}} = \bar{a} \vee \bar{b}$$





**Fröhliche Weihnachten und
einen guten Rutsch ins Neue Jahr !!!**