Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Übung - Digitaltechnik

5. Übung

Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

1. Aufgabe: DNF und KNF

1. Aufgabe

- Zeigen Sie, dass folgende Gleichungen gelten:

- 1.1 $(a \,\&\, b) \lor (a \,\&\, b) \lor (b \,\&\, \bar{c}) = (a \,\&\, c) \lor (b \,\&\, \bar{c})$
indem Sie beide Seiten zur DNF erweitern.

- 1.2 $(a \,\&\, b) \lor (a \equiv b) = (a \lor b)$
indem Sie beide Seiten zur KNF erweitern.

- Hinweis für unterschiedliche Schreibweisen:

$$(ab) = (a \,\&\, b) = (a \land b)$$
$$(a + b) = (a \lor b)$$

Herleitung der Normalformtheoreme

Symmetriediagramme:

	Konjunktion	Disjunktion
n = 2	$y = x_2 \& x_1$	$y = x_2 \vee x_1$

Konjunktion, n = 2 (y):

		x_1
	0_{0}	0_{1}
x_2	0_{2}	1_{3}

Disjunktion, n = 2 (y):

		x_1
	0_{0}	1_{1}
x_2	1_{2}	1_{3}

	Konjunktion	Disjunktion
n = 3	$y = x_3 \& x_2 \& x_1$	$y = x_3 \vee x_2 \vee x_1$

Konjunktion, n = 3 (y):

		x_1	x_1	
	0_{0}	0_{1}	0_{5}	0_{4}
x_2	0_{2}	0_{3}	1_{7}	0_{6}
			x_3	x_3

Disjunktion, n = 3 (y):

		x_1	x_1	
	0_{0}	1_{1}	1_{5}	1_{4}
x_2	1_{2}	1_{3}	1_{7}	1_{6}
			x_3	x_3

- Beliebige Einsstelle:

Konjunktion: $y = x_3 \& x_2 \& x_1$

		x_1	x_1	
	0_{0}	0_{1}	0_{5}	0_{4}
x_2	0_{2}	0_{3}	1_{7}	0_{6}
			x_3	x_3

Modifikation der Konjunktion $\longrightarrow$

Beliebige Einsstelle: $y = ?$

		x_1	x_1	
	0_{0}	0_{1}	0_{5}	1_{4}
x_2	0_{2}	0_{3}	0_{7}	0_{6}
			x_3	x_3

Abbildung der Belegung $\downarrow$

$$y = x_3 \& \overline{x_2} \& \overline{x_1}$$

Herleitung der Normalformtheoreme

<u>Symmetriediagramme:</u>

Konjunktion | **Disjunktion**

n = 2

$y = x_2 \,\&\, x_1$

y

		x_1
	0 $_{0}$	**0** $_{1}$
x_2	**0** $_{2}$	**1** $_{3}$

$y = x_2 \vee x_1$

y

		x_1
	0 $_{0}$	**1** $_{1}$
x_2	**1** $_{2}$	**1** $_{3}$

n = 3

$y = x_3 \,\&\, x_2 \,\&\, x_1$

y

		x_1	x_1	
	0 $_{0}$	**0** $_{1}$	**0** $_{5}$	**0** $_{4}$
x_2	**0** $_{2}$	**0** $_{3}$	**1** $_{7}$	**0** $_{6}$
			x_3	x_3

$y = x_3 \vee x_2 \vee x_1$

y

		x_1	x_1	
	0 $_{0}$	**1** $_{1}$	**1** $_{5}$	**1** $_{4}$
x_2	**1** $_{2}$	**1** $_{3}$	**1** $_{7}$	**1** $_{6}$
			x_3	x_3

- Beliebige Nullstelle:

Disjunktion: $y = x_3 \vee x_2 \vee x_1$

y

		x_1	x_1	
	0 $_{0}$	**1** $_{1}$	**1** $_{5}$	**1** $_{4}$
x_2	**1** $_{2}$	**1** $_{3}$	**1** $_{7}$	**1** $_{6}$
			x_3	x_3

Modifikation der Konjunktion $\longrightarrow$

Beliebige Nullstelle: $y = ?$

y

		x_1	x_1	
	1 $_{0}$	**1** $_{1}$	**1** $_{5}$	**0** $_{4}$
x_2	**1** $_{2}$	**1** $_{3}$	**1** $_{7}$	**1** $_{6}$
			x_3	x_3

Abbildung der Belegung

$$y = \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$$

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Grundalgen

- **Konjunktion:** UND-Verknüpfung, &
- **Disjunktion:** ODER-Verknüpfung, V
- **KNF:** $y = \mathop{\&}\limits_{j=0}^{2^n-1} (f_j \vee M_j)$ => UND-Verknüpfung aller Maxterme (Nullblöcke)

Bsp.: $y = \boxed{(\bar{a} \vee b \vee \bar{c})} \,\&\, \boxed{(a \vee \bar{b} \vee c)}$

		a	a	
	1	1	$\boxed{0}$	1
b	$\boxed{0}$	1	1	1
			c	c

- **DNF:** $y = \bigvee\limits_{j=0}^{2^n-1} (f_j \,\&\, m_j)$ => ODER-Verknüpfung aller Minterme (Einsblöcke)

Bsp.: $y = \boxed{(\bar{a} \,\&\, b \,\&\, \bar{c})} \vee \boxed{(a \,\&\, \bar{b} \,\&\, c)}$

		a	a	
	0	0	$\boxed{1}$	0
b	$\boxed{1}$	0	0	0
			c	c

Normalformtheorem: Hauptsatz der Schaltalgebra

Hauptsatz der Schaltalgebra:

Satz: Jede **beliebige Schaltfunktion** $y = f(x_n, \ldots, x_1)$ läßt sich als **Disjunktion** von **Mintermen** <**Konjunktion** von **Maxtermen**> **eindeutig** darstellen. In der **Disjunktion** <**Konjunktion**> treten genau diejenigen **Minterme** <**Maxterme**> auf, die zu den Einsstellen <Nullstellen> der Schaltfunktion gehören.

Beispiel: **$y = f(x_4, x_3, x_2, x_1) = 1$, wenn die Oktalzahl durch 3 dividierbar ist**

y		x_1	x_1		
	0_{0}	0_{1}	0_{5}	0_{4}	
x_2	0_{2}	1_{3}	0_{7}	1_{6}	
x_2	0_{12}	0_{13}	1_{17}	0_{16}	x_4
	0_{10}	1_{11}	0_{15}	1_{14}	x_4
			x_3	x_3	

DNF:
$$y = (\bar{x}_4 \& \bar{x}_3 \& x_2 \& x_1) \vee (\bar{x}_4 \& x_3 \& x_2 \& \bar{x}_1) \vee (x_4 \& \bar{x}_3 \& \bar{x}_2 \& x_1) \vee (x_4 \& x_3 \& \bar{x}_2 \& \bar{x}_1) \vee (x_4 \& x_3 \& x_2 \& x_1)$$

KNF:
$$\begin{aligned} y = {} & (x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1) \& (x_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \& (x_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1) \& \\ & (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1) \& (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \& (x_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \& \\ & (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee x_2 \vee x_1) \& (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1) \& (\bar{x}_4 \vee x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \& \\ & (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1) \& (\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee x_1) \end{aligned}$$

→ nur mit den **3 Grundverknüpfungen** (Operatoren) ***Konjunktion***, ***Disjunktion*** und ***Negation*** ist es möglich **jede beliebige Schaltfunktion** darzustellen

→ **[&, V, ¯] ist ein Basissystem der Schaltalgebra**

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

1. Aufgabe – 1.1

$$(a\&b)\vee(a\&c)\vee(b\&\bar{c})=(a\&c)\vee(b\&\bar{c})$$

$$(a\&b)\vee(a\&c)\vee(b\&\bar{c})=(a\&b\&1)\vee(a\&1\&c)\vee(1\&b\&\bar{c})$$

$$=[a\&b\&(c\vee\bar{c})]\vee[a\&(b\vee\bar{b})\&c]\vee[(a\vee\bar{a})\&b\&\bar{c}]$$

$$=[abc\vee ab\bar{c}]\vee[abc\vee a\bar{b}c]\vee[ab\bar{c}\vee\bar{a}b\bar{c}]$$

$$=\boxed{abc\vee ab\bar{c}\vee a\bar{b}c\vee\bar{a}b\bar{c}}$$

$$(a\&c)\vee(b\&\bar{c})=(a\&1\&c)\vee(1\&b\&\bar{c})$$

$$=[a\&(b\vee\bar{b})\&c]\vee[(a\vee\bar{a})\&b\&\bar{c}]$$

$$=\boxed{abc\vee a\bar{b}c\vee ab\bar{c}\vee\bar{a}b\bar{c}}$$

$$\boxed{abc\vee ab\bar{c}\vee a\bar{b}c\vee\bar{a}b\bar{c}}=\boxed{abc\vee a\bar{b}c\vee ab\bar{c}\vee\bar{a}b\bar{c}}$$

1. Aufgabe – 1.2

$$(a \& b) \vee (a \not\equiv b) = \boxed{(a \vee b)}$$

$$\begin{aligned}(a \& b) \vee (a \not\equiv b) &= (a \& b) \vee (a \& \bar{b}) \vee (\bar{a} \& b) \\ &= [(a \vee a) \& (a \vee \bar{b}) \& (a \vee b) \& (b \vee \bar{b})] \vee (\bar{a} \& b) \\ &= a \vee (\bar{a} \& b) \\ &= \boxed{a \vee b}\end{aligned}$$

$$\boxed{a \vee b} = \boxed{a \vee b}$$

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

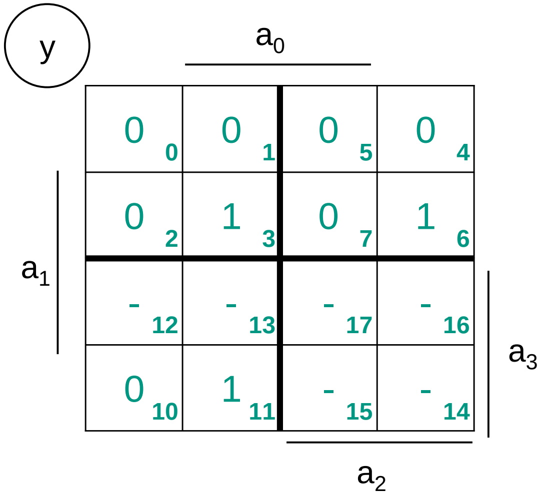
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

2. Aufgabe: Funktionstabelle

Freistellen („don‘t cares“)

- **„unvollständig definierte Schaltfunktion“:** es ist mindestens eine **Don‘t-Care-Belegung (Freistelle)** vorhanden *(siehe Beispiel rechts)*
- Ergibt sich bei Eingangsbelegungen, die schaltungsbedingt **nie auftreten können**



- Daher: Zuordnung eines beliebigen Werts aus $f_j \in \{ 0, 1 \}$ möglich
- Bei geschicktem Eins- oder Nullsetzen dieser Freistellen: mitunter erhebliche Vereinfachung des Ausdrucks (einfache Realisierung mit wenigen Logikelementen wird angestrebt)
- Die geschickte Wahl von Eins- und Nullstellen ist durch bloßes „Hinsehen“ nur für sehr kleine Ordnungen *n* möglich
- Beim Nelson-Verfahren werden Freistellen dazu verwendet, die Blockgröße zu erhöhen

2. Aufgabe

- Ein Hörsaal sei mit vier Glühlampen beleuchtet. Vier Sensoren (g_1 bis g_4) melden mit 0 die Funktion, mit 1 den Ausfall einer Glühlampe.
- Entwickeln Sie eine Schaltfunktion $f(g_1, g_2, g_3, g_4)$, die beim Ausfall von mindestens zwei Glühlampen den Hausmeister alarmiert (f=1). Wenn alle Glühlampen funktionieren, darf der Hausmeister nicht unnötig belästigt werden (f=0). Beim Ausfall genau einer Glühlampe darf er, muss aber nicht informiert werden.

- 2.1 Stellen Sie eine Funktionstabelle für f auf.

2. Aufgabe – 2.1

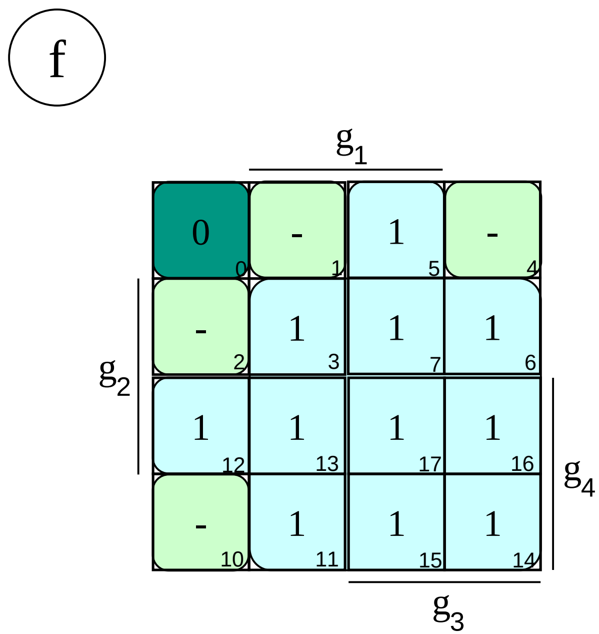
- 2.1 Stellen Sie eine Funktionstabelle für f auf.

- Vorgehensweise
  - Funktionswert f=0, wenn alle Variablen gleich Null sind => alle Glühlampen sind funktionsfähig.
  - Funktionswert f=1/0, d.h. unbestimmt oder „don`t care“, mit einem Strich gekennzeichnet, falls nur eine Variable gleich Eins ist => eine Glühlampe ist defekt
  - Funktionswert f=1, falls mehr als eine Variable gleich Eins ist => zwei oder mehr Glühlampen sind defekt

g_4	g_3	g_2	g_1	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	-
0	0	1	0	-
0	0	1	1	1
0	1	0	0	-
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	-
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

2. Aufgabe – 2.1

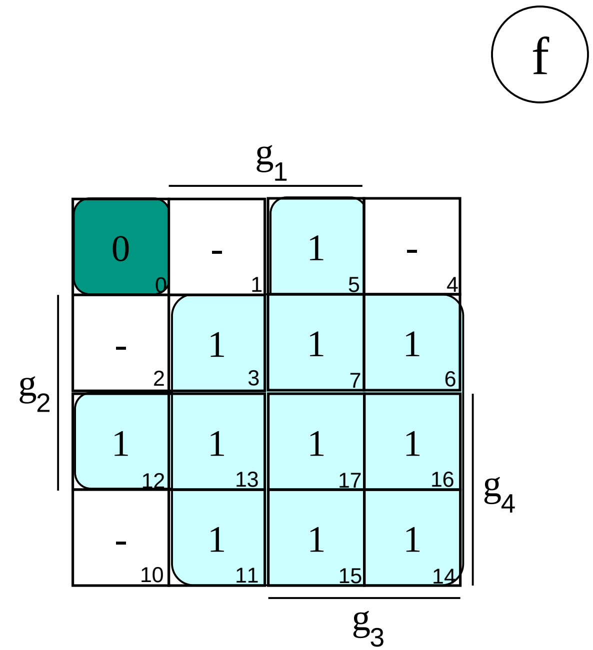
- Veranschaulichung mittels Symmetriediagramm:



g_4	g_3	g_2	g_1	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	-
0	0	1	0	-
0	0	1	1	1
0	1	0	0	-
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	-
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

2. Aufgabe 2.2

- 2.2 Geben Sie die Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und die Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$ an.



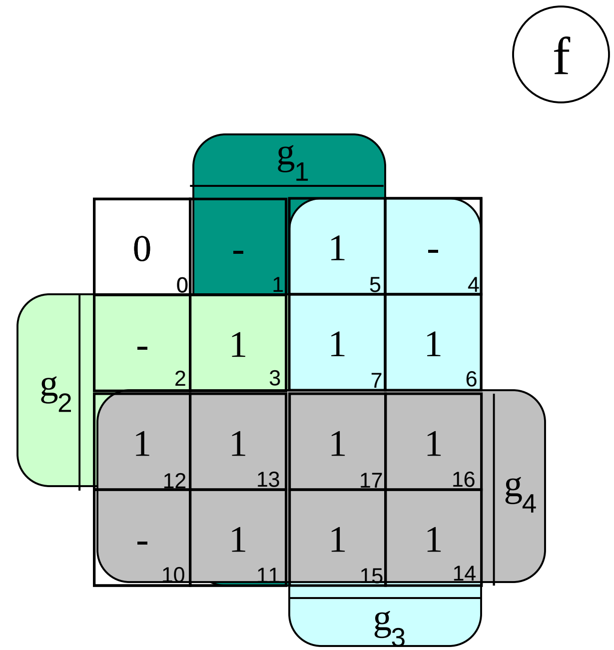
$$\{X_j\}_1 = \{3,5,6,7,11,12,13,14,15,16,17\}$$

$$\{X_j\}_0 = \{0\}$$

2. Aufgabe – 2.3

- 2.3 Stellen Sie f als DNF oder als KNF dar.
  Was passiert nun beim Ausfall genau einer Glühlampe?

KNF: $f = g_1 \vee g_2 \vee g_3 \vee g_4$



- Der Hausmeister wird auch alarmiert, wenn nur eine Glühlampe ausfällt.
- f ist die Einsvervollständigung der ursprünglichen Funktion.

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

3. Aufgabe: Min- und Maxterme

3. Aufgabe

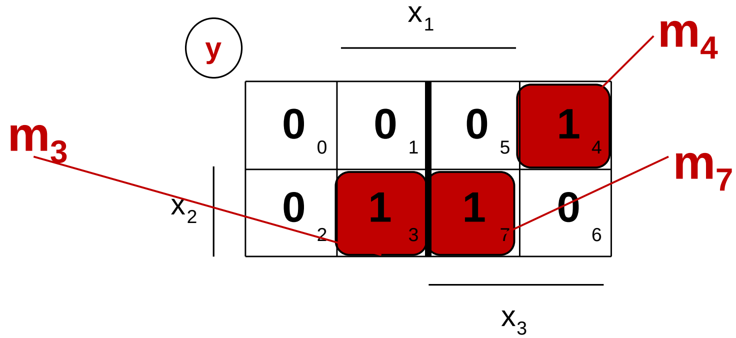
- Gegeben sei die Funktion $f(x_4 , x_3 , x_2 , x_1)$ durch die Angabe ihrer Minterme:

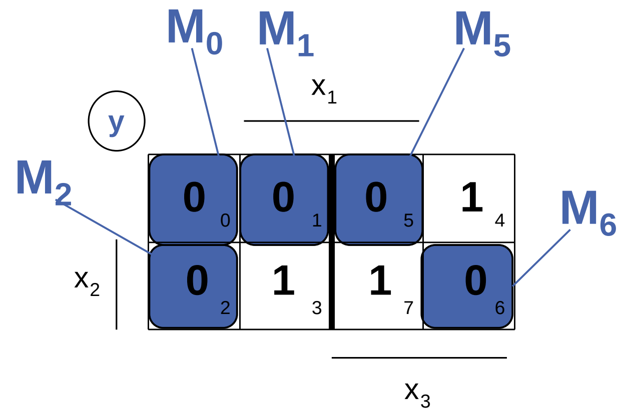
- $f = m_0 \ \vee \ m_1 \ \vee \ m_3 \ \vee \ m_7 \ \vee \ m_{16} \ \vee \ m_{17}$

- 3.1
  Geben Sie f in der im Buch auf S. 118 gezeigten Form mit oktalen Indizes an ($y_{xyz...}$).

Minterm und Maxterm

- Jede Schaltfunktion lässt sich durch Disjunktion ihrer Minterme (DNF) oder durch Konjunktion ihrer Maxterme (KNF) eindeutig beschreiben





- **Minterme m_i** projizieren **Einsstellen** auf eine beliebige Stelle im S-Diagramm

$$m_3 = \overline{x_3} \,\&\, x_2 \,\&\, x_1$$

$$m_4 = x_3 \,\&\, \overline{x_2} \,\&\, \overline{x_1}$$

$$m_7 = x_3 \,\&\, x_2 \,\&\, x_1$$

- **Maxterme M_i** projizieren **Nullstellen** auf eine beliebige Stelle im S-Diagramm

$$M_0 = x_3 \vee x_2 \vee x_1$$

$$M_1 = x_3 \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$

$$M_2 = x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_5 = \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$

$$M_6 = \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$\boxed{(m_3 \vee m_4 \vee m_7) \equiv y \equiv (M_0 \,\&\, M_1 \,\&\, M_2 \,\&\, M_5 \,\&\, M_6)}$$

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

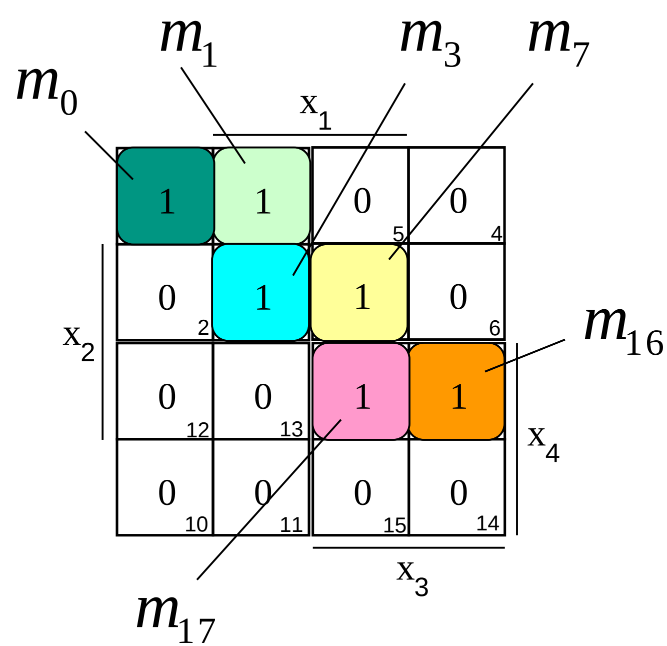
3. Aufgabe – 3.1

j_0	x_4	x_3	x_2	x_1	f	
0	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	1	1	3
2	0	0	1	0	0	
3	0	0	1	1	1	
4	0	1	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	
6	0	1	1	0	0	
7	0	1	1	1	1	2
10	1	0	0	0	0	
11	1	0	0	1	0	
12	1	0	1	0	0	0
13	1	0	1	1	0	
14	1	1	0	0	0	
15	1	1	0	1	0	4
16	1	1	1	0	1	
17	1	1	1	1	1	1

Oktalwerte ablesen !!!

$$f = m_0 \vee m_1 \vee m_3 \vee m_7 \vee m_{16} \vee m_{17}$$

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = y_{140213}$$



3. Aufgabe – 3.3

- Geben Sie die drei Maxterme mit den kleinsten Indizes an, für die $f_j = 0$ gilt

$$M_2 = x_4 \vee x_3 \vee \overline{x_2} \vee x_1$$

$$M_4 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee x_1$$

$$M_5 = x_4 \vee \overline{x_3} \vee x_2 \vee \overline{x_1}$$

		x_1	x_1		
	1 (0)	1 (1)	0 (5)	0 (4)	
x_2	0 (2)	1 (3)	1 (7)	0 (6)	
x_2	0 (12)	0 (13)	1 (17)	1 (16)	x_4
	0 (10)	0 (11)	0 (15)	0 (14)	x_4
			x_3	x_3	

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

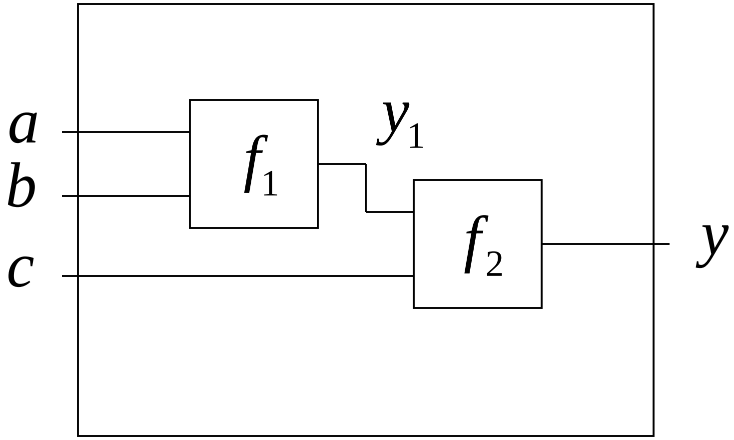
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

4. Aufgabe: Funktionstabelle

4. Aufgabe

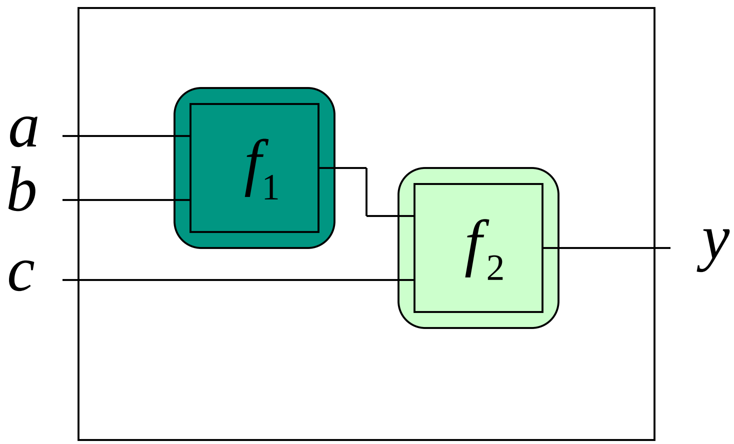
- Eine Schaltfunktion besteht, wie im nachfolgenden Bild dargestellt, aus den Teilfunktionen $y_1 = f_1(a, b)$ und $y = y_2 = f_2(c, y_1)$.
- Dafür ist die folgende Funktionstabelle bekannt:



a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

4. Aufgabe – 4.1

- Ist die Funktion vollständig spezifiziert?



a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

$$y_1 = a \not\equiv b = a \; xor \; b = a\bar{b} \vee \bar{a}b$$

$$y \;= y_1 \equiv c = y_1 c \vee \overline{y_1}\,\bar{c}$$

KIT – Universität des Landes Baden-Württemberg und nationales Forschungszentrum in der Helmholtz-Gemeinschaft
Institut für Technik der Informationsverarbeitung

4. Aufgabe – 4.2

- Stellen Sie die Funktionstabelle für die Funktion y = f(a,b,c) auf.

a	b	y_1	c	y
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0

a	b	c	y_1	y
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Institut für Technik der Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

5. Aufgabe: Basissysteme

5. Aufgabe

Stellen Sie folgenden Ausdruck in allen in der Vorlesung aufgeführten Basissystemen dar:

$$y = (a \,\&\, \overline{b}) \vee \overline{a}$$

Basissysteme

- 3 Operatoren
  - NICHT, UND, ODER

- 2 Operatoren
  - NICHT, UND
  - NICHT, ODER
  - UND, ANTIVALENZ

- 1 Operator
  - NAND
  - NOR

- Darstellung in 6 Basissystemen

Beziehungen der Schaltalgebra

Regeln für ein Element

R5a	$a \vee 0 = a$	R5b	$a \,\&\, 1 = a$
R6a	$a \vee 1 = 1$	R6b	$a \,\&\, 0 = 0$
R7a	$a \vee a = a$	R7b	$a \,\&\, a = a$
R8a	$a \vee \overline{a} = 1$	R8b	$a \,\&\, \overline{a} = 0$

R9 $\overline{(\overline{a})} = \overline{\overline{a}} = a$

Regeln für zwei oder mehr Elemente

R10a $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$ R10b $a \,\&\, (b \,\&\, c) = (a \,\&\, b) \,\&\, c = a \,\&\, b \,\&\, c$

(assoziative Gesetze)

R11a $a \vee (a \,\&\, b) = a$ R11b $a \,\&\, (a \vee b) = a$

(Absorptionsgesetze)

R12a $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \,\&\, \overline{b}$ R12b $\overline{(a \,\&\, b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$

(De Morgansche Regeln)

5. Aufgabe – 5.1

- NICHT, UND, ODER

$$y = (a \,\&\, \bar{b}) \vee \bar{a} = (a \vee \bar{a}) \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{a})$$

$$= 1 \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{a}) \;= \bar{b} \vee \bar{a}$$

DeMorgan

- NICHT, UND

$$y = \bar{b} \vee \bar{a} = \overline{\overline{\bar{b} \vee \bar{a}}} = \overline{\bar{\bar{b}} \,\&\, \bar{\bar{a}}} = \overline{b \,\&\, a}$$

- NICHT, ODER

$$y = \bar{b} \vee \bar{a}$$

5. Aufgabe

- UND, ANTIVALENZ

$$y = \overline{b \,\&\, a} = (b \,\&\, a) \not\equiv 1$$

$$\text{mit } \overline{a} = a \not\equiv 1$$

- NAND

$$y = \overline{b \,\&\, a} = a \,\overline{\&}\, b$$

$$\text{mit } a \vee a = a$$

$$a \,\overline{\vee}\, a = \overline{a}$$

- NOR

$$y = \overline{b} \vee \overline{a} \overset{(R9)}{=} \overline{\overline{\overline{b} \vee \overline{a}}} = \overline{\overline{b} \,\overline{\vee}\, \overline{a}} \overset{(R7a)}{=} \overline{(\overline{b} \,\overline{\vee}\, \overline{a}) \vee (\overline{b} \,\overline{\vee}\, \overline{a})}$$

$$= [(a \,\overline{\vee}\, a) \,\overline{\vee}\, (b \,\overline{\vee}\, b)] \,\overline{\vee}\, [(a \,\overline{\vee}\, a) \,\overline{\vee}\, (b \,\overline{\vee}\, b)]$$