Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

Übung - Digitaltechnik

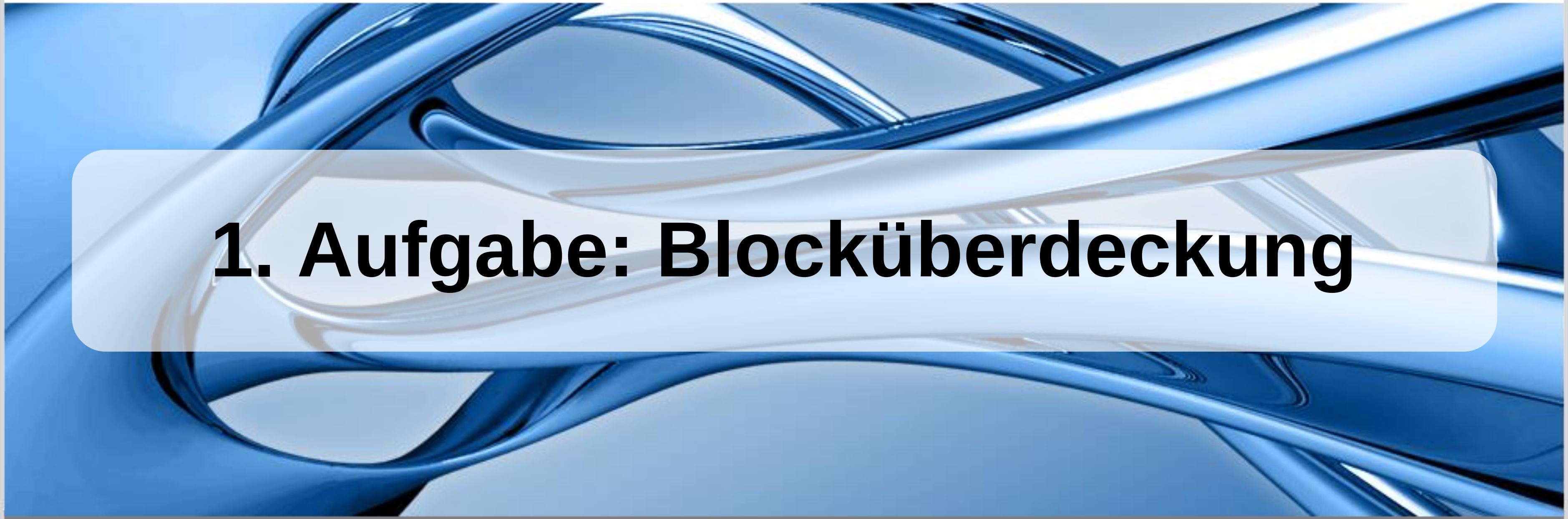
6. Übung

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)



1. Aufgabe: Blocküberdeckung

Minimierung (Optimierung)

- Aus den schaltalgebraischen Ausdrücken ist ersichtlich, dass der Beschreibungsaufwand sinkt, je weniger Terme vorhanden sind bzw. je mehr Literale aus den Termen entfallen

- Bei der schaltungstechnischen Realisierung zeigt sich ebenfalls, dass entsprechende Aufwendungen für Schaltelemente von der Anzahl der Terme und der verwendeten Literale abhängen

- Bei der DNF (KNF) benötigt man für jede Einsstelle (Nullstelle) einen Minterm (Maxterm)

  → durch gezieltes Weglassen von Literalen in einem Minterm (Maxterm) kann dieser Term mehrere Einsstellen (Nullstellen) repräsentieren

  → Anzahl der benötigten Terme und Literale wird reduziert

  → Minimierung von Schaltfunktionen!

Minimierung

Primterme und Eins- bzw. Nullstellenüberdeckung

→ Einsstellen (Nullstellen) verschiedener Primterme können “überlappen“

→ (kosten)günstigste Auswahl von Primtermen gesucht, die alle Einsstellen (Nullstellen) der Funktion überdecken -> Überdeckungsproblem!

→ das Gesamtproblem nennt man das Minimierungsproblem

Bewertungskriterium

→ zur Bewertung unterschiedlicher Lösungen des Minimierungsproblems wird die Anzahl der Literale der Primterme zzgl. der Zahl der verwendeten Terme verwendet

Beispiel:

$$y = (x_4 \,\&\, \overline{x_3} \,\&\, x_2 \,\&\, \overline{x_1}) \vee (x_4 \,\&\, x_3 \,\&\, \overline{x_2}) \vee (x_5 \,\&\, x_3)$$

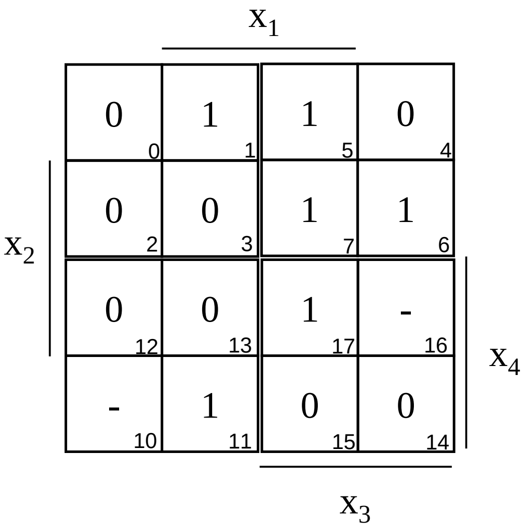
$$L(y) = 4 + 3 + 2 + 3 = 12$$

Gesucht: Auswahl von Primtermen mit L(y) minimal

Minimierungsmethode

Minimierung am Symmetriediagramm

- Die Minimierung mit Symmetriediagramm stellt eine graphische Methode dar -> Ausnutzung der Symmetrierelationen
- Zusammenfassung von Belegungen zu maximalen Blöcken
  - → Finden aller Primblöcke (*charakteristische Terme* ≅ Primterme)
  - → Überdeckung aller Einsstellen (bzw. Nullstellen)



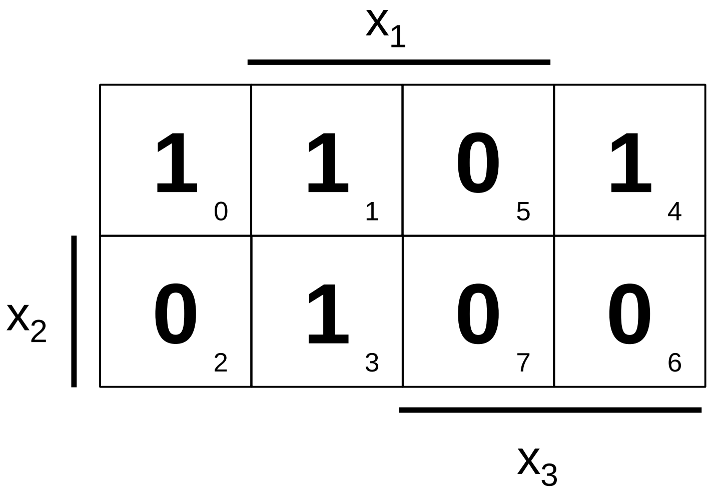
0 0	1 1	1 5	0 4
0 2	0 3	1 7	1 6
0 12	0 13	1 17	- 16
- 10	1 11	0 15	0 14

1. Aufgabe – 1.1

- Die Einsstellenmenge einer vollständig definierten Schaltfunktion $y = f(x_3, x_2, x_1)$ sei gegeben mit

$$\{X_j\}_1 = \{0,1,3,4\}$$

- **1.1** Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein und geben Sie die Nustellenmenge an $\{X_j\}_0$.

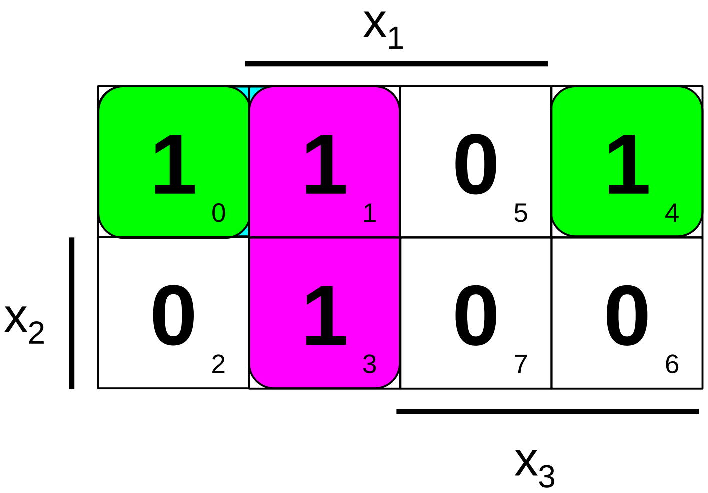


1 0	**1** 1	**0** 5	**1** 4
0 2	**1** 3	**0** 7	**0** 6

$$\{X_j\}_0 = \{2,5,6,7\}$$

1. Aufgabe – 1.2

- **1.2** Geben Sie die vollständige Blocküberdeckung in **disjunktiver** Form an.



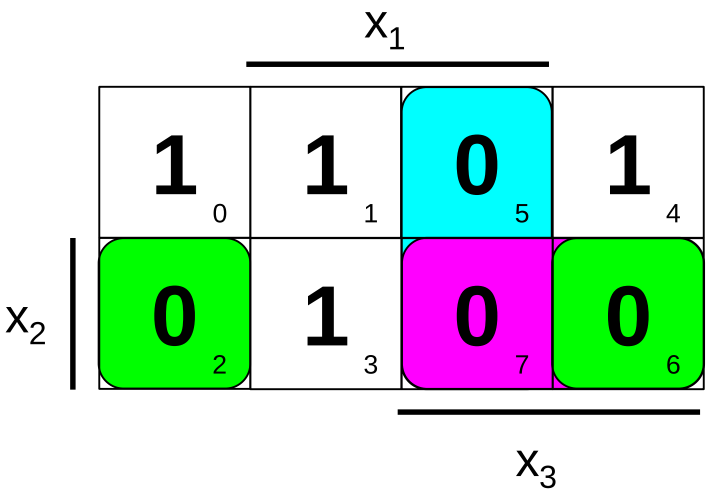
1_{0}	1_{1}	0_{5}	1_{4}
0_{2}	1_{3}	0_{7}	0_{6}

$$y = \boxed{\overline{x_2} \,\&\, \overline{x_3}} \vee \boxed{x_1 \,\&\, \overline{x_3}} \vee \boxed{\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}}$$

$$y = \boxed{x_1 \,\&\, \overline{x_3}} \vee \boxed{\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2}}$$

1. Aufgabe – 1.3

- **1.3** Geben Sie die vollständige Blocküberdeckung in **konjunktiver** Form an.



1_{0}	1_{1}	0_{5}	1_{4}
0_{2}	1_{3}	0_{7}	0_{6}

$$y = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \,\&\, (\overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \,\&\, (x_1 \vee \overline{x_2})$$

$$y = (\overline{x_1} \vee \overline{x_3}) \,\&\, (x_1 \vee \overline{x_2})$$

1. Aufgabe – 1.4

- **1.4** Zur Implementierung der Funktion stehen nur NAND-Gatter (mit mehreren Eingängen) zur Verfügung. Formen Sie die disjunktive Form mit Hilfe der DeMorganschen Regeln entsprechend um.

$$y = (x_1 \,\&\, \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2})$$

$$= \overline{\overline{(x_1 \,\&\, \overline{x_3}) \vee (\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2})}}$$

$$\text{mit } \overline{\text{a}} = \overline{\text{a} \,\&\, \text{a}}$$

$$= \overline{\overline{(x_1 \,\&\, \overline{x_3})} \,\&\, \overline{(\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2})}}$$

$$= \text{a} \,\overline{\&}\, \text{a}$$

$$= (x_1 \,\overline{\&}\, \overline{x_3}) \,\overline{\&}\, (\overline{x_1} \,\overline{\&}\, \overline{x_2})$$

$$= (x_1 \,\overline{\&}\, (x_3 \,\overline{\&}\, x_3)) \,\overline{\&}\, ((x_1 \,\overline{\&}\, x_1) \,\overline{\&}\, (x_2 \,\overline{\&}\, x_2))$$

Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

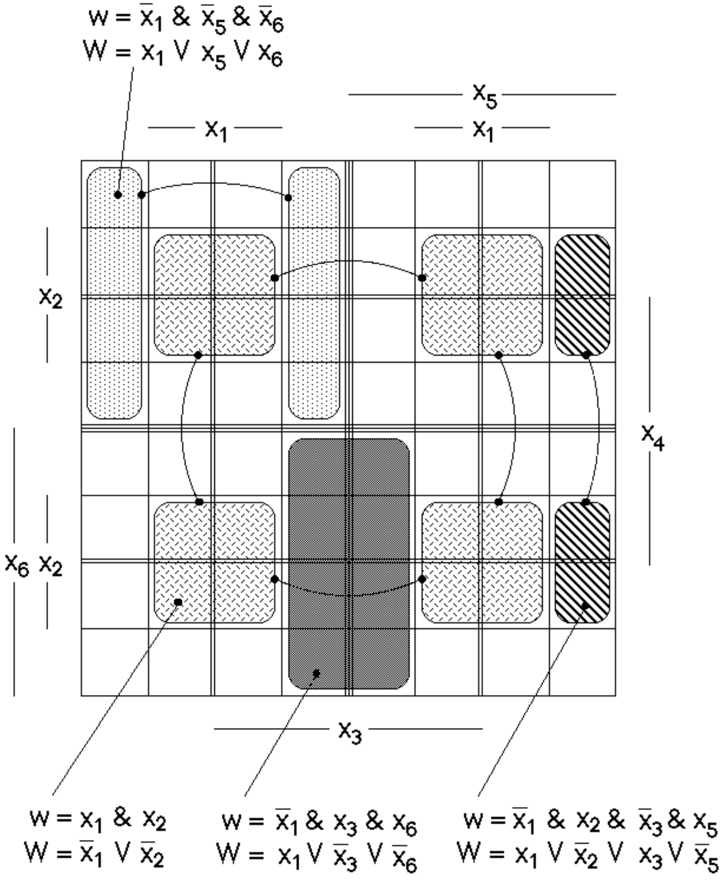
2. Aufgabe: DMF

Minimierungsmethode

Minimierung am Symmetriediagramm

→ Finden von Primblöcken (Primtermen) in Symmetriediagrammen

- **Sukzessive Bildung** von **Blöcken** aus **Einsstellen** (Nullstellen) und **Freistellen** → durch **Spiegelung** von **kleineren Blöcken** (einzelne Einsstellen sind kleinste Blöcke) an allen möglichen **Symmetrielinien**
- **Maximal zusammengefasste Blöcke** von **Einsstellen** sind ***Primeinsblöcke***, wenn keine Spiegelung mehr möglich

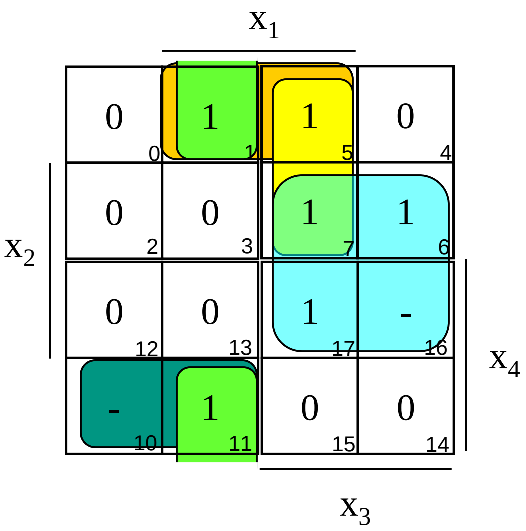


Minimierungsmethode

Minimierung am Symmetriediagramm

Beispiel (1):

- Gegeben: y = f (x4, x3, x2, x1) durch die Angabe der Eins- und Nullstellen im Symmetriediagramm
- Gesucht: Kürzester algebraischer Ausdruck
  → Disjunktive Minimalform (DMF)
- Primterme zur Bildung einer DMF spezifizieren Primeinsblöcke
  → werden *Primimplikanten* genannt
  (*Primimplikate* für Konjunktive Minimalform KMF)
- Die farbig dargestellten *Primimplikanten* überdecken Eins- und Freistellen



0 0	1 1	1 5	0 4
0 2	0 3	1 7	1 6
0 12	0 13	1 17	- 16
- 10	1 11	0 15	0 14

Minimierungsmethode

Minimierung am Symmetriediagramm

Beispiel (2):

- Als Primimplikanten erhält man:

$w_1 = x_3 x_2$ $w_2 = \overline{x_4}\,\overline{x_2} x_1$ $w_3 = \overline{x_4} x_3 x_1$ $w_4 = \overline{x_3}\,\overline{x_2} x_1$ $w_5 = x_4 \overline{x_3}\,\overline{x_2}$

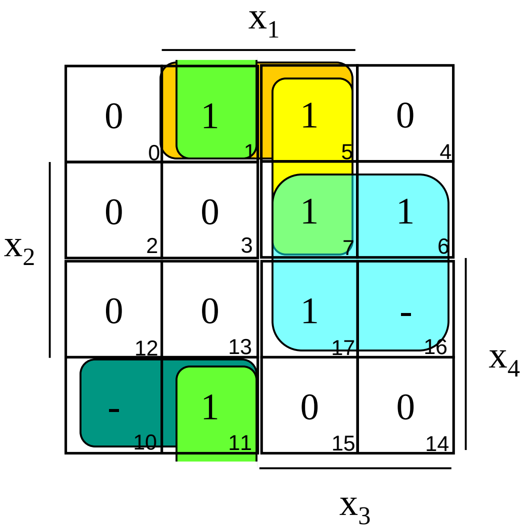
Vorgehensweise:

→ Auswahl der Primimplikanten, die allein eine Einsstelle überdecken

→ sogenannte *Kerne*

→ sind durch die *Kerne* alle Einstellen überdeckt -> Minimallösung

→ sonst: Auswahl weiterer Primimplikanten (Strategie + Bewertung notwendig!)



0 0	1 1	1 5	0 4
0 2	0 3	1 7	1 6
0 12	0 13	1 17	- 16
- 10	1 11	0 15	0 14

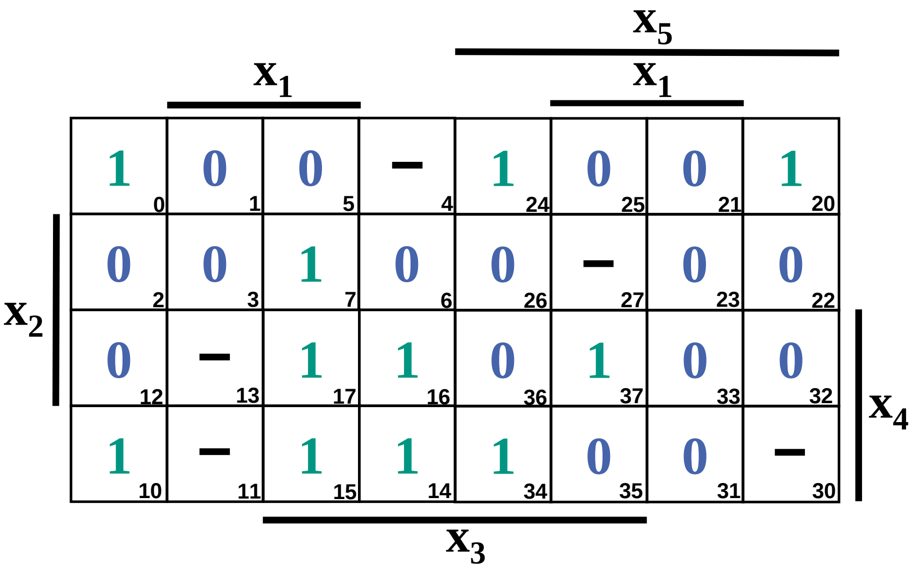
Mögliche Lösung: $y = w_1 \vee w_2 \vee w_4$

2. Aufgabe – 2.1

- Gegeben sei eine unvollständig definierte Schaltfunktion $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ durch ihre Einsstellenmenge $\{X_j\}_1$ und ihre Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$.

$$\{X_j\}_1 = \{0, 7, 10, 14, 15, 16, 17, 20, 24, 34, 37\}$$
$$\{X_j\}_0 = \{1, 2, 3, 5, 6, 12, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 33, 35,36\}$$

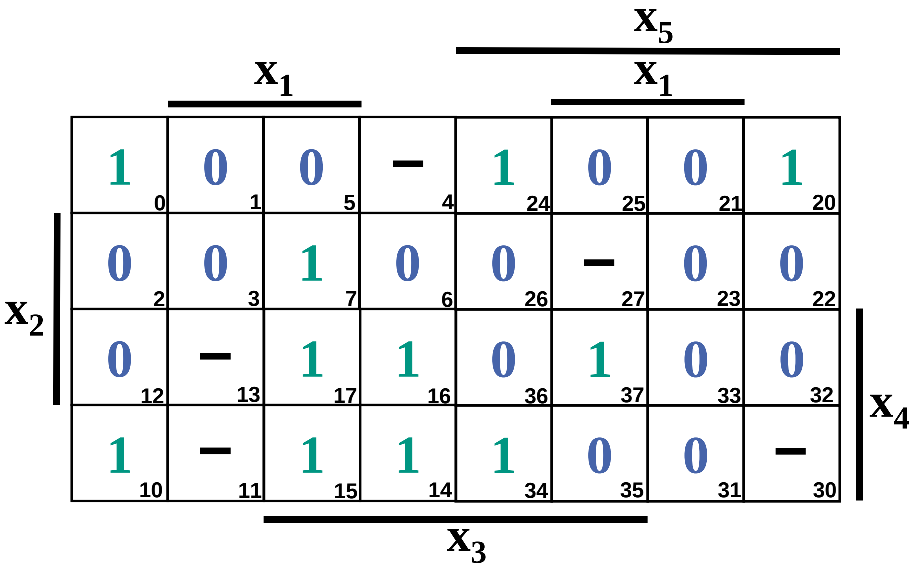
- **2.1** Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.



1 0	0 1	0 5	– 4	1 24	0 25	0 21	1 20
0 2	0 3	1 7	0 6	0 26	– 27	0 23	0 22
0 12	– 13	1 17	1 16	0 36	1 37	0 33	0 32
1 10	– 11	1 15	1 14	1 34	0 35	0 31	– 30

2. Aufgabe – 2.2

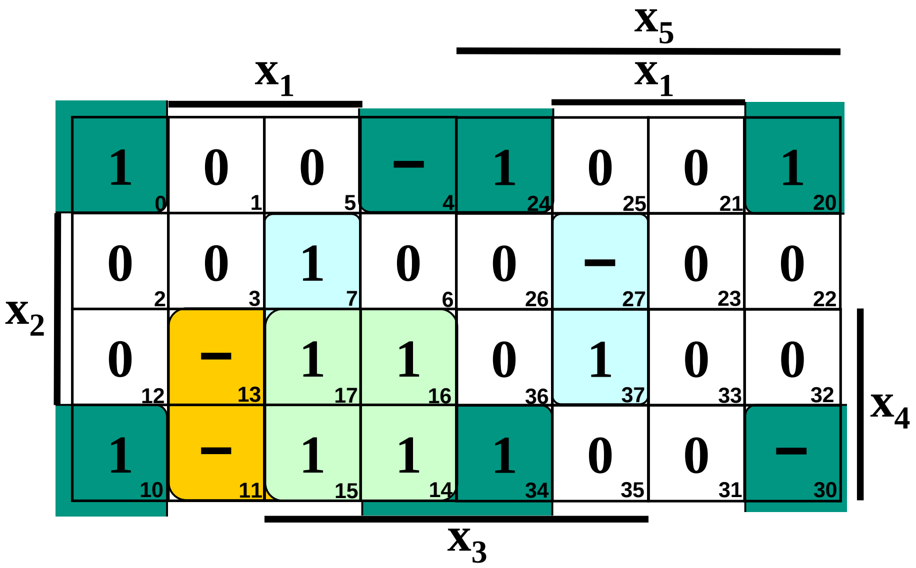
- **2.2** Bestimmen Sie graphisch eine disjunktive Minimalform der Schaltfunktion (DMF), indem Sie alle Primblöcke in das Symmetriediagramm eintragen.
Geben Sie den Funktionsausdruck für die DMF an.



1 0	0 1	0 5	– 4	1 24	0 25	0 21	1 20
0 2	0 3	1 7	0 6	0 26	– 27	0 23	0 22
0 12	– 13	1 17	1 16	0 36	1 37	0 33	0 32
1 10	– 11	1 15	1 14	1 34	0 35	0 31	– 30

2. Aufgabe – 2.2

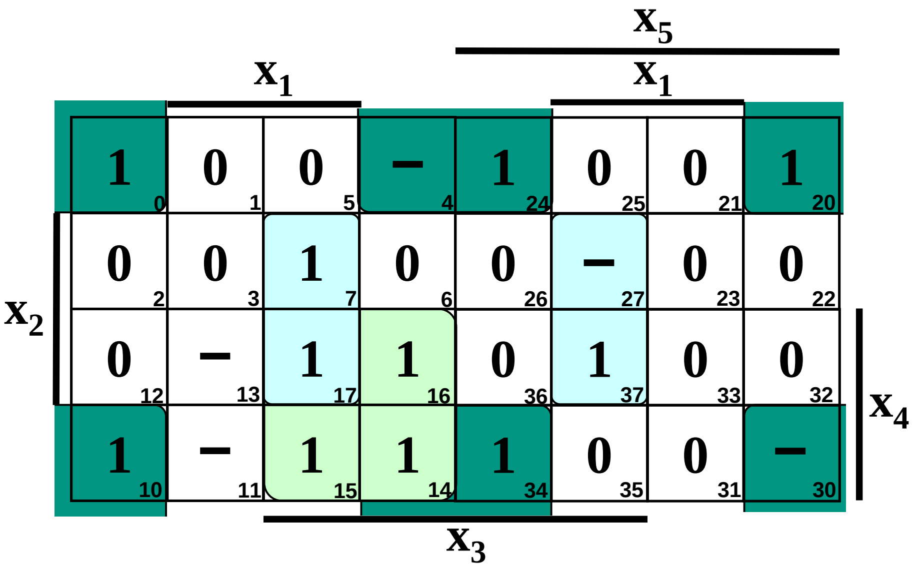
- **2.2** Bestimmen Sie graphisch eine disjunktive Minimalform der Schaltfunktion (DMF), indem Sie alle Primblöcke in das Symmetriediagramm eintragen.
  Geben Sie den Funktionsausdruck für die DMF an.



1 0	0 1	0 5	– 4	1 24	0 25	0 21	1 20
0 2	0 3	1 7	0 6	0 26	– 27	0 23	0 22
0 12	– 13	1 17	1 16	0 36	1 37	0 33	0 32
1 10	– 11	1 15	1 14	1 34	0 35	0 31	– 30

2. Aufgabe – 2.2

- **2.2** Bestimmen Sie graphisch eine disjunktive Minimalform der Schaltfunktion (DMF), indem Sie alle Primblöcke in das Symmetriediagramm eintragen.
  Geben Sie den Funktionsausdruck für die DMF an.



1 0	0 1	0 5	– 4	1 24	0 25	0 21	1 20
0 2	0 3	1 7	0 6	0 26	– 27	0 23	0 22
0 12	– 13	1 17	1 16	0 36	1 37	0 33	0 32
1 10	– 11	1 15	1 14	1 34	0 35	0 31	– 30

$$y = \boxed{(\overline{x_1} \,\&\, \overline{x_2})} \vee \boxed{(x_3 \,\&\, x_4 \,\&\, \overline{x_5})} \vee \boxed{(x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3)}$$

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

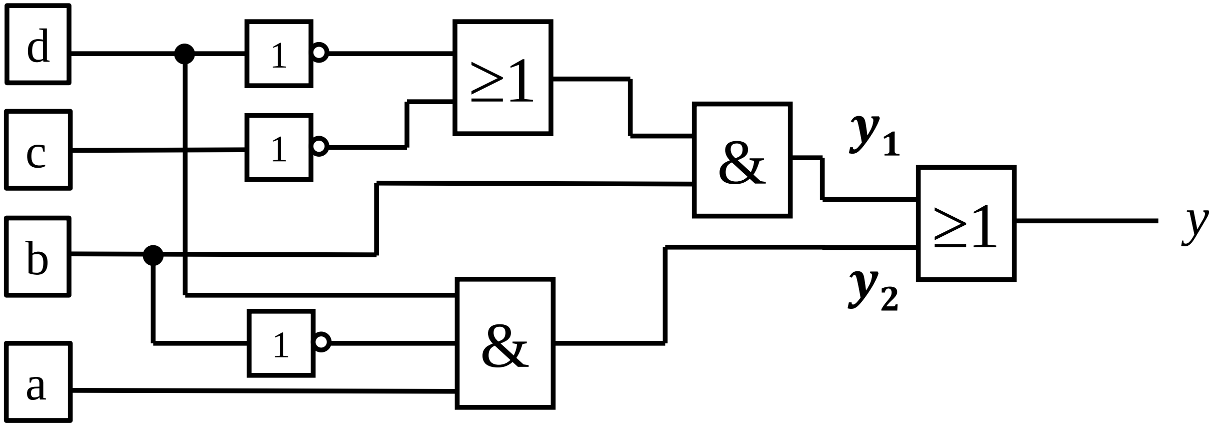
3. Aufgabe: Gatterschaltung

3. Aufgabe – 3.1

- Gegeben sei die Schaltfunktion, $y = f(a, b, c, d)$, welche sich aus der ODER - Verknüpfung der beiden Schaltfunktionen $y_1 = f_1(a, b, c, d)$ und $y_2 = f_2(a, b, c, d)$ ergibt.

$$y_1 = \left(\bar{c} \vee \bar{d}\right) \,\&\, b \qquad\qquad y_2 = d \,\&\, \bar{b} \,\&\, a$$

- **3.1** Zeichnen Sie eine Gatterschaltung, die die Funktion y realisiert.



3. Aufgabe – 3.2

- **3.2** Geben Sie die Funktionstabelle für die Funktion *y* an. Wie lauten die Nullstellen der Funktion? Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

$$\boldsymbol{y_1} = (\bar{c} \vee \bar{d})\ \&\ \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{y_2} = \boldsymbol{d}\ \&\ \bar{\boldsymbol{b}}\ \&\ \boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{y_2}$$

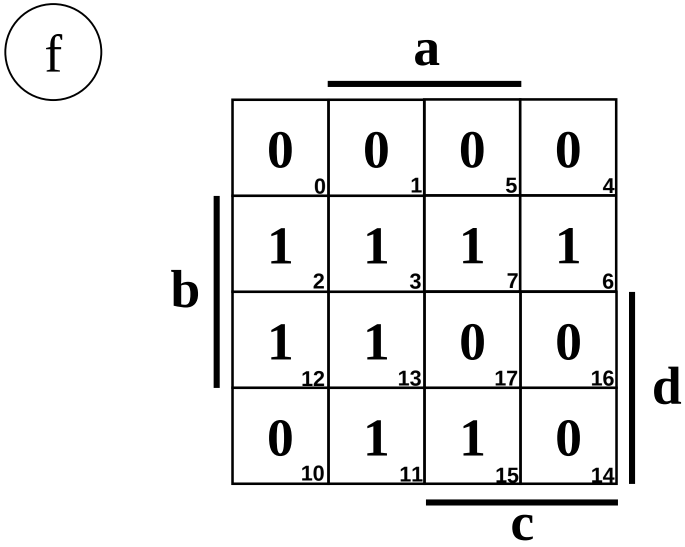
j_0	d	c	b	a	y_1	y_2	y
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1	0	1
4	0	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1
10	1	0	0	0	0	0	0
11	1	0	0	1	0	1	1
12	1	0	1	0	1	0	1
13	1	0	1	1	1	0	1
14	1	1	0	0	0	0	0
15	1	1	0	1	0	1	1
16	1	1	1	0	0	0	0
17	1	1	1	1	0	0	0

$$\rightarrow \{X_j\}_0 = \{0, 1, 4, 5, 10, 14, 16, 17\}$$

3. Aufgabe – 3.2

- **3.2** Geben Sie die Funktionstabelle für die Funktion *y* an. Wie lauten die Nullstellen der Funktion? Tragen Sie die Funktion in ein Symmetriediagramm ein.

$$\rightarrow \{X_j\}_0 = \{0, 1, 4, 5, 10, 14, 16, 17\}$$



0 0	0 1	0 5	0 4
1 2	1 3	1 7	1 6
1 12	1 13	0 17	0 16
0 10	1 11	1 15	0 14

3. Aufgabe – 3.3

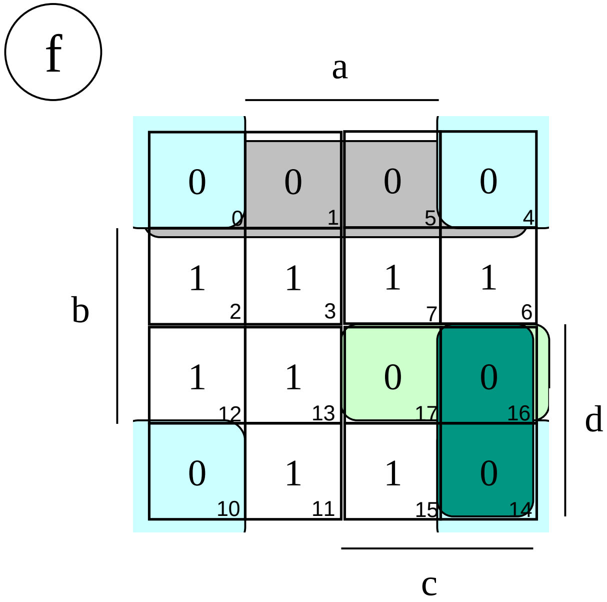
- **3.3** Geben Sie *alle* Primnullblöcke der Funktion an.

$A: b \vee d$

$B: \bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}$

$C: a \vee b$

$D: a \vee \bar{c} \vee \bar{d}$



0 $_{0}$	0 $_{1}$	0 $_{5}$	0 $_{4}$
1 $_{2}$	1 $_{3}$	1 $_{7}$	1 $_{6}$
1 $_{12}$	1 $_{13}$	0 $_{17}$	0 $_{16}$
0 $_{10}$	1 $_{11}$	1 $_{15}$	0 $_{14}$

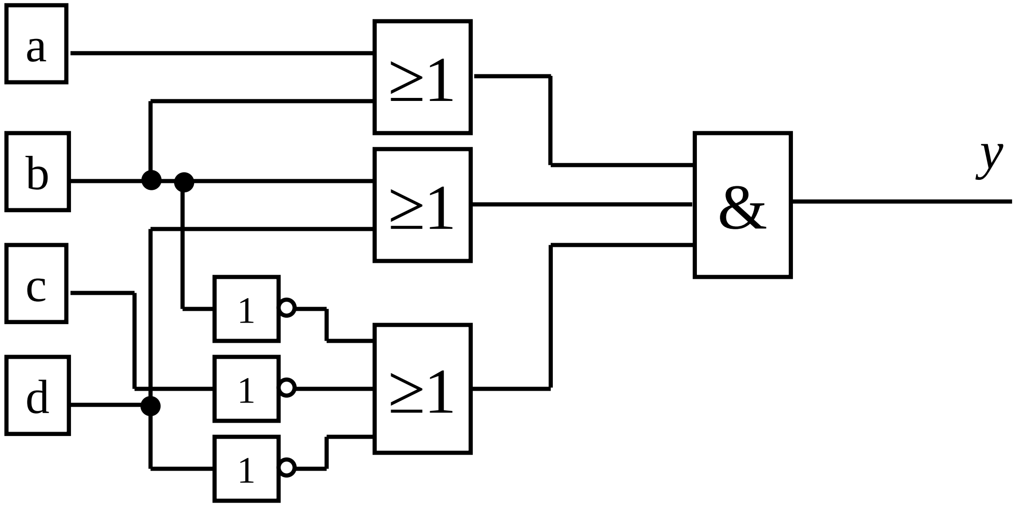
- **3.4** Geben Sie eine konjunktive Minimalform der Funktion an.

$$y = (a \vee b) \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \,\&\, (b \vee d)$$

3. Aufgabe – 3.5

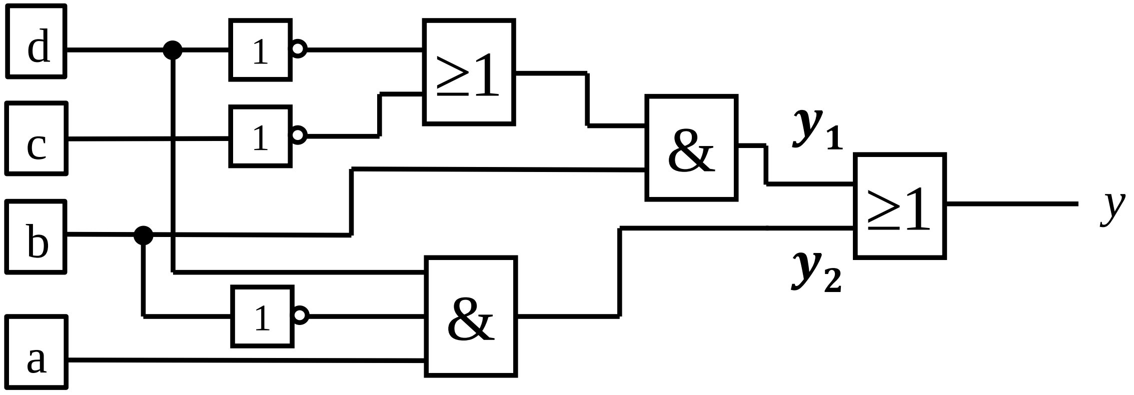
- **3.5** Geben Sie eine Gatterschaltung an, die die minimierte Funktion realisiert.

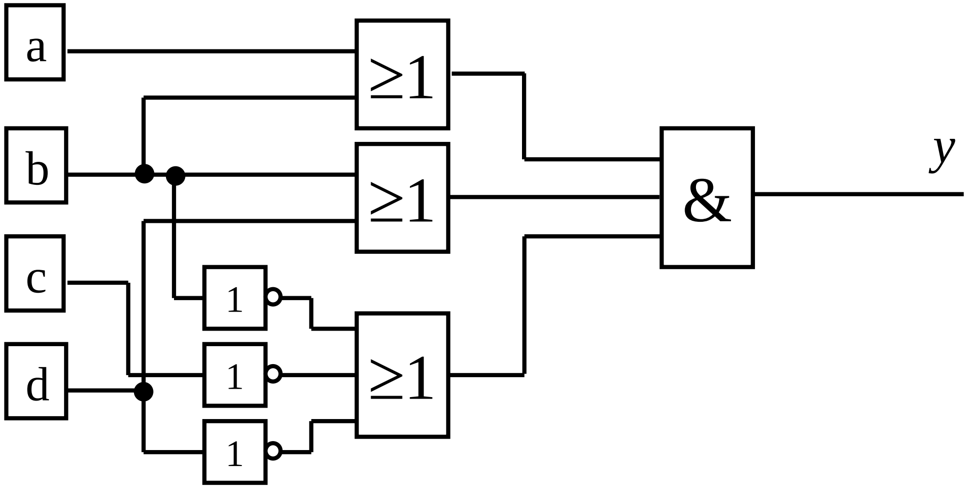
$$y = (a \vee b) \,\&\, (\bar{b} \vee \bar{c} \vee \bar{d}) \,\&\, (b \vee d)$$



3. Aufgabe

Vergleich der beiden Schaltungsrealisierungen vor und nach der Minimierung.





Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

4. Aufgabe: Nelson-Patrick-Verfahren

Minimierungsmethoden

Formale algebraische Minimierung

➔ Das Nelson/Petrick-Verfahren

- sehr leistungsfähiges algebraisches Verfahren
- Nelson-Verfahren: Bestimmung der Menge aller Primimplikanten (bzw.Primimplikaten)
- Petrick-Verfahren: Bestimmung der kostenminimalen Auswahl von Primimplikanten zur Einsstellenüberdeckung (bzw.Primimplikaten zur Nullstellenüberdeckung)

  Alternativ: graphisch mit Überdeckungstabelle
  + Regeln zur Abarbeitung/Vereinfachung

Ergebnis: kostenminimaler algebraischer Ausdruck der zu realisierenden digitalen Schaltfunktion

Nelson-Verfahren

- Ziel: liefert zu einer (ggf. unvollständig definierten) Schaltfunktion f alle…

…Primimplikanten:

- Bildung der **Einsstellenergänzung** f^E : Alle Freistellen werden zu „1“ deklariert
- Mittels bekannter algebraischer Verfahren wird die **KNF** [!] von f^E gebildet

…Primimplikate:

- Bildung der **Nullstellenergänzung** f^N **:** Alle Freistellen werden zu „0“ deklariert
- Mittels bekannter algebraischer Verfahren wird die **DNF** [!] von f^N gebildet

- Schrittweise ausdistribuieren, Termanteile, die **ausschließlich Freistellen** von f überdecken, direkt streichen
- Die Anzahl der Primblöcke kann anschließend mit dem **Petrick-Verfahren** minimiert werden

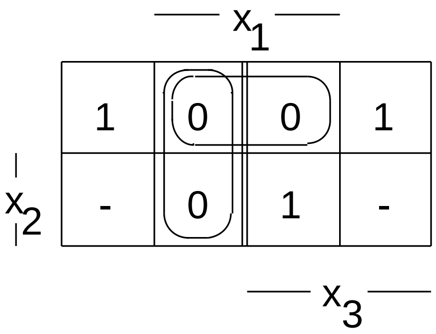
Minimierungsmethoden

Nelson-Verfahren:

Beispiel:

- Man nehme eine Nullblocküberdeckung:

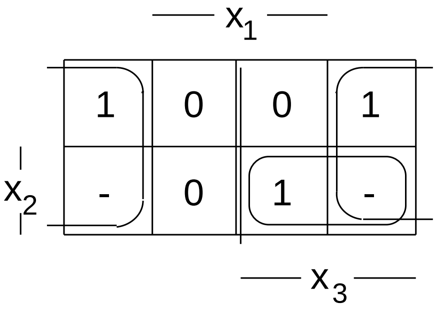
$$f^E = (\overline{x_1} \vee x_2)\,\&\,(\overline{x_1} \vee x_3)$$



1	0	0	1
-	0	1	-

- Durch Ausdistribuieren + Umformung erhält man:

$$\begin{aligned} f^E &= (\overline{x_1} \vee x_2)\,\&\,(\overline{x_1} \vee x_3) && \text{Distributivgesetz} \\ &= \underline{\overline{x_1}\,\overline{x_1}} \vee \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_2x_3 && \text{Regel R7} \\ &= \underline{\overline{x_1} \vee \overline{x_1}x_3} \vee \overline{x_1}x_2 \vee x_2x_3 && \text{Absorption (R11)} \\ &= \underline{\overline{x_1} \vee \overline{x_1}x_2} \vee x_2x_3 && \text{Absorption (R11)} \\ &= \overline{x_1} \vee x_2x_3 \\ &= \overline{x_1} \vee (x_2\,\&\,x_3) \end{aligned}$$



1	0	0	1
-	0	1	-

Minimierungsmethoden

Überdeckungsproblem (oder Auswahlproblem)

- Bei dem Nelson-Verfahren erfolgte nur die Ermittlung aller Primterme
- Weiterhin gesucht: optimale Auswahl der Primterme
  → eine Auswahl von Primtermen, die alle Einsstellen (Nullstellen) der gewünschten Funktion berücksichtigt wird Überdeckung genannt
- Lösung: graphische Auswahl der Primterme mit Überdeckungstabelle
  → für jeden Primterm wird angegeben, welche Einsstellen (bzw. Nullstellen) er überdeckt
  → zur Bewertung wird eine Spalte mit Kosten c_k angefügt
  → Überdeckungstabelle wird mit Hilfe bestimmter Regeln abgearbeitet (vereinfacht) -> Kernermittlung + Dominanzregeln
  → algebraische Behandlung der optimalen Auswahl von Primtermen auch möglich:
  → Bildung und Auswertung des Petrick-Ausdrucks!
- Ergebnis: kostenminimale Überdeckung der Schaltfunktion

Minimierungsmethoden

Überdeckungsproblem:

Kernermittlung:

- Wenn eine **Einsstelle** (Nullstelle) nur durch einen **einzigen Primterm abgedeckt** wird, nennt man den **Primimplikanten** (Primimplikaten) ***Kernimplikant*** (*Kernimplikat*)
- ***Kernimplikanten*** (Kernimplikate) **müssen** auf jeden Fall in die **Überdeckungslösung** aufgenommen werden
- **Spalten von Einsstellen** (Nullstellen) in der **Überdeckungstabelle**, die von ***Kernimplikanten*** (Kernimplikaten) **abgedeckt** werden, können **gestrichen** werden, und müssen in der weiteren Abarbeitung nicht mehr berücksichtigt werden

Minimierungsmethoden

Kernermittlung und Vereinfachung der Überdeckungstabelle

Beispiel:

k	PI	j							p_i	c_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	$x_4 x_2$					x		x	p_1	c_1
2	$\overline{x_3} x_2$		x			x			p_2	c_2
3	$x_4 x_3 \overline{x_1}$						x	x	p_3	c_3
4	$x_4 \overline{x_3} x_1$				x				p_4	c_4
5	$\overline{x_4}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$	x		x					p_5	c_5
6	$x_4 x_3 x_1$	x	x						p_6	c_6
7	$x_3 x_2 x_1$			x			x		p_7	c_7

Minimierungsmethoden

Dominanzregeln und Ihre Anwendung (1)

Spaltendominanzregeln:

- **Spaltendominanz** in der **Überdeckungstabelle**:

i_1	i_2	
X	X	p_1
		p_2
X	X	p_3
X		p_4
X		p_5

~~i_1~~	i_2	
~~X~~	X	p_1
		p_2
~~X~~	X	p_3
~~X~~		p_4
~~X~~		p_5

- Wenn die Spalte i_2 durch einen der Terme p_1 oder p_3 *überdeckt* wird, so wird dadurch auch i_1 überdeckt
  also: Einsstelle der Spalte i_1 ist durch p_1 oder p_3 auch realisiert
- Man sagt: (“Vektor“ i_1) ***dominiert*** (“Vektor“ i_2) und schreibt: $\mathbf{i_1 \geq i_2}$
- **Dominierende Spalten** (hier: i_1) können **gestrichen** werden

Minimierungsmethoden

Dominanzregeln und Ihre Anwendung (2)

Zeilendominanzregeln:

- **Zeilendominanz** in der **Überdeckungstabelle**:

i_1	X	X	X	X	p_1	c_1
i_2		X			p_2	c_2
			...			
i_k	X		X	X	p_k	c_k

i_1	X	X	X	X	p_1	c_1
~~i_2~~		~~X~~			~~p_2~~	~~c_2~~
			...			
i_k	X		X	X	p_k	c_k

- Wenn eine **Zeile i_2** ($\cong$ **Primterm p_2**) nur **Spalten** ($\cong$ **Einsstellen**) **überdeckt**, die auch von einer **anderen Zeile i_1** ($\cong$ **Primterm p_1**) **überdeckt** werden

  → i_2 wird von i_1 *dominiert*: **$i_2 \leq i_1$**, und

  es gilt: (Kosten c_1) $\leq$ (Kosten c_2)

  → **die Zeile i_2 kann gestrichen werden**

Minimierungsmethoden

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem):

Petrick-Verfahren:

- Das Petrick-Verfahren ist eine algebraische Methode

  → dient zur Bestimmung kostenminimaler Lösungen
  von Überdeckungsproblemen

- Es kann direkt nach dem Nelson-Verfahren zur kostenminimalen Auswahl von Primtermen verwendet werden

- Spaltendominanzen und Zeilendominanzen können algebraisch mit Hilfe des Petrick-Verfahrens in Form von Absorptionsregeln bzw. Ausdistribuieren abgearbeitet bzw. bewiesen werden

- Petrick-Verfahren wird bei *zyklischen Resttabellen* verwendet

Minimierungsmethoden

Petrick-Ausdruck (PA):

- Der Petrick-Ausdruck ist algebraische Beschreibung der Überdeckungsbedingungen

  → ob der Primterm k zur Lösung gehört, wird mit der bool´schen Präsenzvariable (Auswahlvariable) p_k angegeben

  -> $p_k = 0$ => Primterm k ist nicht in Lösung enthalten

  -> $p_k = 1$ => Primterm k ist Bestandteil der Lösung

  → zur Überdeckung jeder Einsstelle muss mindestens ein Primterm zur Lösung gehören, der diese Stelle überdeckt

- Petrick-Ausdruck besteht daher aus Termen von *disjunktiv* verknüpften Präsenzvariablen

  → für jede Einsstelle der Tabelle enthält der PA einen Term

  → in jedem Term muss mindestens eine Präsenzvariable den Wert ´1´ haben

- Diese Terme werden konjunktiv zum Petrick-Ausdruck verknüpft

  → der Petrick-Ausdruck muss immer eins liefern!

Minimierungsmethoden

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

Beispiel:

k	PI	j							p_i	c_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	x_4x_2					x		x	p_1	c_1
2	$\overline{x_3}x_2$		x			x			p_2	c_2
3	$x_4x_3\overline{x_1}$						x	x	p_3	c_3
4	$x_4\overline{x_3}x_1$				x				p_4	c_4
5	$\overline{x_4}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$	x		x					p_5	c_5
6	$\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_1}$	x	x						p_6	c_6
7	$x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1}$			x			x		p_7	c_7

$$PA=\underline{(p_5 \vee p_6)}\,\&\,\underline{(p_2 \vee p_6)}\,\&\,\underline{(p_5 \vee p_7)}\,\&\,p_4\,\&\,(p_1 \vee p_2)\,\&\,(p_3 \vee p_7)\,\&\,(p_1 \vee p_3)\overset{!}{=}1$$

- Im **Petrick-Ausdruck** kann man erfassen (beweisen!), dass die **Präsenzvariablen** der **Kernimplikanten (p_4) immer eins** sein müssen

Minimierungsmethoden

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

- Auch der Petrick-Ausdruck wird durch Distributionsregeln und Absorptionsregeln vereinfacht

Beispiel:

$$PA = (p_5 \vee p_6)\&(p_2 \vee p_6)\&(p_5 \vee p_7)\& p_4 \&(p_1 \vee p_2)\&(p_3 \vee p_7)\&(p_1 \vee p_3) = 1$$

$$= \ldots$$

$$= p_1 p_4 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_4 p_5 \vee p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_4 p_5 p_7 = 1$$

$$= p_4 \&(p_1 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_5 \vee p_1 p_3 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_5 p_7) = 1$$

$$PA = p_1 p_4 p_6 p_7 \vee p_2 p_3 p_4 p_5 \vee p_1 p_3 p_4 p_5 p_6 \vee p_2 p_3 p_4 p_6 p_7 \vee p_1 p_2 p_4 p_5 p_7 = 1$$

Minimierungsmethoden

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

- Damit der Petrick-Ausdruck ´1´ wird, muss mindestens einer der disjunktiv verknüpften konjunktiven Teilterme eins sein

- Jeder konjunktive Teilterm repräsentiert genau eine mögliche Lösung des Auswahlproblems

- Zur Auswahl der optimalen Lösung:

  → die Kosten c_k der Primterme p_k werden herangezogen

  → Anzahl der Literale von p_k

- Vergleich der Kostensummen K aller möglichen Lösungen

  (K = Summe der Literale der jeweils notwendigen Primterme)

  → diejenige Überdeckung mit optimalen Kosten kann ermittelt werden

Minimierungsmethoden

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

Beispiel:

$$PA = p_1p_4p_6p_7 \vee p_2p_3p_4p_5 \vee p_1p_3p_4p_5p_6 \vee p_2p_3p_4p_6p_7 \vee p_1p_2p_4p_5p_7 = 1$$

mit $c_1=c_2=2$; $c_3\ldots c_7=3$

$p_1p_4p_6p_7$	K = 11
$p_2p_3p_4p_5$	K = 11
$p_1p_3p_4p_5p_6$	K = 14
$p_2p_3p_4p_6p_7$	K = 14
$p_1p_2p_4p_5p_7$	K = 13

k	PI	j							p_i	c_i
		0	2	4	11	12	14	16		
1	x_4x_2					x		x	p_1	c_1
2	$\overline{x_3}x_2$		x			x			p_2	c_2
3	$x_4x_3\overline{x_1}$						x	x	p_3	c_3
4	$x_4\overline{x_3}x_1$				x				p_4	c_4
5	$\overline{x_4}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$	x		x					p_5	c_5
6	$\overline{x_4}\,\overline{x_3}\,\overline{x_1}$	x	x						p_6	c_6
7	$x_3\overline{x_2}\,\overline{x_1}$			x			x		p_7	c_7

- Damit ergeben sich zwei kostenminimale Lösungen:

$p_1p_4p_6p_7$ und $p_2p_3p_4p_5$

Minimierungsmethoden

Überdeckungsproblem (Auswahlproblem)

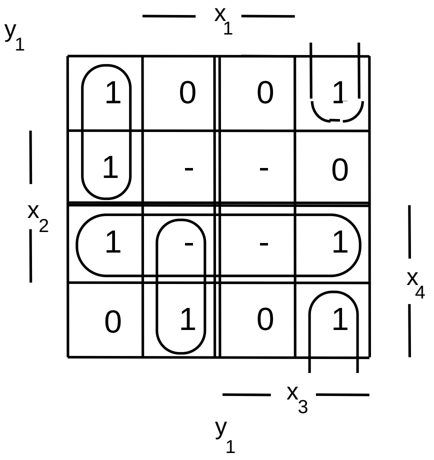
Beispiel:

- die zugehörigen disjunktiven Minimallösungen (DMF)
  mit nur 11 Literalen sind:

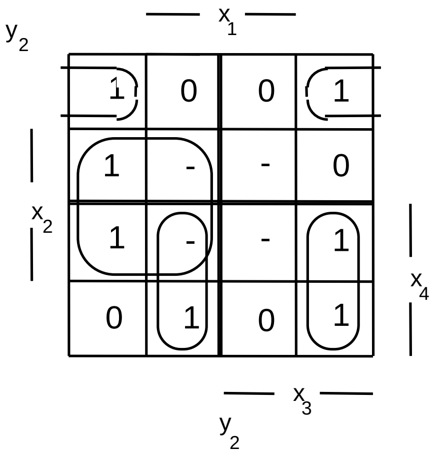
$$y_1 = x_4 x_2 \vee x_4 \overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_4}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1} \vee x_3 \overline{x_2}\,\overline{x_1}$$

und

$$y_2 = \overline{x_3} x_2 \vee x_4 x_3 \overline{x_1} \vee x_4 \overline{x_3} x_1 \vee \overline{x_4}\,\overline{x_2}\,\overline{x_1}$$



1	0	0	1
1	-	-	0
1	-	-	1
0	1	0	1



1	0	0	1
1	-	-	0
1	-	-	1
0	1	0	1

4. Aufgabe – 4.1

Gegeben sei eine unvollständige definierte Schaltfunktion y = (d, c, b, a) durch ihre Nullstellenmenge $\{X_j\}_0$ und ihre Freistellenmenge $\{X_j\}_-$

$$\{X_j\}_0 = \{ (-,0,-,0), (1,-,0,1), (0, 1, 1, 0) \}$$

$$\{X_j\}_- = \{ (-,-,1,1) \}$$

- **4.1** Geben Sie für y eine Gleichung an, die eine Konjunktion der Nullblöcke darstellt.

4. Aufgabe – 4.1

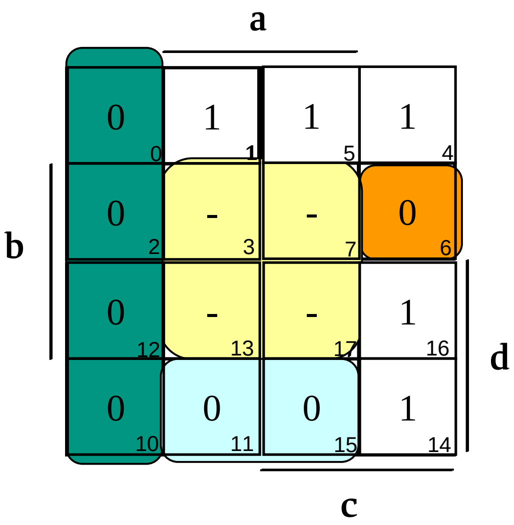
- **4.1** Geben Sie für y eine Gleichung an, die eine Konjunktion der Nullblöcke darstellt.

$$\{X_j\}_0 = \{(-,0,-,0), (1,-,0,1), (0,1,1,0)\}$$

$$\{X_j\}_- = \{(-,-,1,1)\}$$

↓

(d,c,b,a)



0 0	1 1	1 5	1 4
0 2	- 3	- 7	0 6
0 12	- 13	- 17	1 16
0 10	0 11	0 15	1 14

- Zunächst die Nullstellenmenge eintragen
- Anschließend die Freistellenmenge
- Einsstellen vervollständigen und Funktion aufstellen

$$y = (a+c)\cdot(\overline{a}+b+\overline{d})\cdot(a+\overline{b}+\overline{c}+d)$$

4. Aufgabe – 4.2

- **4.2** Bestimmen Sie daraus alle Primimplikanten mit Hilfe des NELSON-Verfahrens.

$$y=(a+c)\cdot(\bar a+b+\bar d)\cdot(a+\bar b+\bar c+d)$$

$$=(\cancel{a\bar a}+ab+a\bar d+c\bar a+cb+c\bar d)\cdot(a+\bar b+\bar c+d)$$

$$=(ab+a\bar d+c\bar a+cb+c\bar d)\cdot(a+\bar b+\bar c+d)$$

$$=aba+\cancel{ab\bar b}+\cancel{ab\bar c}+\cancel{abd}+a\bar d a+\cancel{a\bar d\bar b}+\cancel{a\bar d\bar c}+\cancel{a\bar d d}+\cancel{c\bar a a}+c\bar a\bar b+\cancel{c\bar a\bar c}+c\bar a d+$$

$$\cancel{cba}+\cancel{cb\bar b}+\cancel{cb\bar c}+cbd+\cancel{c\bar d a}+c\bar d\bar b+\cancel{c\bar d\bar c}+\cancel{c\bar d d}$$

$$=ba+a\bar d+c\bar a\bar b+c\bar a d+cbd+c\bar b\bar d$$

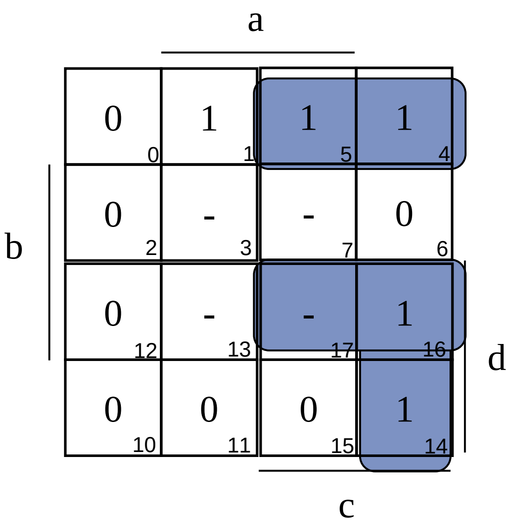
Nur Freistellen → kann entfallen

$$=a\bar d+c\bar a\bar b+c\bar a d+cbd+c\bar b\bar d$$

		a	a		
	0 0	1 1	1 5	1 4	
b	0 2	- 3	- 7	0 6	
b	0 12	- 13	- 17	1 16	d
	0 10	0 11	0 15	1 14	d

4. Aufgabe – 4.3

- **4.3** Stellen Sie für die Einsstellen von *y* eine Überdeckungstabelle auf.



0 0	1 1	1 5	1 4
0 2	- 3	- 7	0 6
0 12	- 13	- 17	1 16
0 10	0 11	0 15	1 14

	1	4	5	14	16
$\bar{b}c\bar{d}$		X	X		
bcd					X
$\bar{a}cd$				X	X
$\bar{a}\bar{b}c$		X		X	
$a\bar{d}$	X		X		

4. Aufgabe – 4.4

- **4.4** Ordnen Sie den Primimplikanten eine Präsenzvariable zu und geben Sie den Petrickausdruck an.

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\bar{b}c\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}\bar{b}c$		X		X		p_4
$a\bar{d}$	X		X			p_5

$$P_e = p_5 \cdot (p_1 + p_4) \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)$$

$$= p_1 p_2 p_4 p_5 + \boxed{p_1 p_3 p_5 + p_2 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5}$$

4. Aufgabe – 4.5

- **4.5** Bestimmen Sie daraus alle disjunktiven Minimalformen

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\bar{b}c\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}\bar{b}c$		X		X		p_4
$a\bar{d}$	X		X			p_5

$$P_e = p_5 \cdot (p_1 + p_4) \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)$$

$$= p_1 p_3 p_5 + p_2 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5$$

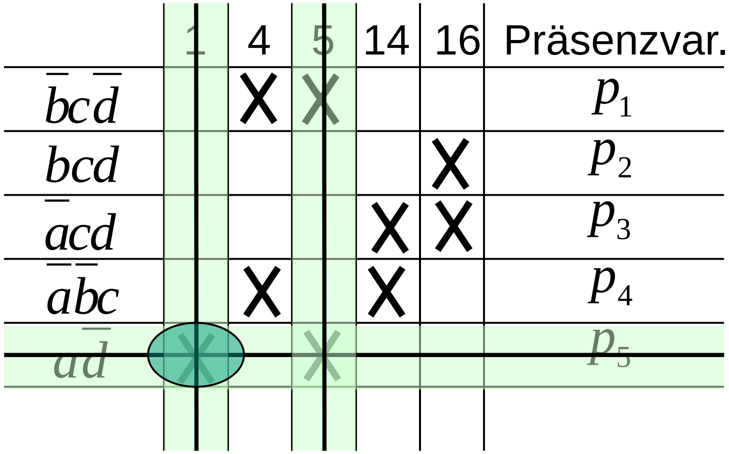
DMF$_1$: $y = \bar{b}c\bar{d} + \bar{a}cd + a\bar{d}$

DMF$_2$: $y = bcd + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{d}$

DMF$_3$: $y = \bar{a}cd + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{d}$

4. Aufgabe – 4.6

- **4.6** Bearbeiten Sie die Überdeckungstabelle aus 4.3 mit Hilfe der Kernbestimmung und der Dominanzregeln

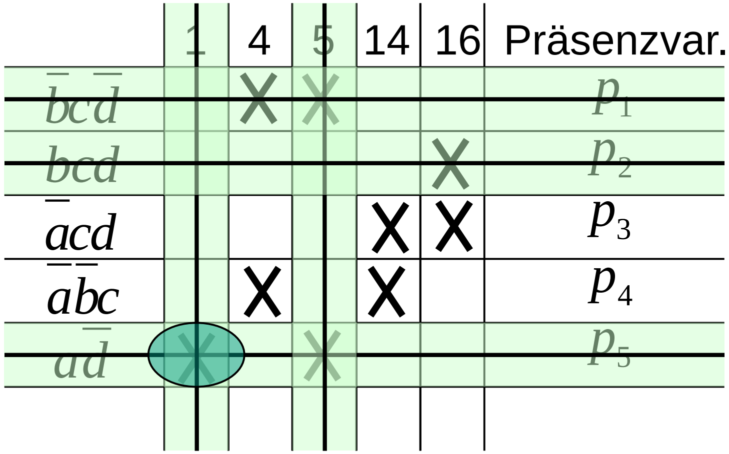


	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\overline{b}c\overline{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\overline{a}cd$				X	X	p_3
$\overline{a}\overline{b}c$		X		X		p_4
$a\overline{d}$	X		X			p_5

Kernimplikant p_5!!!

4. Aufgabe – 4.6

- **4.6** Bearbeiten Sie die Überdeckungstabelle aus 4.3 mit Hilfe der Kernbestimmung und der Dominanzregeln



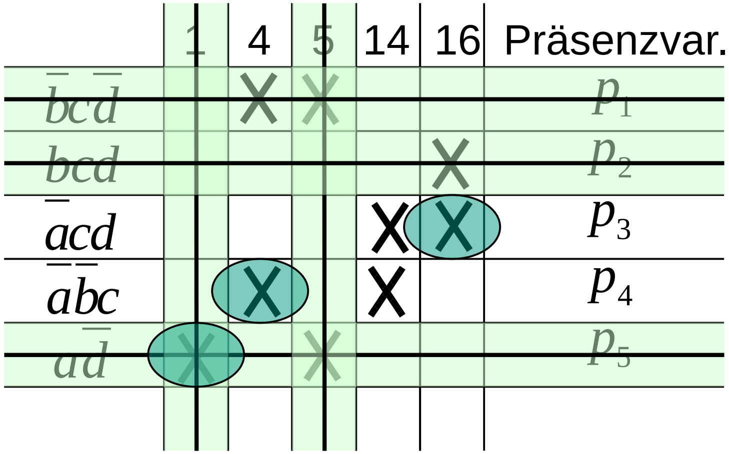
	~~1~~	4	~~5~~	14	16	Präsenzvar.
~~$\bar{b}c\bar{d}$~~		X	X			~~p_1~~
~~bcd~~					X	~~p_2~~
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}\bar{b}c$		X		X		p_4
~~$a\bar{d}$~~	X		X			~~p_5~~

- keine Spaltendominanz
- Zeilendominanz

$p_3 > p_2$ und $c_3 = c_2$ $\rightarrow$ p_2 streichen
$p_4 > p_1$ und $c_4 = c_1$ $\rightarrow$ p_1 streichen

4. Aufgabe – 4.6

- **4.6** Bearbeiten Sie die Überdeckungstabelle aus 4.3 mit Hilfe der Kernbestimmung und der Dominanzregeln



	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$b\bar{c}\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}\bar{b}c$		X		X		p_4
$a\bar{d}$	X		X			p_5

Eine mögliche kostenminimale Realisierung umfasst somit die Primimplikanten p_3, p_4 und p_5 !!!

Vergleich von 4.4 und 4.6

- Vergleich!

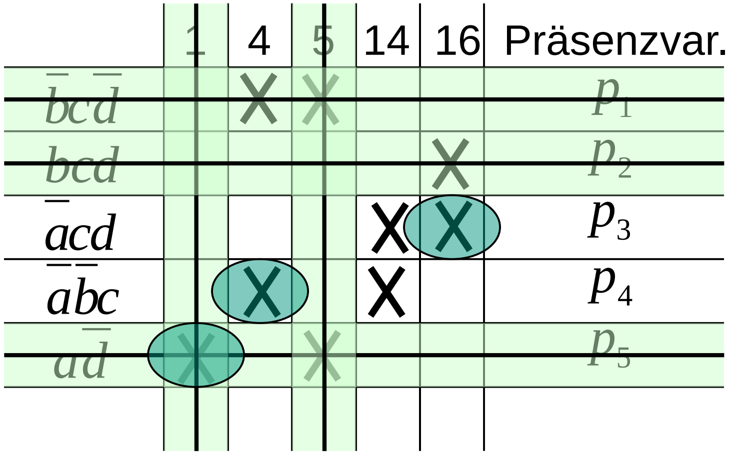
Ergebnis aus 4.4

	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\bar{b}c\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}\bar{b}c$		X		X		p_4
$a\bar{d}$	X		X			p_5

$$P_e = p_5 \cdot (p_1 + p_4) \cdot (p_1 + p_5) \cdot (p_3 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)$$

$$= p_1 p_2 p_4 p_5 + p_1 p_3 p_5 + p_2 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5$$

Ergebnis aus 4.6



	1	4	5	14	16	Präsenzvar.
$\bar{b}c\bar{d}$		X	X			p_1
bcd					X	p_2
$\bar{a}cd$				X	X	p_3
$\bar{a}\bar{b}c$		X		X		p_4
$a\bar{d}$	X		X			p_5

Eine mögliche kostenminimale Realisierung umfasst somit die Primimplikanten p3, p4 und p5 !!!

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

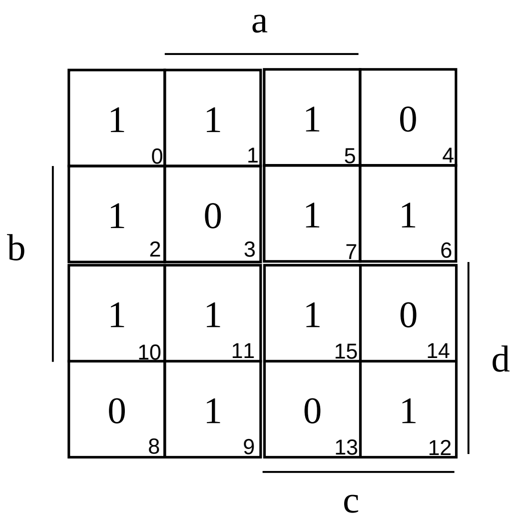
Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

6. Aufgabe:

6. Aufgabe – 6.1

Gegeben sei die folgende boolesche Funktion f in vier Variablen durch ihre Dezimaläquivalentdarstellung { 0, 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 15 }

- **6.1** Bestimmen Sie alle Primimplikanten und deren Typ aus dem Symmetrie diagramm. Stellen Sie die Überdeckungsmatrix auf und bestimmen Sie den zyklischen Kern (falls vorhanden).

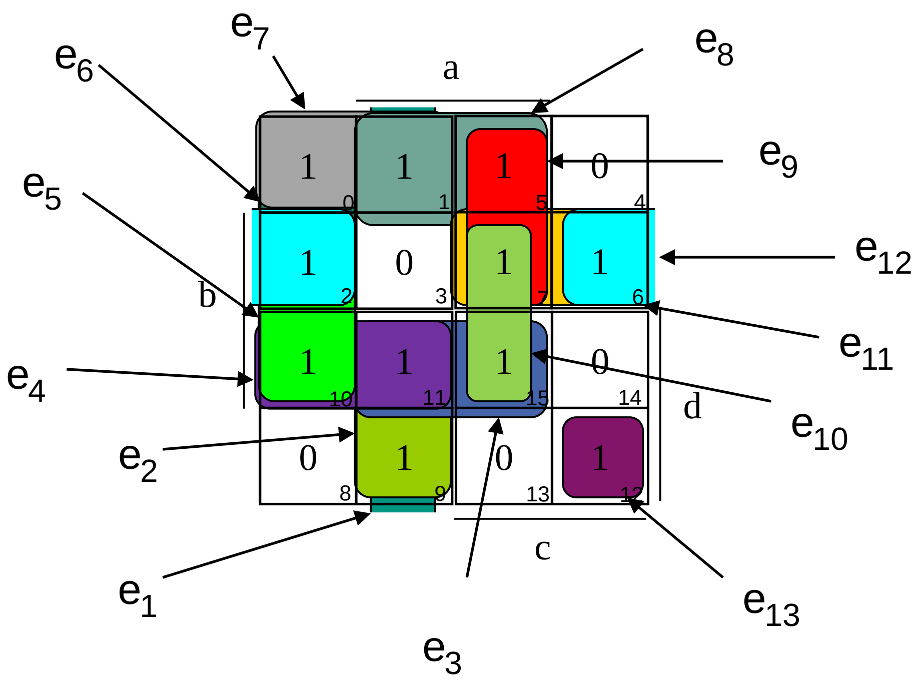


1 0	1 1	1 5	0 4
1 2	0 3	1 7	1 6
1 10	1 11	1 15	0 14
0 8	1 9	0 13	1 12

6. Aufgabe – 6.1

Gegeben sei die folgende boolesche Funktion f in vier Variablen durch ihre Dezimaläquivalentdarstellung { 0, 1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 15 }

- **6.1** Bestimmen Sie alle Primimplikanten und deren Typ aus dem Symmetrie diagramm. Stellen Sie die Überdeckungsmatrix auf und bestimmen Sie den zyklischen Kern (falls vorhanden).



1 (0)	1 (1)	1 (5)	0 (4)
1 (2)	0 (3)	1 (7)	1 (6)
1 (10)	1 (11)	1 (15)	0 (14)
0 (8)	1 (9)	0 (13)	1 (12)

6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

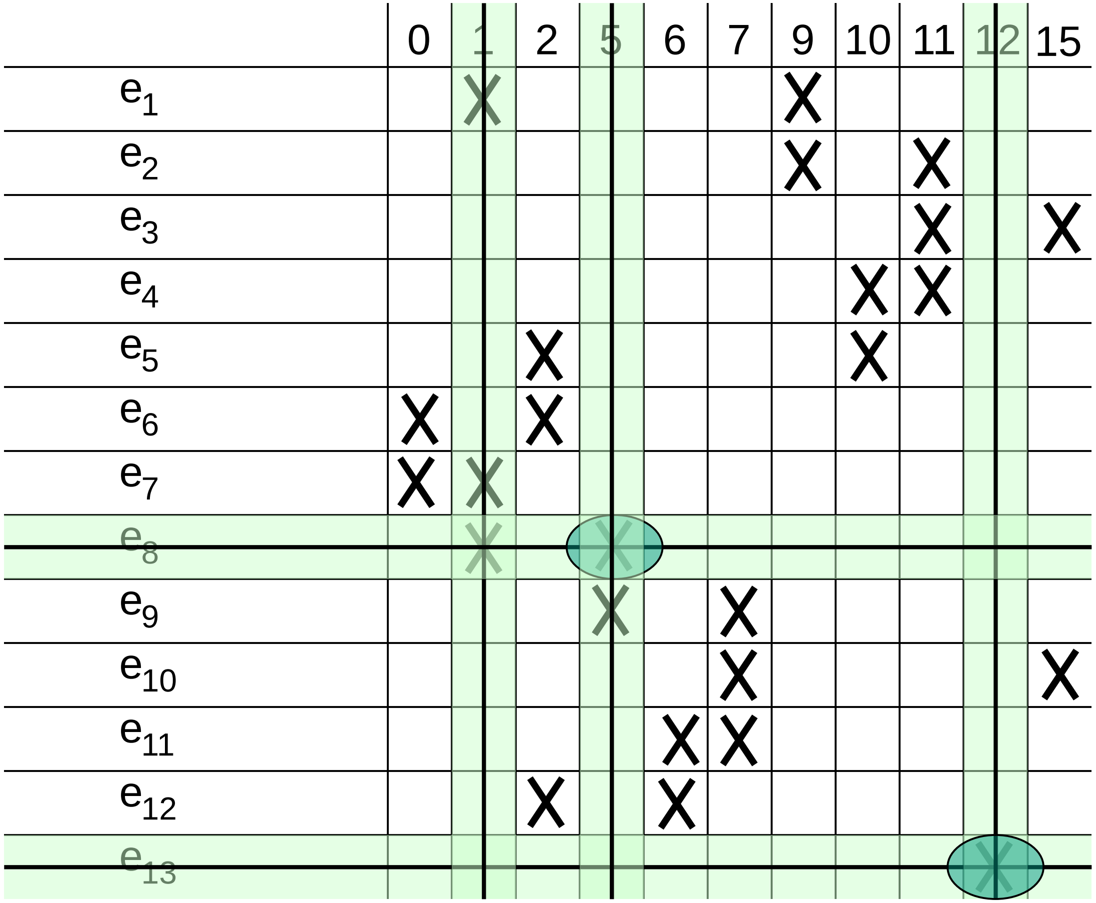
6. Aufgabe – 6.1

- **Fallunterscheidung nötig, um Verfahren fortzusetzen**

- Beachte: es ist NICHT ausreichend das Verfahren nur für einen Fall zum Ende zu bringen, sondern es müssen alle möglichen Pfade verfolgt werden.

- Bsp. für eine Fallunterscheidung:
  - Entscheidung für e_8
  - im Anschluss ist das Verfahren auch für den Fall, dass e_9 statt e_8 verwendet wird, durchzuführen

6. Aufgabe – 6.1



	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

Entscheidung für e8 !!!

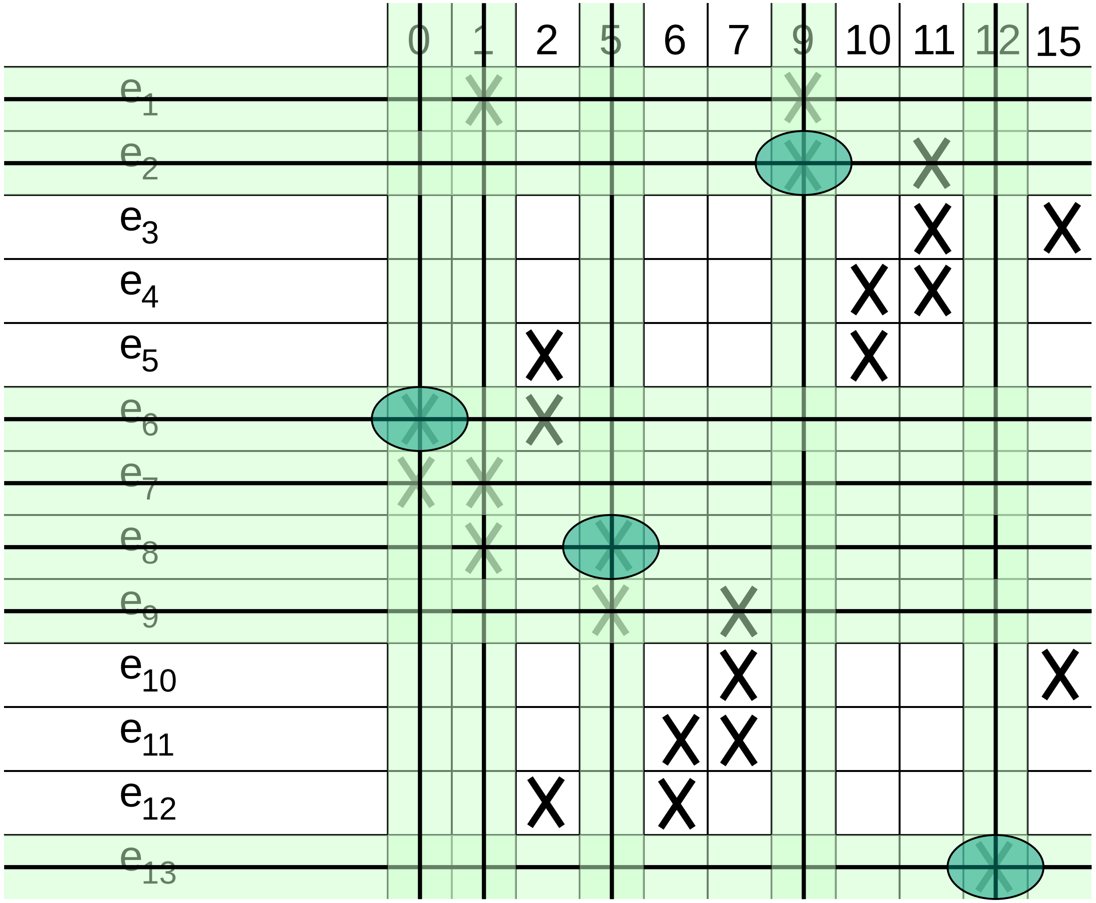
Essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

1. Fall: wir entscheiden uns für e8 !!!

6. Aufgabe – 6.1



	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

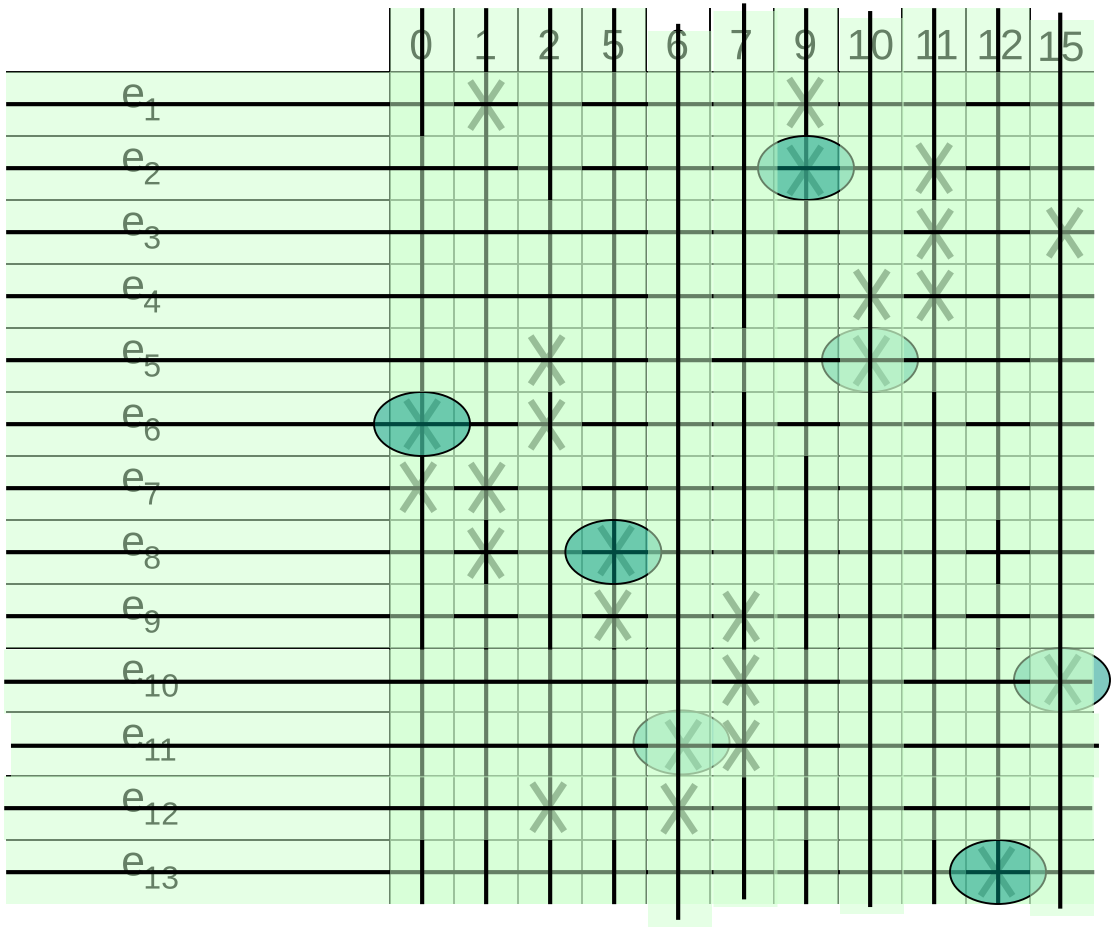
essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

1. Fall: wir entscheiden uns für e_8 !!!

6. Aufgabe – 6.1



	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

1. Fall: wir entscheiden uns für e_8 !!!

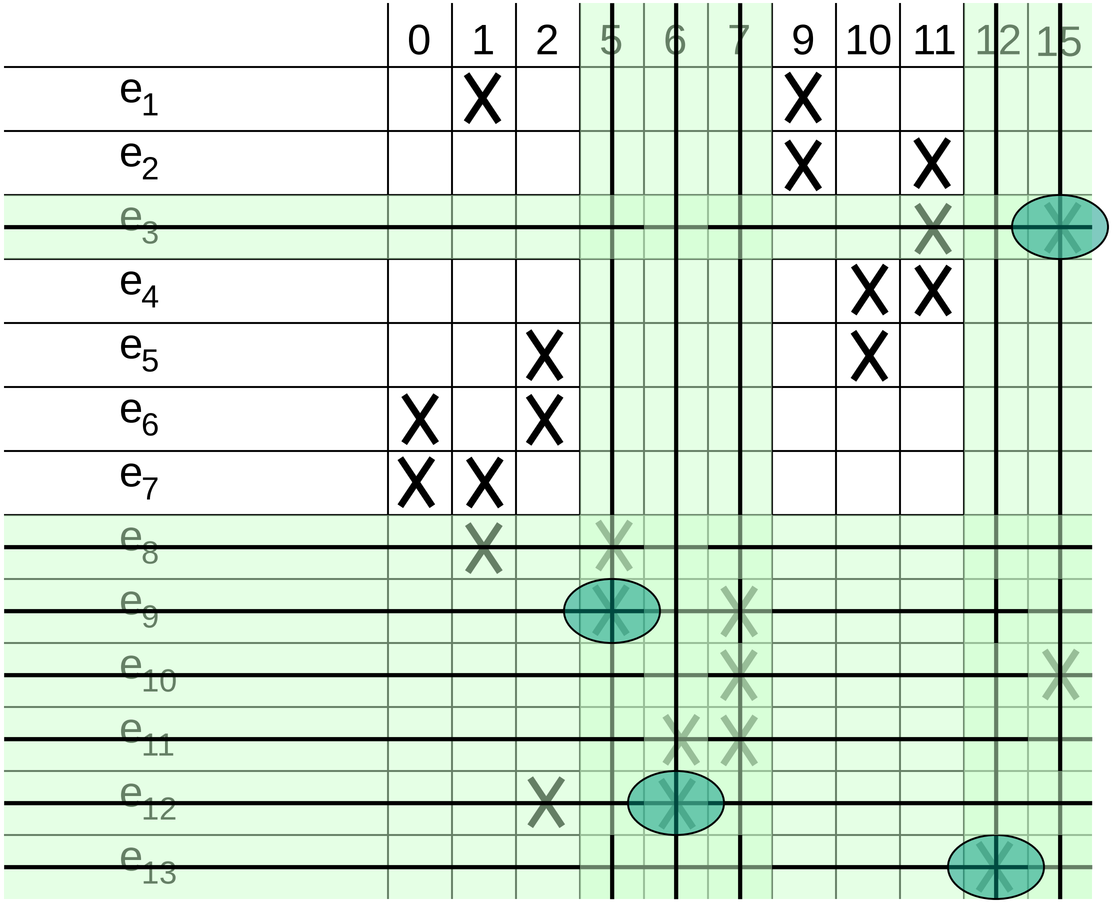
6. Aufgabe – 6.1

	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

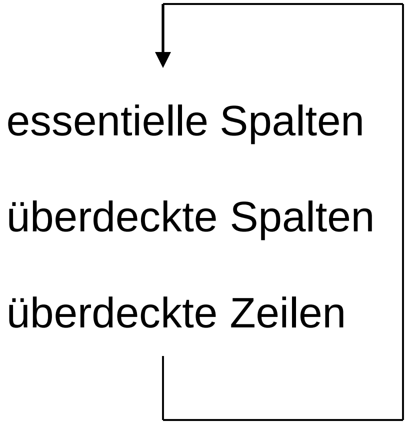
Entscheidung für e_9 !!!

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1



	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	



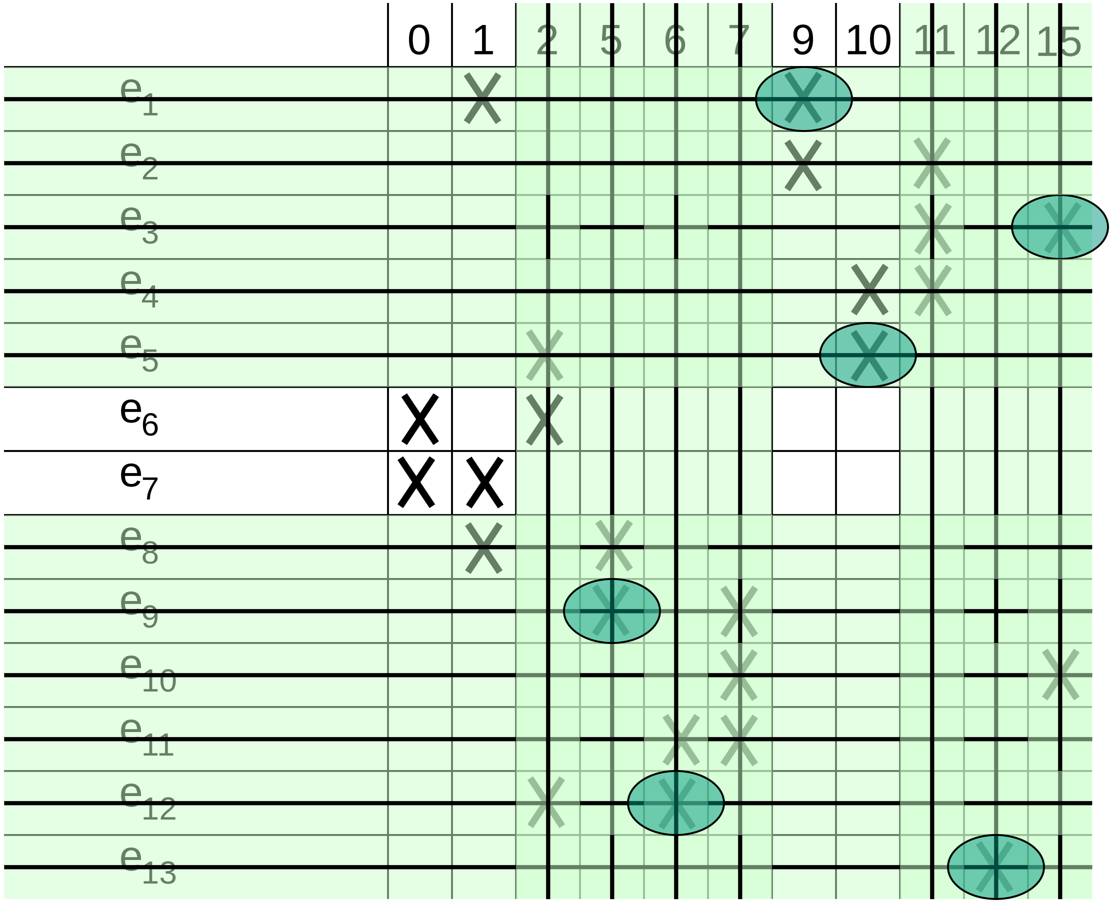
essentielle Spalten

überdeckte Spalten

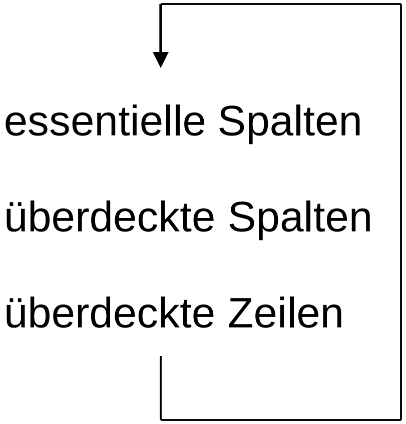
überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1



	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	



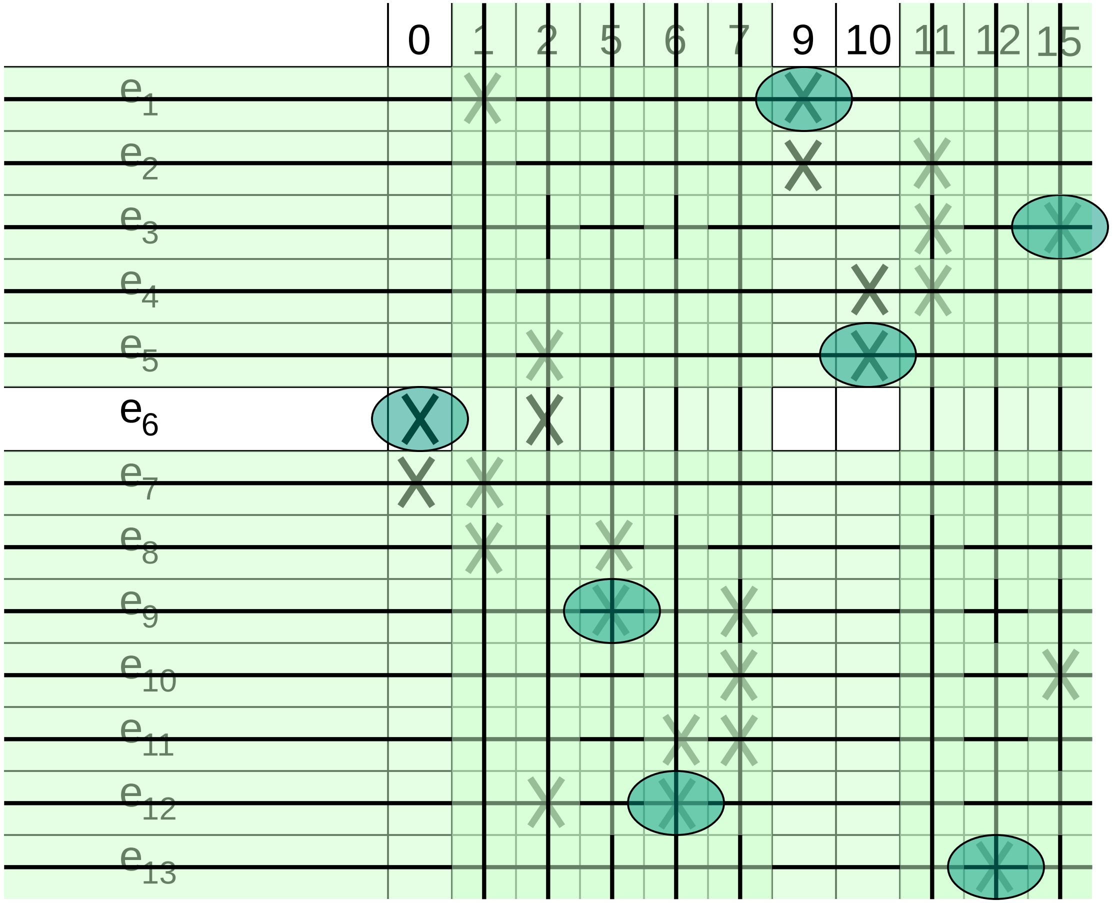
essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1



	0	1	2	5	6	7	9	10	11	12	15
e_1		X					X				
e_2							X		X		
e_3									X		X
e_4								X	X		
e_5			X					X			
e_6	X		X								
e_7	X	X									
e_8		X		X							
e_9				X		X					
e_{10}						X					X
e_{11}					X	X					
e_{12}			X		X						
e_{13}										X	

essentielle Spalten

überdeckte Spalten

überdeckte Zeilen

2. Fall: wir entscheiden uns für e_9 !!!

6. Aufgabe – 6.1

- **Beachte**: alle Pfade müssen überprüft werden
  (nicht immer sind die Lösungen gleichwertig)

- Hier nur eine Fallunterscheidung nötig.
  Ggf. sind aber mehr als zwei Pfade zu untersuchen.

- Alternative: Lösung über Petrick-Ausdruck

6. Aufgabe – 6.2

- **6.2** Geben Sie eine kostenminimale zweistufige Und-/Oder-Realisierung an. Stellen Sie für diese Funktion den Petrick-Ausdruck auf.

Ergebnis aus 6.1:

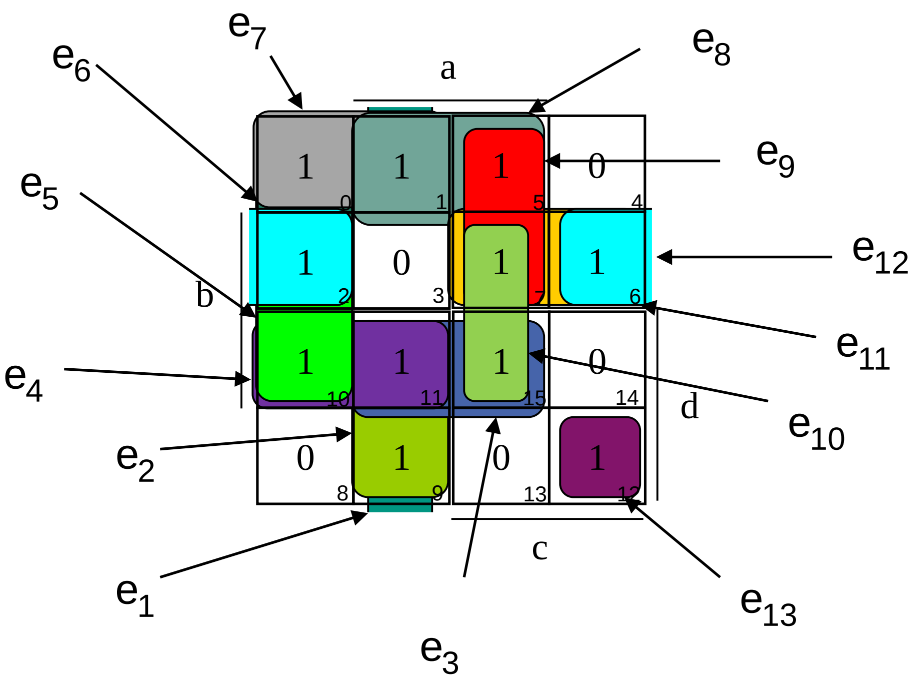
$$f = e_{13} + e_5 + e_6 + \begin{cases} e_1 + e_3 + e_9 + e_{12} \\ e_2 + e_8 + e_{10} + e_{11} \end{cases}$$

Beide Lösungen sind gleichwertig!!!

6. Aufgabe – 6.2

Petrickausdruck:

$$P_e = (e_6+e_7)_0(e_7+e_8+e_1)_1(e_6+e_5+e_{12})_2(e_8+e_9)_5$$
$$(e_{12}+e_{11})_6(e_9+e_{11}+e_{10})_7(e_1+e_2)_9(e_4+e_5)_{10}$$
$$(e_4+e_2+e_3)_{11}(e_{13})_{12}\underline{\underline{(e_{10}+e_3)_{15}=1}}$$



Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

7. Aufgabe: Petrickausdruck

7. Aufgabe

Ein Elektrotechnik-Student hat zur Vorbereitung auf eine Prüfung verschiedene Bücher (AE) verwendet, mit denen die Teilkapitel (1-8) des Prüfungsfaches unterschiedlich abgedeckt werden. Um nun für den Prüfungstag herauszufinden, welche Bücher in die Klausur mitzunehmen sind, soll eine Überdeckungstabelle aufgestellt werden. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass die Teilkapitel in den jeweiligen Büchern gleich gut beschrieben worden sind.

Buch	Beschrieben Kapitel	Gewicht
A	2, 5, 7	750g
B	4, 5, 7	300g
C	3, 8	170g
D	4, 8	500g
E	1, 3, 6	200g

7. Aufgabe – 7.1

- **7.1** Ergänzen Sie die Überdeckungstabelle und stellen Sie den Petrickausdruck auf.

Buch	Beschriebene Kapitel	Gewicht
A	2, 5, 7	750g
B	4, 5, 7	300g
C	3, 8	170g
D	4, 8	500g
E	1, 3, 6	200g

	1	2	3	4	5	6	7	8
A		X			X		X	
B				X	X		X	
C			X					X
D				X				X
E	X		X			X		

$$P_e = E \cdot A \cdot (C+E) \cdot (B+D) \cdot (A+B) \cdot E \cdot (A+B) \cdot (C+D)$$

7. Aufgabe – 7.2

- **7.2** Ermitteln Sie durch schaltalgebraische Umformung alle irredundanten Überdeckungen und geben Sie die Überdeckungen mit dem geringsten Gesamtgewicht an.

$$P_e = \boxed{\boxed{E}} \cdot \boxed{A} \cdot \boxed{(C+E)} \cdot (B+D) \cdot \boxed{(A+B)} \cdot \boxed{E} \cdot \boxed{(A+B)} \cdot (C+D)$$

$$= \boxed{E} \cdot \boxed{A} \cdot (B+D) \cdot (C+D)$$

$$= EABC + EABD + EADC + EAD \quad \rightarrow \text{ 4 Kombinationen möglich !!!}$$

$$P_e = \underbrace{EABC}_{\sum = 1420g} + \underbrace{EABD}_{\sum = 1750g} + \underbrace{EADC}_{\sum = 1620g} + \underbrace{EAD}_{\sum = 1450g}$$

Buch	Gewicht
A	750g
B	300g
C	170g
D	500g
E	200g

→ Die kostengünstigste Kombination ist EABC mit einem Gesamtgewicht von 1420g

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

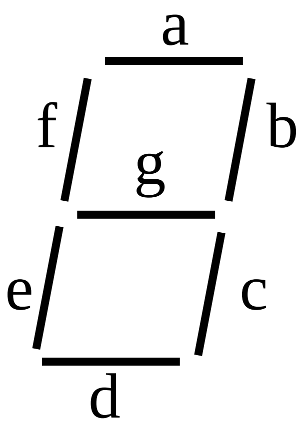
pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

5. Aufgabe: 7-Segment-Anzeige

5. Aufgabe

Die Ansteuerung einer Sieben-Segment-Anzeige hat vier Eingänge w, x, y, z und sieben Ausgänge a, b, c, d, e, f, g. Die Zuordnung der Ausgangsvariablen zu den sieben Segmenten ist der folgenden Abbildung zu entnehmen.

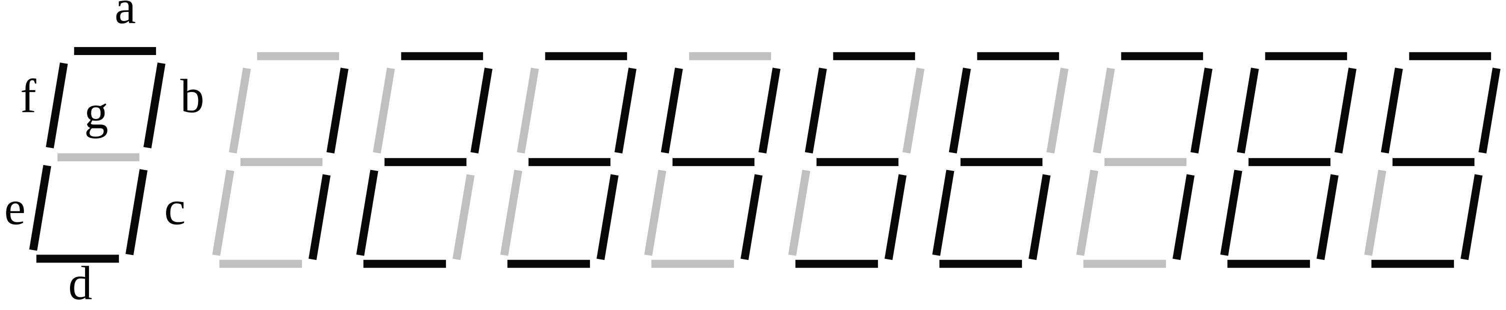


Falls die Ziffern 0,...,9 binär kodiert an den Eingängen anliegen, soll die Ziffer entsprechend in der Sieben-Segment-Anzeige erscheinen.

Beispiel: der 0 entspricht w=x=y=z=0, die Ausgänge a, b, c, d, e, f müssen dann zur Anzeige der 0 den Wert 1 aufweisen.

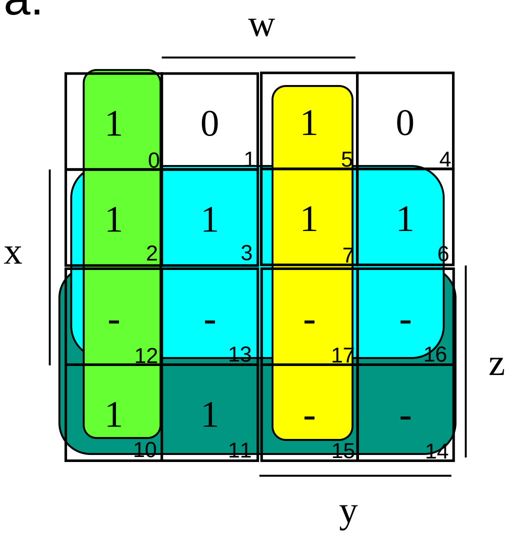
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

a:



1 0	0 1	1 5	0 4
1 2	1 3	1 7	1 6
- 12	- 13	- 17	- 16
1 10	1 11	- 15	- 14

$$a = z$$

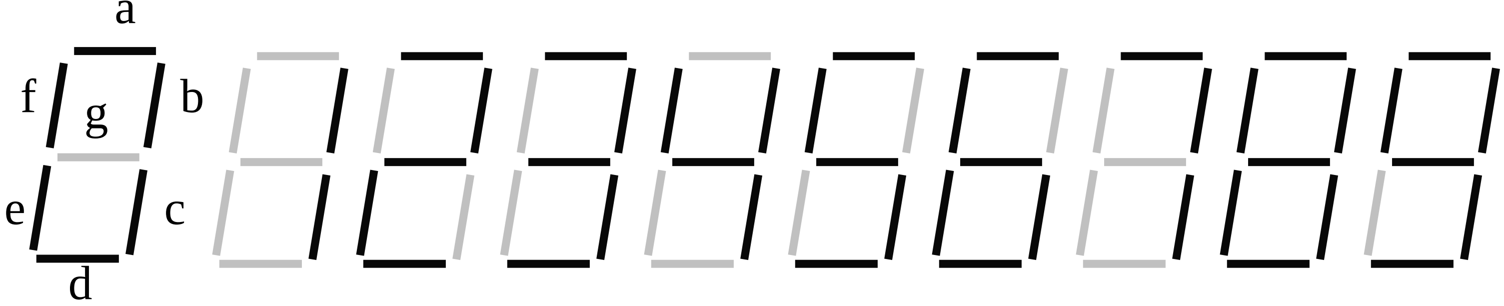
$$a = z + x$$

$$a = z + x + \overline{w}\,\overline{y}$$

$$\underline{\underline{a = z + x + \overline{w}\,\overline{y} + wy}}$$

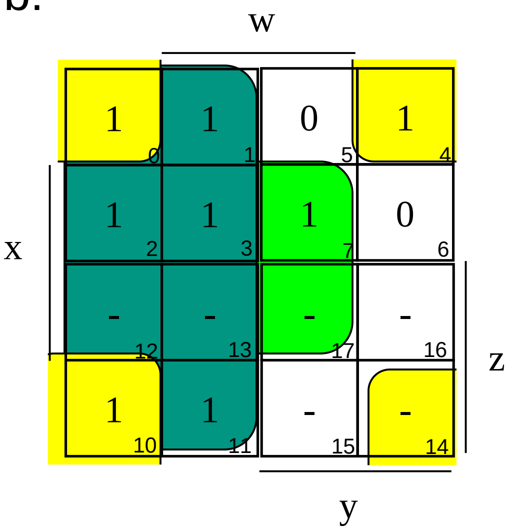
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

b:

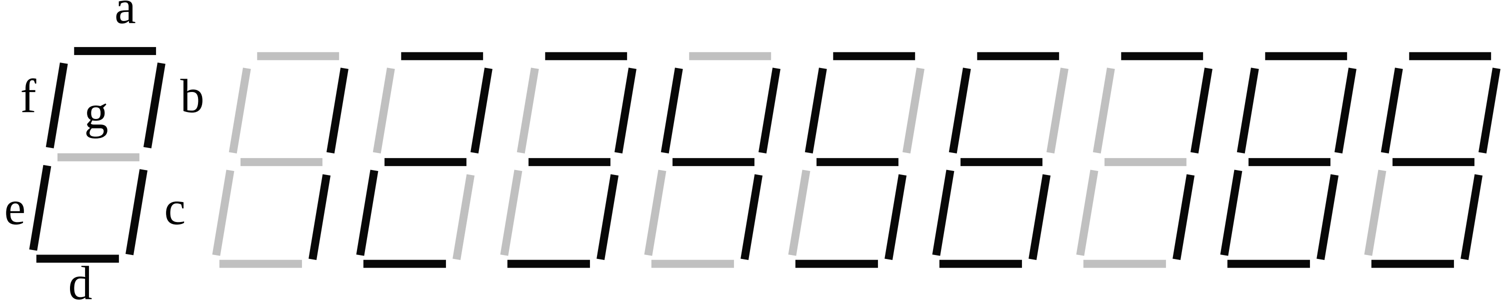


1 0	1 1	0 5	1 4
1 2	1 3	1 7	0 6
- 12	- 13	- 17	- 16
1 10	1 11	- 15	- 14

$$b = \overline{y} + \overline{w}\,\overline{x} + wx$$

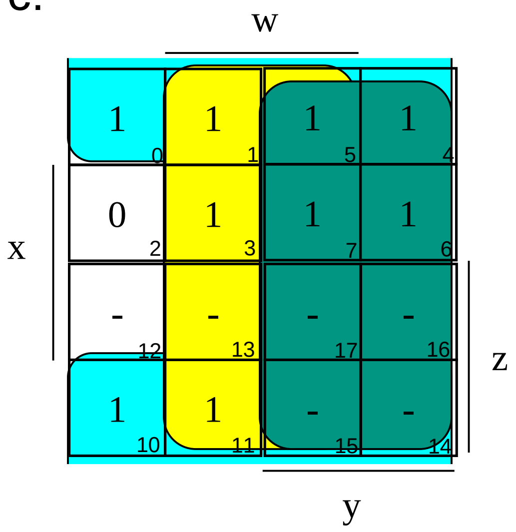
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

c:

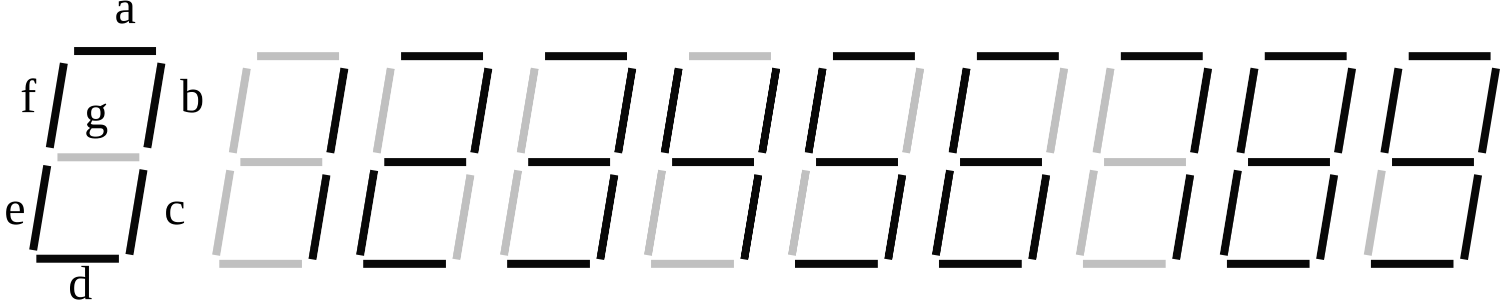


1 0	1 1	1 5	1 4
0 2	1 3	1 7	1 6
- 12	- 13	- 17	- 16
1 10	1 11	- 15	- 14

$$c = y + w + \bar{x}$$

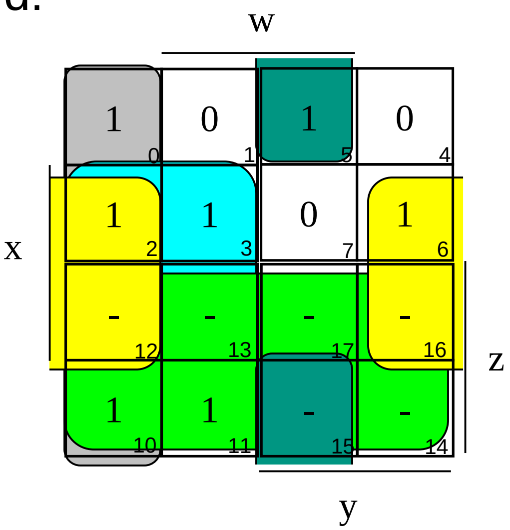
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

d:

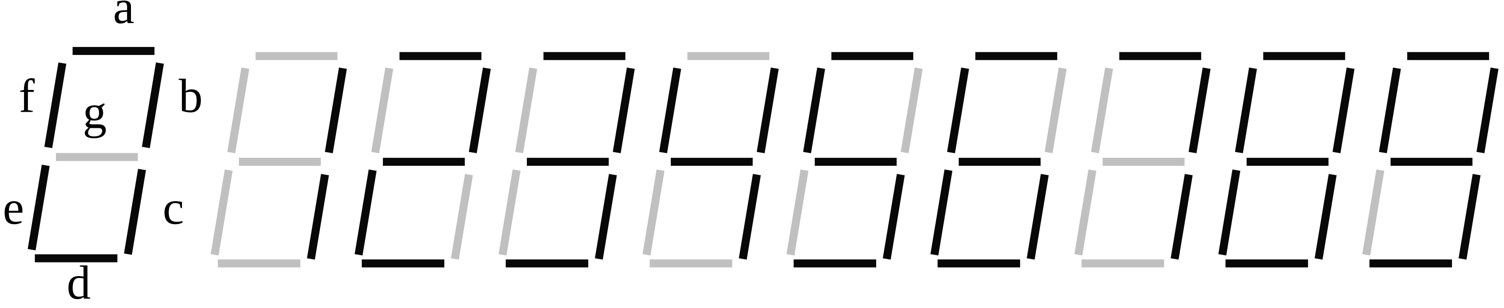


		w	w	
	1 (0)	0 (1)	1 (5)	0 (4)
x	1 (2)	1 (3)	0 (7)	1 (6)
x	- (12)	- (13)	- (17)	- (16)
	1 (10)	1 (11)	- (15)	- (14)
			y	y

$$d = z + \overline{w}\,\overline{y} + x\overline{w} + x\overline{y} + wy\overline{x}$$

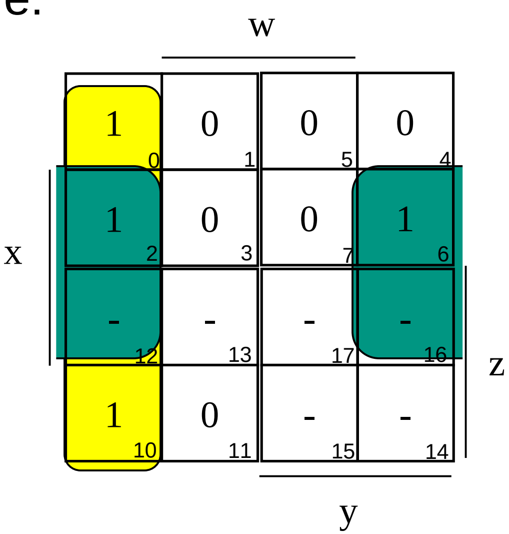
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

e:

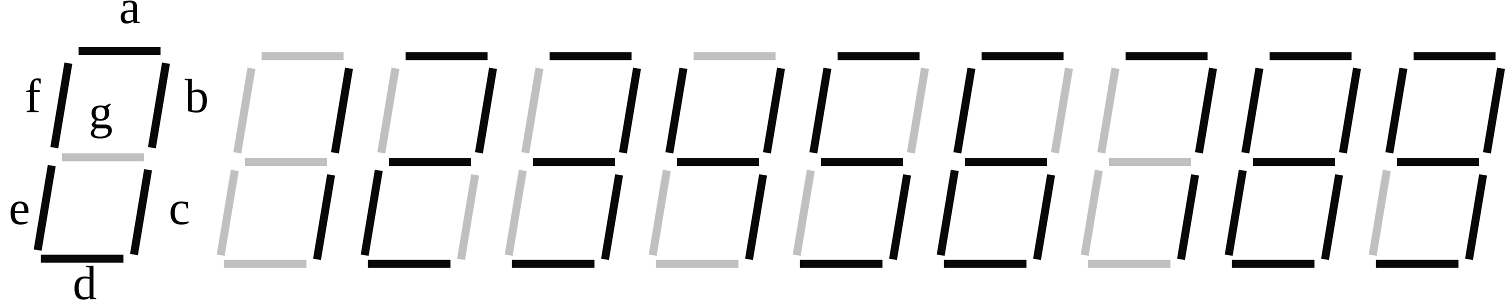


		w			
	1 0	0 1	0 5	0 4	
x	1 2	0 3	0 7	1 6	
	- 12	- 13	- 17	- 16	z
	1 10	0 11	- 15	- 14	
			y		

$$e = \overline{w}\,\overline{y} + x\overline{w}$$

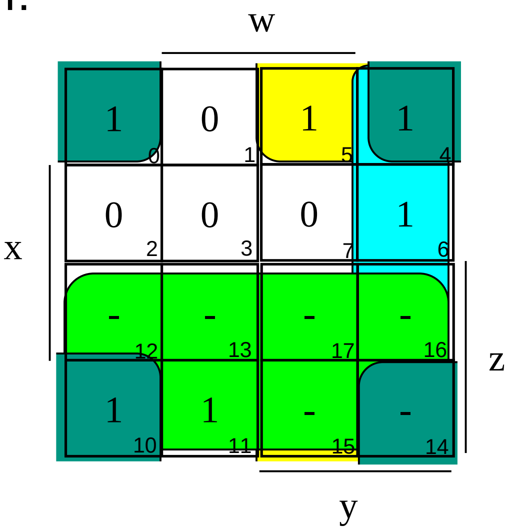
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

f:

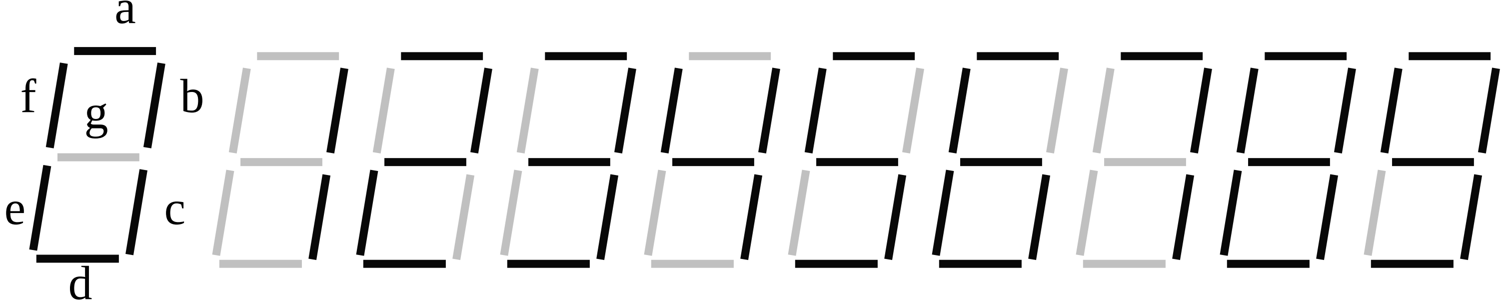


1 0	0 1	1 5	1 4
0 2	0 3	0 7	1 6
- 12	- 13	- 17	- 16
1 10	1 11	- 15	- 14

$$f = z + \overline{w}y + \overline{x}\,\overline{w} + y\overline{x}$$

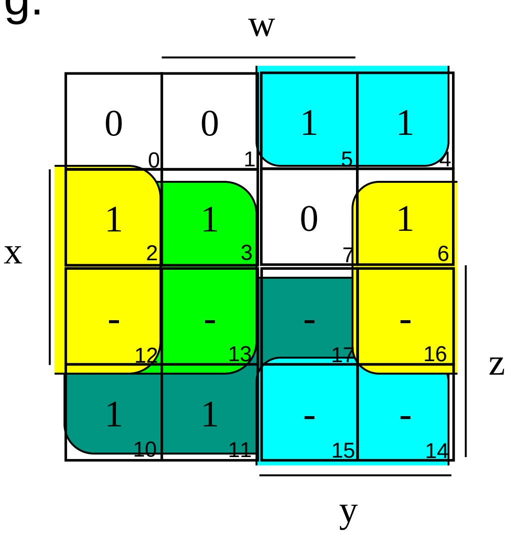
5. Aufgabe – 5.1

Festlegen der Zahlendarstellung:



Aufstellung der Funktionen:

g:



0 0	0 1	1 5	1 4
1 2	1 3	0 7	1 6
- 12	- 13	- 17	- 16
1 10	1 11	- 15	- 14

$$g = z + x\overline{y} + \overline{w}y + \overline{x}y$$

5. Aufgabe – 5.2

- Geben Sie eine möglichst einfache PLA-Realisierung an
- Insgesamt 15 PIs zu realisieren

$$w, x, \bar{x}, y, \bar{y}, z, \bar{w}\bar{y}, wy, \bar{w}\bar{x},$$

$$wx, x\bar{w}, x\bar{y}, \bar{x}y, \bar{w}y, wy\bar{x}$$

d.h. 15 Und-Gatter im PLA nötig,

falls keine Bündeloptimierung durchgeführt wird

- Bündeloptimierung rechnergestützt möglich
- ESPRESSO kann dazu eingesetzt werden

$$a = z + x + \bar{w}\bar{y} + wy$$

$$b = z + \bar{y} + \bar{w}\bar{x} + wx$$

$$c = y + w + \bar{x}$$

$$d = z + \bar{w}\bar{y} + x\bar{w} + x\bar{y} + wy\bar{x}$$

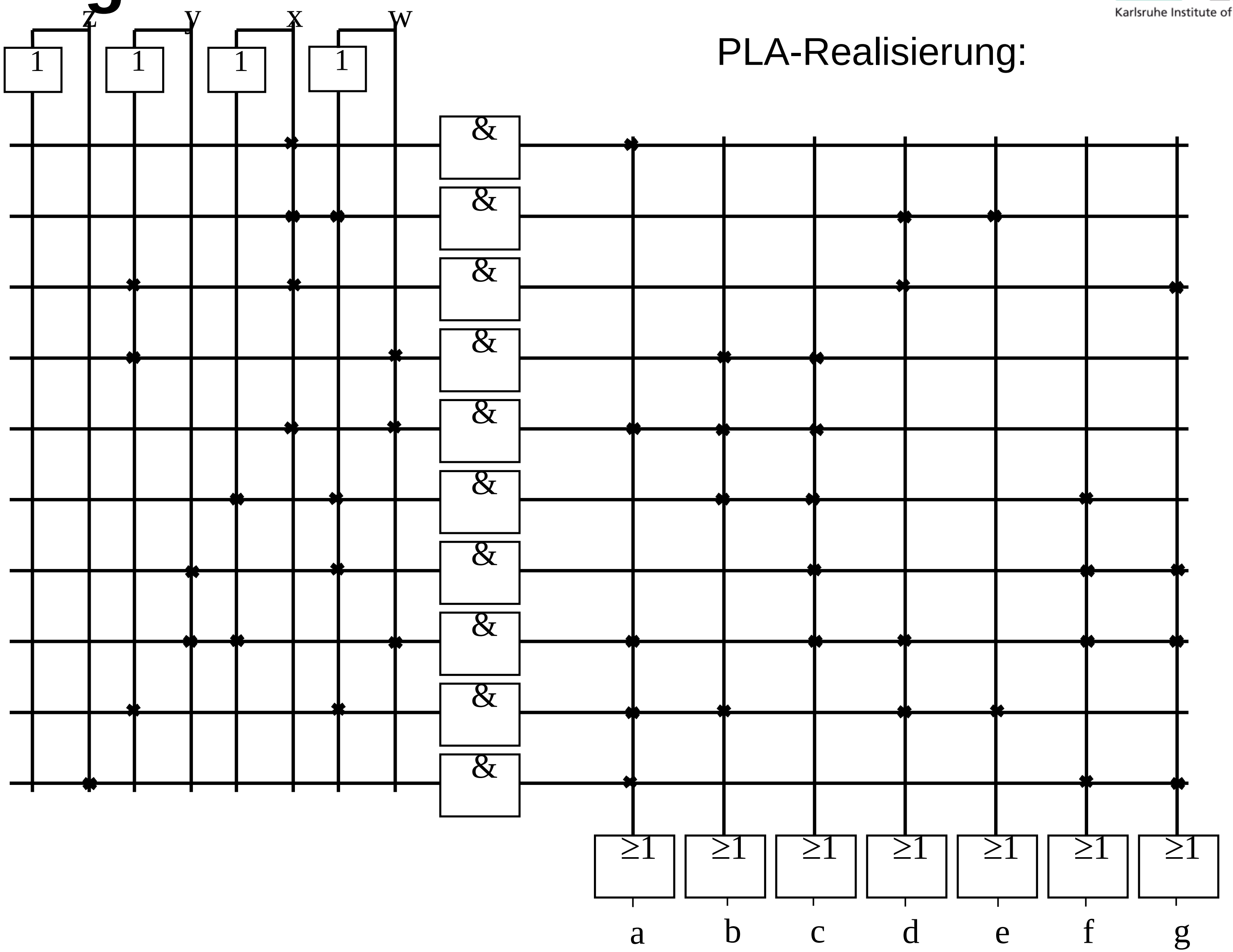
$$e = \bar{w}\bar{y} + x\bar{w}$$

$$f = z + \bar{w}y + \bar{x}\bar{w} + y\bar{x}$$

$$g = z + x\bar{y} + \bar{w}y + \bar{x}y$$

5. Aufgabe – 5.2

PLA-Realisierung:

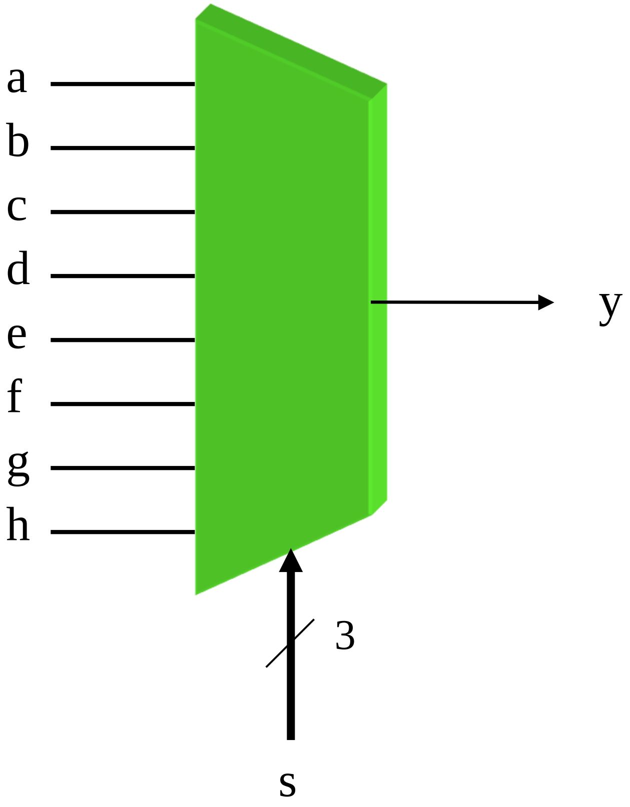


5. Aufgabe – 5.3

- **5.3** Wie kann die Anzeigensteuerung mit 8:1 Multiplexern realisiert werden?

Multiplexer

Multiplexer sind Bausteine, die es erlauben aus einem Eingangsvektor mit n Bits ein beliebiges Bit auszuwählen und an y weiterzuschalten, indem der Auswahlvektor s entsprechend gewählt wird.

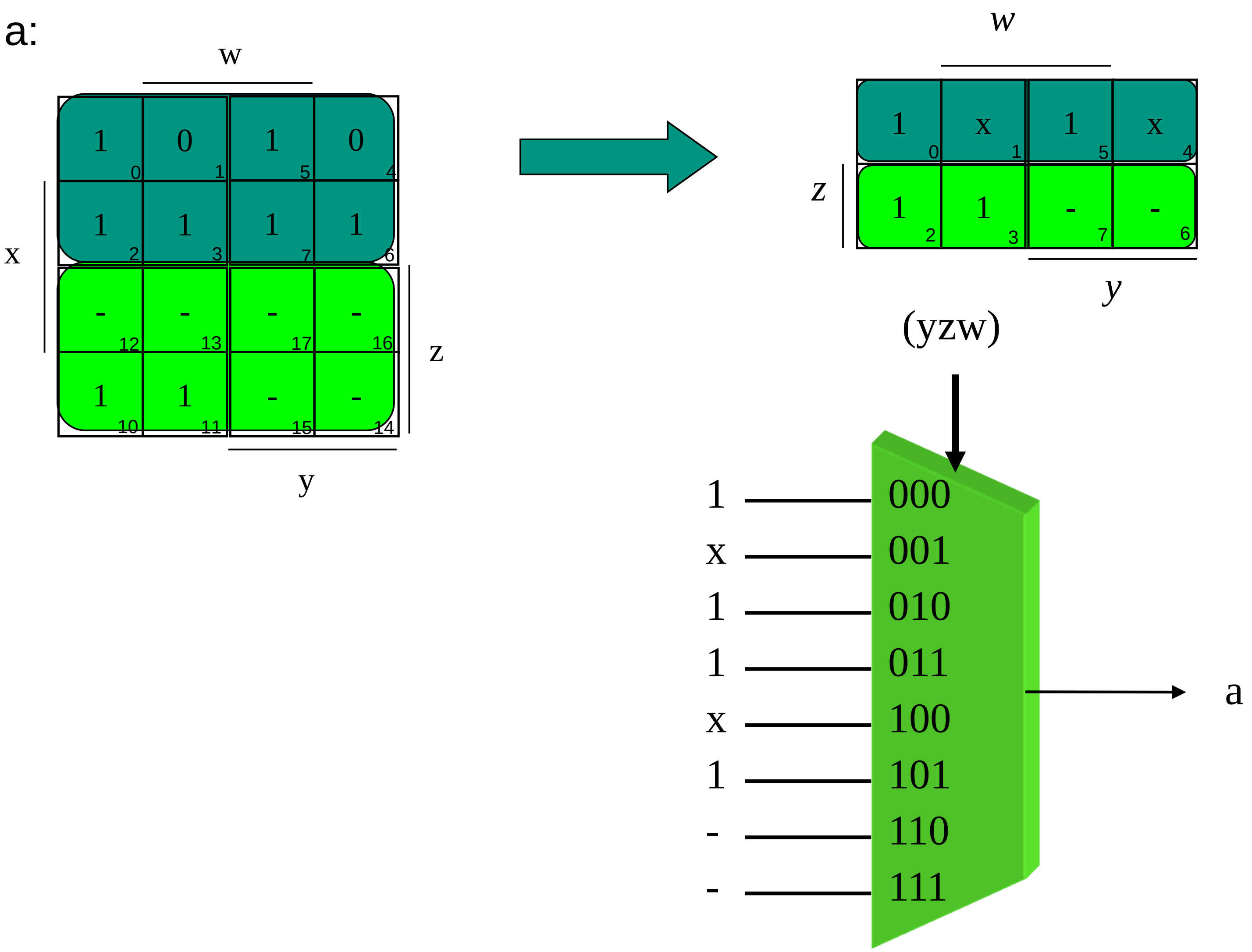


n:1 Multiplexer bedeutet, dass eine Auswahl aus n bittigem Vektor auf einen 1-Bit-Ausgang erfolgt.

Alle logischen Funktionen mit n Variablen sind mit 2^{n-1}:1 Multiplexern realisierbar, was im folgenden genutzt wird.

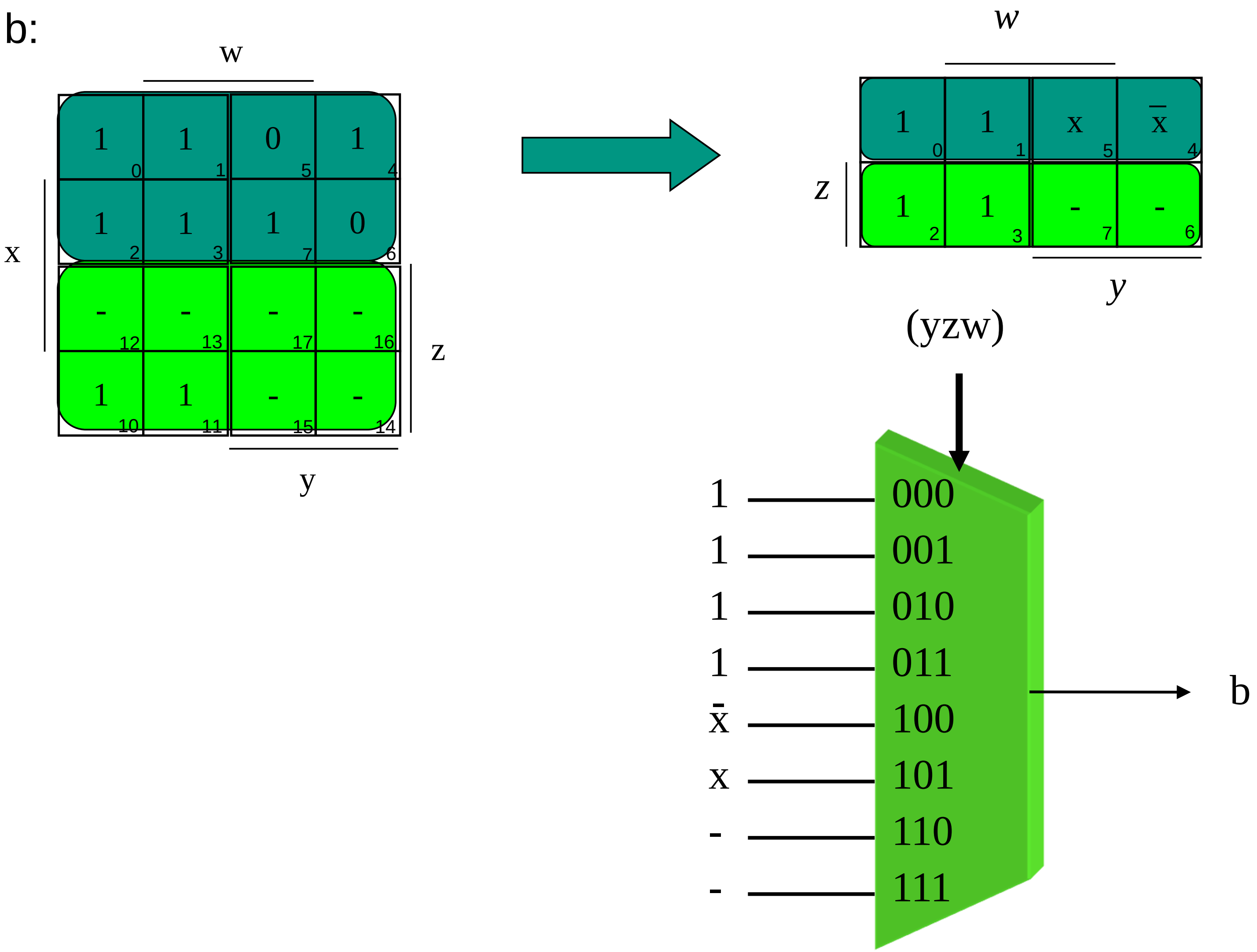
5. Aufgabe – 5.3

a:



5. Aufgabe – 5.3

b:

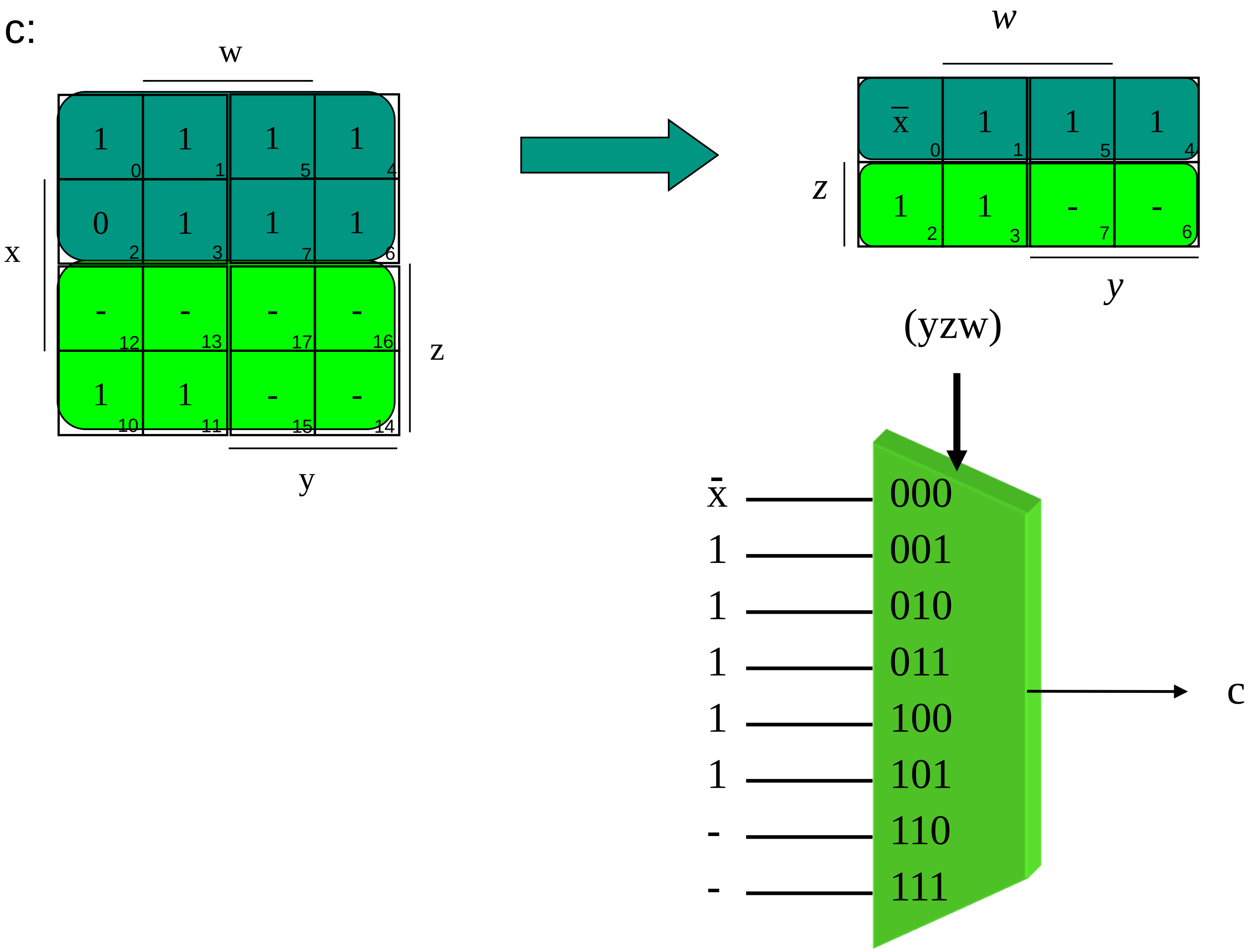


1 $_{0}$	1 $_{1}$	0 $_{5}$	1 $_{4}$
1 $_{2}$	1 $_{3}$	1 $_{7}$	0 $_{6}$
- $_{12}$	- $_{13}$	- $_{17}$	- $_{16}$
1 $_{10}$	1 $_{11}$	- $_{15}$	- $_{14}$

1 $_{0}$	1 $_{1}$	x $_{5}$	$\bar{x}$ $_{4}$
1 $_{2}$	1 $_{3}$	- $_{7}$	- $_{6}$

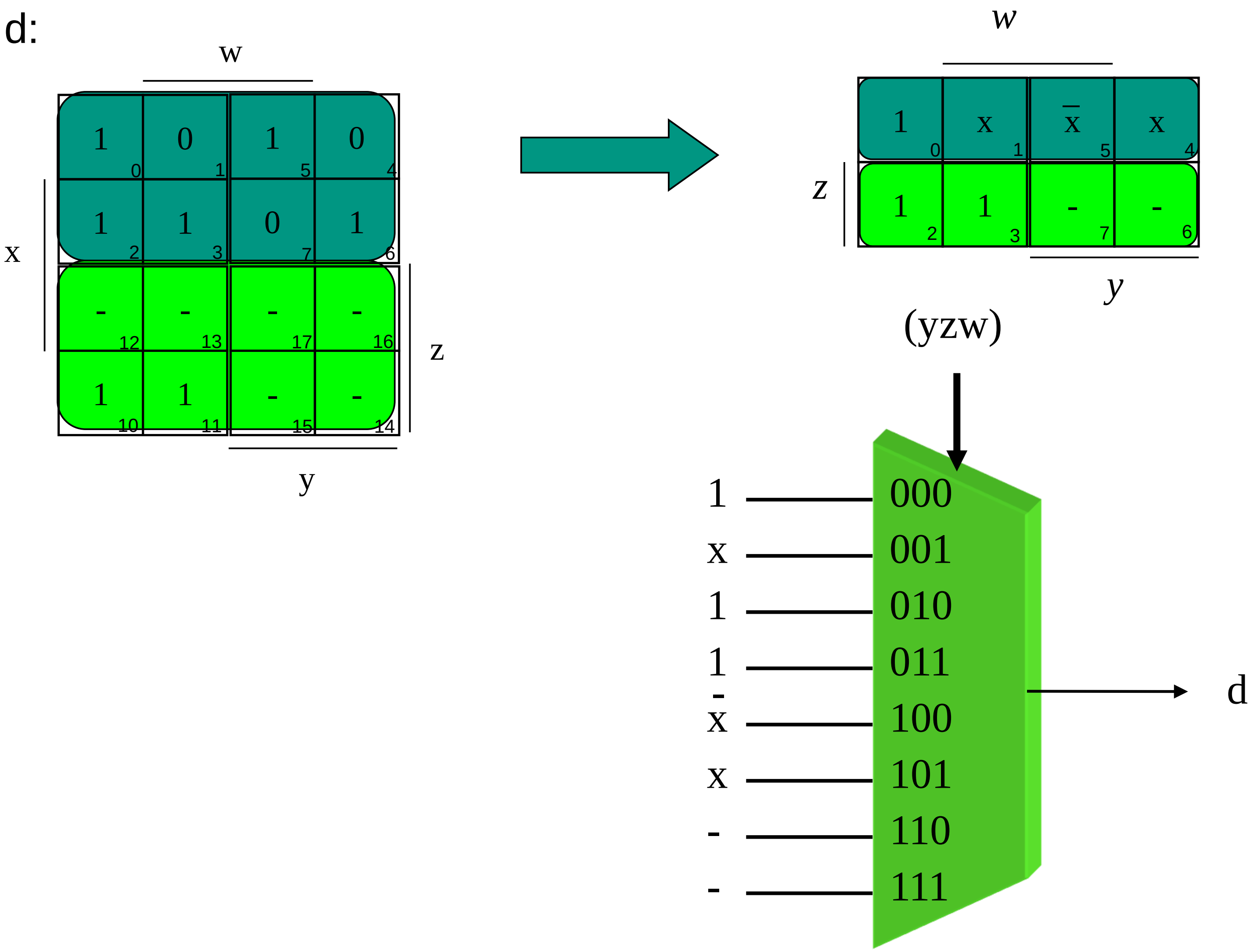
5. Aufgabe – 5.3

c:



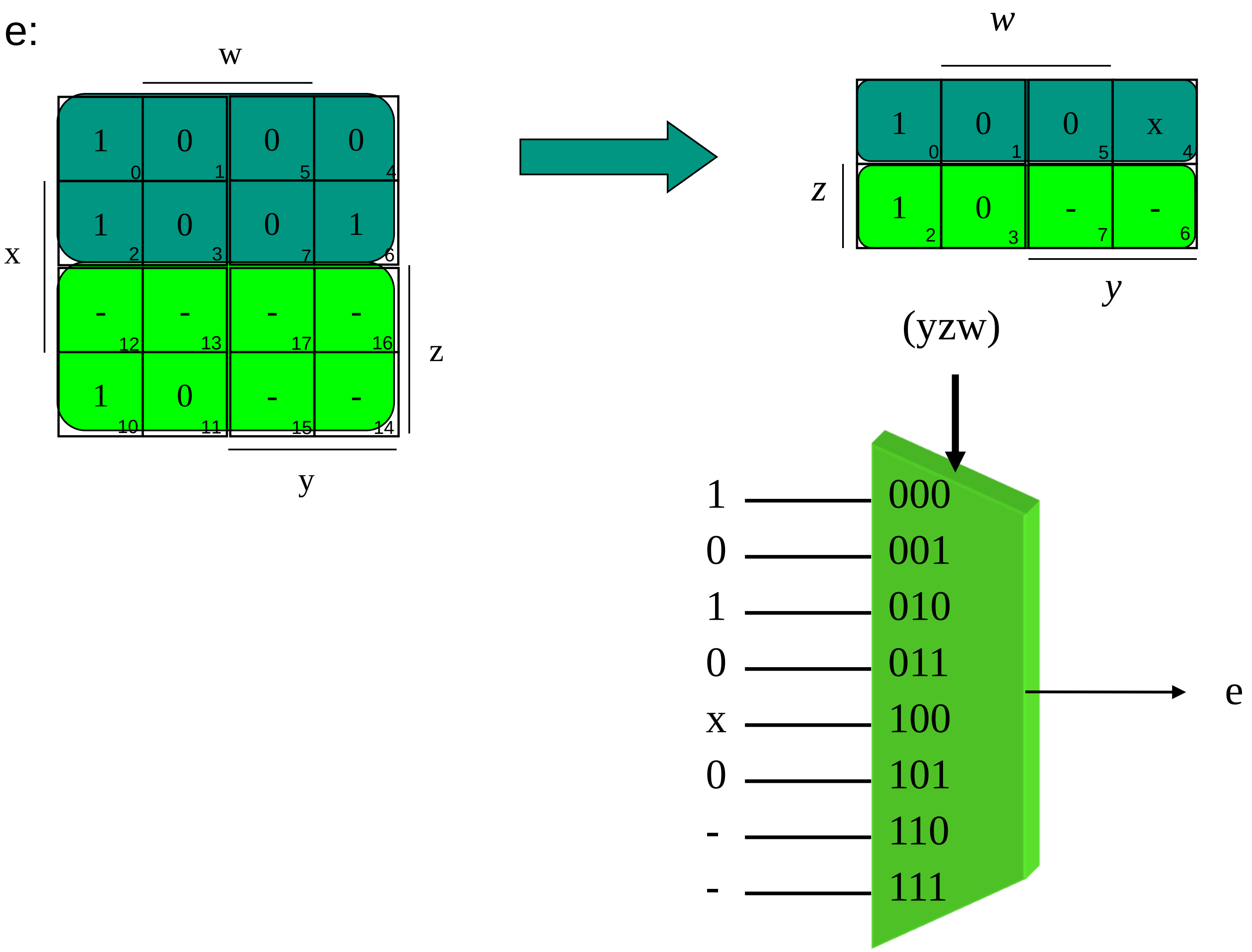
5. Aufgabe – 5.3

d:



5. Aufgabe – 5.3

e:

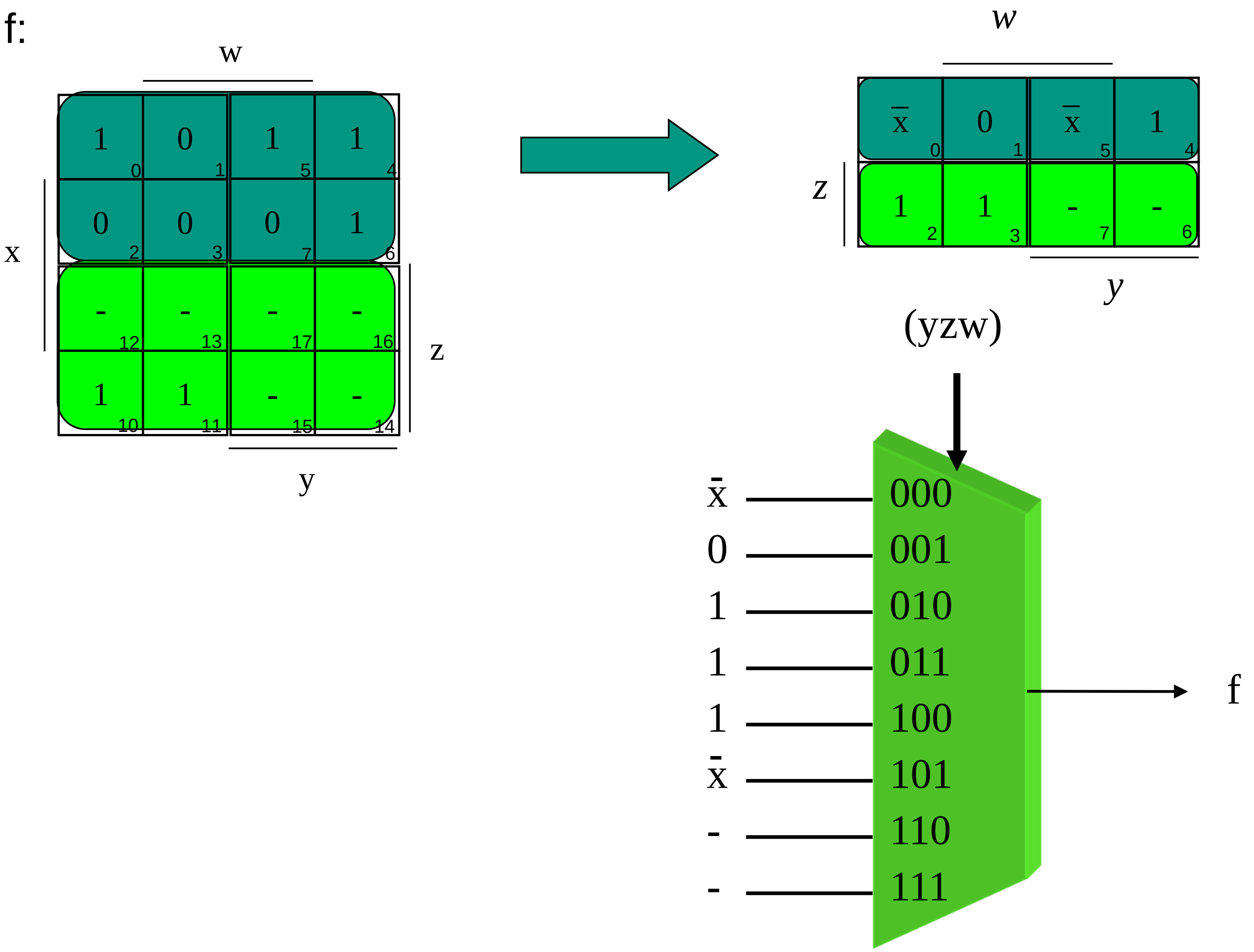


1 (0)	0 (1)	0 (5)	0 (4)
1 (2)	0 (3)	0 (7)	1 (6)
- (12)	- (13)	- (17)	- (16)
1 (10)	0 (11)	- (15)	- (14)

1 (0)	0 (1)	0 (5)	x (4)
1 (2)	0 (3)	- (7)	- (6)

1	000
0	001
1	010
0	011
x	100
0	101
-	110
-	111

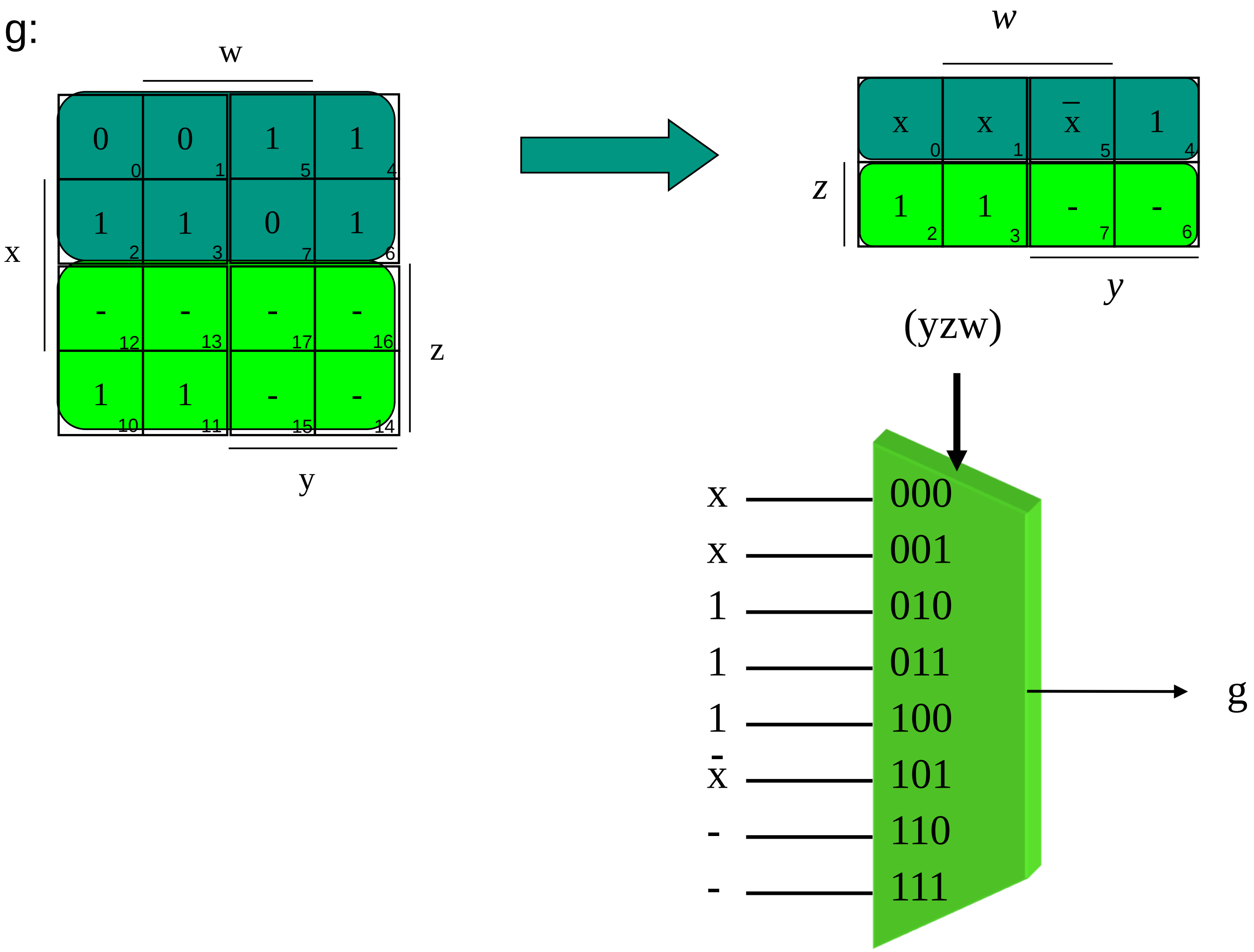
5. Aufgabe – 5.3



1 0	0 1	1 5	1 4
0 2	0 3	0 7	1 6
- 12	- 13	- 17	- 16
1 10	1 11	- 15	- 14

$\bar{x}$ 0	0 1	$\bar{x}$ 5	1 4
1 2	1 3	- 7	- 6

5. Aufgabe – 5.3


g:
w
0 0 1 1
1 1 0 1
- - - -
1 1 - -
0 1 5 4
2 3 7 6
12 13 17 16
10 11 15 14
x
z
y
w
x x $\bar{x}$ 1
1 1 - -
0 1 5 4
2 3 7 6
z
y
(yzw)
x 000
x 001
1 010
1 011
1 100
$\bar{x}$ 101
- 110
- 111
g

Institut für Technik der
Informationsverarbeitung

Felix Pistorius

pistorius@kit.edu

Karlsruher Institut für Technologie (**KIT**)

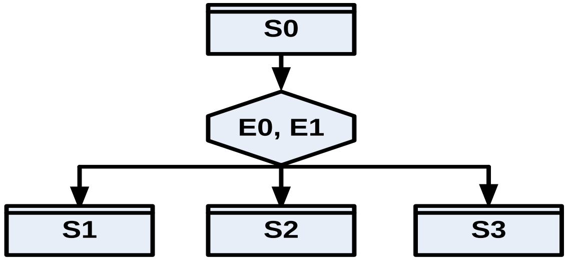
Aufgabe F2: Automaten

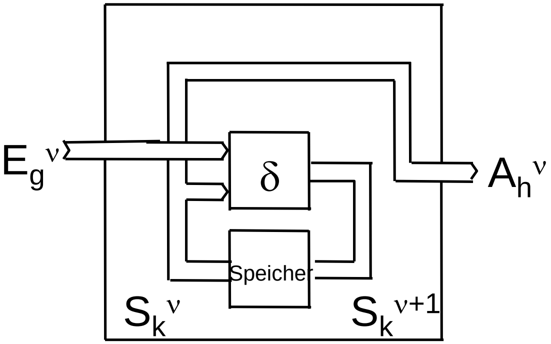
Automaten-Typen

Medwedew-Automat

$A_h^\nu = S_k^\nu$

Die Ausgabe des Automaten ist **identisch mit dem aktuellen Zustand**

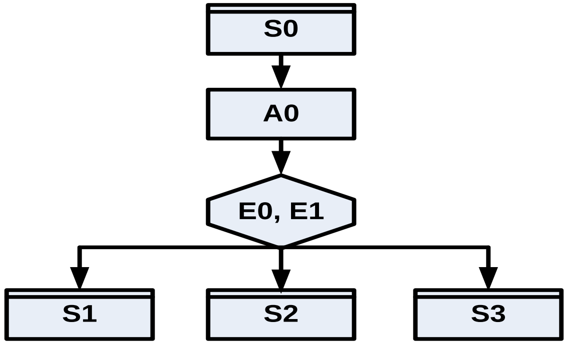


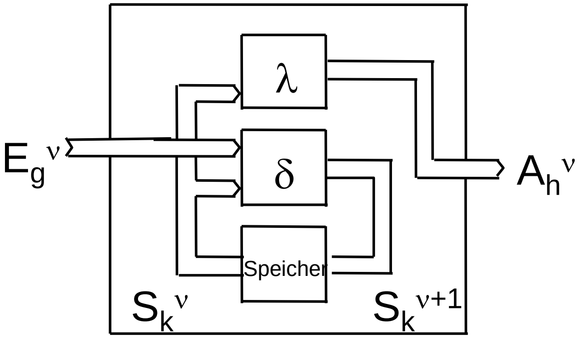


Moore-Automat

$A_h^\nu = \lambda (S_k^\nu)$

Die Ausgabe des Automaten ergibt sich ausschließlich aus dem **aktuellen Zustand**

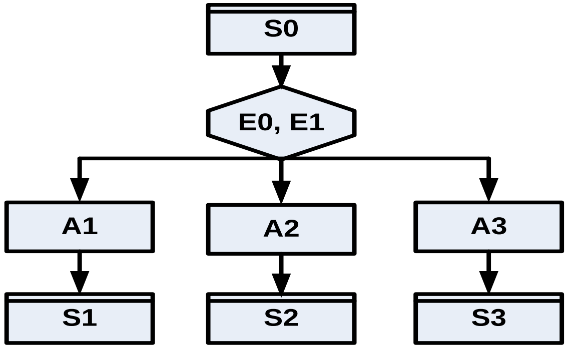


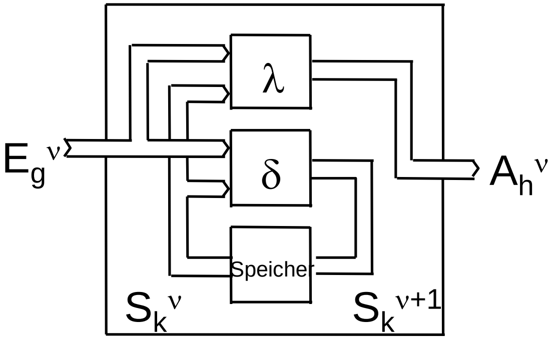


Mealy-Automat

$A_h^\nu = \lambda (E_g^\nu, S_k^\nu)$

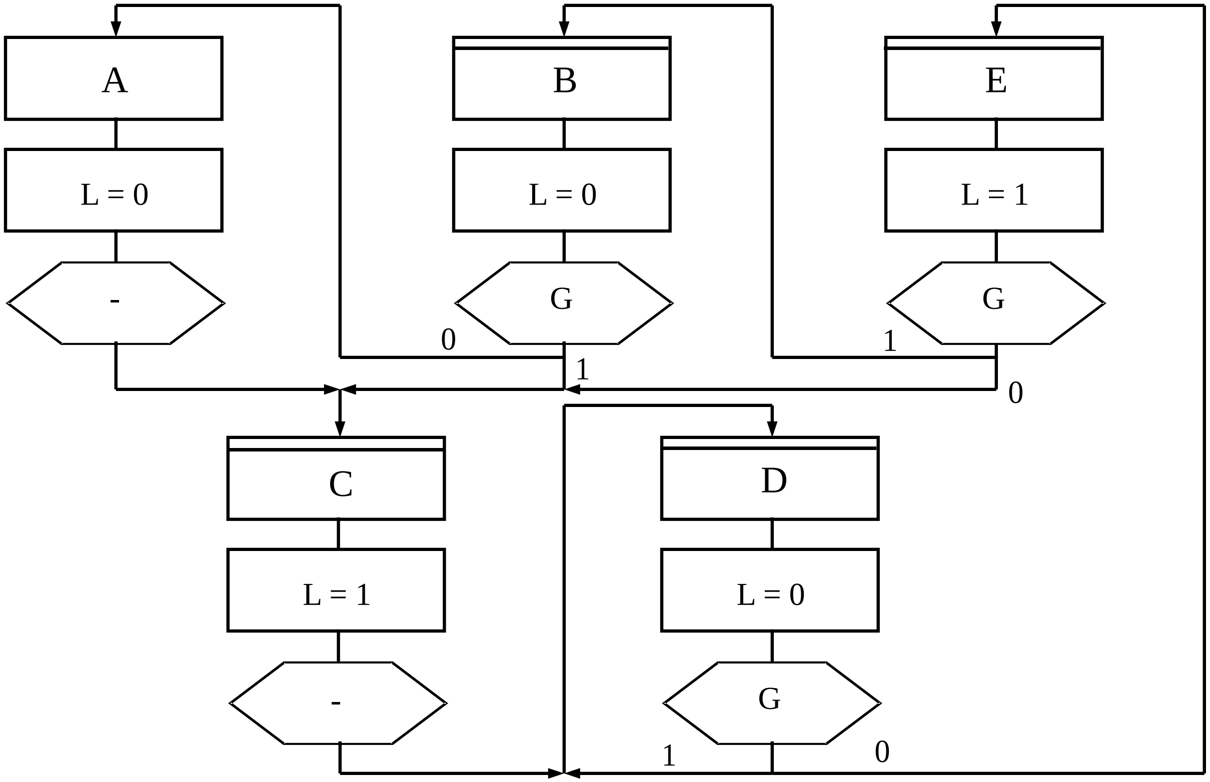
Die Ausgabe des Automaten ergibt sich aus **aktuellem Zustand** und einer **Eingabe** (allgemeiner Fall)





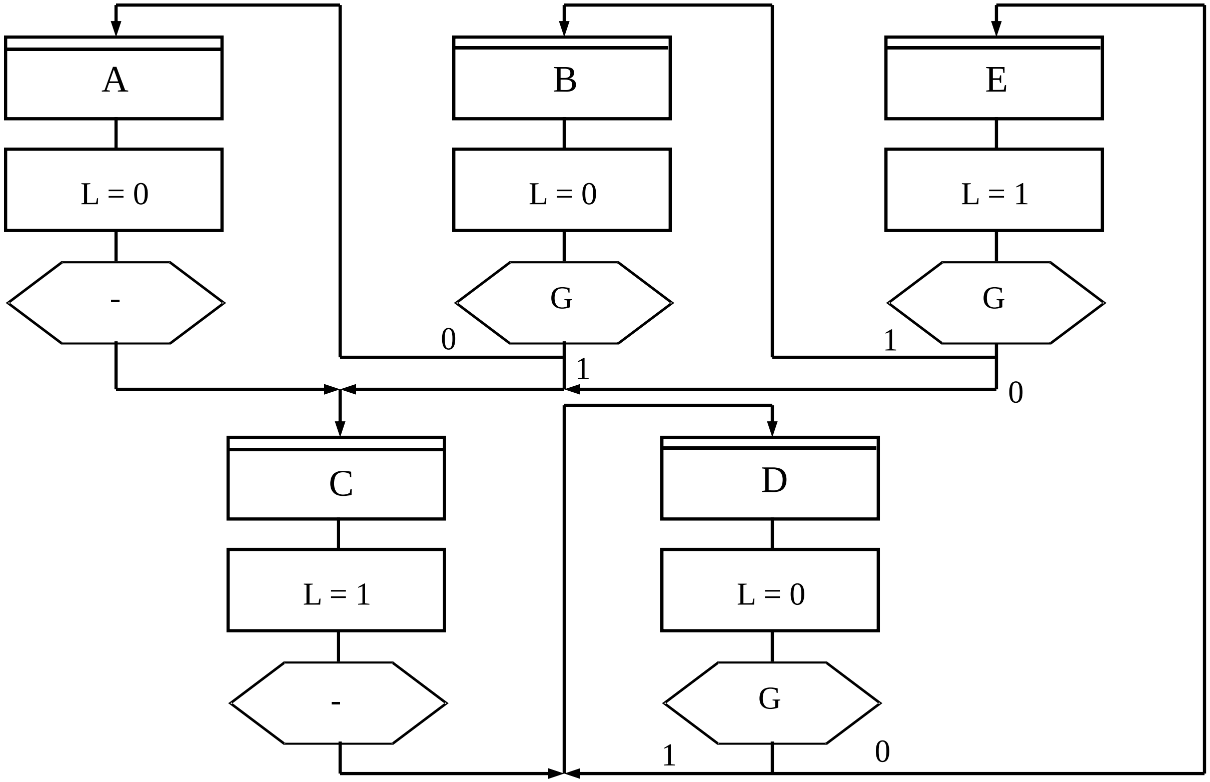
Aufgabe F2

Zur Realisierung eines Automaten haben zwei GDT-Studenten ein Ablaufdiagramm (Abbildung) bzw. eine Ablauftabelle (Tabelle) entwickelt. Leider wurde die Ablauftabelle ein Opfer der aus einer früheren Klausuraufgabe bekannten Cafeteria-Kaffeeflecken und ist deshalb nur unvollständig wiedergegeben.



Aufgabe F2

- **F2.1** Handelt es sich bei dem in gezeigten Automaten um einen Moore- oder einen Mealy-Typ?



Moore, da Ausgabe nur von Zuständen abhängt !!!

Aufgabe F2

- **F2.2** Wie viele Flip-Flops würden Sie für die Realisierung des Automaten als synchrones Schaltwerk mindestens benötigen?

- wir haben 5 Zustände im Automaten
- für eine binäre Kodierung würden wir also

$\lceil ld5 \rceil = 3$ Bits benötigen !!!

Aufgabe F2

- **F2.3** Vervollständigen Sie nun die Ablauftabelle T1. Gehen Sie davon aus, dass die Ablauftabelle und das Ablaufdiagramm dasselbe Automatenverhalten beschreiben. Versuchen Sie eine geeignete Zuordnung zwischen den Bezeichnungen A, B, C, D, E, G und L und den Bezeichnungen R, U, W, Z, T, X und Y zu treffen. Geben Sie diese Zuordnung in einer Tabelle an.

S^n	X	S^{n+1}	Y
R	-		0
U	0		
	1	Z	
W	0		
	1	W	
Z	-	1	
T	0		
	1		

Aufgabe F2

S^n	X	S^{n+1}	Y
R	-	Z	0
U	0 1	R Z	0
W	0 1	T W	0
Z	-	W	1
T	0 1	Z U	1

Diagramm	Tabelle
A	R
B	U
C	Z
D	W
E	T
G	X
L	Y