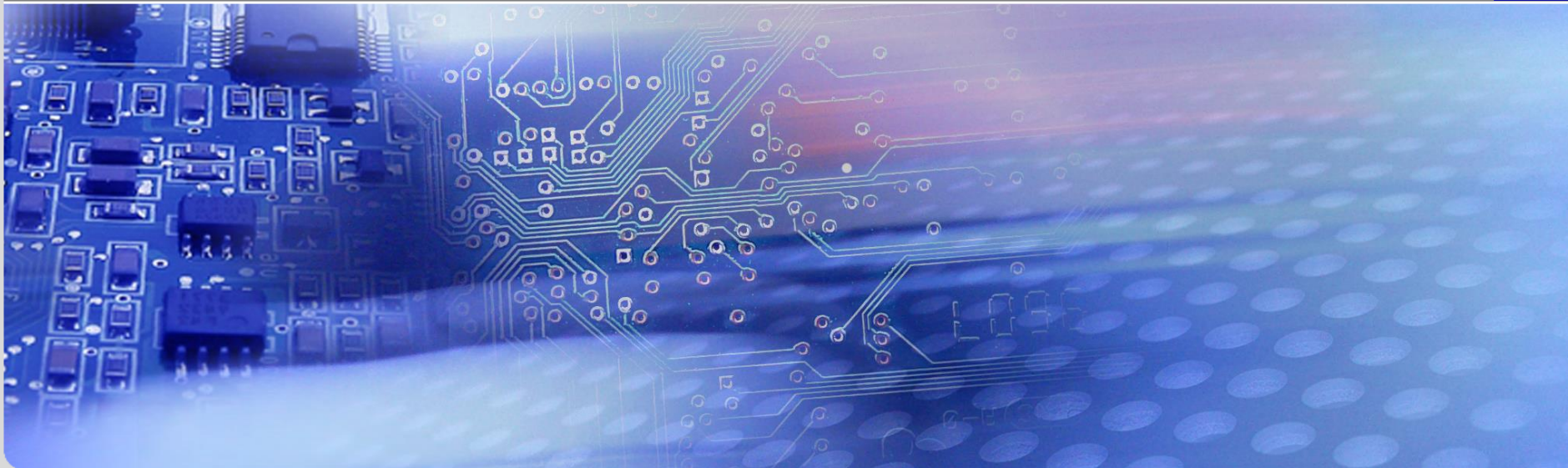


Zahlensysteme

3.Tutorium

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

itv



Zahlensysteme

Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N :
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle

Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N :
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
 1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel

Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N :
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
 1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
 2. Aus Dezimalsystem:
 1. Rekursion $\Rightarrow N_D$ durch R teilen \Rightarrow Rest an Stelle d_0
 2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N: $N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
 1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
 2. Aus Dezimalsystem:
 1. Rekursion $\Rightarrow N_D$ durch R teilen \Rightarrow Rest an Stelle d_0
 2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

Beispiel: 123_D in Hexadezimalsystem

Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N :
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
 1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
 2. Aus Dezimalsystem:
 1. Rekursion $\Rightarrow N_D$ durch R teilen \Rightarrow Rest an Stelle d_0
 2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

Beispiel: 123_D in Hexadezimalsystem

$$123 : 16 = 7 \text{ R } 11 \Rightarrow B_H$$

Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N: $N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
 1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
 2. Aus Dezimalsystem:
 1. Rekursion $\Rightarrow N_D$ durch R teilen \Rightarrow Rest an Stelle d_0
 2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

Beispiel: 123_D in Hexadezimalsystem

$$123 : 16 = 7 \text{ R } 11 \Rightarrow B_H$$

$$7 : 16 = 0 \text{ R } 7 \Rightarrow 7_H$$

Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N :
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
 1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
 2. Aus Dezimalsystem:
 1. Rekursion $\Rightarrow N_D$ durch R teilen \Rightarrow Rest an Stelle d_0
 2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

Beispiel: 123_D in Hexadezimalsystem

$$123 : 16 = 7 \text{ R } 11 \Rightarrow B_H$$

$$7 : 16 = 0 \text{ R } 7 \Rightarrow 7_H$$

$$\Rightarrow 123_D = 7B_H$$

Dualsystem

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

Dualsystem

■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r} 100101101 \\ +110011010 \\ \hline 1011000111 \end{array}$$

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements
- Einerkomplement:
 - Jede Zahl durch Gegenteil ersetzen
 - $10111 \Rightarrow 01000$

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements
- Einerkomplement:
 - Jede Zahl durch Gegenteil ersetzen
 - $10111 \Rightarrow 01000$
- Zweierkomplement:
 - Einerkomplement bilden und 1 addieren
 - $10111 \Rightarrow 01000 + 1 \Rightarrow 01001$

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements
 - Beispiel: $14 - 9 = 5$

Dualsystem

■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

■ Subtraktion:

- Durch Addition des Zweierkomplements
- Beispiel: $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 00001110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 00001001_B$$

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements
 - Beispiel: $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 00001110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 00001001_B$$

$$\Rightarrow \text{Einerkomplement bilden: } 11110110_B$$

Dualsystem

■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

■ Subtraktion:

- Durch Addition des Zweierkomplements
- Beispiel: $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 00001110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 00001001_B$$

$$\Rightarrow \text{Einerkomplement bilden: } 11110110_B$$

$$\Rightarrow \text{Zweierkomplement bilden: } 11110111_B$$

Dualsystem

■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

■ Subtraktion:

- Durch Addition des Zweierkomplements
- Beispiel: $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 00001110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 00001001_B$$

$$\Rightarrow \text{Einerkomplement bilden: } 11110110_B$$

$$\Rightarrow \text{Zweierkomplement bilden: } 11110111_B$$

$$\Rightarrow \text{Zahlen addieren: } 00001110$$

$$\quad \quad \quad \underline{11110111}$$

Dualsystem

■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

■ Subtraktion:

- Durch Addition des Zweierkomplements
- Beispiel: $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 00001110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 00001001_B$$

$$\Rightarrow \text{Einerkomplement bilden: } 11110110_B$$

$$\Rightarrow \text{Zweierkomplement bilden: } 11110111_B$$

$$\Rightarrow \text{Zahlen addieren: } \begin{array}{r} 00001110 \\ 11110111 \\ \hline 00000101_B \end{array} = 5_D$$

$$11110111$$

$$00000101_B$$

$$= 5_D$$

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements
 - Beispiel: $14 - 9 = 5$
- Bemerkungen zum Übertrag:
 - Überträge außerhalb des gegebenen Stellenbereiches ignorieren (siehe Beispiel)
 - Ist das MSB = 1 und es gibt keinen Übertrag außerhalb des Stellenbereiches, erneut Zweierkomplement vom Ergebnis bilden
=> neue Zahl stellt den Absolutwert dar

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements
 - Beispiel: $14 - 9 = 5$
- Multiplikation:

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements
 - Beispiel: $14 - 9 = 5$
- Multiplikation
 - zusammengesetzte Operation aus Bit-Verschiebung nach links und Addition der verschobenen Datenworte

Dualsystem

- Addition:
 - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
 - Durch Addition des Zweierkomplements
 - Beispiel: $14 - 9 = 5$
- Multiplikation
 - zusammengesetzte Operation aus Bit-Verschiebung nach links und Addition der verschobenen Datenworte
 - Die zu multiplizierende Dualzahl wird um Anzahl der Stellen nach links verschoben, an der eine 1 im Multiplikator steht.

Dualsystem

■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

■ Subtraktion:

- Durch Addition des Zweierkomplements
- Beispiel: $14 - 9 = 5$

■ Multiplikation

- zusammengesetzte Operation aus Bit-Verschiebung nach links und Addition der verschobenen Datenworte
- Die zu multiplizierende Dualzahl wird um Anzahl der Stellen nach links verschoben, an der eine 1 im Multiplikator steht.
- Beispiel: $001101 * 000100 = 110100$
 $001101 * 000010 = 011010$

BCD - Code

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Beispiel: 56_D

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Beispiel: $56_D \Rightarrow 0101_B 0110_B$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Überträge auftreten
⇒ Addition von $6_D = 0110_B$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
⇒ Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
⇒ Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden
- Beispiel: $15_D + 18_D$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 \Rightarrow Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 15_D + 18_D \\
 \Rightarrow \quad 0001 \ 0101 \\
 \quad + \underline{0001 \ 1000}
 \end{array}$$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 \Rightarrow Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad \quad 0001 \ 0101 \\
 + \quad 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0010 \ 1101
 \end{array}$$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 \Rightarrow Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 15_D + 18_D \\
 \Rightarrow \quad 0001 \ 0101 \\
 + 0001 \ 1000 \\
 \hline
 0010 \ 1101 \quad \Rightarrow \text{Pseudotetrad, da } 1101_B = 13_D
 \end{array}$$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 - ⇒ Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad \quad 0001 \ 0101 \\
 + \quad 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad \quad \quad 0110
 \end{array}$$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 \Rightarrow Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad 0001 \ 0101 \\
 + 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad 0110 \\
 \hline
 \quad 1 \ 0011
 \end{array}$$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 - ⇒ Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad \quad 0001 \ 0101 \\
 + \quad 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad \quad \quad 0110 \\
 \hline
 \quad \quad 1 \ 0011 \quad \Rightarrow \text{Übertrag auf nächste Stelle}
 \end{array}$$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 - ⇒ Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad \quad 0001 \ 0101 \\
 + \quad 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad \quad \quad 0110 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 1 \ 0011 \\
 \quad \quad 0010 \\
 \hline
 \end{array}$$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 - ⇒ Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad \quad 0001 \ 0101 \\
 + \quad 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad \quad \quad 0110 \\
 \hline
 \quad \quad 1 \ 0011 \\
 \quad \quad 0010 \\
 \hline
 \quad \quad 0011 \ 0011
 \end{array}$$

BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
 - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
 \Rightarrow Addition von $6_D = 0110_B$
 - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{rcl}
 & 15_D + 18_D & \\
 \Rightarrow & 0001\ 0101 & \\
 & + 0001\ 1000 & \\
 \hline
 & 0010\ 1101 & \\
 & 0110 & \\
 \hline
 & 1\ 0011 & \\
 & 0010 & \\
 \hline
 & 0011\ 0011 & = 33_D
 \end{array}$$

Mengen und Relationen

- Reflexivität: $x\alpha x, \forall x \in M$
- Symmetrie: $x\alpha y \Rightarrow y\alpha x, \forall x, y \in M$
- Antisymmetrie: $x\alpha y \wedge y\alpha x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in M$
- Transitivität: $x\alpha y \wedge y\alpha z \Rightarrow x\alpha z, \forall x, y, z \in M$

- Beispielmengen: $M_1 = \{1,2,3\}$ und $M_2 = \{3,4,5\}$
- Kardinalität: Anzahl der Elemente einer Menge ($|M_1| = 3$)
- Komplementmenge $C_{M_1}(M_2)$ = Menge aller Elemente von M_1 , die nicht zu M_2 gehören = $\{1,2\}$