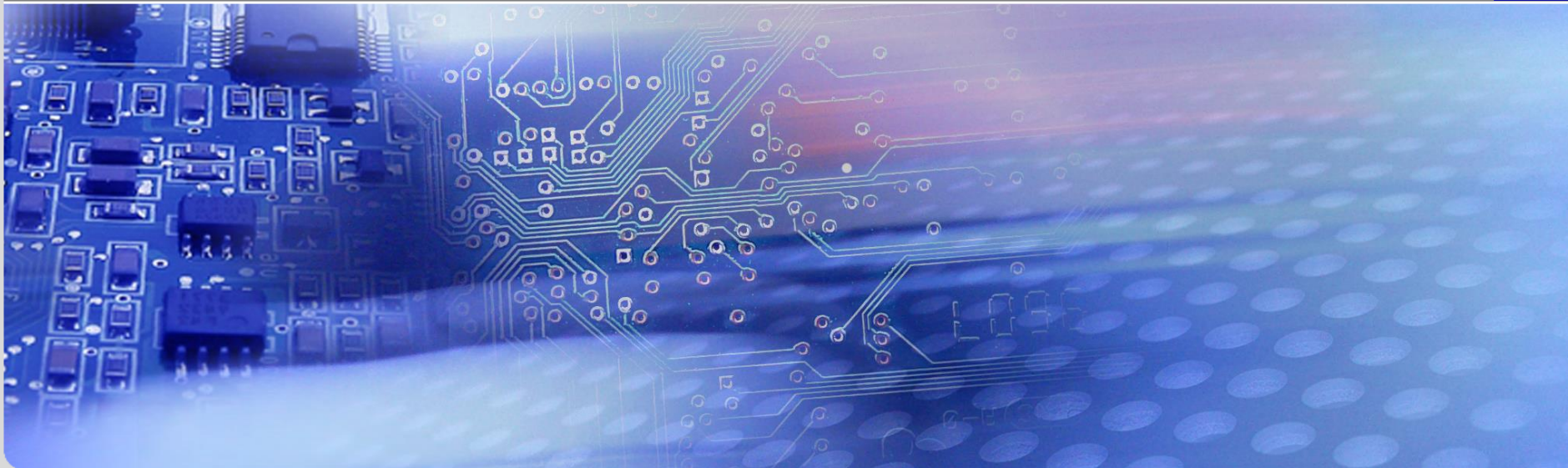


# **Zahlensysteme**

## **3. Tutorium**

Institut für Technik der Informationsverarbeitung (ITIV)

ITIV



# Mengen und Relationen

- Reflexivität:  $x\alpha x, \forall x \in M$
- Symmetrie:  $x\alpha y \Rightarrow y\alpha x, \forall x, y \in M$
- Antisymmetrie:  $x\alpha y \wedge y\alpha x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in M$
- Transitivität:  $x\alpha y \wedge y\alpha z \Rightarrow x\alpha z, \forall x, y, z \in M$
  
- Beispielmengen:  $M_1 = \{1,2,3\}$  und  $M_2 = \{3,4,5\}$
- Kardinalität: Anzahl der Elemente einer Menge (  $|M_1| = 3$  )
- Komplementmenge  $C_{M_1}(M_2)$  = Menge aller Elemente von  $M_1$ , die nicht zu  $M_2$  gehören =  $\{1,2\}$

# Aufgabe 2

- 2.1 Reflexivität:  $x\alpha x, \forall x \in M$   
Symmetrie:  $x\alpha y \Rightarrow y\alpha x, \forall x, y \in M$   
Antisymmetrie:  $x\alpha y \wedge y\alpha x \Rightarrow x = y, \forall x, y \in M$   
Transitivität:  $x\alpha y \wedge y\alpha z \Rightarrow x\alpha z, \forall x, y, z \in M$

- 2.2 „ist kleiner oder gleich“ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv  
„Gleichheit“ reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, transitiv  
„ist ein Vielfaches von“ reflexiv, antisymmetrisch, transitiv

## Aufgabe 2.3

### ■ 2.3

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$ , mit  $|A| = 3$  folgt  $|B| = 2$ , damit besitzt die Menge  $B$  zwei Elemente.

### ■ 2.4

$$B = \{1, 3\} \quad B = \{5, 3\} \quad B = \{7, 3\}$$

# Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl  $N$ : 
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle

# Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl  $N$ : 
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
  1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel

# Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N: 
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
  1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
  2. Aus Dezimalsystem:
    1. Rekursion  $\Rightarrow N_D$  durch R teilen  $\Rightarrow$  Rest an Stelle  $d_0$
    2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

# Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N: 
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
  1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
  2. Aus Dezimalsystem:
    1. Rekursion  $\Rightarrow N_D$  durch R teilen  $\Rightarrow$  Rest an Stelle  $d_0$
    2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

Beispiel:  $123_D$  in Hexadezimalsystem



# Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl N:  $N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
  1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
  2. Aus Dezimalsystem:
    1. Rekursion  $\Rightarrow N_D$  durch R teilen  $\Rightarrow$  Rest an Stelle  $d_0$
    2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

Beispiel:  $123_D$  in Hexadezimalsystem

$$123 : 16 = 7 \text{ R } 11 \Rightarrow B_H$$

$$7 : 16 = 0 \text{ R } 7 \Rightarrow 7_H$$

# Zahlensysteme

- Aufbau einer Zahl  $N$ : 
$$N = d_n \cdot R^n + \dots + d_1 \cdot R^1 + d_0 \cdot R^0 = \sum_{i=0}^n d^i \cdot R^i$$
- Wenn Zeichenvorrat an einer Stelle erschöpft, erfolgt Übertrag in nächsthöhere Stelle
- Wandlung in beliebiges Zahlensystem:
  1. Ins Dezimalsystem gemäß obiger Formel
  2. Aus Dezimalsystem:
    1. Rekursion  $\Rightarrow N_D$  durch  $R$  teilen  $\Rightarrow$  Rest an Stelle  $d_0$
    2. Mit entstandenem Quotientem mit gleicher Regel wiederholen

Beispiel:  $123_D$  in Hexadezimalsystem

$$123 : 16 = 7 \text{ R } 11 \Rightarrow B_H$$

$$7 : 16 = 0 \text{ R } 7 \Rightarrow 7_H$$

$$\Rightarrow 123_D = 7B_H$$

# Dualsystem

## ■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

## ■ Beispiel:

$$\begin{array}{r} 100101101 \\ +110011010 \\ \hline 1011000111 \end{array}$$

# Dualsystem

- Addition:
  - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
  - Durch Addition des Zweierkomplements

# Dualsystem

- Addition:
  - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
  - Durch Addition des Zweierkomplements
- Einerkomplement:
  - Jede Zahl durch Gegenteil ersetzen
  - $10111 \Rightarrow 01000$
- Zweierkomplement:
  - Einerkomplement bilden und 1 addieren
  - $10111 \Rightarrow 01000 + 1 \Rightarrow 01001$

# Dualsystem

- Addition:
  - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
  - Durch Addition des Zweierkomplements
  - Beispiel:  $14 - 9 = 5$

# Dualsystem

- Addition:
  - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
  - Durch Addition des Zweierkomplements
  - Beispiel:  $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 1110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 1001_B$$

# Dualsystem

## ■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

## ■ Subtraktion:

- Durch Addition des Zweierkomplements
- Beispiel:  $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 1110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 1001_B$$

$$\Rightarrow \text{Einerkomplement bilden: } 0110_B$$

$$\Rightarrow \text{Zweierkomplement bilden: } 0111_B$$



# Dualsystem

## ■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

## ■ Subtraktion:

- Durch Addition des Zweierkomplements
- Beispiel:  $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 1110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 1001_B$$

$$\Rightarrow \text{Einerkomplement bilden: } 0110_B$$

$$\Rightarrow \text{Zweierkomplement bilden: } 0111_B$$

$$\Rightarrow \text{Zahlen addieren: } \begin{array}{r} 1110 \\ 0111 \\ \hline \end{array}$$

$$\underline{0111}$$

# Dualsystem

## ■ Addition:

- Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)

## ■ Subtraktion:

- Durch Addition des Zweierkomplements
- Beispiel:  $14 - 9 = 5$

$$\Rightarrow 14_D = 1110_B$$

$$\Rightarrow 9_D = 1001_B$$

$$\Rightarrow \text{Einerkomplement bilden: } 0110_B$$

$$\Rightarrow \text{Zweierkomplement bilden: } 0111_B$$

$$\Rightarrow \text{Zahlen addieren: } \begin{array}{r} 1110 \\ 0111 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1110 \\ 0111 \\ \hline (1)0101_B = 5_D \end{array}$$

# Dualsystem

- Addition:
  - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
  - Durch Addition des Zweierkomplements
- Bemerkungen zum Übertrag:
  - Überträge außerhalb des gegebenen Stellenbereiches ignorieren (siehe Beispiel)
  - Ist das MSB = 1 und es gibt keinen Übertrag außerhalb des Stellenbereiches, erneut Zweierkomplement vom Ergebnis bilden, da Ergebnis negativ
    - => neue Zahl stellt den Absolutwert dar

# Dualsystem

- Addition:
  - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
  - Durch Addition des Zweierkomplements
- Multiplikation:
  - zusammengesetzte Operation aus Bit-Verschiebung nach links und Addition der verschobenen Datenworte

# Dualsystem

- Addition:
  - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
  - Durch Addition des Zweierkomplements
- Multiplikation
  - zusammengesetzte Operation aus Bit-Verschiebung nach links und Addition der verschobenen Datenworte
  - Beispiel:  $3 * 5 = 15$

$$3_D = 0011_B$$

$$5_D = 0101_B$$

# Dualsystem

- Addition:
  - Addition wie im Dezimalsystem (Übertrag wird an nächste Stelle weitergegeben)
- Subtraktion:
  - Durch Addition des Zweierkomplements
- Multiplikation
  - zusammengesetzte Operation aus Bit-Verschiebung nach links und Addition der verschobenen Datenworte
  - Beispiel:  $3 * 5 = 15$

$$\begin{array}{r}
 0011_B * 0101_B \\
 \hline
 + \quad \quad 0011_B \\
 + \quad \quad 1100_B \\
 \hline
 1111_B = 15_D
 \end{array}$$

# Aufgabe 3

■ 3.5

$$71_D = 01000111_B$$

$$139_D = 10001011_B$$

Bilden des Zweierkomplements von  $139_D$ :

$$01110100_B + 1_B = 01110101_B$$

Addieren des Zweierkomplements von  $139_D$  zu  $71_D$ :

$$\begin{array}{r}
 0100\,0111 \\
 +\, 0111\,0101 \\
 \hline
 111 \\
 \hline
 1011\,1100
 \end{array}$$

$$|71_D - 139_D| = 0100\,0011_B + 1_b = 0100\,0100_B = 68_D$$

Das Endergebnis lautet somit  $-68_D$ .

### ■ 3.6

$$\begin{array}{r}
 10111 \cdot 10011 = 23_D \cdot 19_D \\
 + \quad 101110000 \\
 + \quad \quad 101110 \\
 + \quad \quad \quad 10111 \\
 \hline
 110110101 = 437_D
 \end{array}$$

### ■ 3.7

|   |    |    |    |    |         |                      |
|---|----|----|----|----|---------|----------------------|
| 1 | 20 | 12 | 10 | 21 | Basis 3 |                      |
| 1 | 6  | 5  | 3  | 7  | Basis 9 | → 16537 <sub>9</sub> |

### ■ 3.8

$$\begin{aligned}
 A9_{11} &= 119_D \\
 119 : 5 &= 23 \text{ R}4 \\
 23 : 5 &= 4 \text{ R}3 \\
 4 : 5 &= 0 \text{ R}4 \rightarrow 434
 \end{aligned}$$



# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt

# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Beispiel:  $56_D \Rightarrow 0101_B 0110_B$

# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
  - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten  
⇒ Addition von  $6_D = 0110_B$
  - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
  - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten  
 $\Rightarrow$  Addition von  $6_D = 0110_B$
  - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 15_D + 18_D \\
 \Rightarrow \quad 0001 \ 0101 \\
 + 0001 \ 1000 \\
 \hline
 0010 \ 1101
 \end{array}$$

# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
  - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten  
 $\Rightarrow$  Addition von  $6_D = 0110_B$
  - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 15_D + 18_D \\
 \Rightarrow \quad 0001 \ 0101 \\
 + 0001 \ 1000 \\
 \hline
 0010 \ 1101 \quad \Rightarrow \text{Pseudotetrad, da } 1101_B = 13_D
 \end{array}$$

# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
  - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
    - ⇒ Addition von  $6_D = 0110_B$
  - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad \quad 0001 \ 0101 \\
 + \quad 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad \quad \quad 0110
 \end{array}$$

# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
  - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten  
 $\Rightarrow$  Addition von  $6_D = 0110_B$
  - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad \quad 0001 \ 0101 \\
 + \quad 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad \quad \quad 0110 \\
 \hline
 \quad \quad 1 \ 0011
 \end{array}$$

# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
  - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
    - ⇒ Addition von  $6_D = 0110_B$
  - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad \quad 0001 \ 0101 \\
 + \quad 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad \quad \quad 0110 \\
 \hline
 \quad \quad 1 \ 0011 \quad \Rightarrow \text{Übertrag auf nächste Stelle}
 \end{array}$$



# BCD - Code

- Jede Ziffer wird durch eine 4-Bit-Dualzahl dargestellt
- Addition:
  - Falls Pseudotetrade (ungültige Zahlen) oder Übertrage auftreten
    - ⇒ Addition von  $6_D = 0110_B$
  - Jede Tetrade darf nur einmalig korrigiert werden

■ Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 \Rightarrow \quad 15_D + 18_D \\
 \quad 0001 \ 0101 \\
 + 0001 \ 1000 \\
 \hline
 \quad 0010 \ 1101 \\
 \quad \quad 0110 \\
 \hline
 \quad \quad 1 \ 0011 \\
 \quad 0010 \\
 \hline
 0011 \ 0011 = 33_D
 \end{array}$$

# Aufgabe 1

## ■ 1.1

$$\begin{array}{rcccc}
 & 0010 & 0100 & 1000 & 248_D \\
 + & 0101 & 0001 & 0101 & 515_D \\
 \hline
 & 0111 & 0101 & 1101 & \\
 + & & & 0110 & PS \\
 & & 1 & & \\
 \hline
 & 0111 & 0110 & 0011 & 763_D
 \end{array}$$

# Aufgabe 1

## ■ 1.2

$$001001001000 = 248_D$$

$$010100010101 = 515_D$$

$$000100111001 = 139_D$$

$$248 : 16 = 15 \text{ R } 8$$

$$15 : 16 = 0 \text{ R } 15$$

$$248_D = F8_H$$

$$515 : 16 = 32 \text{ R } 3$$

$$32 : 16 = 2 \text{ R } 0$$

$$2 : 16 = 0 \text{ R } 2$$

$$515_D = 203_H$$

$$139 : 16 = 8 \text{ R } 11$$

$$8 : 16 = 0 \text{ R } 8$$

$$139_D = 8B_H$$

$$\begin{array}{r}
 F8 \\
 + \quad 203 \\
 \hline
 2FB \quad = 2 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 11 = 512 + 240 + 11 = 763_D \\
 + \quad 8B \\
 11 \\
 \hline
 386 \quad = 3 \cdot 256 + 8 \cdot 16 + 6 = 768 + 128 + 6 = 902_D
 \end{array}$$

# Fließkommazahl

## ■ Darstellen von Komma-Zahlen



Abbildung 1: 8-Bit-Fließkommazahl

## ■ Vorzeichen V, Exponent E, Mantisse M

## ■ Formel: $Z_D = (-1)^V \cdot 2^{E-3} \cdot (1, M)$

# Aufgabe 3

## ■ 3.1

$$Z = (-1) \cdot 2^{(1-3)} \cdot 1,5 = (-1) \cdot 2^{(-2)} \cdot 1,5 = (-1) \cdot 0,25 \cdot 1,5 = -0,375$$