Formelblatt Digitaltechnik

Huntingtonschen Axiome für alle $a,b,\mathsf{I},\mathsf{O} \in K$; $\overline{a} = k \in K$

Abgeschlossenheit:	(H1)	$a \top b \in K$	$a \perp b \in K$
Kommutativgesetz:	(H2)	$a \top b = b \top a$	$a \perp b = b \perp a$
Distributivgesetz:	(H3)	$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)$	$(a \perp b) \top c = (a \top c) \perp (b \top c)$
Neutrales Element:	(H4)	$\mathsf{I} \top a = a$	$\mathsf{O} \perp a = a$
Komplement:	(H5)	$a \top k = \mathsf{O}$	$a \perp k = \mathsf{I}$

Abgeleitete Regeln

R1a:	$\overline{0} = 1$	R1b:	$\overline{1} = 0$
R2a:	$0 \vee 0 = 0$	R2b:	$1 \,\&\, 1 = 1$
R3a:	$1 \vee 1 = 1$	R3b:	$0 \,\&\, 0 = 0$
R4a:	$1 \vee 0 = 1$	R4b:	$1 \,\&\, 0 = 0$
R5a:	$a \vee 0 = a$	R5b:	$a \,\&\, 0 = 0$
R6a:	$a \vee 1 = 1$	R6b:	$a \,\&\, 1 = a$
R7a:	$a \vee a = a$	R7b:	$a \,\&\, a = a$
R8a:	$a \vee \overline{a} = 1$	R8b:	$a \,\&\, \overline{a} = 0$
R9:	$\overline{(\overline{a})} = \overline{\overline{a}} = a$		

Assoziative Gesetze:

R10a: $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee b \vee c$ R10b: $(a \,\&\, b) \,\&\, c = a \,\&\, (b \,\&\, c) = a \,\&\, b \,\&\, c$

Absorptionsgesetze:

R11a: $(a \vee b) \,\&\, a = a$ R11b: $(a \,\&\, b) \vee a = a$

De Morgan:

R12a: $\overline{(a \vee b)} = \overline{a} \,\&\, \overline{b}$ R12b: $\overline{(a \,\&\, b)} = \overline{a} \vee \overline{b}$

Umwandlung DNF ↔ KNF

$$OR\big(AND(l_i)\big) \xleftrightarrow{R9} OR\Big(AND(\overline{\overline{l_i}})\Big) \xleftrightarrow{R12a} OR\Big(\overline{OR(\overline{l_i})}\Big) \xleftrightarrow{R12b} \overline{AND\Big(OR(\overline{l_i})\Big)} \xleftrightarrow{H3}$$

$$\overline{OR\Big(AND(\overline{l_k})\Big)} \xleftrightarrow{R12a} AND\Big(\overline{AND(\overline{l_k})}\Big) \xleftrightarrow{R12b} AND\Big(OR(\overline{\overline{l_k}})\Big) \xleftrightarrow{R9} AND\big(OR(l_k)\big)$$

Weitere Funktionen

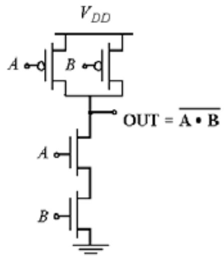
Implikation	$a \to b = \overline{a} + b$
Äquivalenz	$a \equiv b = a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b}$
Inklusion	$f \le g \Rightarrow f \cdot \overline{g} = 0$
Transitivität der Inklusion	$(f \le g) \cdot (g \le h) \Rightarrow f \le h$
Tautologie	$f = g \Leftrightarrow f \equiv g = 1$
	$f \le g \Leftrightarrow \overline{f} + g = 1$
XOR-Regeln	$x \oplus y = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$
	$x + y = x \cdot y \oplus x \oplus y$
	$x \cdot (y \oplus z) = x \cdot y \oplus x \cdot z$
	$\overline{x} = x \oplus 1$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$
Multiplexer	$f = x \cdot a + \overline{x} \cdot b$

Entwicklungssatz

Boolescher Entwicklungssatz $f = x \cdot f_x + \overline{x} \cdot f_{\overline{x}}$

Dualer Entwicklungssatz $f = (\overline{x} + f_x) \cdot (x + f_{\overline{x}})$

CMOS Schaltungen



CMOS (wohl definiert)	$v_1 = \overline{v_0}$
CMOS (kein Kurzschluss)	$v_1 \cdot v_0 = 0$
CMOS (Vollständigkeit)	$v_1 + v_0 = 1$

Addierer

Halbaddierer $s_i = a_i \oplus b_i$ $c_{i+1} = a_i \cdot b_i$

Volladdierer $s_i = a_i \oplus b_i \oplus c_i$

$c_{i+1} = a_i \cdot b_i + (a_i \oplus b_i) \cdot c_i$

Carry-Look-ahead $c_{i+1} = g_i + p_i \cdot c_i$

Generate $g_i = a_i \cdot b_i$

Propagate $p_i = a_i \oplus b_i$

Informationsgehalt

Informationsgehalt H_e eines Zeichens: $H_e = \mathrm{ld}\,\frac{1}{p}$

Informationsgehalt H einer Quelle: $H = \sum_{i=1}^{N} p(i) \cdot \mathrm{ld}\,\frac{1}{p(i)}$

mit der Auftrittswahrscheinlichkeit $p(i)$ und $\sum_{i=1}^{N} p(i) = 1$

a,b,x,y,z : boolesche Variablen l : Literal f,g : boolesche Funktionen v_1 : p-Netz v_0 : n-Netz
s : Summe/Zustand c : Carry i : Eingang δ : Transitionsfunktion λ : Ausgabefunktion

Codierung

Allgemeiner Aufbau einer polyadischen Zahl:

$$N = dn * Rn + \ldots + d1 * R1 + d0 * R0$$

mit N Zahl im Zahlensystem; R Basis; R^i Wertigkeit; d_i Ziffer der i-ten Stelle; Z Menge der Ziffer $d_i \in \{0, 1, 2, \ldots, R-1\}$

ASCII-Tabelle

LSB	MSB							
Binär	000	001	010	011	100	101	110	111
	Steuerzeichen			Großbuchstaben			Kleinbuchstaben	
0000	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	SOH	DC1	!	1	A	Q	a	q
0010	STX	DC2	„	2	B	R	b	r
0011	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	BEL	ETB	´	7	G	W	g	w
1000	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	FF	FS	,	<	L	\	l	|
1101	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1111	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Anzahl Codewörter im (k aus m)-Code:

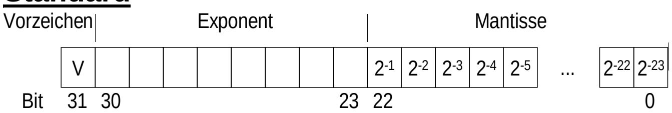
$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

Korrigierbare Fehleranzahl bei ungerader HD:

$$F_k = \frac{(d-1)}{2}$$

Erkennbare Fehleranzahl: $F_e = d - 1$

Gleitkommadarstellung gemäß IEEE 754-Standard



Exponent E	Mantisse M	Wert
255	≠0	ungültig (NAN)
255	0	$-1^V \cdot \infty$ (±unendlich)
0 < E < 255	**M**	**$-1^V \cdot 2^{E-127} \cdot (1,M)$**
0	≠ 0	$-1^V \cdot 2^{-126} \cdot (0,M)$
0	0	$-1^V \cdot 0$

Minimierung - Allgemeine Vorgehensweise:

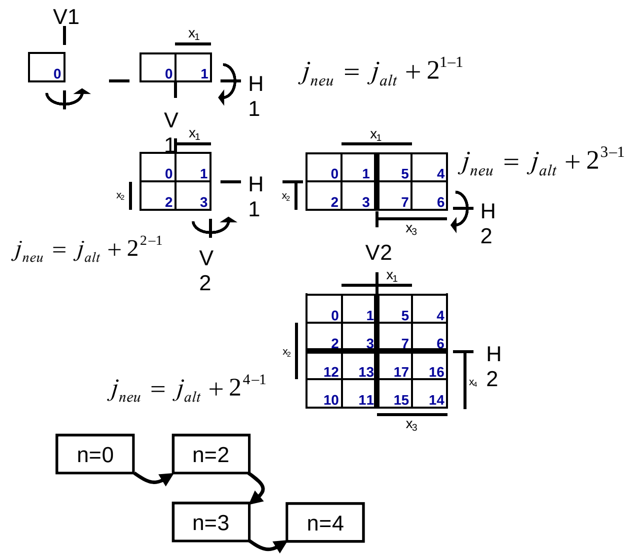
1) **Kerne** bestimmen und **Streichen aller überdeckten Spalten** (@ Einsstellen) („leergewordene" Zeilen können auch gestrichen werden)

2) **Spaltendominanzen** finden und **dominierende Spalten streichen**

3) **Zeilendominanzen** finden und **dominierte Zeilen streichen**, nach Möglichkeit (-> **Kosten ci beachten**!)

4) Schritte **1-3 wiederholen**, bis **Überdeckungstabelle nicht reduzierbar** -> keine Kerne und Dominanzen mehr (ggf. noch zyklische Resttabelle auflösen)

Entwicklung eines Symmetriediagramms



FlipFlops (charakteristische Gleichungen)

FlipFlop	q^v	q^{v+1}		
RS-FlipFlop: $q_k^{v+1} = S^v \vee (q_k^v \,\&\, \overline{R}^v)$			**R**	**S**
	0	0	-	0
	0	1	0	1
	1	0	1	0
	1	1	0	-
D-FlipFlop: $q_k^{v+1} = D^v$			**D**	
	0	0	0	
	0	1	1	
	1	0	0	
	1	1	1	
JK-FlipFlop: $q^{v+1} = (\overline{K} \,\&\, q^v) \vee (J \,\&\, \overline{q}^v)$			**K**	**J**
	0	0	-	0
	0	1	-	1
	1	0	1	-
	1	1	0	-
T-FlipFlop: $q^{v+1} = (T \,\&\, \overline{q}^v) \vee (\overline{T} \,\&\, q^v)$			**T**	
	0	0	0	
	0	1	1	
	1	0	1	
	1	1	0	

Automaten

A_h^v Ausgangsvektor;

S_k^v Zustandsvektor;

E_g^v Eingangsvektor

Transitionsgleichungen

$$s_i^{v+1} = \delta_i\left(S_k^v, E_g^v\right), mit\ s_i^{v+1} \in S_k^{v+1}$$

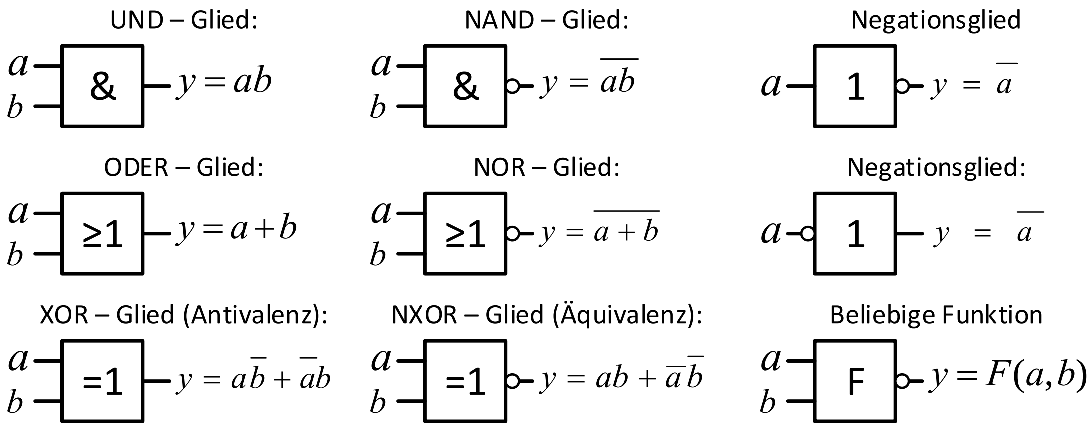
Ausgabefunktionen Medwedew $A_h^v = S_k^v$

Ausgabefunktionen Moore $A_h^v = \lambda_i\left(S_k^v\right)$

Ausgabefunktionen Mealy $A_h^v = \lambda_i\left(S_k^v, E_g^v\right)$

a, b, x, y, z : boolesche Variablen l : Literal f, g : boolesche Funktionen v_1 : p-Netz v_0 : n-Netz
s : Summe/Zustand c : Carry i : Eingang δ : Transitionsfunktion λ : Ausgabefunktion

Schaltsymbole

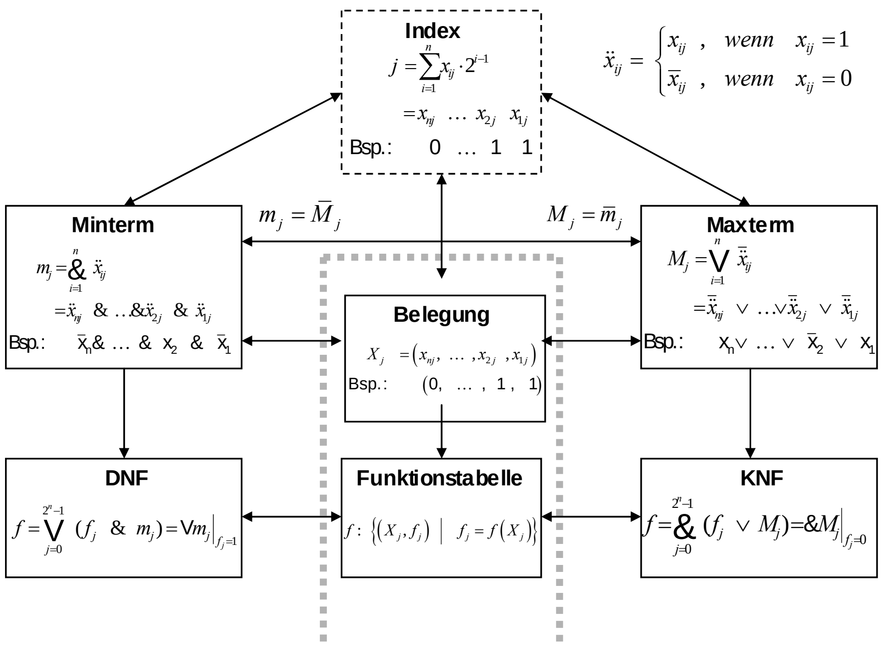


Zusammenstellung der wichtigsten Basissysteme

Zahl der Operatoren	Namen	Zeichen	Darstellung mit UND, ODER, NICHT	Darstellung von $\bar a$	$a\&b$	$a\vee b$
3	NICHT UND ODER	$y=\bar a$ $y=a\&b$ $y=a\vee b$	-	$\bar a$ - -	- $a\&b$ -	- - $a\vee b$
2	NICHT UND	$y=\bar a$ $y=a\&b$	-	$\bar a$ -	- $a\&b$	$a\vee b=\overline{\overline{a\vee b}}=\overline{\bar a\&\bar b}$
2	NICHT ODER	$y=\bar a$ $y=a\vee b$	-	$\bar a$ -	$a\&b=\overline{\overline{a\&b}}$ $=\overline{\bar a\vee\bar b}$	- $a\vee b$
2	UND ANTIVALENZ (Konstante 1)	$y=a\&b$ $y=a\oplus b$	$y=a\&b$ $y=\bar a\&b\vee a\&\bar b$	$\bar a=\bar a\&1\vee a\&\bar 1$ $=a\oplus 1$	$a\&b$ -	$a\vee b$ $=a\oplus b\oplus(a\&b)$
1	NAND	$y=a\bar\&b$	$y=\overline{a\&b}$ $=\bar a\vee\bar b$	$\bar a=\overline{a\&a}=a\bar\&a$ oder $\bar a=\overline{a\&1}=a\bar\&1$	$a\&b=\overline{\overline{a\&b}}$ $=\overline{a\bar\&b}$ $=(a\bar\&b)\bar\&(a\bar\&b)$	$a\vee b=\overline{\bar a\&\bar b}$ $=\bar a\bar\&\bar b$ $=(a\bar\&a)\bar\&(b\bar\&b)$
1	NOR	$y=a\bar\vee b$	$y=\overline{a\vee b}$ $=\bar a\&\bar b$	$\bar a=\overline{a\vee a}=a\bar\vee a$ oder $\bar a=\overline{a\vee 0}=a\bar\vee 0$	$a\&b=\overline{\bar a\vee\bar b}$ $=\bar a\bar\vee\bar b$ $=(a\bar\vee a)\bar\vee(b\bar\vee b)$	$a\vee b=\overline{\overline{a\vee b}}$ $=\overline{a\bar\vee b}$ $=(a\bar\vee b)\bar\vee(a\bar\vee b)$

Hauptsatz der Schaltalgebra

Beziehungen zwischen den Begriffen



a,b,x,y,z : boolesche Variablen $\ l$: Literal $\ f,g$: boolesche Funktionen $\ v_1$: p-Netz $\ v_0$: n-Netz
s : Summe/Zustand $\ c$: Carry $\ i$: Eingang $\ \delta$: Transitionsfunktion $\ \lambda$: Ausgabefunktion