Institut für Elektroenergiesysteme
und Hochspannungstechnik (IEH)
Leiter: Prof. Dr.-Ing. T. Leibfried

Lösung zu den Übungsunterlagen zur Vorlesung

ELEKTROENERGIESYSTEME

Aufgaben 1 bis 16

Version 1.0 / (17.04.2014)

Anpassungen im Vergleich zur Vorgängerversion:

—

Aufgabe 1: Magnetischer Kreis mit Luftspalt

Generell: Durchflutung Θ entspricht der magnetischen Spannung.
Fluss Φ entspricht dem magnetischen Strom.
$R_M = \frac{\Theta}{\Phi}$ entspricht dem magnetischen Widerstand.

Es gilt im Allgemeinen:

$$\begin{aligned}\int_{A_w} J(t)dA = w \cdot i_1(t) = \Theta = \oint_C H(t)ds \\ &= \sum_i H_{Fe,i} \cdot l_i + H_{Luft} \cdot \delta \\ &= \sum_i B_{Fe,i} \cdot \frac{l_i}{\mu_0 \mu_{r,i}} + B_{Luft} \cdot \frac{\delta}{\mu_o}\end{aligned}$$

Annahme: Feld homogen $\Rightarrow \Phi = B \cdot A$

$$\Theta = \sum_i \Phi_{Fe,i} \cdot \underbrace{\frac{l_i}{\mu_0 \mu_{r,i} A_{Fe,i}}}_{R_{m,Fe,i}} + \Phi_{Luft} \cdot \underbrace{\frac{\delta}{\mu_0 A_{Luft}}}_{R_{m,Fe,i}}$$

1. a) **Berechnung der magnetischen Widerstände**

$$\begin{aligned}A_1 &= d_1 \cdot b = 2\,\text{cm}^2 = A_{Luft} \\ A_2 &= d_2 \cdot b = 4\,\text{cm}^2 \\ A_3 &= d_3 \cdot b = 2\,\text{cm}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{m1} &= \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r A_{Fe,1}} = 39788,74\,\frac{\text{A}}{\text{Vs}} \\ R_{m2} &= \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r A_{Fe,3}} = 119366,21\,\frac{\text{A}}{\text{Vs}} \\ R_{m3} &= \frac{2l_1 + \delta}{\mu_0 \mu_r A_{Fe,2}} = 41778,17\,\frac{\text{A}}{\text{Vs}} \\ R_{m4} &= \frac{\delta}{\mu_0 A_{Fe,1}} = 7957747,15\,\frac{\text{A}}{\text{Vs}}\end{aligned}$$

1. b) **Berechnung der Windungszahl N**

$$N \cdot j_{Cu} \cdot A_{Cu} = \sum_i \Phi_{Fe,i} \cdot R_{m,i} + \Phi_{Luft} \cdot R_{m,Luft}$$

mit $A_{Cu} = \pi \cdot (\frac{d}{2})^2 = 0,7854\,\text{mm}^2$

$$\begin{aligned}N &= \frac{1}{j_{Cu} \cdot A_{Cu}} \left(\sum_i \Phi_{Fe,i} \cdot R_{m,i} + \Phi_{Luft} \cdot R_{m,Luft} \right) \\ &= \frac{2\Phi_1 \cdot R_1 + 2\Phi_2 \cdot R_{m,2} + \Phi_3 \cdot R_{m,3} + \Phi_{Luft} \cdot R_{m,Luft}}{j_{Cu} \cdot A_{Cu}}\end{aligned}$$

mit $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = \Phi_{Luft}$ folgt:

$$N = \frac{B_{Luft} \cdot A_1}{j_{Cu} \cdot A_{Cu}}(2R_{m,1} + 2R_{m,2} + R_{m,3} + R_{m,Luft}) = 141,2$$

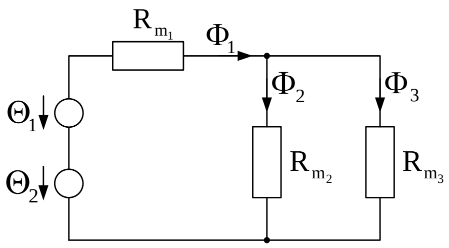
1. c) **Zusammenhang zwischen der Induktion, Stromdichte, Leiterquerschnitt, Windungszahl und Geometrieparametern**

$$N = \frac{B_{Luft} \cdot d_1 b}{j_{Cu} \cdot A_{Cu}} \left(2\frac{l_1}{\mu_0 \mu_r d_1 b} + 2\frac{l_2}{\mu_0 \mu_r d_3 b} + \frac{2l_1 + \delta}{\mu_0 \mu_r d_2 b} + \frac{\delta}{\mu_0 d_1 b} \right)$$

$$N = \frac{B_{Luft} \cdot d_1}{j_{Cu} \cdot A_{Cu} \cdot \mu_0} \left(\frac{2l_1}{\mu_r d_1} + \frac{2l_2}{\mu_r d_3} + \frac{2l_1 + \delta}{\mu_r d_2} + \frac{\delta}{d_1} \right)$$

Aufgabe 2: Magnetischer Kreis mit Verzweigung und Luftspalt

2. a) **Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises**



$$\Theta_1 = N_1 \cdot i_1(t)$$
$$\Theta_2 = -N_2 \cdot i_2(t)$$

Abbildung 2.1: *magnetisches Ersatzschaltbild*

$$R_{m1} = \frac{2\left(\frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right) + h - d}{\mu_0 \mu_r d^2} = \frac{b + h - 2d}{\mu_0 \mu_r d^2} = R_{m3} \qquad R_{m2} = \frac{h - d}{\mu_0 \mu_r d^2}$$

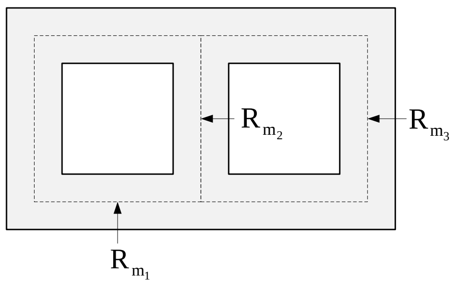


Abbildung 2.2: *Elemente des magnetischen Kreises*

2. b) **Berechnung der magnetischen Flüsse und Induktionen in allen Schenkeln**

$$\Theta_{ges} = \Theta_1 + \Theta_2 = N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2$$

$$R_{m2} \parallel R_{m3} = \frac{R_{m2} \cdot R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{(b + h - 2d) \cdot (h - d)}{(\mu_0 \mu_r d^2)^2} \cdot \frac{\mu_0 \mu_r d^2}{(b + h - 2d) + (h - d)}$$
$$= \frac{(b + h - 2d) \cdot (h - d)}{(\mu_0 \mu_r d^2)(b + 2h - 3d)}$$

$$R_{mges} = R_{m1} + \frac{R_{m2} \cdot R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}}$$
$$= \frac{b + h - 2d}{\mu_0 \mu_r d^2} + \frac{b + h - 2d}{\mu_0 \mu_r d^2} \cdot \frac{h - d}{b + 2h - 3d}$$
$$= \frac{b + h - 2d}{\mu_0 \mu_r d^2} \left(1 + \frac{h - d}{b + 2h - 3d}\right)$$

$$\Phi_1 = \frac{\Theta_{ges}}{R_{mges}} = \frac{N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2}{\frac{b+h-2d}{\mu_0\mu_r d^2}\left(1 + \frac{h-d}{b+2h-3d}\right)}$$

$$\Phi_2 R_{m2} = \Phi_3 R_{m3} \quad\Longrightarrow\quad \Phi_2 = \Phi_3 \cdot \frac{R_{m3}}{R_{m2}}$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_3 \cdot \left(1 + \frac{R_{m3}}{R_{m2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= \Phi_1 \cdot \frac{h-d}{b+2h-3d} \\
&= (N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2) \cdot \frac{h-d}{b+2h-3d} \cdot \left(\frac{b+h-2d}{\mu_0\mu_r d^2} \cdot \frac{b+3h-4d}{b+2h-3d}\right)^{-1} \\
&= \frac{(N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2) \cdot (\mu_0\mu_r d^2) \cdot (h-d)}{(b+3h-4d) \cdot (b+h-2d)}
\end{aligned}$$

$$\Phi_2 = \frac{b+h-2d}{h-d} \cdot \Phi_3 = (N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2) \cdot \frac{\mu_0\mu_r d^2}{b+3h-4d}$$

$$\begin{aligned}
B_1 = \frac{\Phi_1}{d^2} &= (N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2) \cdot \frac{\mu_0\mu_r}{b+h-2d} \cdot \left(1 + \frac{h-d}{b+2h-3d}\right)^{-1} \\
&= (N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2) \cdot \frac{\mu_0\mu_r}{b+3h-4d} \cdot \frac{b+2h-3d}{b+h-2d}
\end{aligned}$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{d^2} = (N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2) \cdot \frac{\mu_0\mu_r}{b+3h-4d}$$

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{d^2} = (N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2) \cdot \frac{\mu_0\mu_r}{b+3h-4d} \cdot \frac{h-d}{b+h-2d}$$

2. c) **Bestimmung der magnetischen Flüsse mit einem Luftspalt im 3. Schenkel**

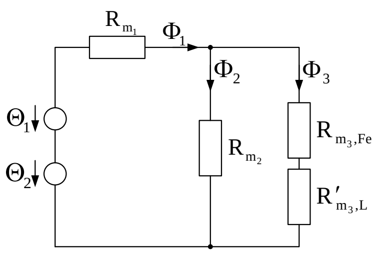


Abbildung 2.3: *neues magnetisches Ersatzschaltbild*

$$\begin{aligned}
R'_{m3,Fe} &= \frac{h-\delta-d+b-d}{\mu_0\mu_r d^2} \\
&= \frac{b+h-2d-\delta}{\mu_0\mu_r d^2} \\
R'_{m3,L} &= \frac{\delta}{\mu_0 d^2}
\end{aligned}$$

R_{m1} und R_{m2} siehe a)

$$R'_{m3,Fe} + R'_{m3,L} = \frac{b+h-2d-\delta+\mu_r\delta}{\mu_0\mu_r d^2} = R'_{m3}$$

$$R_{m2} \parallel R_{m3}^{'} = \frac{(h-d)(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}{(\mu_0\mu_r d^2)^2} \cdot \frac{\mu_0\mu_r d^2}{(h-d)+(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}$$
$$= \frac{(h-d)(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}{\mu_0\mu_r d^2 \cdot (b+2h-3d-\delta+\mu_r\delta)}$$

$$R_{mges} = R_{m1} + R_{m2} \parallel R_{m3}^{'}$$
$$= \frac{b+h-2d}{\mu_0\mu_r d^2} + \frac{(h-d)(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}{\mu_0\mu_r d^2 \cdot (b+2h-3d-\delta+\mu_r\delta)}$$

$$\Phi_1 = \frac{\Theta_{ges}}{R_{ges}} \quad \text{und} \quad \Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = \Phi_3 \left(1 + \frac{R_{m3}^{'}}{R_{m2}}\right) \quad \text{mit} \quad \Phi_2 R_{m2} = \Phi_3 R_{m3}^{'}$$
$$= \Phi_3 \left(1 + \frac{b+h-2d-\delta+\mu_r\delta}{h-d}\right)$$
$$= \Phi_3 \left(\frac{b+2h-3d-\delta+\mu_r\delta}{h-d}\right)$$

$$\Phi_3 = \Phi_1 \cdot \frac{h-d}{b+2h-3d-\delta+\mu_r\delta}$$

$$\Phi_1 = (N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2) \cdot \frac{\mu_0\mu_r d^2}{b+h-2d + \frac{(h-d)(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}{b+2h-3d+\mu_r\delta-\delta}}$$

$$\Phi_3 = \frac{h-d}{b+2h-3d+\delta(\mu_r-1)} \cdot \frac{(N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2)\,\mu_0\mu_r d^2}{b+h-2d + \frac{(h-d)(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}{b+2h-3d+\mu_r\delta-\delta}}$$
$$= \frac{(N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2)\,\mu_0\mu_r d^2\,(h-d)}{(b+h-2d)(b+2h-3d-\delta+\mu_r\delta)+(h-d)(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}$$

$$\Phi_2 = \Phi_3 \cdot \frac{R_{m3}^{'}}{R_{m2}} = \frac{(N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2)\,\mu_0\mu_r d^2\,(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}{(b+h-2d)(b+2h-3d-\delta+\mu_r\delta)+(h-d)(b+h-2d-\delta+\mu_r\delta)}$$

genaue Betrachtung:

$$R'_{m3} = R_{m3,Fe}^{'} + R_{m3,L}^{'} = \frac{b+h-2d-\delta}{\mu_0\mu r d^2} + \frac{\delta}{\mu_0 d^2}$$

$$\lim_{\mu_r\to\infty} R'_{m3} = R'_{m3,L} = \frac{\delta}{\mu_0 d^2} \quad ; \quad \lim_{\mu_r\to\infty} R'_{m1} = \lim_{\mu_r\to\infty} R'_{m2} = 0$$

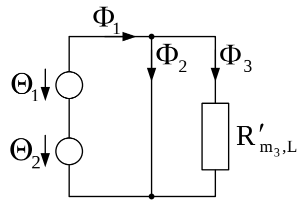


Abbildung 2.4: *ESB für $\mu_r \to \infty$*

Mit zunehmendem μ_r verlagert sich der magnetische Fuss in den mittleren Schenkel. Eine Vergößerung des Luftspaltes verstärkt diesen Effekt zusätzlich.

Aufgabe 3: Unsymmetrische Last am Drehstromnetz

3. a) Berechnung des Stromes $\underline{I}_M$

$$\underline{I}_M = U_Y e^{jwt}\left(\underline{Y}_R + \underline{Y}_S e^{-j\frac{2}{3}\pi} + \underline{Y}_T e^{-j\frac{4}{3}\pi}\right) \qquad \text{Skript S.39, Gl. 3.38}$$

mit $\underline{Y}_R = G$, $\underline{Y}_S = jwC$, $\underline{Y}_T = ?$

$$\underline{I}_M = U_Y e^{jwt}\left(G + jwC\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \underline{Y}_T\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$= U_Y e^{jwt}\left(G - \frac{1}{2}jwC + \frac{\sqrt{3}}{2}wC - \frac{1}{2}\underline{Y}_T + j\underline{Y}_T\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

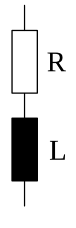
3. b) Bestimmung des Leitwertes, damit der Strom zu Null wird

$$\underline{I}_M = 0 \qquad \Rightarrow G - \frac{1}{2}jwC + \frac{\sqrt{3}}{2}wC = \underline{Y}_T\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

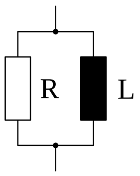
$$\underline{Y}_T = \frac{G + \frac{\sqrt{3}}{2}wC - j\frac{1}{2}wC}{\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{G}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}wC - j\frac{1}{4}wC + j\frac{\sqrt{3}}{2}G + j\frac{3}{4}wC + \frac{\sqrt{3}}{4}wC}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \left(\frac{G}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}wC\right) + j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}G + \frac{1}{2}wC\right)$$

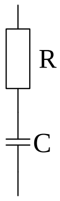
3. c) Mögliche Realisierung des Leitwertes



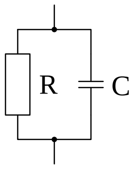
$$\underline{Y} = \frac{1}{R + jwL} = \frac{R - jwL}{R^2 + (wL)^2} \qquad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$



$$\underline{Y} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{wL} \qquad \Rightarrow \quad \text{keine Lösung}$$



$$\underline{Y} = \frac{1}{R - j\frac{1}{wC}} = \frac{R + j\frac{1}{wC}}{R^2 + \left(\frac{1}{wC}\right)^2} \qquad \Rightarrow \quad \text{mögliche Lösung}$$



$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jwC \qquad \Rightarrow \quad \text{mögliche Lösung}$$

RC-Parallelschaltung: $\quad \frac{1}{R_T} = \frac{G}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}wC; \qquad wC_T = \frac{\sqrt{3}}{2}G + \frac{1}{2}wC;$

RC-Reihenschaltung:

$$\underline{Z}_T = \frac{1}{\underline{Y}_T} = \frac{\left(\frac{G}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}wC\right) - j\left(\frac{\sqrt{3}}{2}G + \frac{1}{2}wC\right)}{\left(\frac{G}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}wC\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}G + \frac{1}{2}wC\right)^2}$$

$$\overset{!}{=} R_T - j\frac{1}{wC_T}$$

$$\Rightarrow \quad R_T = \frac{\frac{G}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}wC}{\left(\frac{G}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}wC\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}G + \frac{1}{2}wC\right)^2}; \qquad C_T = \frac{\left(\frac{G}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}wC\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}G + \frac{1}{2}wC\right)^2}{w\left(\frac{\sqrt{3}}{2}G + \frac{1}{2}wC\right)};$$

3. d) **Spannung bei geschlossener Verbindung**

$$\underline{U}_{NM} = U_Y e^{jwt}\frac{\underline{G}_R + \underline{G}_S e^{-j\frac{2}{3}\pi} + \underline{Y}_T e^{-j\frac{4}{3}\pi}}{\underline{G}_R + \underline{G}_S + \underline{Y}_T}$$

entweder Einsetzen von $\underline{Y}_T$ oder $\underline{I}_M = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{G}_R + \underline{G}_S e^{-j\frac{2}{3}\pi} + \underline{Y}_T e^{-j\frac{4}{3}\pi} = 0$

$\Rightarrow \quad \underline{U}_{NM} = 0$

Aufgabe 4: Kapazitiver Spannungswandler

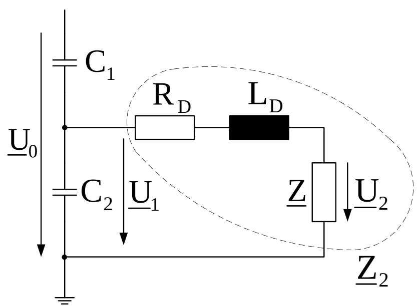
4. a) Berechnung des Spannungsverhältnisses und der Impedanz

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_3} = \frac{w_1}{w_2} = ü \ ; \qquad \underline{Z} = R_B \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 = R_B ü^2$$

4. b) Ersatzschaltbild

Berechnung von Netzwerken mit idealem Transformator: Spannungs- und Stromtransformation mit dem Verhältnis der Windunszahlen

Hier folgt daraus: Umrechnung von R_B auf die Primärseite,
Weglassen des idealen Transformators



mit $\underline{Z}_2 = R_D + ü^2 R_B + jwL_D$

Abbildung 4.1: *Ersatzschaltbild eines kapazitiven Spannungswandlers*

4. c) Übertragungsfunktion

$$C_2 \parallel \underline{Z}_2: \quad \underline{Z}_{US} = \frac{\frac{1}{jwC_2}\underline{Z}_2}{\frac{1}{jwC_2} + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{1 + jwC_2\underline{Z}_2}$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{Z}_{US}}{\frac{1}{jwC_1} + \underline{Z}_{US}} = \frac{\underline{Z}_2}{(1 + jwC_2\underline{Z}_2)\frac{1}{jwC_1} + \underline{Z}_2} = \frac{jwC_1\underline{Z}_2}{(1 + jwC_2\underline{Z}_2) + jwC_1\underline{Z}_2}$$

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_B ü^2}{R_B ü^2 + R_D + jwL_D}$$

$$\begin{aligned}
\underline{F}_1(w) &= \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} \\
&= \frac{R_B \ddot{u}^2}{R_B \ddot{u}^2 + R_D + jwL_D} \cdot \frac{jwC_1(R_B \ddot{u}^2 + R_D + jwL_D)}{1 + jwC_2(R_B \ddot{u}^2 + R_D + jwL_D) + jwC_1(R_B \ddot{u}^2 + R_D + jwL_D)} \\
&= \frac{R_B \ddot{u}^2 \cdot jwC_1}{1 + jw(C_1 + C_2)(R_B \ddot{u}^2 + R_D + jwL_D)} \\
&= \frac{jwC_1 R_B \ddot{u}^2}{1 - w^2 L_D (C_1 + C_2) + jw(C_1 + C_2)(R_B \ddot{u}^2 + R_D)}
\end{aligned}$$

$$\underline{F}_2(w) = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{U}_2} \cdot \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \frac{1}{\ddot{u}} F_1(w) = \frac{jwC_1 R_B \ddot{u}}{1 - w^2 L_D (C_1 + C_2) + jw(C_1 + C_2)(R_B \ddot{u}^2 + R_D)}$$

4. d) **Bestimmung von L_D und den daraus resultierenden Übertragungsfunktionen**
$\underline{F}_1(w)$ konj. komplex erweitern, Betrachtung des Zählers:

$$\begin{aligned}
&(jwC_1 R_B \ddot{u}^2)((1 - w^2 L_D (C_1 + C_2) - jw(C_1 + C_2)(R_B \ddot{u}^2 + R_D)) \\
&= j(wC_1 R_B \ddot{u}^2)(1 - w^2 L_D (C_1 + C_2)) + w^2 C_1 R_B \ddot{u}^2 (C_1 + C_2)(R_B \ddot{u}^2 + R_D)
\end{aligned}$$

Zähler rein reell für: $\quad 1 - w^2 L_D (C_1 + C_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad L_D = \dfrac{1}{w^2 (C_1 + C_2)}$

$$\underline{F}_1(w) = \frac{C_1 R_B \ddot{u}^2}{(C_1 + C_2)(R_B \ddot{u}^2 + R_D)}$$

$$\underline{F}_2(w) = \frac{C_1 R_B \ddot{u}}{(C_1 + C_2)(R_B \ddot{u}^2 + R_D)}$$

4. e) **vereinfachte Übertragungsfunktion**

$$R_D \ll R_B \ddot{u}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{F}_1(w) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \; ; \qquad \underline{F}_2(w) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{1}{\ddot{u}}$$

Aufgabe 5: Bandpass

5. a) **Übertragungsfuntion**
Hilfgrößen: Spannung über $C_1 \Rightarrow \underline{U}_{C1}$ und Ersatzimpedanz $\underline{Z}$ für alles rechts von R_1

$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{jwC_1}\left(R_2 + \frac{1}{jwC_2}\right)}{\frac{1}{jwC_1} + R_2 + \frac{1}{jwC_2}} = \frac{R_2 + \frac{1}{jwC_2}}{1 + jwC_1R_2 + \frac{C_1}{C_2}} = \frac{1 + jwC_2R_2}{jwC_2 - w^2C_1C_2R_2 + jwC_1}$$

$$= \frac{1 + jwC_2R_2}{-w^2C_1C_2R_2 + jw(C_1 + C_2)}$$

$$\underline{F}(w) = \frac{\underline{U}_2(w)}{\underline{U}_{C1}(w)} \cdot \frac{\underline{U}_{C1}(w)}{\underline{U}_1} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{jwC_2}} \cdot \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_1} = \frac{jwC_2R_2}{1 + jwC_2R_2} \cdot \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R_1}$$

$$= \frac{jwC_2R_2}{1 + jwC_2R_2} \cdot \frac{1 + jwC_2R_2}{(1 + jwC_2R_2) + R_1(-w^2C_1C_2R_2 + jw(C_1 + C_2))}$$

$$= \frac{jwC_2R_2}{(1 - w^2C_1C_2R_1R_2) + jw(C_2R_2 + R_1(C_1 + C_2))}$$

5. b) **Betragsfunktion und Winkelfunktion**

$$|\underline{F}(w)| = \frac{wC_2R_2}{\sqrt{(1 - w^2C_1C_2R_1R_2)^2 + w^2(C_2R_2 + R_1C_1 + R_1C_2)^2}}$$

$$\varphi = \arg\left(\underline{F}(w)\right) = \arg\{Z\ddot{a}hler\} - \arg\{Nenner\}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{w(C_2R_2 + C_1R_1 + R_1C_2)}{1 - w^2C_1C_2R_1R_2} & \text{für} \quad 1 - w^2C_1C_2R_1R_2 > 0 \\ 0 & \text{für} \quad 1 - w^2C_1C_2R_1R_2 = 0 \\ \frac{\pi}{2} - \left[\pi + \arctan\left(\frac{w(C_2R_2 + C_1R_1 + R_1C_2)}{1 - w^2C_1C_2R_1R_2}\right)\right] & \text{für} \quad 1 - w^2C_1C_2R_1R_2 < 0 \end{cases}$$

5. c) **Bestimmung der Kreisfrequenz, bei der die Betragsfunktion ein Maximum annimmt**
$\frac{d}{dw}\left(|\underline{F}(w)|\right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad$ Anwendung der Quotientenregel und Nullsetzen des Zählers!

$$0 = \left[C_2R_2 \cdot \sqrt{(1 - w^2C_1C_2R_1R_2)^2 + w^2(C_2R_2 + R_1C_1 + R_1C_2)^2}\right]$$
$$- \left[wC_2R_2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(1 - w^2C_1C_2R_1R_2)^2 + w^2(C_2R_2 + R_1C_1 + R_1C_2)^2}}\right.$$
$$\left.\cdot \left(2(1 - w^2C_1C_2R_1R_2)(-2wR_1R_2C_1C_2) + 2w(C_2R_2 + R_1C_1 + R_1C_2)^2\right)\right]$$

$$0 = \sqrt{(1 - w^2C_1C_2R_1R_2)^2 + w^2(C_2R_2 + R_1C_1 + R_1C_2)^2}^{\,2} \cdot 2C_2R_2$$
$$- wR_2C_2\left(2(1 - w^2C_1C_2R_1R_2)(-2wR_1R_2C_1C_2) + 2w(C_2R_2 + R_1C_1 + R_1C_2)^2\right)$$

$$0 = (1 - w^2C_1C_2R_1R_2)^2 + w^2(C_2R_2 + R_1C_1 + R_1C_2)^2$$
$$- \left((1 - w^2C_1C_2R_1R_2)(-2wR_1R_2C_1C_2)w + w^2(C_2R_2 + R_1C_1 + R_1C_2)^2\right)$$

$$(1 - w^2 C_1 C_2 R_1 R_2)^2 + w^2 (C_2 R_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2)^2$$
$$= w(1 - w^2 C_1 C_2 R_1 R_2)(-2w R_1 R_2 C_1 C_2) + w^2 (C_2 R_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2)^2$$
$$(1 - w^2 C_1 C_2 R_1 R_2)^2 = w(1 - w^2 C_1 C_2 R_1 R_2)(-2w C_1 C_2 R_1 R_2)$$
$$(1 - w^2 C_1 C_2 R_1 R_2)\big[\underbrace{w(-2w C_1 C_2 R_1 R_2) - (1 - w^2 C_1 C_2 R_1 R_2)}_{\neq 0 \quad \forall w \geq 0}\big] = 0$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}} \overset{!}{=} w_0 \qquad \Rightarrow \qquad \text{Maximum?}$$

Für $w < w_0$ und $w > w_0$ gilt $1 - w^2 C_1 C_2 R_1 R_2 \neq 0$:
Nenner von $|\underline{F}(w)|$ wird größer $\quad \Rightarrow \quad |\underline{F}(w)|$ wird kleiner

$$|\underline{F}(w_0)| = \frac{C_2 R_2 \frac{1}{\sqrt{C_1 C_2 R_1 R_2}}}{\sqrt{\frac{C_2 R_2 + C_1 R_1 + R_1 C_2}{C_1 C_2 R_1 R_2}}} = \frac{C_2 R_2}{C_2 R_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2}$$

$$|\underline{F}(w)| = 0 \; ; \qquad \lim_{w \to \infty} |\underline{F}(w)| = 0$$

5. d) **Skizze der Betragsfunktion**

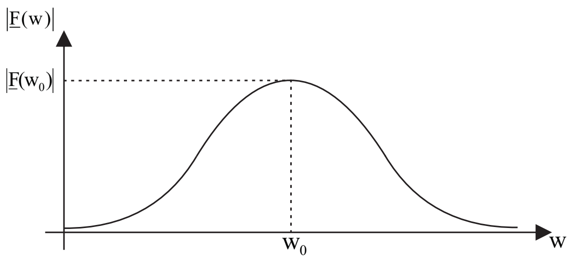


Abbildung 5.1: *Skizze der Betragsfunktion* $|\underline{F}(w)|$

5. e) **Übertragung von Frequenzen**

$$\lim_{w \to \infty} \frac{1}{w C_1} = \lim_{w \to \infty} \frac{1}{w C_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \text{ (und } C_2\text{) stellt einen Kurzschluss dar.}$$

$$\lim_{w \to 0} \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{jwC_2}} = 0 \qquad \Rightarrow \quad \text{An } R_2 \text{ fällt keine Spannung mehr ab.}$$

5. f) **Skizze der Winkelfunktion**

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2} \; ; \quad \lim_{w \to \infty} \varphi(w) = -\frac{\pi}{2} \; ; \quad \varphi \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan\left(\frac{w(C_2 R_2 + R_1 C_1 + R_1 C_2)}{1 - w^2 C_1 C_2 R_1 R_2}\right) \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad w = w_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

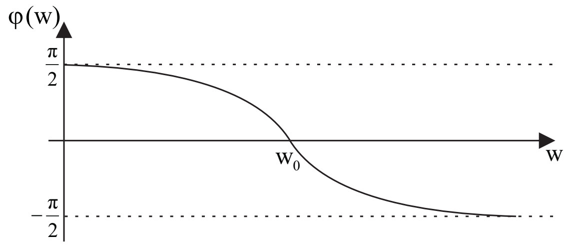


Abbildung 5.2: *Skizze der Winkelfunktion* $\varphi(w)$

Aufgabe 6: Wanderwellen auf einer Messleitung

6. a) **Berechnung des Widerstandes R_1**

keine Reflektion $\Rightarrow$ $R(p) = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0} \stackrel{!}{=} 0$ $\Rightarrow$ $R_1 = Z_0 = 50\,\Omega$

6. b) **Zeitfunktion der Spannungswelle $u_1(t)$**

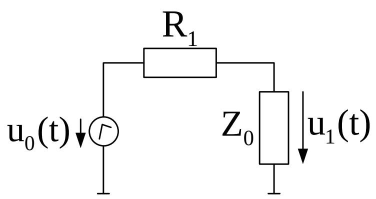


Abbildung 6.1: *Ersatzschaltbild für die einlaufende Welle*

aus dem ESB:

$$u_1(t) = u_0(t) \cdot \frac{Z_0}{R_1 + Z_0} = \frac{1}{2} u_0(t)$$

Spannung, die in die Leitung einläuft

6. c) **Zeitfuntkion der Spannung $u_M(t)$**

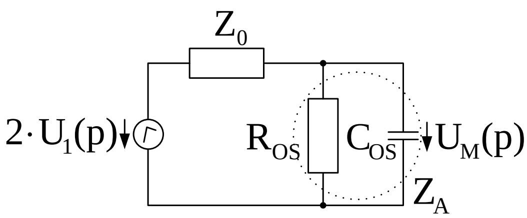


Abbildung 6.2: *einphasiges Ersatzschaltbild*

mit $U_1(p) = \frac{1}{2} U_0(p) = \frac{1}{2} \frac{U_0}{p}$

$$Z_A = \frac{R_{OS} \cdot \frac{1}{pC_{OS}}}{R_OS + \frac{1}{pC_{OS}}} = \frac{R_{OS}}{1 + pC_{OS}R_{OS}}$$

$$\frac{U_M(p)}{2U_1(p)} = \frac{\frac{R_{OS}}{1+pC_{OS}R_{OS}}}{Z_0 + \frac{R_{OS}}{1+pC_{OS}R_{OS}}} = \frac{R_{OS}}{R_{OS} + Z_0 + pC_{OS}R_{OS}Z_0}$$

$$U_M(p) = \frac{\frac{1}{C_{OS}Z_0}}{\frac{R_{OS}+Z_0}{C_{OS}R_{OS}Z_0} + p} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0}{p} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{C_{OS}Z_{OS}} \frac{C_{OS}R_{OS}Z_0}{R_{OS} + Z_0} \left(1 - e^{-\frac{R_{OS}+Z_0}{R_{OS}C_{OS}Z_0}t}\right) \cdot U_0$$

$$u_M(t) = \frac{R_{OS}}{R_{OS} + Z_0} U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \qquad \text{mit} \qquad \tau = \frac{R_{OS}C_{OS}Z_0}{R_{OS} + Z_0}$$

6. d) **Übertragungsfunktion $F(p)$**

aus c) resultiert $F(p) = \dfrac{R_{OS}}{R_{OS} + Z_0 + pC_{OS}R_{OS}Z_0} = \dfrac{1}{1 + \frac{Z_0}{R_{OS}} + pC_{OS}Z_0}$

für $Z_0 \ll R_{OS}$: $F(p) = \dfrac{1}{1 + pC_{OS}Z_0}$

6. e) **Zeitkonstante τ**

$$U_M(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1}{1 + pC_{OS}Z_0} = \frac{U_0}{C_{OS}Z_0} \cdot \frac{1}{\frac{1}{C_{OS}Z_0} + p} \cdot \frac{1}{p}$$

$$u_M(t) = U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{C_{OS}Z_0}}\right) \sigma(t)$$

$$\tau = C_{OS}Z_0 = 50\,\Omega \cdot 30\,\text{pF} = 1,5\,\text{ns}$$

Je kleiner C_{OS} desto kleiner τ, desto geringer die Verfälschung!

6. f) **Laplacetransformation der zurücklaufenden Welle**

$$U_M(p) = U_h(p) + U_r(p) = U_1(p) + U_r(p)$$

$$U_r(p) = U_M(p) - U_1(p) = \frac{U_0}{p} \cdot \frac{1}{1 + pC_{OS}Z_0} - \frac{1}{2} \cdot \frac{U_0}{p}$$

$$U_r(p) = \frac{U_0}{2p} \cdot \left(\frac{2}{1 + pC_{OS}Z_0} - 1\right) = \frac{1 - pC_{OS}Z_0}{1 + pC_{OS}Z_0} \cdot \frac{U_0}{2p}$$

alternativ mit Reflexionsfaktor

$$R(p) = \frac{Z_A - Z_0}{Z_A + Z_0} = \frac{\frac{R_{OS}}{1+pC_{OS}R_{OS}} - Z_0}{\frac{R_{OS}}{1+pC_{OS}R_{OS}} + Z_0} = \frac{R_{OS} - Z_0 - pC_{OS}R_{OS}Z_0}{R_{OS} + Z_0 + pC_{OS}R_{OS}Z_0}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{Z_0}{R_{OS}}\right) - pC_{OS}Z_0}{1 + \frac{Z_0}{R_{OS}} + pC_{OS}Z_0} \; ; \quad \text{Für } Z_0 \ll R_{OS} \text{ gilt: } R(p) = \frac{1 - pC_{OS}Z_0}{1 + pC_{OS}Z_0}$$

Es gilt: $U_r = R(p)U_1 = \dfrac{1 - pC_{OS}Z_0}{1 + pC_{OS}Z_0} \cdot \dfrac{U_0}{2p}$

Aufgabe 7: Schutz eines Transformators vor steilflankigen Wanderwellen

7. a) Amplitude U_0 der Spannungswelle u

$$U_0 = \frac{1}{2} \cdot i_B \cdot Z_0 = \frac{1}{2} 350\,\Omega \cdot 10\,\text{kA} = 175 \cdot 10^4\,\text{V} = 1,75\,\text{MV}$$

7. b) Vorschlag 1, Spannung $u_2(t)$

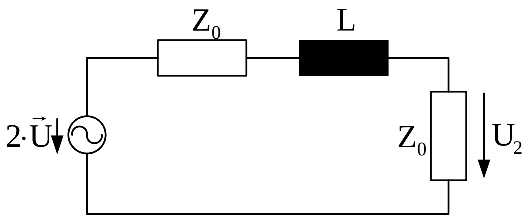


Abbildung 7.1: *Ersatzschaltbild: einlaufende Welle in die zweite Leitung (Vorschlag 1)*

$$\begin{aligned} U_2 &= 2\overrightarrow{U} \cdot \frac{Z_0}{Z_0 + Z_0 + pL} = U_2(p) \\ &= 2\frac{U_0}{p} \cdot \frac{Z_0 \frac{1}{L}}{(2Z_0 + pL)\frac{1}{L}} \\ &= 2U_0 \frac{Z_0}{L} \frac{1}{\left(p + \frac{2Z_0}{L}\right)} \cdot \frac{1}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_2(t) &= \frac{2U_0 Z_0 L}{2LZ_0}\left(1 - e^{-\frac{2Z_0}{L}t}\right) \\ &= U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad \text{mit} \quad T = \frac{L}{2Z_0} \end{aligned}$$

7. c) Vorschlag 1, rücklaufende Welle

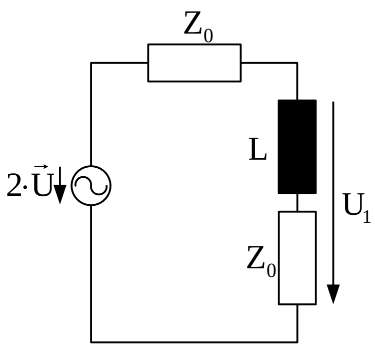
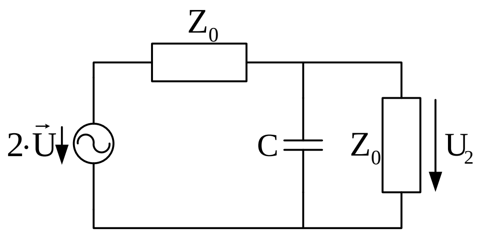


Abbildung 7.2: *Ersatzschaltbild: reflektierte und in die erste Leitung zurücklaufende Welle (Vorschlag 1)*

$$\begin{aligned} U_1 &= 2\overrightarrow{U} \cdot \frac{Z_0 + pL}{2Z_0 + pL} = 2U_0 \cdot \frac{Z_0 + pL}{2Z_0 + pL} \\ U_1 &= \overrightarrow{U} + \overleftarrow{U} \\ \overleftarrow{U} &= U_1 - \overrightarrow{U} = 2\overrightarrow{U}\frac{Z_0 + pL}{2Z_0 + pL} - \overrightarrow{U} \\ &= \frac{2Z_0 + 2pL - 2Z_0 - pL}{2Z_0 + pL} \cdot \overrightarrow{U} = \frac{pL}{2Z_0 + pL} \cdot \frac{U_0}{p} \\ &= \frac{U_0 L}{2Z_0 + pL} \cdot \frac{\frac{1}{L}}{\frac{1}{L}} = \frac{U_0}{p + \frac{2Z_0}{L}} = \overleftarrow{U}(p) \\ \overleftarrow{u}(t) &= U_0 e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{mit} \quad T = \frac{L}{2Z_0} \end{aligned}$$

7. d) **Vorschlag 2, Spannung $u_2(t)$**



$$Z(p) = \frac{\frac{1}{pC} \cdot Z_0}{Z_0 + \frac{1}{pC}} = \frac{Z_0}{1 + pCZ_0}$$

Abbildung 7.3: *Ersatzschaltbild: für Vorschlag 2*

$$U_2(p) = 2\vec{U} \cdot \frac{Z(p)}{Z(p) + Z_0} = 2\vec{U} \cdot \frac{U_0}{(1 + pCZ_0)\left[\frac{Z_0}{1+pCZ_0} + Z_0\right]}$$

$$= 2\vec{U} \cdot \frac{1}{(1 + pCZ_0)\left[\frac{1}{1+pCZ_0} + 1\right]} = 2\vec{U} \cdot \frac{1}{1 + 1 + pCZ_0}$$

$$U_2(p) = \frac{2U_0}{p} \cdot \frac{1}{2 + pCZ_0} = \frac{U_0}{p} \frac{1}{1 + p\frac{CZ_0}{2}} \cdot \frac{\frac{2}{CZ_0}}{\frac{2}{CZ_0}}$$

$$= U_0 \left(\frac{2}{CZ_0}\right) \cdot \frac{1}{p\left(p + \frac{2}{CZ_0}\right)}$$

$$u_2(t) = U_0 \left(\frac{2}{CZ_0}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{CZ_0}\right)} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$= U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad \text{mit} \quad T = \frac{CZ_0}{2}$$

7. e) **Äquivalenz beider Lösungen**

gilt für $\frac{L}{2Z_0} = \frac{CZ_0}{2}$ oder $\frac{L}{Z_0} = CZ_0$ oder $\sqrt{\frac{L}{C}} = Z_0$.

Lösung 2 (Kapazität gegen Erde) ist günstiger, da die Drossel für den gesamten Betriebsstrom ausgelegt sein muss.

Aufgabe 8: Operationsverstärker mit RC-Netzwerk

8. a) **Ersatzschaltbild**

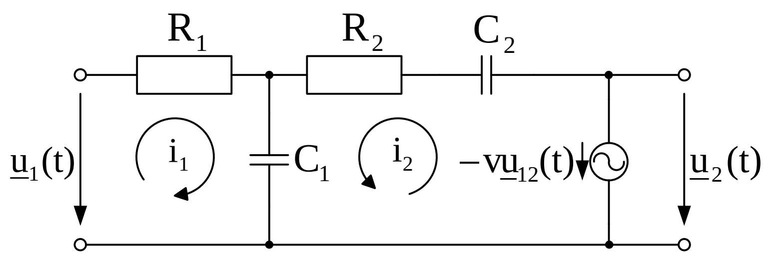


Abbildung 8.1: *Ersatzschaltbild der Operationsverstärkerschaltung*

8. b) **Übertragungsverhalten $\boldsymbol{F(p) = \dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}}$ (Maschenstromanalyse)**

$$U_1 = R_1 I_1 + \frac{1}{pC_1}(I_1 + I_2)\,; \quad U_2 = -vU_{12} = -v\frac{1}{pC_1}(I_1 + I_2) = \left(\frac{1}{pC_2} + R_2\right) I_2 + \frac{1}{pC_1}(I_1 + I_2)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{pC_2} + R_2\right) I_2 + \frac{1}{pC_1}(I_1 + I_2)(1+v) = 0$$

I_1	I_2	
$R_1 + \frac{1}{pC_1}$	$\frac{1}{pC_1}$	U_1
$\frac{1}{pC_1}(1+v)$	$R_2 + \frac{1}{pC_1}(1+v) + \frac{1}{pC_2}$	0

$$\Rightarrow U_2 = -\frac{v}{pC_1}(I_1 + I_2)$$

$$= -\frac{v}{pC_1}\left(\frac{D_1}{D} + \frac{D_2}{D}\right)$$

$$D = \left(R_1 + \frac{1}{pC_1}\right)\left(R_2 + \frac{1}{pC_1}(1+v) + \frac{1}{pC_2}\right) - (1+v)\left(\frac{1}{pC_1}\right)^2$$

$$D_1 = U_1\left(R_2 + \frac{1}{pC_1}(1+v) + \frac{1}{pC_2}\right) \quad \text{und} \quad D_2 = -U_1\frac{1}{pC_1}(1+v)$$

$$U_2 = U_1\left[\frac{R_2 + \frac{1}{pC_1}(1+v) + \frac{1}{pC_2}}{\left(R_1 + \frac{1}{pC_1}\right)\left(R_2 + \frac{1}{pC_1}(1+v) + \frac{1}{pC_2}\right) - (1+v)\left(\frac{1}{pC_1}\right)^2} - \frac{\frac{1}{pC_1}(1+v)}{\left(R_1 + \frac{1}{pC_1}\right)\left(R_2 + \frac{1}{pC_1}(1+v) + \frac{1}{pC_2}\right) - (1+v)\left(\frac{1}{pC_1}\right)^2}\right]\left(\frac{-v}{pC_1}\right)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{U_2}{U_1} &= -v\frac{R_2 + \frac{1}{pC_1}(1+v) + \frac{1}{pC_2} - \frac{1}{pC_1}(1+v)}{(pC_1R_1+1)\left(R_2 + \frac{1}{pC_1}(1+v) + \frac{1}{pC_2}\right) - (1+v)\frac{1}{pC_1}} \\
&= -v\frac{pC_2R_2+1}{p^2C_1C_2R_1R_2 + pR_2C_2 + pC_2R_1(1+v) + pC_1R_1 + 1} \\
&= -v\frac{pC_2R_2+1}{1 + p^2R_1R_2C_1C_2 + p(C_1R_1 + C_2R_2 + R_1C_2(1+v))}
\end{aligned}
$$

8. c) **Übertragungsverhalten $F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$ (Knotenpotentialanalyse)**

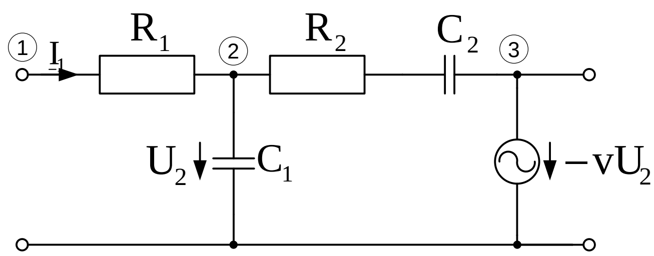


Abbildung 8.2: *Ersatzschaltbild für Knotenpotentialanalyse*

$$
I_1 = (U_1 - U_2)\frac{1}{R_1} \; ; \quad (U_1 - U_2)\frac{1}{R_1} = pC_1U_2 + (U_2 - U_3)\frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} \; ; \quad U_3 = -vU_2
$$

U_1	U_2	U_3	
$\frac{1}{R_1}$	$-\frac{1}{R_1}$	0	I_1
$-\frac{1}{R_1}$	$\frac{1}{R_1} + pC_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}$	$-\frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}$	0
0	v	1	0

$$
\frac{U_3}{U_1} = \frac{D_3}{D} \cdot \frac{D}{D_1} = \frac{D_3}{D_1} \; ; D_3 = I_1\left(-\frac{v}{R_1}\right) \; ; D_1 = I_1\left[\left(\frac{1}{R_1} + pC_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}\right) + \frac{v}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{U_3}{U_1} &= \frac{-\frac{v}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + pC_1 + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{pC_2}} + \frac{v}{R_2 + \frac{1}{pC_2}}} = \frac{-v}{1 + pC_1R_1 + R_1\frac{pC_2}{1+pC_2R_2}(1+v)} \\
&= \frac{-v(1+pC_2R_2)}{1 + pC_1R_1 + pC_2R_2 + p^2C_1C_2R_1R_2 + pR_1C_2(1+v)} \\
&= \frac{-v(1+pC_2R_2)}{1 + p^2C_1C_2R_1R_2 + p(C_1R_1 + C_2R_2 + R_1C_2(1+v))}
\end{aligned}
$$

8. d) **Betrag von $|\underline{F}(w)|$**

$$p = jw \;\Rightarrow\; \underline{F}(w) = v\frac{-1 - jwC_2R_2}{1 - w^2R_1R_2C_1C_2 + jw(C_1R_1 + C_2R_2 + R_1C_2(1+v))}$$

$$|\underline{F}(w)| = v\frac{\sqrt{1 + w^2C_2^2R_2^2}}{\sqrt{(1 - w^2R_1R_2C_1C_2)^2 + w^2(C_1R_1 + C_2R_2 + R_1C_2(1+v))^2}}$$

$$|\underline{F}(0)| = v \quad \text{und} \quad \lim_{w\to\infty} |\underline{F}(w)| = 0$$

8. e) **Winkel der Übertragungsfunktion**

$$\varphi = \arg \underline{F}(w) = \arg\{\text{Zähler}\} - \arg\{\text{Nenner}\}$$

$$\arg\{\text{Zähler}\} = \pi + \arctan(wR_2C_2)$$

$$\arg\{\text{Nenner}\} = \begin{cases} \arctan \dfrac{w(C_1R_1 + C_2R_2 + R_1C_2(1+v))}{1 - w^2R_1R_2C_1C_2} & \text{für } 1 - w^2R_1R_2C_1C_2 > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{für } 1 - w^2R_1R_2C_1C_2 = 0 \\ \pi + \arctan \dfrac{w(C_1R_1 + C_2R_2 + R_1C_2(1+v))}{1 - w^2R_1R_2C_1C_2} & \text{für } 1 - w^2R_1R_2C_1C_2 < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(0) = \pi\,; \quad \lim_{w\to\infty} \varphi = \frac{3}{2}\pi - (\pi - 0) = \frac{\pi}{2}$$

8. f) **Skizzen der Funktionen**

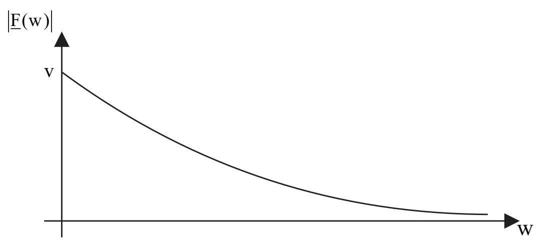


Abbildung 8.3: *Skizze der Betragsfunktion $|F(w)|$*

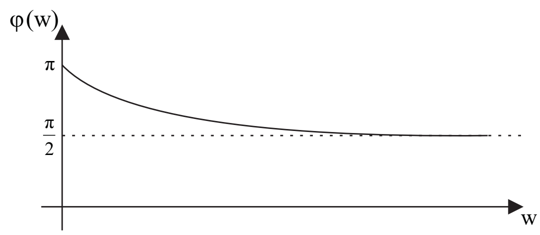


Abbildung 8.4: *Skizze der Winkelfunktion $\varphi(w)$*

Mehr kann mit dem errechneten Informationen nicht über den Verlauf der Funktionen ausgesagt werden. Extrema müssten berechnet werden, eine Abschätzung ist nicht ohne Weiteres möglich!

Aufgabe 9: Operationsverstärkerschaltung mit Integralanteil

9. a) Ersatzschaltbild

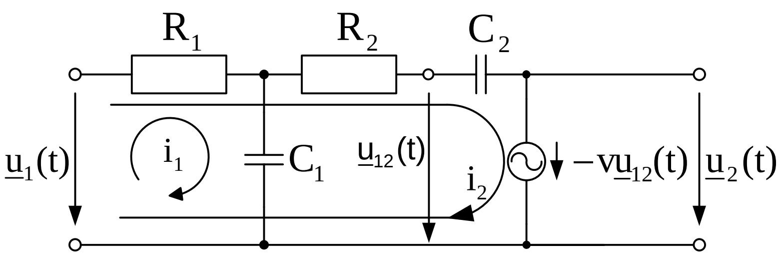


Abbildung 9.1: *Ersatzschaltbild der Operationsverstärkerschaltung*

9. b) Übertragungsverhalten $\boldsymbol{F(p) = \dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}}$ (Maschenstromanlayse)

$$U_1 = (I_1 + I_2)R_1 + \frac{1}{pC_1}I_1\ ; \quad U_1 = (I_1 + I_2)R_1 + I_2\left(R_2 + \frac{1}{pC_2}\right) - vU_{12}$$

I_1	I_2	
$R_1 + \dfrac{1}{pC_1}$	R_1	U_1
R_1	$R_1 + R_2 + \dfrac{1}{pC_2}$	$U_1 + vU_{12}$

Ersetzen von $U_{12} = U_1 - R_1(I_1 + I_2) - R_2 I_2$ führt zu

I_1	I_2	
$R_1 + \dfrac{1}{pC_1}$	R_1	U_1
$R_1(1+v)$	$R_1(1+v) + R_2(1+v) + \dfrac{1}{pC_2}$	$(1+v)U_1$

I_1	I_2	
$R_1 + \dfrac{1}{pC_1}$	R_1	U_1
R_1	$R_1 + R_2 + \dfrac{1}{(1+v)pC_2}$	U_1

gesucht: $\quad \dfrac{U_2}{U_1} = -\dfrac{vU_{12}}{U_1} = -v\left[1 - R_1\dfrac{I_1 + I_2}{U_1} - R_2\dfrac{I_2}{U_1}\right]$ mit $I_1 = \dfrac{D_1}{D}$ und $I_2 = \dfrac{D_2}{D}$

$$D = \left(R_1 + \frac{1}{pC_1}\right)\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{(1+v)pC_2}\right) - R_1^2$$

$$D_1 = U_1\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{(1+v)pC_2} - R_1\right) = U_1\left(R_2 + \frac{1}{(1+v)pC_2}\right)$$

$$D_2 = U_1\left(R_1 + \frac{1}{pC_1} - R_1\right) = U_1\frac{1}{pC_1}$$

Verhältnis $\frac{U_2}{U_1}$

$$\frac{U_2}{U_1} = -v\left[1 - \frac{R_1\left[R_2 + \frac{1}{(1+v)pC_2} + \frac{1}{pC_1}\right] + R_2\frac{1}{pC_1}}{\left(R_1 + \frac{1}{pC_1}\right)\left(R_1 + R_2 + \frac{1}{(1+v)pC_2}\right) - R_1^2}\right]$$

$$= \frac{R_1R_2 + \frac{R_1}{(1+v)pC_2} + \frac{R_1}{pC_1} + \frac{R_2}{pC_1}}{R_1R_2 + \frac{R_1}{(1+v)pC_2} + \frac{R_1}{pC_1} + \frac{R_2}{pC_1} + \frac{1}{1+v}\frac{1}{pC_1}\frac{1}{pC_2}} \cdot v - v$$

$$= -v + v\frac{p^2C_1C_2R_1R_2(1+v) + pC_1R_1 + pC_2(1+v)(R_1+R_2)}{p^2C_1C_2R_1R_2(1+v) + pC_1R_1 + pC_2(1+v)(R_1+R_2) + 1}$$

$$= -v\frac{1}{p^2C_1C_2R_1R_2(1+v) + p(C_1R_1 + C_2(1+v)(R_1+R_2)) + 1}$$

9. c) **Übertragungsverhalten $\boldsymbol{F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}}$ (Knotenpotentialanalyse)**

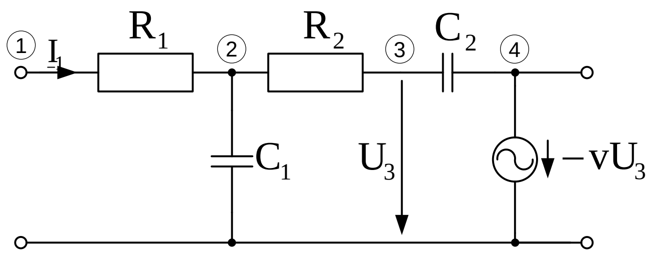


Abbildung 9.2: *Ersatzschaltbild für Knotenpotentialanalyse*

gesucht: $\frac{U_4}{U_1} = -v\frac{U_3}{U_1} = -v\frac{D_3}{D_1}$

U_1	U_2	U_3	U_4	
$-\frac{1}{R_1}$	$\frac{1}{R_1}$	0	0	$-I_1$
$\frac{1}{R_1}$	$-\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + pC_1\right)$	$\frac{1}{R_2}$	0	0
0	$\frac{1}{R_2}$	$-\left(\frac{1}{R_2} + pC_2\right)$	pC_2	0
0	0	v	1	0

$$D_1 = -I_1\left(\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+pC_1\right)\left(\frac{1}{R_2}+pC_2\right)+vpC_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+pC_1\right)-\frac{1}{R_2^2}\right)$$

$$D_3 = -I_1\cdot\begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+pC_1\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} & pC_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -I_1\left(\frac{1}{R_1R_2}\right)$$

Verhältnis $\frac{U_4}{U_1}$

$$\begin{aligned}
\frac{U_4}{U_1} &= -v\frac{\frac{1}{R_1R_2}}{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+pC_1\right)\left(\frac{1}{R_2}+pC_2\right)+pvC_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+pC_1\right)-\frac{1}{R_2^2}} \\
&= -v\frac{1}{(R_2+R_1+pC_1R_1R_2)\left(\frac{1}{R_2}+pC_2\right)+pvC_2(R_2+R_1+pC_1R_1R_2)-\frac{R_1}{R_2}} \\
&= \frac{-v}{p^2C_1C_2R_1R_2(1+v)+pC_1R_1+p(1+v)C_2(R_1+R_2)+1} \\
&= \frac{-v}{p^2C_1C_2R_1R_2(1+v)+p(C_1R_1+(1+v)C_2(R_1+R_2))+1}
\end{aligned}$$

9. d) **Übertragungsfunktion für $v \to \infty$**

$$\lim_{v\to\infty} F(p) = \frac{-1}{p^2C_1C_2R_1R_2+pC_2(R_1+R_2)} = \frac{-1}{C_1C_2R_1R_2p(p+\frac{1}{C_1R_2}+\frac{1}{C_1R_1})}$$

9. e) **Sprungantwort der Schaltung**

$$U_1(p) = \frac{U_0}{p} \qquad U_2(p) = U_1(p)\cdot F(p)$$

$$U_2(p) = \frac{-U_0}{C_1C_2R_1R_2}\cdot\frac{1}{p^2\left(p+\frac{1}{C_1R_2}+\frac{1}{C_1R_1}\right)}$$

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= \sigma(t)\cdot\frac{-U_0}{C_1C_2R_1R_2}\cdot\left(\frac{C_1R_1R_2}{R_1+R_2}\right)^2\left[\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2}t\right)+\frac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2}t-1\right] \\
&= \sigma(t)\cdot\frac{(-U_0)}{C_2}\cdot\frac{C_1R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\left[\exp\left(-\frac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2}t\right)+\frac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2}t-1\right]
\end{aligned}$$

9. f) **Impulsantwort der Schaltung**

$$U_1(p) = U_0 \Rightarrow \qquad U_2(p) = \frac{-U_0}{C_1 C_2 R_1 R_2} \cdot \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{C_1 R_2} + \frac{1}{C_1 R_1}\right)}$$

$$u_2(t) = \sigma(t) \cdot \frac{-U_0}{C_2} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2}\left(1 - \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2} t\right)\right)$$

9. g) **Zusammenhang Impulsantwort und Sprungantwort**

$$\frac{d}{dt}\underbrace{(u_2(t))}_{\text{aus e)}} = \frac{-U_0}{C_2} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2} t\right)\right) = \underbrace{u_2(t)}_{\text{aus f)}}$$

Aufgabe 10: Schaltung zur Erzeugung einer hohen Sinusspannung

10. a) **Laplace-Transformierte $U_0(p)$ und $U_1(p)$**

$$\begin{aligned} U_0(p) &= \int_0^\infty u_0(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 e^{-pt}dt + \int_{\frac{T}{2}}^{T} -U_0 e^{-pt}dt \\ &= \left[-\frac{1}{p}U_0 e^{-pt}\right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[\frac{1}{p}U_0 e^{-pt}\right]_{\frac{T}{2}}^{T} = -\frac{1}{p}U_0 e^{-p\frac{T}{2}} + \frac{1}{p}U_0 + \frac{1}{p}U_0 e^{-pT} - \frac{1}{p}U_0 e^{-p\frac{T}{2}} \\ &= \frac{U_0}{p}\left(1 + e^{-pT} - 2e^{-p\frac{T}{2}}\right) \end{aligned}$$

periodisches Signal: $\quad U_1(p) = U_0(p)\dfrac{1}{1-e^{-pT}}$

10. b) **Übertragungsverhalten $F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$ (leere Energiespeicher)**
leere Energiespeicher $\Rightarrow$ Spannungsteilerregel

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pCR + p^2LC} = \frac{1}{LC}\frac{1}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

10. c) **Laplace-Transformierte $U_2(p)$**

$$U_2(p) = \underbrace{\frac{U_0}{LC}\frac{1}{p\left(p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right)}\left(1 + e^{-pT} - 2e^{-p\frac{T}{2}}\right)}_{U_{20}(p)}\frac{1}{1-e^{-pT}}$$

10. d) **Zeitfunktion $u_{20}(t)$**

$$2\beta = \frac{R}{L} \quad\Rightarrow\quad \beta = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC} \quad\Rightarrow\quad \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}$$

$$F(p) = \frac{U_0}{LC}\frac{1}{p\left(p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}\right)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t) = \sigma(t)U_0\left[1 - e^{-\beta t}\left(\cos(\alpha t) + \frac{\beta}{\alpha}\sin(\alpha t)\right)\right]$$

$$u_{20}(t) = f(t) + f(t-T) - 2f\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$u_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{20}(t - kT)$$

Aufgabe 11: RC-Schaltung, angeregt duch ein Schwingungspaket

11. a) **Übertragungsverhalten $F(p) = \dfrac{U_2(p)}{U_1(p)}$ (leerer Energiespeicher)**

Spannungsteiler: $\dfrac{U_2(p)}{U_1(p)} = \dfrac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \dfrac{1}{1+pCR}$

Spannungsteiler, da Energiespeicher leer!

11. b) **Laplace-Transformierte $U_1(p)$**

$$U_1(p) = \int_0^T \cos(w_0 t) e^{-pt} dt = \left[e^{-pt} \frac{1}{p^2 + w_0^2} (-p\cos(w_0 t) + w_0 \sin(w_0 t)) \right]_0^T$$
$$= \frac{p}{p^2+w_0^2}\left(1 - e^{-pT}\right)$$

alternativ mit Korrespondenzen: $u_1(t) = (\sigma(t) - \sigma(t-T)) \cdot \cos(w_0 t)$

$$\sigma(t)\cos(w_0 t) - \sigma(t-T)\cos(w_0(t-T)) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{p}{p^2+w_0^2}\left(1-e^{-pT}\right)$$

11. c) **Laplace-Transformierte $U_2(p)$**

$$U_2(p) = \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{1}{RC} + p} \frac{p}{p^2 + w_0^2}\left(1 - e^{-pT}\right)$$

11. d) **Zeitfunktion $u_2(t)$ (Partialbruchzerlegung)**
Partialbruchzerlegung:

$$\frac{p}{\left(p + \frac{1}{RC}\right)\left(p^2 + w_0^2\right)} = \frac{A}{p + \frac{1}{RC}} + \frac{Bp + D}{p^2 + w_0^2}$$

Ermitteln von A:

$$p = A(p^2 + w_0^2) + (Bp + D)\left(p + \frac{1}{RC}\right)$$
$$p = -\frac{1}{RC} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{RC} = A\left(\frac{1}{(RC)^2} + w_0^2\right) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{RC}{1 + (w_0 RC)^2}$$

d.h.

$$\frac{Bp + D}{p^2 + w_0^2} = \frac{p}{\left(p + \frac{1}{RC}\right)\left(p^2 + w_0^2\right)} + \frac{\frac{RC}{1+(w_0 RC)^2}}{p + \frac{1}{RC}} = \frac{p(1 + (w_0 RC)^2) + RC(p^2 + w_0^2)}{(1 + (w_0 RC)^2)\left(p + \frac{1}{RC}\right)\left(p^2 + w_0^2\right)}$$

Nun ist der Zähler durch $p + \frac{1}{RC}$ zu dividieren!

$$\frac{Bp + D}{p^2 + w_0^2} = \frac{RC}{1 + (w_0 RC)^2} \cdot \frac{p + w_0^2 RC}{p^2 + w_0^2} \qquad \Rightarrow \quad B = \frac{RC}{1 + (w_0 RC)^2}$$

$$\Rightarrow \quad D = \frac{w_0^2 R^2 C^2}{1 + (w_0 RC)^2}$$

$$U_2(p) = \underbrace{\left[\frac{A}{p + \frac{1}{RC}} + \frac{B}{p^2 + w_0^2} p + \frac{D}{p^2 + w_0^2}\right] \frac{1}{RC}}_{F(p)} \left(1 - e^{-pT}\right)$$

$$f(t) = \sigma(t) \cdot \frac{1}{RC} \left[A e^{-\frac{t}{RC}} + B \cos(w_0 t) + \frac{D}{w_0} \sin(w_0 t)\right] \quad \text{und} \quad u_2(t) = f(t) - f(t - T)$$

Aufgabe 12: Turbogenerator am Netz, verschiedene Betriebszustände

12. a) **Polradspannung $\underline{U}_p$ (Betrag und Phase)**

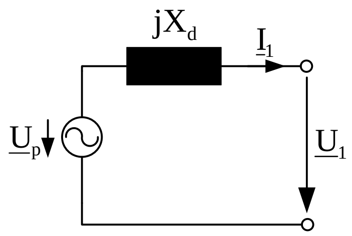


Abbildung 12.1: *Ersatzschaltbild eines Turbogenerators*

$$\underline{U}_1 = \frac{U_N}{\sqrt{3}} = 6062,18\,\mathrm{V}e^{j0^\circ} \qquad \text{(Phase gemäß Aufgabenstellung)}$$

$$\cos\varphi_N = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \varphi_N = 36,87^\circ \quad ; \quad \underline{S}_N = 150\,\mathrm{MVA}e^{j36,87^\circ}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I}_N^* = \frac{\underline{S}_N}{\sqrt{3}\underline{U}_N} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_N = 8247,87\,\mathrm{e}^{-36,87^\circ}$$

$$\underline{U}_p = \underline{U}_1 + jX_d\underline{I}_1 = 6062,18\,\mathrm{V}e^{j0^\circ} + 9732,48\,\mathrm{V}e^{j53,13^\circ} = 14222,20\,\mathrm{V}e^{j33,19^\circ}$$

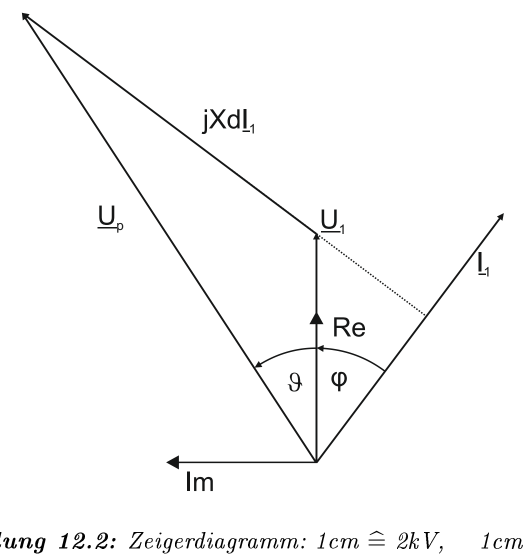


Abbildung 12.2: *Zeigerdiagramm: 1cm $\widehat{=}$ 2kV, 1cm $\widehat{=}$ 2kA*

12. b) **komplexe Scheinleistung**

siehe a) $\underline{S}_N = (120 + j90)\,\mathrm{MVA} \quad \Rightarrow \quad P_1 = 120\,\mathrm{MW} \quad \text{und} \quad Q_1 = 90\,\mathrm{Mvar}$

12. c) **komplexe Scheinleistung bei 75 % des ursprünglichen Drehmomentes**

$$M = \frac{P_1}{\Omega} \Rightarrow P_1 = 0,75 \cdot 120\,\mathrm{MW} = 90\,\mathrm{MW}$$

$$P_1 = \frac{3U_1U_p}{X_d}\sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 24,24^\circ \quad (U_1,\, U_p \text{ unverändert})$$

$$S_1 = j\frac{3U_1}{X_d}(U_p(\cos\vartheta - j\sin\vartheta) - U_1) = (90 + j106,44)\,\mathrm{MVA}$$

12. d) **komplexe Scheinleistung bei 75 % der ursprünglichen Polradspannung**

Polradspannung soll auf 75 % ihres Wertes sinken $\Rightarrow \hat{B}_L$ muss auf 75 % des ursprünglichen Wertes sinken $\Rightarrow I_e$ muss auf 75 % des ursprünglichen Wertes gesenkt werden.

$$|\underline{U}_p| = 0,75 \cdot 14222,20\,\mathrm{V} = 10666,65\,\mathrm{V}$$

$$\sin\vartheta = \frac{P_1X_d}{3U_1U_p} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 46,88^\circ \qquad (X_d,\, U_1 \text{ unverändert})$$

$(P_1$ unverändert da Ω und M unverändert)

$$\underline{S}_1 = j\frac{3U_1}{X_d}(U_p(\cos\vartheta - j\sin\vartheta) - U_1)$$

$$= (120 + j18,94)\,\mathrm{MVA} = 121,48\,\mathrm{MVA}\; e^{j8,97^\circ}$$

Aufgabe 13: Turbogenerator am Netz, Nennbetrieb und Phasenschieberbetrieb

13. a) Polradspannung $\underline{U}_p$ (Betrag und Phase)

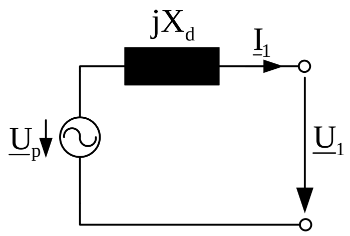


Abbildung 13.1: *vereinfachtes Ersatzschaltbild eines Turbogenerators*

$$\cos\varphi_N = 0,8 \quad \Rightarrow \quad \varphi_N = 36,87\,^\circ \qquad \text{und} \qquad \underline{U}_1 = \frac{U_N}{\sqrt{3}} = 6062,18\,\mathrm{V}$$

$$\underline{I}_1^* = \frac{\underline{S}_1}{3\underline{U}_1} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_1 = (5498,57 - j4123,93)\,\mathrm{A} = 6873,22\,\mathrm{A}\,e^{-j36,87\,^\circ}$$

$$\underline{U}_p = \underline{U}_1 + jX_d\underline{I}_1 = 6062,18\,\mathrm{V} + 10928,42\,\mathrm{V}\,e^{j53,13\,^\circ} = 15351,89\,\mathrm{V}\,e^{j34,71\,^\circ}$$

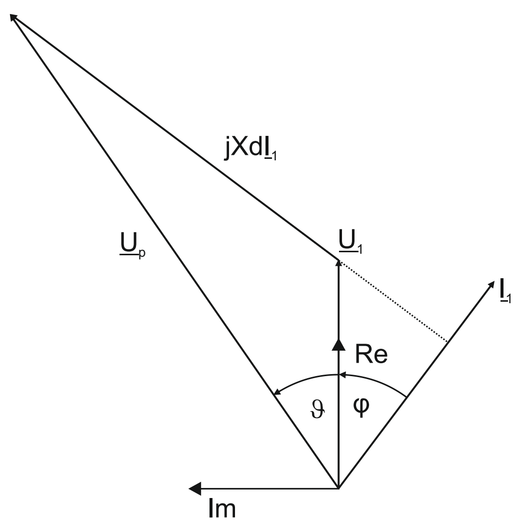


Abbildung 13.2: *Zeigerdiagramm: 1cm $\widehat{=}$ 2 kV, 1cm $\widehat{=}$ 2 kA*

13. b) Polradspannung $\underline{U}_p$ (keine Abgabe von Blindleistung)

$$Q_1 = 0 \quad , \quad P_1 = \frac{3U_1U_p}{X_d}\sin\vartheta \quad , \quad Q_1 = 3\cdot\left[\frac{U_1U_p\cos\vartheta}{X_d} - \frac{U_1^2}{X_d}\right]$$

$$P_1 = S_N\cdot\cos\varphi = 100\,\mathrm{MW} \quad \text{(Drehzahl und Drehmoment bleiben unverändert.)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{U_1^2}{X_d} = \frac{U_1 U_p \cos\vartheta}{X_d} \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_p \cos\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad P_1 = \frac{3U_1^2}{X_d}\tan\vartheta \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 55,26\,^\circ \quad \Rightarrow \quad U_p = \frac{P_1 X_d}{3U_1 \sin\vartheta} = 10,64\,\mathrm{kV}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_p - \underline{U}_1}{jX_d} = 5498,57\,\mathrm{A}\,e^{j0\,^\circ} \approx 5499\,\mathrm{A}$$

13. c) **Statorstrom bei Stabilitätsgrenze**

$$\vartheta = +90^\circ \quad , \quad P_1 \text{ unverändert}$$

$$\underline{U}_p = \frac{P_1 X_d}{3U_1 \sin\vartheta} = 8742,73\,\mathrm{V} \quad , \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}_p - \underline{U}_1}{jX_d} = (5499 + j3813)\,\mathrm{A}$$

13. d) **induktive Blindleistung**

Phasenschieberbetrieb: $P = 0 \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = +90^\circ$

$$Q_1 = 3 \cdot \left[\frac{U_1 U_p \cos\vartheta}{X_d} - \frac{U_1^2}{X_d}\right] = \frac{3U_1}{X_d}(U_p \cos\vartheta - U_1) = 106,26\,\mathrm{Mvar}$$

13. e) **größte kapazitive Blindleistung**

$$\left.\begin{aligned} &Q_1 < 0 \quad , \quad \vartheta \overset{!}{=} 0^\circ \\ &Q_1 = 3 \cdot \left[\frac{U_1 U_p \cos\vartheta}{X_d} - \frac{U_1^2}{X_d}\right] \end{aligned}\right\} U_p < U_1$$

Q_1 minimal für $U_p = 0$

$$Q_1 = -3\frac{U_1^2}{X_d} = -69,34\,\mathrm{Mvar}$$

Aufgabe 14: Betrieb eines Drehstromtransformators

14. a) Nennströme auf Ober- und Unterspannungsseite

$$S_N = \sqrt{3} U_{1N} I_{1N} = \sqrt{3} U_{2N} I_{2N}$$
$$I_{1N} = 72,17\,\mathrm{A}, \quad I_{2N} = 3608,4\,\mathrm{A}$$

14. b) Wirkungsgrad

$$\text{Lastfaktor: } k = \frac{I}{I_N} = 1 \quad , \quad \eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = 1 - \frac{P_0 + k^2 P_k}{k S_N \cos\varphi + P_0 + k^2 P_k} = 0,985$$

14. c) größter Wirkungsgrad mit $\cos\varphi = 0,8$ (induktiv)

$$\eta = \frac{k S_N \cos\varphi}{k S_N \cos\varphi + P_0 + k^2 P_k}$$

$$\frac{d\eta}{dk} = \frac{S_N \cos\varphi (k S_N \cos\varphi + P_0 + k^2 P_k) - k S_N \cos\varphi (S_N \cos\varphi + 2k P_k)}{(k S_N \cos\varphi + P_0 + k^2 P_k)^2}$$

$$= \frac{S_N \cos\varphi (P_0 - k^2 P_k)}{\underbrace{(k S_N \cos\varphi + P_0 + k^2 P_k)^2}_{=\beta}} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{P_0}{P_k}} = 0,379$$

$$\frac{d^2\eta}{dk^2} = S_N \cos\varphi \frac{\beta^2 (-2k P_k) - (\overbrace{P_0 - k^2 P_k}^{=0 \text{ für } k = \sqrt{\frac{P_0}{P_k}}}) \cdot 2\beta (S_N \cos\varphi + 2k P_k)}{\beta^4} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum}$$

$$\eta = 1 - \frac{2 P_0}{2 P_0 + \sqrt{\frac{P_0}{P_k}} S_N \cos\varphi} = 0,99$$

14. d) Längsimpedanz (bezogen auf die 20 kV-Seite)

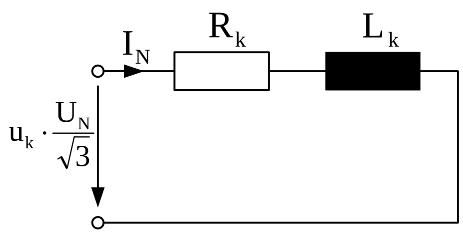


Abbildung 14.1: *Ersatzschaltbild nur mit Längsimpedanzen*

$$|\underline{Z}_k| = u_k \frac{U_N^2}{S_N} = 9,6\,\Omega \quad , \quad R_k = \frac{P_k}{3 I_N^2} = 1,696\,\Omega \quad , \quad X_k = \sqrt{|\underline{Z}_k|^2 - R_k^2} = 9,45\,\Omega$$

14. e) **Längsimpedanz (bezogen auf die 400 V-Seite)**

$$U_N = 400V \quad \Rightarrow \quad |\underline{Z}_k| = 3,84\,\mathrm{m\Omega} \quad , \quad R_k = 0,6784\,\mathrm{m\Omega} \quad , \quad X_k = 3,78\,\mathrm{m\Omega}$$

Aufgabe 15: Betrieb eines Drehstromtransformators

15. a) Längsimpedanzen des Transformators

$$\underline{Z}_{k_1} = \underline{Z}_{k_2} = \underline{Z}_{k_3} = \underline{u}_k \cdot \frac{U_N^2}{S_N} = (u_{k,r} + ju_{k,x}) \cdot \frac{U_N^2}{S_N} = \underline{Z}_k$$

$$\underline{Z}_k = j32,27\,\Omega$$

15. b) einphasiges Ersatzschaltbild (220-kV-Seite)

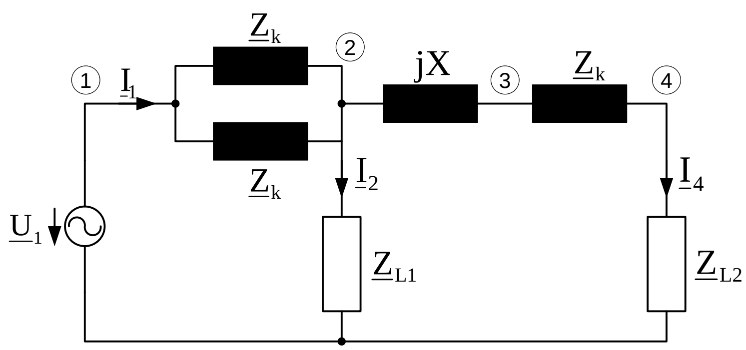


Abbildung 15.1: *einphasiges Ersatzschaltbild bezogen auf die 220-kV-Seite*

15. c) Spannung und Strom am Knoten 4 (220-kV-Seite)

$$\underline{U}_4 = \frac{220\,\text{kV}}{\sqrt{3}} \quad , \quad \underline{I}_4^* = \frac{\underline{S}_4}{3\underline{U}_4} \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_4 = (314,92 - j157,46)\,\text{A} \quad (= \underline{I}_{4,220kV})$$

$$\left(\underline{I}_{4,30kV} = \underline{I}_{4,220kV} \cdot \frac{220}{30} = (2309,4 - j1154,7)\,\text{A} \right)$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_4 + \underline{Z}_k \underline{I}_4 = (132098 + j10161)\,\text{V}$$

15. d) Strom $\underline{I}_2$ und Spannung $\underline{U}_1$

$$\underline{I}_2^* = \frac{\underline{S}_2}{3\underline{U}_2} \quad , \quad \underline{U}_2 = \underline{U}_3 + jX\underline{I}_4 = (133043 + j12051)\,\text{V}$$

$$\underline{I}_2 = (386,27 - j115,34)\,\text{A} \quad , \quad \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_4$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \frac{1}{2}\underline{Z}_k \underline{I}_1 = (137444 + j23364)\,\text{V}$$

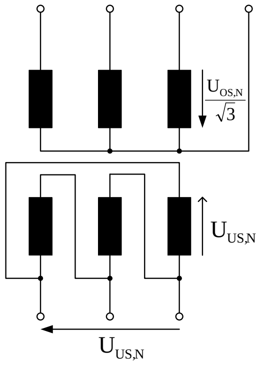
$$\left(\underline{U}_{1,10kV} = \underline{U}_{1,220kV} \cdot \frac{10}{220} = (6247 + j1062)\,\mathrm{V}\right)$$

15. e) **Leistung $\underline{S}_1$**

$$S_1 = 3 \cdot \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = (270 + j161,63)\,\mathrm{MVA} \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_2 + P_4$$

Aufgabe 16: Parallelschaltung von Transformatoren in einem Kraftwerk

16. a) Windungszahlverhältnis



$$\frac{\frac{U_{OS}}{\sqrt{3}}}{U_{US}} = \frac{w_{OS}}{w_{US}}$$

$$\text{AT01:} \quad \frac{w_{OS_1}}{w_{US_1}} = 9{,}195$$

$$\text{AT02:} \quad \frac{w_{OS_2}}{w_{US_2}} = 9{,}088$$

Abbildung 16.1: *Transformator - (Stern-Dreick)*

16. b) Kurzschlussimpedanz

$$\underline{Z}_k = \underline{u}_k \cdot \frac{U^2_{N,OS}}{S_N}$$

$$\text{AT01:} \quad \underline{Z}_{k_1} = j38{,}73\,\Omega$$

$$\text{AT02:} \quad \underline{Z}_{k_2} = j30{,}91\,\Omega$$

16. c) Einphasiges Ersatzschaltbild

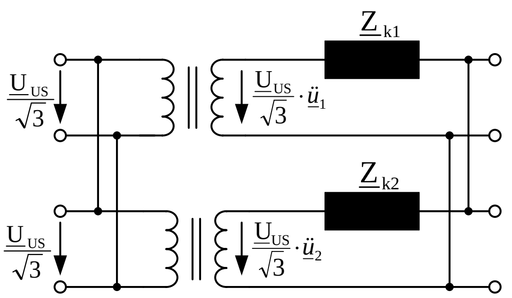


Abbildung 16.2: *einphasiges Ersatzschaltbild*

$\Longrightarrow$

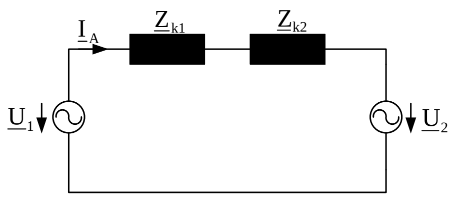


Abbildung 16.3: *vereinfachtes einphasiges Ersatzschaltbild*

16. d) Kreisstrom

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\underline{Z}_{k_1} + \underline{Z}_{k_2}} = \frac{\frac{U_G}{\sqrt{3}}(\underline{ü}_1 - \underline{ü}_2)}{\underline{Z}_{k_1} + \underline{Z}_{k_2}}$$

$$\text{YNd5} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_{OS} = \underline{U}_{US} \cdot ü \cdot e^{j \cdot 5 \cdot 30°} \quad \Rightarrow \quad \underline{ü} = ü \cdot e^{j150°} \quad \Rightarrow \quad \underline{ü}_1 = \frac{430}{27} e^{j150°}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{ü}_2 = \frac{425}{27} e^{j150°}$$

$$\underline{I}_A = 39{,}15\,\text{A}\,e^{j60\,°}$$

16. e) **Verhältnis Kreisstrom zum Leiterstrom**
Betrachtung: nur AT01 in Betrieb

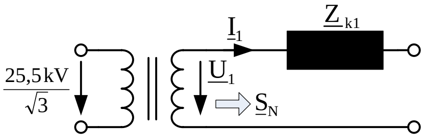


Abbildung 16.4: *einphasiges Ersatzschaltbild AT01*

$$|\underline{S}_N| = 3 \cdot |\underline{U}_1||\underline{I}_1| \quad ; \qquad |\underline{U}_1| = |\underline{\ddot{u}}_1| \cdot \frac{25,5kV}{\sqrt{3}}$$

$$|\underline{U}_1| = 234,47\,\mathrm{kV} \quad \Rightarrow \quad |\underline{I}_1| = 1052,03\,\mathrm{A}$$

$$\frac{|\underline{I}_A|}{|\underline{I}_1|} = 3,72\,\% \qquad \Rightarrow \quad \text{nicht kritisch !}$$