

Lösung zu den zusätzlichen Übungsunterlagen zur Vorlesung

ELEKTROENERGIESYSTEME

Aufgaben 1 bis 12

Version 1.0 / (01.04.2020)

Aufgabe 1: Berechnung einer unsymmetrischen Drehstromschaltung

1. a) Berechnung der Verschiebungsspannung $\underline{U}_{NM}$

$$\underline{U}_{NM} = \frac{\underline{Y}_R \cdot \underline{U}_{RM} + \underline{Y}_S \cdot \underline{U}_{SM} + \underline{Y}_T \cdot \underline{U}_{TM}}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} \quad \text{Skript S.33, Gl. 2.45}$$

$$\underline{U}_{NM} = \frac{U_Y \left[\underline{Y}_R + \underline{Y}_S e^{-j\frac{2}{3}\pi} + \underline{Y}_T e^{-j\frac{4}{3}\pi} \right]}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} e^{j\omega t}$$

$$\underline{Y}_R = j\omega C_1, \quad \underline{Y}_S = j\omega C_2, \quad \underline{Y}_T = \frac{1}{R + j\omega L}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{NM} &= U_Y \frac{j\omega C_1 + j\omega C_2 e^{-j\frac{2}{3}\pi} + \frac{1}{R+j\omega L} e^{-j\frac{4}{3}\pi}}{j\omega(C_1 + C_2) + \frac{1}{R+j\omega L}} e^{j\omega t} \\ &= U_Y \frac{wC_1 + wC_2 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{R+j\omega L} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-j)}{w(C_1 + C_2) - j\frac{1}{R+j\omega L}} e^{j\omega t} \\ &= U_Y \frac{wC_1 + wC_2 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{R-j\omega L}{R^2+(wL)^2} \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) (-j)}{w(C_1 + C_2) - j\frac{R-j\omega L}{R^2+(wL)^2}} e^{j\omega t} \\ &= U_Y \frac{wC_1 - \frac{1}{2}wC_2 - j\omega C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{jR}{R^2+(wL)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R}{R^2+(wL)^2} + \frac{1}{2} \frac{wL}{R^2+(wL)^2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{wL}{R^2+(wL)^2}}{\left[w(C_1 + C_2) - \frac{wL}{R^2+(wL)^2} - j\frac{R}{R^2+(wL)^2} \right]} e^{-j\omega t} \\ &= U_Y e^{j\omega t} \frac{\left(wC_1 - \frac{1}{2}wC_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R}{R^2+(wL)^2} + \frac{1}{2} \frac{wL}{R^2+(wL)^2} \right) + j \left(-wC_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{R-\sqrt{3}wL}{R^2+(wL)^2} \right)}{w(C_1 + C_2) - \frac{wL}{R^2+(wL)^2} - j\frac{R}{R^2+(wL)^2}} \end{aligned}$$

1. b) Berechnung des Betrages der Verschiebungsspannung $\underline{U}_{MN}$

$$|\underline{U}_{NM}| = \sqrt{\frac{\left(wC_1 - \frac{1}{2}wC_2 + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}R+wL}{R^2+(wL)^2} \right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}wC_2 + \frac{1}{2} \frac{R-\sqrt{3}wL}{R^2+(wL)^2} \right)^2}{\left(w(C_1 + C_2) - \frac{wL}{R^2+(wL)^2} \right)^2 + \left(\frac{R}{R^2+(wL)^2} \right)^2}} \cdot U_Y$$

1. c) Ermittlung der frequenzabhängigen Bedingungen für den Sonderfall $L=0$, sodass $|\underline{U}_{NM}| = 0$ wird.

$$\begin{aligned} \underline{U}_{NM} &= 0 \quad \text{mit} \quad L = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Betrachtung des Zählers} \\ 0 &\stackrel{!}{=} \left(w_0 C_1 - \frac{1}{2} w_0 C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{R} \right)^2 + \left(-w_0 C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{R} \right)^2 \\ &= w_0 C_1 - \frac{1}{2} w_0 C_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{R} = 0 \quad \wedge \quad -w_0 C_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2R} = 0 \end{aligned}$$

1. d) **Berechnung der Kapazitäten C_1 und C_2 .**

$$C_2 = \frac{1}{2R} \frac{2}{\sqrt{3}w_0} = \frac{1}{\sqrt{3}w_0R} \quad ; \quad C_1 = \frac{1}{w_0} \left(\frac{1}{2}w_0C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2R} \right)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}C_2 - \frac{\sqrt{3}}{2w_0R} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3}w_0R} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3}w_0R} = -\frac{1}{\sqrt{3}w_0R}$$

1. e) **Ist das System so realisierbar?**

$C_1 < 0$ ist nicht realisierbar. Daraus folgt, dass für $L = 0$ die Verschiebungsspannung $|\underline{U}_{NM}| \neq 0$ ist.

Aufgabe 2: Schering-Messbrücke

2. a) Spannungsberechnung

Das Voltmeter hat einen sehr hohen Innenwiderstand. $\Rightarrow$ Die beiden Brückenzeige sind unabhängig voneinander.

$$\underline{U}_A = \underline{U}_0 \cdot \frac{R_3}{R_3 + R_x + \frac{1}{j\omega C_x}} = \underline{U}_0 \cdot \frac{j\omega C_x R_3}{1 + j\omega C_x (R_3 + R_x)}$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_B &= \underline{U}_0 \cdot \frac{\frac{R_4}{1+j\omega R_4 C_4}}{\frac{R_4}{1+j\omega R_4 C_4} + \frac{1}{j\omega C_2}} \\ &= \underline{U}_0 \cdot \frac{j\omega R_4 C_2}{1 + j\omega R_4 (C_4 + C_2)} \end{aligned}$$

2. b) Berechnung der Elemente des Prüflings

Ableichbedingung: $\underline{U}_A = \underline{U}_B$

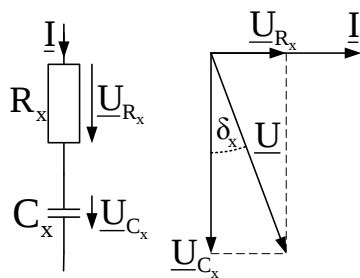
$$\underline{U}_0 \frac{j\omega C_x R_3}{1 + j\omega C_x (R_3 + R_x)} = \underline{U}_0 \frac{j\omega R_4 C_2}{1 + j\omega R_4 (C_2 + C_4)} \quad \text{führt auf}$$

$$C_x R_3 = R_4 C_2 \quad \text{und somit} \quad C_x = C_2 \frac{R_4}{R_3} \quad (1)$$

$$C_x (R_3 + R_x) = R_4 (C_2 + C_4) = (R_3 + R_x) \frac{R_4}{R_3} C_2$$

$$\Rightarrow R_4 C_2 + R_4 C_4 = R_4 C_2 + R_x \frac{R_4}{R_3} C_2 \quad \Rightarrow \quad C_4 = R_x \frac{C_2}{R_3} \quad \text{und} \quad R_x = R_3 \frac{C_4}{C_2} \quad (2)$$

2. c) Berechnung des Verlustfaktors



$$\begin{aligned} \tan \delta_x &= \frac{|\underline{U}_{RX}|}{|\underline{U}_{CX}|} = \frac{R_x I}{I} \omega C_x \\ &= \omega R_x C_x \\ &= \omega R_4 C_4 \end{aligned}$$

Abbildung 2.1: Verlustfaktor: Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm

Aufgabe 3: RL-Schaltung

3. a) DGL mit homogener Lösung

Schalter geschlossen

$$u_0(t) = u_L(t) + u_R(t) = L \frac{di(t)}{dt} + i(t) \cdot R$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = u_0(t) \cdot \frac{1}{L} = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t + \varphi)$$

homogene DGL: $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = 0 \Rightarrow i(t) = K e^{\lambda t}$

charakteristische Gleichung: $\lambda K e^{\lambda t} + \frac{R}{L} K e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda K + \frac{R}{L} K = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{R}{L}$

3. b) partikuläre Lösung der DGL

Tabelle Skript S.68: Ansatz für part. Lösung $\Rightarrow i(t) = C_1 \sin(\omega t + \varphi) + C_2 \cos(\omega t + \varphi)$

$$C_1 \omega \cos(\omega t + \varphi) - C_2 \omega \sin(\omega t + \varphi) + \frac{R}{L} (C_1 \sin(\omega t + \varphi) + C_2 \cos(\omega t + \varphi)) = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\left[\frac{R}{L} C_1 - C_2 \omega \right] \sin(\omega t + \varphi) + \left[\frac{R}{L} C_2 + C_1 \omega \right] \cos(\omega t + \varphi) = \frac{U_0}{L} \sin(\omega t + \varphi)$$

Vergleich: rechte und linke Seite

$$\begin{aligned} \frac{R}{L} C_1 - C_2 \omega &= 0 & \wedge & & \frac{R}{L} C_2 + C_1 \omega &= \frac{U_0}{L} \\ C_1 &= -\frac{R}{\omega L} C_2 & \wedge & & C_2 &= \frac{R}{\omega L} C_1 - \frac{U_0}{\omega L} \end{aligned}$$

$$C_2 = -\left(\frac{R}{\omega L} \right)^2 C_2 - \frac{U_0}{\omega L} \Rightarrow C_2 = -\frac{U_0}{\omega L} \frac{1}{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2} = \frac{-U_0 \omega L}{(\omega L)^2 + R^2}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{U_0 R}{R^2 + (\omega L)^2}$$

gesamte Lösung: $i(t) = i_{hom}(t) + i_{par}(t)$

$$i(t) = K e^{-\frac{R}{L} t} + \frac{U_0 R}{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\omega t + \varphi) - \frac{\omega L U_0}{R^2 + (\omega L)^2} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i(0) = K + \frac{U_0 R}{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\varphi) - \frac{\omega L U_0}{R^2 + (\omega L)^2} \cos(\varphi)$$

$$\Rightarrow K = I_{L0} - \frac{U_0 R}{R^2 + (\omega L)^2} \sin(\varphi) + \frac{\omega L U_0}{R^2 + (\omega L)^2} \cos(\varphi)$$

$$= I_{L0} + \frac{U_0}{R^2 + (\omega L)^2} (\omega L \cos(\varphi) - R \sin(\varphi))$$

3. c) Vergleich der Lösung aus b) mit der Formel für die Berechnung des Kurzschlussstromes in einem RL-Kreis

Aus den in der Aufgabe genannten Äquivalenzen folgt:

$$\begin{aligned}
wL \cos(\varphi) - R \sin(\varphi) &= wL \cos(\varphi) + R \sin(-\varphi) = wL \cos(-\varphi) + R \sin(-\varphi) \\
&= \sqrt{R^2 + (wL)^2} \cdot \sin(-\varphi + \beta) \quad \text{mit} \quad \beta = \arctan\left(\frac{wL}{R}\right) \\
&= -\sqrt{R^2 + (wL)^2} \sin(\varphi - \beta)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
R \sin(\omega t + \varphi) - wL \cos(\omega t + \varphi) &= -R \sin(-\omega t - \varphi) - wL \cos(\omega t + \varphi) \\
&= -R \sin(-\omega t - \varphi) - wL \cos(-\omega t - \varphi) \\
&= -[R \sin(-\omega t - \varphi) + wL \cos(-\omega t - \varphi)] \\
&= -\sqrt{R^2 + (wL)^2} \sin(-\omega t - \varphi + \beta) \\
&= \sqrt{R^2 + (wL)^2} \sin(\omega t + \varphi - \beta) \quad \text{mit} \quad \beta = \arctan\left(\frac{wL}{R}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i(t) &= \frac{U_0}{R^2 + (wL)^2} \cdot \sqrt{R^2 + (wL)^2} \sin(\omega t + \varphi - \beta) \\
&\quad - \frac{U_0}{R^2 + (wL)^2} \sqrt{R^2 + (wL)^2} \sin(\varphi - \beta) e^{-\frac{R}{L}t} + I_{L0} e^{-\frac{R}{L}t} \\
&= \frac{U_0}{R^2 + (wL)^2} \left[\sin(\omega t + \varphi - \beta) - \sin(\varphi - \beta) e^{-\frac{R}{L}t} \right] + I_{L0} e^{-\frac{R}{L}t}
\end{aligned}$$

Gemäß dem Text der Aufgabenstellung wird die Spannung erst zu einem bestimmten Zeitpunkt eingeschaltet. $\Rightarrow I_{L0} = 0 \Rightarrow$ Gleichungen stimmen überein!

Aufgabe 4: RLC-Schaltung

4. a) DGL mit homogener Lösung

$$\begin{aligned}
 u_0(t) = iR + u_A(t) &= (i_L + i_C)R + L \frac{di_L}{dt} \\
 &= RC \frac{du_A}{dt} + i_L R + L \frac{di_L}{dt} \\
 &= RLC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + i_L R + L \frac{di_L}{dt} = u_0(t)
 \end{aligned}$$

mit $u_A(t) = L \frac{di_L}{dt}$, $i_C = C \frac{du_A}{dt}$, $i = i_C + i_L$

Ansatz für homogene DGL: $i_L(t) = K e^{\lambda t}$, $\frac{di_L}{dt} = K \lambda e^{\lambda t}$, $\frac{d^2 i_L}{dt^2} = K \lambda^2 e^{\lambda t}$;

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \frac{1}{RC} \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$

Fallunterscheidung:

$$\begin{aligned}
 \text{Fall 1: } (R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}) \quad \lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\
 \text{Fall 2: } (R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}) \quad \lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2RC} = \lambda \\
 \text{Fall 3: } (R > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}) \quad \lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2RC} \pm j \sqrt{-\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}
 \end{aligned}$$

Somit lauten die Lösungen der homogenen DGL:

Fall 1: $i_L(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t}$

Fall 2: $i_L(t) = K_1 e^{\lambda t} + K_2 t e^{\lambda t}$

Fall 3: $i_L(t) = K_1 e^{\alpha t} \cos(wt) + K_2 e^{\alpha t} \sin(wt)$ mit $\alpha = -\frac{1}{2RC}$ und $w = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$

4. b) partikuläre Lösung der DGL

Tabelle Skript S.68: Ansatz für part. Lösung $\Rightarrow i(t) = C_1 \sin(wt + \varphi) + C_2 \cos(wt + \varphi)$

$$\frac{di_L}{dt} = C_1 w_0 \cos(w_0 t + \varphi) - C_2 w_0 \sin(w_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} = -C_1 w_0^2 \sin(w_0 t + \varphi) - C_2 w_0^2 \cos(w_0 t + \varphi)$$

In DGL eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 \sin(w_0 t + \varphi) \left[-C_1 w_0^2 - \frac{1}{RC} C_2 w_0 + \frac{1}{LC} C_1 \right] + \cos(w_0 t + \varphi) \\
 \cdot \left[-C_2 w_0^2 + \frac{1}{RC} C_1 w_0 + \frac{1}{LC} C_2 \right] = \sin(w_0 t + \varphi) \cdot U_0 \cdot \frac{1}{RLC}
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich liefert:

$$\begin{aligned}
C_2 \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right) + C_1 \left(\frac{1}{RC} w_0 \right) &= 0 \\
C_2 \left(-\frac{1}{RC} w_0 \right) + C_1 \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right) &= U_0 \cdot \frac{1}{RLC} \\
C_2 = C_1 \cdot \frac{\frac{1}{RC} w_0}{w_0^2 - \frac{1}{LC}} &\Rightarrow C_1 \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 + \frac{\left(\frac{1}{RC} w_0 \right)^2}{\frac{1}{LC} - w_0^2} \right) = \frac{U_0}{RLC} \\
\Rightarrow C_1 = \frac{U_0}{RLC} \frac{\frac{1}{LC} - w_0^2}{\left(\frac{1}{RC} w_0 \right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2} &= \frac{U_0 \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)}{L w_0 \left[\left(\frac{w_0}{RC} \right) + \frac{RC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2 \right]} \\
\Rightarrow C_2 = -\frac{U_0}{RLC} \frac{\left(\frac{1}{RC} w_0 \right)}{\left(\frac{1}{RC} w_0 \right)^2 + \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2} &= -\frac{U_0}{RLC} \frac{1}{\left(\frac{w_0}{RC} \right) + \frac{RC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2}
\end{aligned}$$

Berechnung für alle 3 Fälle

$$i_L = i_{L,hom} + i_{L,part}$$

Fall 1:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= K_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 e^{\lambda_2 t} + C_1 \sin(w_0 t + \varphi) + C_2 \cos(w_0 t + \varphi) \\
i_L(0) &= K_1 + K_2 + C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi) \stackrel{!}{=} I_{L0} \\
u_C(0) &= L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = L [K_1 \lambda_1 + K_2 \lambda_2 + C_1 w_0 \cos \varphi - C_2 w_0 \sin \varphi] \stackrel{!}{=} U_{L0} \\
K_1 &= -K_2 - C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi + I_{L0} \\
K_2 &= \frac{1}{\lambda_2} \left(-K_1 \lambda_1 - C_1 w_0 \cos \varphi + C_2 w_0 \sin \varphi + \frac{U_{L0}}{L} \right) \\
K_1 &= \frac{1}{\lambda_2} \left(K_1 \lambda_1 + C_1 w_0 \cos \varphi - C_2 w_0 \sin \varphi + \frac{U_{L0}}{L} \right) - C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi + I_{L0} \\
&= \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)} \left[\frac{1}{\lambda_2} \left(C_1 w_0 \cos \varphi - C_2 w_0 \sin \varphi - \frac{U_{L0}}{L} \right) - C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi + I_{L0} \right] \\
K_2 &= \frac{1}{\lambda_2} (-K_1 \lambda_1 - C_1 w_0 \cos \varphi + C_2 w_0 \sin \varphi + U_{L0}) = \dots
\end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= K_1 e^{\lambda t} + K_2 e^{\lambda t} + C_1 \sin(w_0 t + \varphi) + C_2 \cos(w_0 t + \varphi) \\
i_L(0) &= K_1 + C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi) \stackrel{!}{=} I_{L0} \\
u_C(0) &= L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = L [K_1 \lambda + K_2 + C_1 w_0 \cos \varphi - C_2 w_0 \sin \varphi] \stackrel{!}{=} U_{L0} \\
K_1 &= I_{L0} - C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi \\
K_2 &= \frac{U_{L0}}{L} - (I_{L0} - C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi) \lambda - C_1 w_0 \cos \varphi + C_2 w_0 \sin \varphi
\end{aligned}$$

Fall 3:

$$\begin{aligned}
i_L(t) &= K_1 e^{\alpha t} \cos(wt) + K_2 e^{\alpha t} \sin(wt) + C_1 \sin(w_0 t + \varphi) + C_2 \cos(w_0 t + \varphi) \\
i_L(0) &= K_1 + C_1 \sin(\varphi) + C_2 \cos(\varphi) \stackrel{!}{=} I_{L0} \quad \Rightarrow \quad K_1 = I_{L0} - C_1 \sin \varphi - C_2 \cos \varphi \\
u_C(0) &= L \left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = L [K_1 \alpha + K_2 w + C_1 w_0 \cos \varphi - C_2 w_0 \sin \varphi] = U_{C0} \\
K_2 &= \frac{1}{w} \left(\frac{U_{L0}}{L} - K_1 \alpha - C_1 w_0 \cos \varphi + C_2 w_0 \sin \varphi \right)
\end{aligned}$$

4. c) Gleichungssystem mit der Spannung als Ausgangsgröße

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= iR + u_C(t) = i_L R + i_C R + u_C(t) = I_L R + RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t) \\
u_C(t) &= u_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L} u_C(t) \\
RC \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) + Ri_L(t) &= u_0(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) + \frac{1}{C} i_L(t) = \frac{1}{RC} u_0(t) \\
&\Rightarrow \quad \frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} u_C(t) - \frac{1}{C} i_L(t) + \frac{1}{RC} u_0(t) \\
\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{du_C(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} \end{bmatrix} \cdot u_0(t)
\end{aligned}$$

4. d) Lösung des homogenen Systems

$$\begin{aligned}
\det \{A - \lambda E\} &= \det \left\{ \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} - \lambda \end{bmatrix} \right\} = \lambda^2 + \frac{1}{RC} \lambda + \frac{1}{LC} \stackrel{!}{=} 0 \\
\lambda_{1/2} &= -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \Rightarrow \quad \text{Fallentscheidung analog zu a)}
\end{aligned}$$

Fall 1:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

Berechnung EV:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ -\frac{1}{C} \end{bmatrix} &\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{bmatrix} = 0 \\
\begin{bmatrix} \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ -\frac{1}{C} \end{bmatrix} &\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi_1 = \left[L \left(-\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \right) \right]; \quad \psi_2 = \left[L \left(-\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} x(t) &= K_1 \psi_1 e^{\lambda_1 t} + K_2 \psi_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ L K_1 e^{\lambda_1 t} \left(-\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_2 e^{\lambda_2 t} \\ K_2 L e^{\lambda_2 t} \left(-\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2RC}$$

Berechnung EV:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2RC} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{2RC} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{L}{2RC} \end{bmatrix}$$

Anzahl EV ist 1, Vielfachheit des Eigenwertes ist 2 $\Rightarrow$ Berechnung eines weiteren Hauptvektors

$$\begin{aligned} (A - \lambda E)\psi_2 &= \psi_1 \Rightarrow \begin{aligned} \frac{1}{2RC}\psi_{21} + \frac{1}{L}\psi_{22} &= 1 \\ -\frac{1}{C}\psi_{21} - \frac{1}{2RC}\psi_{22} &= -\frac{L}{2RC} \end{aligned} \\ \psi_{21} &= \left[-\frac{L}{2RC} + \frac{1}{2RC}\psi_{22} \right] (-C) = \frac{L}{2R} - \frac{1}{2R}\psi_{22} \\ \frac{1}{2RC} \left[\frac{L}{2R} - \frac{1}{2R}\psi_{22} \right] + \frac{1}{L}\psi_{22} &= 1 \Rightarrow \frac{L}{4R^2C} - \frac{1}{4R^2C}\psi_{22} + \frac{1}{L}\psi_{22} = 1 \\ \psi_{22} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{4R^2C} \right) &= 1 - \frac{L}{4R^2C} \Rightarrow \psi_{22} = \frac{4R^2C - L}{4R^2C} \cdot \frac{4R^2CL}{4R^2C - L} = L \\ \psi_{21} &= \frac{L}{2R} - \frac{L}{2R} = 0 \Rightarrow \psi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gemäß Gl. 2.151, Skript S.67, gilt:

$$\begin{aligned} x_{hom} &= K_1 e^{\lambda t} \psi_1 + K_2 e^{\lambda t} (t\psi_1 + \psi_2) \\ \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_1 e^{\lambda t} \\ K_1 e^{\lambda t} \left(-\frac{L}{2RC} \right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_2 t e^{\lambda t} + 0 \\ K_2 t e^{\lambda t} \left(-\frac{L}{2RC} \right) + K_2 e^{\lambda t} L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Fall 3:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2RC} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2RC} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2RC} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \\ -\frac{1}{C} \end{bmatrix} &\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{2RC} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2RC} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{2RC} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = 0$$

⇒ Berechnung EV

$$\psi_1 = \left[L \left(-\frac{1}{2RC} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \right) \right] \quad \psi_2 = \left[L \left(-\frac{1}{2RC} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} \right) \right]$$

$$x(t) = C_1 \psi_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \psi_2 e^{\lambda_2 t}; \quad \text{hier } \psi_1 = \psi_2^*$$

komplexes Fundamentalsystem:

$$Z_1 = \left[-\frac{L}{2RC} + j\sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{L}{2RC}\right)^2} \right] e^{-\frac{t}{2RC}} \cdot \exp \left\{ j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} t \right\}$$

$$Z_2 = \left[-\frac{L}{2RC} - j\sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{L}{2RC}\right)^2} \right] e^{-\frac{t}{2RC}} \cdot \exp \left\{ -j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2} t \right\}$$

reelles Fundamentalsystem als Real- und Imaginärteil einer der komplexen Lösungsbasen mit $w = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2RC}\right)^2}$:

$$Y_1 = \operatorname{Re}\{Z_1\} = \left[-\frac{L}{2RC} \cos(wt) - \sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{L}{2RC}\right)^2} \sin(wt) \right] e^{-\frac{t}{2RC}}$$

$$Y_2 = \operatorname{Im}\{Z_1\} = \left[-\frac{L}{2RC} \sin(wt) + \sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{L}{2RC}\right)^2} \cos(wt) \right] e^{-\frac{t}{2RC}}$$

$$x(t) = K_1 Y_1 + K_2 Y_2$$

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix} = e^{-\frac{t}{2RC}} \begin{bmatrix} K_1 \cos wt + K_2 \sin wt \\ K_1 \left[-\frac{L}{2RC} \cos(wt) - \sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{L}{2RC}\right)^2} \sin wt \right] + K_2 \left[-\frac{L}{2RC} \sin(wt) + \sqrt{\frac{L}{C} - \left(\frac{L}{2RC}\right)^2} \cos wt \right] \end{bmatrix}$$

4. e) partikuläre Lösung für sinusförmige Anregung

Ansatz für inh. DGL: $i_L = C_1 \sin(w_0 t + \varphi) + C_2 \cos(w_0 t + \varphi)$

$$u_C = d_1 \sin(w_0 t + \varphi) + d_2 \cos(w_0 t + \varphi)$$

Ableitungen:

$$\frac{di_L}{dt} = C_1 w_0 \cos(w_0 t + \varphi) - C_2 w_0 \sin(w_0 t + \varphi)$$

$$\frac{du_c}{dt} = d_1 w_0 \cos(w_0 t + \varphi) - d_2 w_0 \sin(w_0 t + \varphi)$$

aus der Darstellung in c) folgt:

$$1.) \quad C_1 w_0 \cos(w_0 t + \varphi) - C_2 w_0 \sin(w_0 t + \varphi) = \frac{1}{L} (d_1 \sin(w_0 t + \varphi) + d_2 \cos(w_0 t + \varphi))$$

$$\Rightarrow \quad C_1 w_0 = \frac{d_2}{L} ; \quad -C_2 w_0 = \frac{d_1}{L} \quad \Rightarrow \quad d_1 = -C_2 w_0 L \quad d_2 = C_1 w_0 L$$

$$2.) \quad d_1 w_0 \cos(w_0 t + \varphi) - d_2 w_0 \sin(w_0 t + \varphi) = -\frac{1}{C} [C_1 \sin(w_0 t + \varphi) + C_2 \cos(w_0 t + \varphi)]$$

$$- \frac{1}{RC} [d_1 \sin(w_0 t + \varphi) + d_2 \cos(w_0 t + \varphi)]$$

$$+ \frac{1}{RC} U_0 \sin(w_0 t + \varphi)$$

daraus folgt:

$$d_1 w_0 = -\frac{1}{C} C_2 - \frac{1}{RC} d_2 - d_2 w_0 = -\frac{1}{C} C_1 - \frac{1}{RC} d_1 + \frac{1}{RC} U_0$$

$$-C_2 w_0^2 L = -\frac{1}{C} C_2 - \frac{1}{RC} w_0 L C_1 ; \quad \frac{w_0 L}{RC} C_1 = C_2 \left(-\frac{1}{C} + w_0^2 L \right)$$

$$\Rightarrow \quad C_1 = -\frac{RC}{w_0 L} \left(\frac{1}{C} - w_0^2 L \right) C_2 = -\frac{RC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right) C_2$$

$$-C_1 w_0^2 L = -\frac{1}{C} C_1 + \frac{1}{RC} C_2 w_0 L + \frac{1}{RC} U_0$$

$$LC_1 \left(-w_0^2 \frac{L}{C} + \frac{1}{LC} \right) = \frac{w_0 L}{RC} C_2 + \frac{1}{RC} U_0 = C_1 L \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right) = -\frac{RLC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2 C_2$$

$$\frac{U_0}{RC} = \left[-\frac{w_0 L}{RC} - \frac{RLC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2 \right] C_2 \quad C_2 = \frac{-U_0}{RC \left[\frac{RLC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2 + \frac{w_0 L}{RC} \right]}$$

$$C_2 = \frac{-U_0}{RC \left[\frac{RLC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2 + \frac{w_0 L}{RC} \right]} = -\frac{U_0}{RLC \left[\frac{RC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2 + \frac{w_0}{RC} \right]}$$

$$C_1 = -\frac{RC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right) C_2 = \frac{U_0 \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right) RC}{w_0 RLC \left[\frac{RC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2 + \frac{w_0}{RC} \right]}$$

$$= \frac{U_0 \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)}{w_0 L \left[\frac{RC}{w_0} \left(\frac{1}{LC} - w_0^2 \right)^2 + \frac{w_0}{RC} \right]}$$

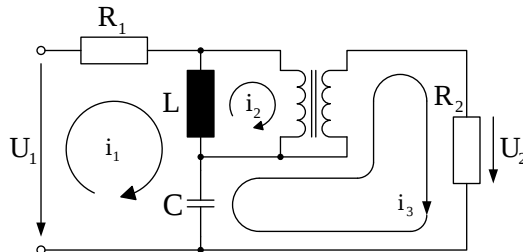
$$d_1 = -LC_2 w_0 = \dots$$

$$d_2 = LC_1 w_0 = \dots$$

Optimal kann nun eine Berechnung der Konstanten aus den Anfangswerten $I_{L0} \neq 0$ und $U_{C0} \neq 0$ erfolgen. Diese gestaltet sich analog zu Berechnung der Konstanten K_1 und K_2 in Teilaufgabe b).

Aufgabe 5: RLC-Schaltung mit einem Transformator

5. a) Ersatzschaltbild



$$U_2(p) = R_2 \cdot I_3(p)$$

Abbildung 5.1: Ersatzschaltbild für Maschenstromanalyse

5. b) Übertragungsverhalten $F(p)$ mit Hilfe der Maschenstromanalyse und Knotenpotentialanalyse

Gleichungen des Übertragers:

$$\begin{aligned} \frac{U_{w_1}}{U_{w_2}} &= \frac{w_1}{w_2} & \text{oder} & & U_{w_1} - \frac{w_1}{w_2} \cdot U_{w_2} &= 0 \\ \frac{i_2}{i_3} &= \frac{w_2}{w_1} & \text{oder} & & i_2 w_1 - i_3 w_2 &= 0 \end{aligned}$$

Gleichungssystem der Maschenströme

I_1	I_2	I_3	U_{w_1}	U_{w_2}	
$R_1 + pL + \frac{1}{pC}$	$-pL$	$-\frac{1}{pC}$	0	0	$U_1(p)$
$-pL$	pL	0	1	0	0
$-\frac{1}{pC}$	0	$R_2 + \frac{1}{pC}$	0	-1	0
0	w_1	$-w_2$	0	0	0
0	0	0	1	$-\frac{w_1}{w_2}$	0

Berechnung der Determinante $I_3(p)$

$$\begin{aligned} \det I_3(p) &= U_1(p) \begin{vmatrix} -pL & pL & 1 & 0 \\ -\frac{1}{pC} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & w_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{w_1}{w_2} \end{vmatrix} \\ &= U_1(p) \begin{vmatrix} -\frac{1}{pC} & 0 & -1 \\ 0 & w_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{w_1}{w_2} \end{vmatrix} - U_1(p) \begin{vmatrix} -pL & pL & 0 \\ -\frac{1}{pC} & 0 & -1 \\ 0 & w_1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det I_3(p) &= U_1(p) \begin{vmatrix} -\frac{1}{pC} & w_1 \\ 0 & -\frac{w_1}{w_2} \end{vmatrix} - U_1(p) \begin{vmatrix} -pL & pL \\ 0 & w_1 \end{vmatrix} \\ &= U_1(p) \left[\frac{1}{pC} \frac{w_1^2}{w_2} + pLw_1 \right] = U_1(p)w_1 \left(\frac{1}{pC} \frac{w_1}{w_2} + pL \right)\end{aligned}$$

Berechnung Determinante A

$$\begin{aligned}\det A &= - \begin{vmatrix} R_1 + pL + \frac{1}{pC} & -pL & -\frac{1}{pC} & 0 \\ -pL & pL & 0 & 0 \\ -\frac{1}{pC} & 0 & R_2 + \frac{1}{pC} & -1 \\ 0 & w_1 & -w_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad - \frac{w_1}{w_2} \begin{vmatrix} R_1 + pL + \frac{1}{pC} & -pL & -\frac{1}{pC} & 0 \\ -pL & pL & 0 & 1 \\ -\frac{1}{pC} & 0 & R_2 + \frac{1}{pC} & 0 \\ 0 & w_1 & -w_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} R_1 + pL + \frac{1}{pC} & -pL & -\frac{1}{pC} \\ -pL & pL & 0 \\ 0 & w_1 & -w_2 \end{vmatrix} - \frac{w_1}{w_2} \begin{vmatrix} R_1 + pL + \frac{1}{pC} & -pL & -\frac{1}{pC} \\ -\frac{1}{pC} & 0 & R_2 + \frac{1}{pC} \\ 0 & w_1 & -w_2 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det A &= \left(R_1 + pL + \frac{1}{pC} \right) pLw_2 - pL \left(pLw_2 + \frac{w_1}{pC} \right) \\ &\quad - \frac{w_1}{w_2} \left[- \left(R_1 + pL + \frac{1}{pC} \right) \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) w_1 + \frac{1}{pC} \left(pLw_2 + \frac{w_1}{pC} \right) \right] \\ &= \left(R_1 + pL + \frac{1}{pC} \right) \left[pLw_2 + \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) \frac{w_1^2}{w_2} \right] + \left(pLw_2 + \frac{w_1}{pC} \right) \left[-pL - \frac{1}{pC} \frac{w_1}{w_2} \right]\end{aligned}$$

Berechnung Verhältnis $\frac{U_2(p)}{U_1(p)}$

$$\begin{aligned}\frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= \frac{R_2w_1 \left(\frac{1}{pC} \frac{w_1}{w_2} + pL \right)}{\left(R_1 + pL + \frac{1}{pC} \right) \left[pLw_2 + \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) \frac{w_1^2}{w_2} \right] - \left(pLw_2 + \frac{w_1}{pC} \right) \left[\frac{1}{pC} \frac{w_1}{w_2} + pL \right]} \\ &= \frac{w_1}{w_2} R_2 \frac{\left(\frac{1}{pC} \frac{w_1}{w_2} + pL \right)}{\left(R_1 + pL + \frac{1}{pC} \right) \left[pL + \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right] - \left(pL + \frac{1}{pC} \frac{w_1}{w_2} \right)^2}\end{aligned}$$

Aufösen des Nenners

$$\begin{aligned}
& \left(R_1 + pL + \frac{1}{pC} \right) \left(pL + R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + \frac{1}{pC} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right) - \left(pL + \frac{1}{pC} \left(\frac{w_1}{w_2} \right) \right) \left(pL + \frac{1}{pC} \left(\frac{w_1}{w_2} \right) \right) \\
&= R_1 \left(pL + \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right) + (pL)^2 + pLR_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + \frac{pL}{pC} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + \frac{pL}{pC} + \frac{R_2}{pC} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \\
&+ \left(\frac{1}{pC} \right)^2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 - (pL)^2 - \left(\frac{1}{pC} \right)^2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 - 2 \frac{pL}{pC} \left(\frac{w_1}{w_2} \right) \\
&= R_1 \left(pL + \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right) + R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \left[pL + \frac{1}{pC} \right] + \underbrace{\frac{L}{C} + \frac{L}{C} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 - 2 \frac{L}{C} \left(\frac{w_1}{w_2} \right)}_{\frac{L}{C} \left(1 - 2 \frac{w_1}{w_2} + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right) = \frac{L}{C} \left(1 - \frac{w_1}{w_2} \right)^2}
\end{aligned}$$

Verhältnis $\frac{U_2(p)}{U_1(p)}$

$$\begin{aligned}
\frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= \frac{w_1}{w_2} R_2 \frac{\frac{1}{pC} \frac{w_1}{w_2} + pL}{\frac{L}{C} \left(1 - \frac{w_1}{w_2} \right)^2 + R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \left(pL + \frac{1}{pC} \right) + R_1 \left(pL + \left(R_2 + \frac{1}{pC} \right) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right) \frac{pC}{pC}} \\
&= \frac{w_1}{w_2} R_2 \frac{\frac{w_1}{w_2} + p^2 LC}{pL \left(1 - \frac{w_1}{w_2} \right) + R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 (1 + p^2 LC) + R_1 \left(p^2 LC + pCR_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right)} \\
&= \frac{w_1}{w_2} R_2 \frac{\frac{w_1}{w_2} + p^2 LC}{(R_1 + R_2) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + p \left[L \left(1 - \frac{w_1}{w_2} \right)^2 + CR_1 R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right] + p^2 LC \left[R_1 + R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right]}
\end{aligned}$$

Berechnung mit dem Knotenpotentialverfahren

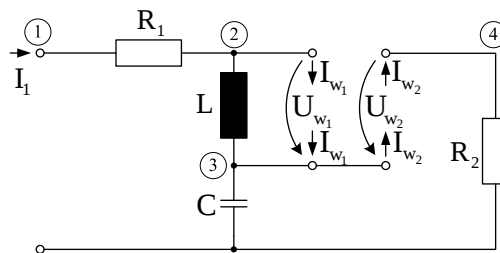


Abbildung 5.2: Ersatzschaltbild für Knotenpotentialanalyse

U_1	U_2	U_3	U_4	
$-\frac{1}{R_1}$	$\frac{1}{R_1}$	0	0	$-I_1(p)$
$\frac{1}{R_1}$	$-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{pL}$	$\frac{1}{pL}$	0	$+I_{w_1}$
0	$\frac{1}{pL}$	$-\left(pC + \frac{1}{pL}\right)$	0	$-I_{w_1} + I_{w_2}$
0	0	0	$-\frac{1}{R_2}$	$-I_{w_2}$

$$U_{w_1} = U_2 - U_3 \quad U_{w_2} = U_4 - U_3 \quad \frac{U_{w_1}}{U_{w_2}} = \frac{w_1}{w_2} \quad U_{w_1} - \frac{w_1}{w_2} U_{w_2} = 0$$

damit

$$U_2 - U_3 - \frac{w_1}{w_2}(U_4 - U_3) = 0 \quad U_2 - U_3 \left(1 - \frac{w_1}{w_2}\right) - \frac{w_1}{w_2} U_4 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{I_{w_1}}{I_{w_2}} &= \frac{w_2}{w_1} & I_{w_1} &= \frac{w_2}{w_1} I_{w_2} & U_4 &= R_2 I_{w_2} \\ I_{w_1} &= \frac{w_2}{w_1} \frac{U_4}{R_2} & I_{w_2} &= \frac{U_4}{R_2} & -I_{w_1} + I_{w_2} &= \frac{U_4}{R_2} \left(-\frac{w_2}{w_1} + 1\right) \end{aligned}$$

damit erhält man

U_1	U_2	U_3	U_4	
$-\frac{1}{R_1}$	$\frac{1}{R_1}$	0	0	$-I_1(p)$
$\frac{1}{R_1}$	$-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{pL}$	$\frac{1}{pL}$	$-\frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2}$	0
0	$\frac{1}{pL}$	$-\left(pC + \frac{1}{pL}\right)$	$\frac{1}{R_2} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right)$	0
0	1	$\left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right)$	$-\frac{w_1}{w_2}$	0

$$\begin{aligned} \det U_4 &= I_1(p) \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{R_1} & -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{pL}\right) & \frac{1}{pL} \\ 0 & \frac{1}{pL} & -\left(\frac{1}{pL} + pC\right) \\ 0 & 1 & \left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right) \end{vmatrix} \\ &= I_1(p) \cdot \frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{pL} \left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{pL} + pC\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det U_1 &= -I_1(p) \cdot \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{pL}\right) & \frac{1}{pL} & -\frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2} \\ \frac{1}{pL} & -\left(\frac{1}{pL} + pC\right) & \frac{1}{R_2} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) \\ 1 & \frac{w_1}{w_2} - 1 & -\frac{w_1}{w_2} \end{vmatrix} \\
&= +I_1(p) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{pL}\right) \begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{pL} + pC\right) & \frac{1}{R_2} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) \\ \frac{w_1}{w_2} - 1 & -\frac{w_1}{w_2} \end{vmatrix} + \frac{I_1(p)}{pL} \begin{vmatrix} \frac{1}{pL} & -\frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2} \\ \frac{w_1}{w_2} - 1 & -\frac{w_1}{w_2} \end{vmatrix} \\
&\quad - I_1(p) \begin{vmatrix} \frac{1}{pL} & -\frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2} \\ -\left(\frac{1}{pL} + pC\right) & \frac{1}{R_2} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) \end{vmatrix} \\
\det U_1 &= I_1(p) \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{pL}\right) \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1}{pL} + pC\right) - \frac{1}{R_2} \left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right) \left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{pL} \left(-\frac{w_1}{w_2} \frac{1}{pL} + \underbrace{\left(\frac{w_1}{w_2} - 1\right) \frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2}}_{\left(1 - \frac{w_2}{w_1}\right) \frac{1}{R_2}} \right) - \frac{1}{pL} \left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) \frac{1}{R_2} + \left(\frac{1}{pL} + pC\right) \frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2} \right] \\
&= I_1(p) \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{pL}\right) \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1}{pL} + pC\right) - \frac{1}{R_2} \left(1 - \frac{w_1}{w_2} - \frac{w_2}{w_1} + 1\right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(pL)^2} \frac{w_1}{w_2} - 2 \left(\frac{w_2}{w_1} - 1\right) \frac{1}{R_2} \frac{1}{pL} + \left(\frac{1}{pL} + pC\right) \frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2} \right] \\
\det U_1 &= I_1(p) \left[\frac{1}{R_1} \left[\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1}{pL} + pC\right) - \frac{1}{R_2} \left(2 - \frac{w_1}{w_2} - \frac{w_2}{w_1}\right) \right] + \frac{1}{(pL)^2} \frac{w_1}{w_2} + \frac{w_1}{w_2} \frac{C}{L} - \frac{1}{(pL)^2} \frac{w_1}{w_2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{pL} \frac{1}{R_2} \left(2 - \frac{w_1}{w_2} - \frac{w_2}{w_1}\right) + 2 \frac{1}{R_2} \frac{1}{pL} - 2 \frac{w_2}{w_1} \frac{1}{pL} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{pL} \frac{1}{R_2} \frac{w_2}{w_1} + pC \frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2} \right] \\
&= I_1(p) \left[\frac{1}{R_1} \left\{ \frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1}{pL} + pC\right) - \frac{1}{R_2} \left(2 - \frac{w_1}{w_2} - \frac{w_2}{w_1}\right) \right\} + \frac{w_1}{w_2} \frac{C}{L} + \frac{w_1}{w_2} \frac{1}{pL} \frac{1}{R_2} + pC \frac{w_2}{w_1} \frac{1}{R_2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{U_4}{U_1} &= \frac{\frac{1}{R_1} \left[\frac{1}{pL} \left(\frac{w_1}{w_2} - 1 \right) + \left(\frac{1}{pL} + pC \right) \right]}{\frac{1}{R_1} \left\{ \frac{w_1}{w_2} \left(\frac{1}{pL} + pC \right) + \frac{1}{R_2} \left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_2}{w_1} - 2 \right) \right\} + \frac{w_1}{w_2} \frac{R_1 C}{L} + \frac{w_1}{w_2} \frac{1}{pL} \frac{R_1}{R_2} + pC \frac{w_2}{w_1} \frac{R_1}{R_2}} \frac{pLR_2}{pLR_2} \\
&= \frac{R_2 \left[\frac{w_1}{w_2} + p^2 LC \right] \left(\frac{w_1}{w_2} \right)}{\left(\frac{w_1}{w_2} (R_2 + p^2 LC R_2) + pL \left(\frac{w_1}{w_2} + \frac{w_2}{w_1} - 2 \right) + pC R_1 R_2 \frac{w_1}{w_2} + \frac{w_1}{w_2} R_1 + p^2 LC \frac{w_2}{w_1} R_1 \right) \frac{w_1}{w_2}} \\
&= \frac{\frac{w_1}{w_2} R_2}{(R_1 + R_2) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + p \underbrace{\left[L \left(\left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right) + 1 \right) + C R_1 R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right]}_{\left(1 - \frac{w_1}{w_2} \right)^2} + p^2 LC \left[R_1 + R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right]} \frac{w_1}{w_2} + p^2 LC
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich wieder exakt die Lösung der Maschenstromanalyse.

5. c) Vergleich der Verfahrenen

Vergleich des Aufwandes:

Maschenstromanalyse: eine 4x4 und eine 5x5 Determinante

Knotenpotentialanalyse: eine 4x4 Determinante

5. d) Übertragungsfunktion $R_2 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
\frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= \frac{\frac{w_1}{w_2} R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} + p^2 LC \right) \frac{1}{R_2}}{(R_1 + R_2) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + p \left[L - \left(1 - \frac{w_1}{w_2} \right)^2 + C R_1 R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right] + p^2 LC \left[R_1 + R_2 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right] \frac{1}{R_2}} \\
&= \frac{\frac{w_1}{w_2} \left(\frac{w_1}{w_2} + p^2 LC \right)}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + p \left[\frac{L}{R_2} \left(1 - \frac{w_1}{w_2} \right)^2 + C R_1 \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right] + p^2 LC \left[\frac{R_1}{R_2} + \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \right]} \\
\lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= \frac{\left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + p^2 LC \left(\frac{w_1}{w_2} \right)}{\left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + p R_1 C \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 + p^2 LC \left(\frac{w_1}{w_2} \right)^2 \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2} \left(\frac{w_2}{w_1} \right)^2 \\
&= \frac{1 + p^2 LC \left(\frac{w_2}{w_1} \right)}{1 + p R_1 C + p^2 LC}
\end{aligned}$$

5. e) Anregung mit Sprungfunktion

$$\begin{aligned}
 U_1(p) &= \frac{U_0}{p} \\
 U_2(p) &= \frac{U_0}{p} \frac{1 + p^2 LC \left(\frac{w_2}{w_1} \right) \frac{1}{LC}}{1 + p R_1 C + p^2 LC \frac{1}{LC}} = \frac{U_0}{p} \frac{p^2 \frac{w_2}{w_1} + \frac{1}{LC}}{p^2 + p \frac{R_1}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{U_0}{p} \frac{\frac{w_2}{w_1} \left(p^2 + \frac{1}{LC} \frac{w_1}{w_2} \right)}{p^2 + p \frac{R_1}{L} + \frac{1}{LC}} \\
 &= U_0 \frac{1}{LC} \frac{1}{p \left(p^2 + p \frac{R_1}{L} + \frac{1}{LC} \right)} + U_0 \frac{w_2}{w_1} \frac{p}{p^2 + p \frac{R_1}{L} + \frac{1}{LC}}
 \end{aligned}$$

Korrespondenzen:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s[s^2 + s2\beta + \alpha^2 + \beta^2]} &\bullet \circ \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos \alpha t + \frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha t \right) \right] \\
 \frac{s}{s^2 + s2\beta + \alpha^2 + \beta^2} &\bullet \circ e^{-\beta t} \left(\cos \alpha t - \frac{\beta}{\alpha} \sin \alpha t \right)
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\beta = \frac{R_1}{2L} \quad \text{und} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{2L} \right)^2} = w$$

Ausgangsspannung $u_2(t)$

$$\begin{aligned}
 u_2(t) &= U_0 \frac{1}{LC} \frac{1}{LC} \left[1 - e^{-\frac{R_1}{2L} t} \left(\cos wt + \frac{R_1}{2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{2L} \right)^2}} \sin wt \right) \right] \\
 &\quad U_0 \frac{w_2}{w_1} e^{-\frac{R_1}{2L} t} \left(\cos wt - \frac{R_1}{2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{2L} \right)^2}} \sin wt \right) \\
 &= U_0 \left[1 + e^{-\frac{R_1}{2L} t} \cos wt \left(\frac{w_2}{w_1} - 1 \right) - e^{-\frac{R_1}{2L} t} \sin wt \frac{R_1}{2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{2L} \right)^2}} \left(1 + \frac{w_2}{w_1} \right) \right] \\
 &= U_0 \left[1 - e^{-\frac{R_1}{2L} t} \underbrace{\left[\left(1 - \frac{w_2}{w_1} \right) \cos wt + \frac{R_1}{2L \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R_1}{2L} \right)^2}} \left(1 + \frac{w_2}{w_1} \right) \sin wt \right]}_{\text{abklingender, schwingender Anteil}} \right]
 \end{aligned}$$

5. f) Wert der Ausgangsspannung $u_2(t)$ für $t \rightarrow \infty$

Anregung eines RLC - Schwingkreises mit einem Sprung $\Rightarrow$ Schwingung klingt mit der Zeitkonstanten $T = \frac{R}{2L}$ ab

5. g) Bedingung für eine Schwingung

Reihenschwingkreis $R_1 < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (oder aus der Bedingung $\alpha > 0$)

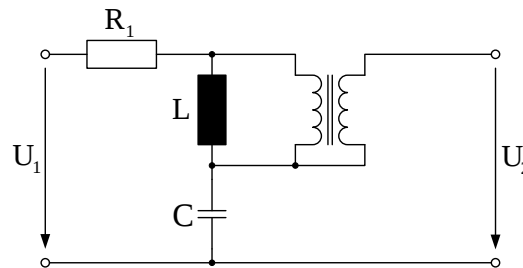


Abbildung 5.3: Ersatzschaltbild: Nach dem Einschwingvorgang ist $u_2(t) = U_0$

Aufgabe 6: Periodische Anregung eines RL-Kreises

6. a) Laplace-Transformierte $U_0(p)$

$$\begin{aligned}
 U_0(p) &= \mathcal{L}\{u_0(t)\} = \int_0^{\infty} u_0(t) e^{-pt} dt \quad \text{mit} \quad u_0(t) = \begin{cases} a \frac{t}{T} & 0 \leq t < T \\ \frac{a}{T}(2T - t) & T \leq t < 2T \end{cases} \\
 U_0(p) &= \int_0^T a \frac{t}{T} e^{-pt} dt + \int_T^{2T} \frac{a}{T}(2T - t) e^{-pt} dt \\
 &= \frac{a}{T} \frac{1}{p^2} [e^{-pt}(-pt - 1)]_0^T + \int_T^{2T} 2ae^{-pt} dt - \frac{a}{T} \int_T^{2T} te^{-pt} dt \\
 &= \frac{a}{T} \frac{1}{p^2} (e^{-pT}(-pT - 1) + 1) - \frac{2a}{p} (e^{-2pT} - e^{-pT}) - \frac{a}{T} \frac{1}{p^2} [e^{-pt}(-pt - 1)]_T^{2T} \\
 &= \frac{a}{T} \frac{1}{p^2} (e^{-pT}(-pT - 1) + 1) - \frac{2a}{p} (e^{-2pT} - e^{-pT}) \\
 &\quad - \frac{a}{T} \frac{1}{p^2} [e^{-p2T}(-p2T - 1) - e^{-pT}(-pT - 1)] \\
 &= \frac{a}{T} \frac{1}{p^2} - \frac{a}{p} e^{-pT} - \frac{a}{Tp^2} e^{-pT} - \frac{2a}{p} e^{-2pT} + \frac{2a}{p} e^{-pT} + \frac{2a}{p} e^{-2pT} + \frac{a}{p^2 T} e^{-2pT} - \frac{a}{p} e^{-pT} - \frac{a}{p^2 T} e^{-pT} \\
 &= \frac{a}{p^2 T} + e^{-pT} \left\{ \frac{-2a}{p^2 T} \right\} + e^{-2pT} \left\{ \frac{a}{p^2 T} \right\} = \frac{a}{p^2 T} (1 - 2e^{-pT} + e^{-2pT}) \\
 &= \frac{a}{p^2 T} (1 - e^{-pT})^2
 \end{aligned}$$

6. b) Laplace-Transformierte $U_1(p)$

$$U_1(p) = U_0(p) \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT_0}} = \frac{a}{p^2 T} \frac{(1 - e^{-pT})^2}{1 - e^{-pT_0}}$$

6. c) Ausgangsspannung $U_2(p)$ für Anfangsstrom I_{L0}

im Zeitbereich $u_1(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L$

im Laplacebereich $U_1(p) = pLI_L(p) - LI_{L_0} + RI_L$

$$I_L = \frac{U_1(p) + LI_0}{pL + R}$$

$$U_2(p) = RI_L = \frac{R}{R + pL} (U_1(p) + LI_{L_0}) = \frac{1}{1 + p\frac{L}{R}} (U_1(p) + LI_{L_0})$$

6. d) **Ausgangsspannung $U_2(p)$ bei anfänglich leeren Energiespeichern**

aus c) mit $I_{L_0} = 0$ $U_2(p) = \frac{1}{1 + p\frac{L}{R}} U_1(p)$

6. e) **Ausgangsspannung $U_2(p)$ bei anfänglich leeren Energiespeichern und periodischer Anregung**

$$U_2(p) = \frac{1}{1 + p\tau} \frac{a}{p^2 T} \frac{(1 - e^{-pT})^2}{1 - e^{-pT_0}} \quad \text{mit } \tau = \frac{L}{R}$$

6. f) **Zeitfunktion der Ausgangsspannung $u_2(t)$**

$$U_2(p) = \frac{\frac{1}{\tau} \frac{a}{T}}{\frac{1}{\tau} + p} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{(1 - e^{-pT})^2}{1 - e^{-pT_0}}$$

⇒ direkte Rücktransformation möglich

⇒ bessere Darstellung als flüchtiger und stationärer Anteil

$$U_2 = \frac{A}{p + \frac{1}{\tau}} + U_{2,stat} \Rightarrow \text{Gleichsetzen mit Nenner durchmultiplizieren!}$$

$$\frac{a}{T} \frac{1}{\tau} \frac{1}{p^2} \frac{(1 - e^{-pT})^2}{1 - e^{-pT_0}} = A + U_{2,stat} \left(p + \frac{1}{\tau} \right)$$

Einsetzen von $p = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow A = \frac{a}{T} \tau \frac{(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})^2}{1 - e^{-\frac{T_0}{\tau}}}$

$$U_{2,stat} = U_2 - \frac{A}{p + \frac{1}{\tau}}$$

$$= \underbrace{\left[C \frac{1}{p^2 (p + \frac{1}{\tau})} (1 - 2e^{-pT} + e^{-2pT}) - \frac{A}{p + \frac{1}{\tau}} (1 - e^{-pT_0}) \right]}_{U_{20}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT_0}}$$

mit $C = \frac{a}{T} \frac{1}{\tau}$

nach PBZ:

$$U_{20} = C \left(-\frac{\tau^2}{p} + \frac{\tau}{p^2} + \frac{\tau^2}{p + \frac{1}{\tau}} \right) (1 - 2e^{-pT} + e^{-2pT}) - \frac{A}{p + \frac{1}{\tau}} + \frac{A}{p + \frac{1}{\tau}} e^{-pT_0}$$

$$u_{20} = \sigma(t) \left\{ \underbrace{-c\tau^2 + c\tau t + c\tau^2 e^{-\frac{t}{\tau}}}_{u_x(t)} \right\} - 2\sigma(t - T) \cdot u_x(t - T) + \sigma(t - 2T) \cdot u_x(t - 2T)$$

$$- A\sigma(t) e^{-\frac{t}{\tau}} + A\sigma(t - T_0) e^{-\frac{t - T_0}{\tau}}$$

insgesamt

$$u_2(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{20}(t - kT_0)$$

Aufgabe 7: Schaltung zur Erzeugung einer hohen Sinusspannung

7. a) Laplace-Transformierte $U_0(p)$ und $U_1(p)$

$$\begin{aligned}
 U_0(p) &= \int_0^{\infty} u_0(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 e^{-pt} dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -U_0 e^{-pt} dt \\
 &= \left[-\frac{1}{p} U_0 e^{-pt} \right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[\frac{1}{p} U_0 e^{-pt} \right]_{\frac{T}{2}}^T = -\frac{1}{p} U_0 e^{-p\frac{T}{2}} + \frac{1}{p} U_0 + \frac{1}{p} U_0 e^{-pT} - \frac{1}{p} U_0 e^{-p\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{U_0}{p} \left(1 + e^{-pT} - 2e^{-p\frac{T}{2}} \right)
 \end{aligned}$$

periodisches Signal: $U_1(p) = U_0(p) \frac{1}{1 - e^{-pT}}$

7. b) Übertragungsverhalten $F(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)}$ (leere Energiespeicher)

leere Energiespeicher $\Rightarrow$ Spannungsteilerregel

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + pCR + p^2 LC} = \frac{1}{LC} \frac{1}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

7. c) Laplace-Transformierte $U_2(p)$

$$U_2(p) = \underbrace{\frac{U_0}{LC} \frac{1}{p(p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC})}}_{U_{20}(p)} \left(1 + e^{-pT} - 2e^{-p\frac{T}{2}} \right) \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

7. d) Zeitfunktion $u_{20}(t)$

$$\begin{aligned}
 2\beta &= \frac{R}{L} \Rightarrow \beta = \frac{R}{2L} \quad \text{und} \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \\
 \Rightarrow \alpha &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{R}{2\sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}}
 \end{aligned}$$

$$F(p) = \frac{U_0}{LC} \frac{1}{p(p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} \quad \bullet \circ \quad f(t) = \sigma(t) U_0 \left[1 - e^{-\beta t} \left(\cos(\alpha t) + \frac{\beta}{\alpha} \sin(\alpha t) \right) \right]$$

$$u_{20}(t) = f(t) + f(t - T) - 2f\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$u_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{20}(t - kT)$$

Aufgabe 8: Ersatzschaltung von realen Isolierstoffen

8. a) Strom $i(t)$ bei einer sprunghörmigen Anregung

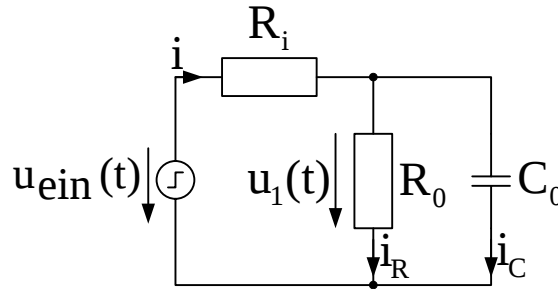


Abbildung 8.1: Ersatzschaltbild mit Innenwiderstand R_i

$$i_R = \frac{u_1}{R_0} \quad , \quad i_C = C_0 \frac{du_1}{dt} \quad , \quad u_{ein}(t) = iR_i + u_1(t) = (i_C + i_R)R_i + u_1$$

$$= R_i C_0 \frac{du_1}{dt} + \left(\frac{R_i}{R_0} + 1 \right) u_1$$

$$\frac{du_1(t)}{dt} + \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right) u_1 = \frac{1}{R_i C_0} U_0$$

Ansatz zur Lösung der hom. DGL: $u_1(t) = K \cdot e^{\lambda t}$

charakteristische Gleichung: $\lambda K + \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right) K = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = - \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right)$

Ansatz zur Bestimmung der part. Lösung: $u_1(t) = a_0$

$$\left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right) a_0 = \frac{1}{R_i C_0} U_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{\frac{1}{R_i C_0}}{\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0}} U_0 = \frac{R_0}{R_0 + R_i} U_0$$

Randbedingung: $u_1(0) = 0$ (C_0 zu Beginn ungeladen) $\Rightarrow K = - \frac{R_0}{R_i + R_0} U_0$

$$u_1(t) = \frac{R_0}{R_i + R_0} U_0 \left[1 - \exp \left(- \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right) t \right) \right]$$

$$i = i_C + i_R = \frac{1}{R_0} u_1 + C_0 \frac{du_1}{dt}$$

$$= \frac{1}{R_i + R_0} U_0 \left(1 - \exp \left(- \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right) t \right) \right) + \frac{C_0 R_0}{R_i + R_0} U_0 \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right)$$

$$\cdot \exp \left(- \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right) t \right)$$

$$= \frac{U_0}{R_i + R_0} \left[1 + \frac{R_0}{R_i} \exp \left(- \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right) t \right) \right]$$

Lösung mit Laplacetransformation:

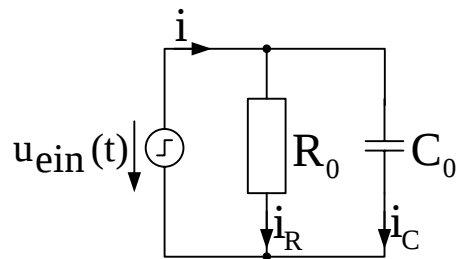
$$C_0 \| R_0 \rightarrow Z_{ers} = \frac{\frac{1}{pC_0} R_0}{R_0 + \frac{1}{pC_0}} = \frac{R_0}{1 + pC_0 R_0}$$

$$\frac{U_1(p)}{U_{ein}(p)} = \frac{R_0}{R_0 + R_i + pC_0 R_0 R_i} \Rightarrow U_1(p) = \frac{U_0}{p} \frac{\frac{1}{C_0 R_i}}{p + \frac{1}{C_0 R_i} + \frac{1}{C_0 R_0}}$$

$$I = \frac{U_{ein}(p) - U_1(p)}{R_i} = \frac{U_0}{p R_i} \left[1 - \frac{\frac{1}{C_0 R_i}}{p + \frac{1}{C_0 R_i} + \frac{1}{C_0 R_0}} \right]$$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{U_0}{R_i} \sigma(t) - \frac{U_0}{R_i} \frac{1}{C_0 R_i} \frac{1}{\frac{1}{C_0 R_i} + \frac{1}{C_0 R_0}} \left[1 - \exp \left(\left(-\frac{1}{C_0 R_i} - \frac{1}{C_0 R_0} \right) t \right) \right] \sigma(t) \\ &= \frac{U_0}{R_i} \left(1 - \frac{R_0}{R_0 + R_i} \left[1 - \exp \left(\left(-\frac{1}{C_0 R_i} - \frac{1}{C_0 R_0} \right) t \right) \right] \right) \sigma(t) \\ &= \frac{U_0}{R_i + R_0} \left[1 + \frac{R_0}{R_i} \exp \left(\left(-\frac{1}{R_0 C_0} - \frac{1}{R_i C_0} \right) t \right) \right] \sigma(t) \end{aligned}$$

8. b) Strom $i(t)$ bei einer sprungförmigen Anregung und $R_i = 0$



$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{R_0} u_{ein}(t) + C_0 \frac{du_{ein}(t)}{dt} \\ &= \frac{U_0}{R_0} \sigma(t) + U_0 C_0 \delta(t) \end{aligned}$$

Abbildung 8.2: Ersatzschaltbild mit Innenwiderstand $R_i = 0$

Alternativ: $\lim_{R_i \rightarrow 0} i(t)$ ist aus dem Ergebnis der Teilaufgabe a) nur sehr schwierig zu bestimmen.
Trick: Transformation in den Laplacebereich

$$\begin{aligned} i(t) &\circ \bullet \frac{U_0}{R_i + R_0} \frac{1}{p} + \frac{U_0 R_0}{R_i(R_i + R_0)} \cdot \frac{1}{p + \left(\frac{1}{R_0 C_0} + \frac{1}{R_i C_0} \right)} \\ &= \frac{U_0}{R_i + R_0} \frac{1}{p} + \frac{U_0 R_0}{R_i(R_i + R_0)p + \frac{R_i(R_i + R_0)}{R_0 C_0} + \frac{R_i + R_0}{C_0}} = I(p) \\ \lim_{R_i \rightarrow 0} I(p) &= \frac{U_0}{R_0} \frac{1}{p} + U_0 C_0 \bullet \circ \frac{U_0}{R_0} \sigma(t) + U_0 C_0 \delta(t) \end{aligned}$$

8. c) **Spannung $u_m(t)$**

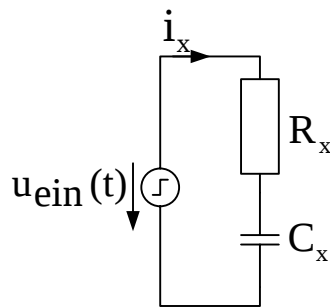
$$U_m(p) = I(p) \frac{K}{1+pT} = KU_0 \left(\frac{1}{R_0} \frac{1}{p(1+pT)} + C_0 \frac{1}{1+pt} \right)$$

$$u_m(t) = \frac{KU_0}{R_0} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) + KU_0 C_0 \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$= K \frac{U_0}{R_0} \left[1 - e^{-\frac{t}{T}} \left(1 - \frac{C_0 R_0}{T} \right) \right]$$

8. d) **Strom $i(t)$ der gesamten Schaltung mit $R_i = 0$**

unabhängige Aufladung der einzelnen R-C-Reihenschaltungen:



im Laplacebereich

$$I_x(p) = U_{ein}(p) \frac{1}{R_x + \frac{1}{pC_x}}$$

$$i_x(t) = \frac{U_0}{R_x} e^{-\frac{t}{R_x C_x}} \sigma(t)$$

Abbildung 8.3: Ersatzschaltbild des Dielektrikums

gesamter Strom mit Ergebnis aus b)

$$i(t) = \frac{U_0}{R_0} \sigma(t) + U_0 C_0 \delta(t) + \sigma(t) \sum_{x=1}^N \frac{U_0}{R_x} e^{-\frac{t}{R_x C_x}}$$

Aufgabe 9: Rogowski-Spule

9. a) Gleichstrommessung mit einer Rogowski-Spule

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_A(0) = 0 \quad \text{keine Messung von Gleichströmen möglich}$$

9. b) Bestimmung des magnetischen Feldes im Bereich des Spulenträgers

$$\oint_C \vec{H}_1(w) d\vec{s} = \Theta_1 = I_1(w); \quad \text{Integration entlang einer Feldlinie}$$

$$\underline{H}_1(w) \cdot 2\pi r = I_1(w) \quad \Rightarrow \quad \underline{H}_1(w) = \frac{I_1(w)}{2\pi r}$$

9. c) Bestimmung des magnetischen Feldes im Inneren der toroidalen Spule

$$\Theta_2 = N \cdot I_2(w) = \underline{H}_2(w) \cdot 2\pi r \quad \Rightarrow \quad \underline{H}_2(w) = \frac{N \cdot I_2(w)}{2\pi r}$$

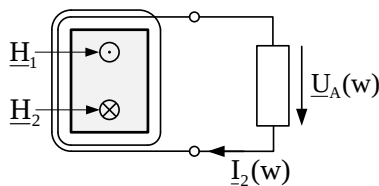
9. d) Bestimmung der magnetischen Induktion

$$\underline{B}_{ges} = \mu_0 \underline{H}_{ges} = \mu_0 (\underline{H}_1(w) - \underline{H}_2(w)) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \cdot (I_1(w) - N \cdot I_2(w))$$

Richtung von H_1 positiv angenommen

9. e) Bestimmung der Spannung in der jeweiligen Abhängigkeit des Stromes und der magnetischen Induktion

$$\underline{U}_A(w) = f(I_2(w)) = R_A \cdot I_2(w) \quad ; \quad \underline{U}_A(w) = f(\underline{B}_{ges}(w)) = ?$$



Superposition:

$$\left. \begin{aligned} U_A &= +N \frac{d\Phi_1}{dt} \\ U_A &= -N \frac{d\Phi_2}{dt} \end{aligned} \right\} U_A = \frac{d}{dt} N(\Phi_1 - \Phi_2)$$

Abbildung 9.1: magnetische Felder in der Rogowski-Spule

im Frequenzbereich:

$$\begin{aligned} \underline{U}_A &= j\omega N(\Phi_1 - \Phi_2) = j\omega N \int_A (\underline{B}_1 - \underline{B}_2) dA \\ &= j\omega N \mu_0 \int_A (\underline{H}_1 - \underline{H}_2) dA = j\omega N \mu_0 h \int_{r_i}^{r_a} \left(\frac{I_1}{2\pi r} - \frac{I_2 N}{2\pi r} \right) dr \\ &= j\omega N \frac{\mu_0}{2\pi} h (I_1 - I_2 N) \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) \end{aligned}$$

9. f) Übertragungsverhalten der Rogowskispule

$$\begin{aligned}
 R_A \cdot \underline{I}_2 &= j\omega N \frac{\mu_0}{2\pi} h (\underline{I}_1 - \underline{I}_2 N) \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) \\
 \underline{I}_2 \left(R_A + N^2 j\omega h \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) \right) &= \underline{I}_1 \left(N j\omega h \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) \right) \\
 \underline{I}_2 &= \underline{I}_1 \frac{N j\omega h \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)}{R_A + N^2 j\omega h \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)} = \frac{\underline{U}_A}{R_A} \\
 \Rightarrow \frac{\underline{U}_A}{\underline{I}_1} &= \frac{N j\omega h \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right)}{1 + N^2 j\omega h \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left(\frac{r_a}{r_i} \right) \frac{1}{R_A}}
 \end{aligned}$$

9. g) Verlauf der Übertragungsfunktion über der Kreisfrequenz

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\underline{U}_A(w)}{\underline{I}_1(w)} \right| &= \left| \frac{j\omega A}{1 + j\omega B} \right| = \frac{\omega A}{\sqrt{1 + \omega^2 B^2}} \\
 \left| \frac{\underline{U}_A(0)}{\underline{I}_1(0)} \right| &= 0 \quad ; \quad \lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{\underline{U}_A(w)}{\underline{I}_1(w)} \right| = \frac{A}{B} \\
 \left| \frac{\underline{U}_A(w_g)}{\underline{I}_1(w_g)} \right| &= \frac{w_g A}{\sqrt{1 + w_g^2 B^2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{A}{B} \quad \Rightarrow \quad w_g = \frac{1}{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + w_g^2 B^2} \\
 w_g^2 &= \frac{1}{2B^2} (1 + w_g^2 B^2) \quad \Rightarrow \quad w_g^2 \left(1 - \frac{1}{B^2} \cdot \frac{B^2}{2} \right) = \frac{1}{2B^2} \quad \Rightarrow \quad w_g^2 = \frac{1}{B^2} \\
 w_g &= \frac{1}{B} \\
 \left| \frac{\underline{U}_A(0)}{\underline{I}_1(0)} \right| &= 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Messung von Gleichströmen!}
 \end{aligned}$$

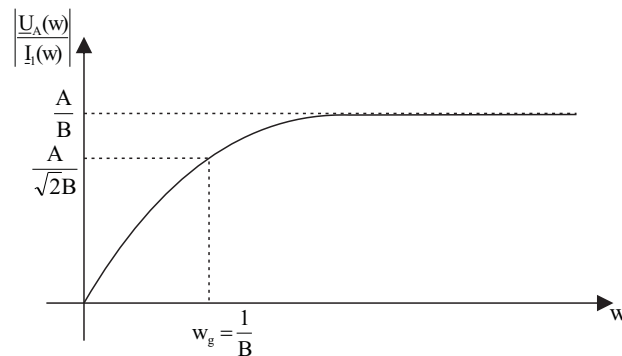


Abbildung 9.2: Skizze: Verlauf der Funktion $\left| \frac{U_A(w)}{I_1(w)} \right|$

Aufgabe 10: Ringkernspule mit Luftspalt

10. a) Berechnung des Stromes

$$\oint_C H ds = \int_A J dA = N \cdot i(t); \quad \text{Integration entlang der Feldlinien}$$

$$N \cdot i(t) = H_{links} \cdot \left(\frac{\pi D}{2} \right) + H_{Luft} \delta + H_{rechts} \cdot \left(\frac{\pi D}{2} \right) + H_{Luft} \delta$$

$$H_{Luft} = \frac{B_{Luft}}{\mu_0} \quad ; \quad B_{Luft} = B_{rechts} = B_{links} = B \quad ; \quad H_{rechts} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

$$H_{links} = 330 \frac{\text{A}}{\text{m}} \quad (\text{abgelesen})$$

$$i = \frac{1}{N} \left[\left(H_{links} + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \right) \left(\frac{\pi D}{2} \right) + 2 \frac{B}{\mu_0} \delta \right] = 1,69 \text{ A}$$

10. b) **Bestimmung des Drahtdurchmessers und die Machbarkeit unter den gegebenen Bedingungen**

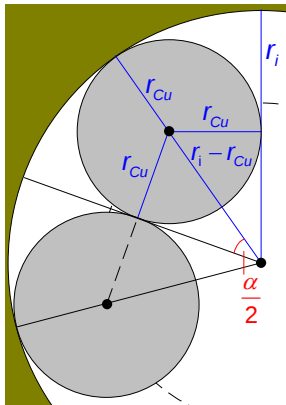
$$A_{Cu} = \frac{i}{j} = 0,565 \text{ mm}^2 \Rightarrow \underbrace{r_{Cu}} = \sqrt{\frac{A_{Cu}}{\pi}} = 0,424 \text{ mm}$$

(Drahtradius bei kreisförmiger Querschnittsfläche)

$$\text{Radius Joch } r_{Joch} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = 5,64 \text{ mm};$$

$$\text{Innenradius Gesamtanordnung: } r_i = \frac{D}{2} - r_{Joch} = 44,36 \text{ mm}$$

Wie viele Windungen passen auf die gesamte Anordnung (beide Hälften, ohne Luftspalt), wenn der Kern nur einlagig bewickelt werden darf? N Windungen, die sich an der Innenseite des Jochs berühren.



$$2\pi = N \cdot \alpha \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{N}, \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r_{Cu}}{r_i - r_{Cu}}$$

$$\Rightarrow N = \frac{2\pi}{2 \cdot \arcsin \left(\frac{r_{Cu}}{r_i - r_{Cu}} \right)}$$

$$\approx \pi \cdot \frac{r_i - r_{Cu}}{r_{Cu}} = 325,54$$

Abbildung 10.1: vergrößerter Ausschnitt aus der Anordnung

Also reicht der Platz auf einer Hälfte des Jochs nur für $\frac{N}{2} = 162,77 < 270$ Windungen.
 $\Rightarrow$ Die Wicklung kann nicht einlagig realisiert werden!

10. c) **Berechnung der Windungszahl, des Stromes und des sich daraus ergebenden Leiterquerschnitts**

$$\begin{aligned}
L &= N \cdot D_{Cu} = N \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{A_{Cu}}{\pi}} = N \cdot 2 \sqrt{\frac{i}{j\pi}} \\
&= N \cdot \sqrt{\frac{4}{j\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \left[\left(H_{links} + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \right) \left(\frac{\pi D}{2} \right) + 2 \frac{B}{\mu_0} \delta \right]} \\
&= \sqrt{N} \cdot \sqrt{\frac{4}{j\pi}} \cdot \sqrt{\left(H_{links} + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \right) \left(\frac{\pi D}{2} \right) + 2 \frac{B}{\mu_0} \delta} \\
\Rightarrow N &= \frac{L^2}{\frac{4}{j\pi} \left[\left(H_{links} + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \right) \left(\frac{\pi D}{2} \right) + 2 \frac{B}{\mu_0} \delta \right]} = 51,49 \approx 52 \\
\Rightarrow i &= \frac{1}{52} \left[\left(H_{links} + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \right) \left(\frac{\pi D}{2} \right) + 2 \frac{B}{\mu_0} \delta \right] = 8,8 \text{ A} \\
A_{Cu} &= \frac{i}{j} = 2,93 \text{ mm}^2
\end{aligned}$$

10. d) **Bestimmung des Drahtdurchmessers und der Wicklungslänge L**

$$\begin{aligned}
D_{Cu} &= 2 \sqrt{\frac{A_{Cu}}{\pi}} = 1,93 \text{ mm} \Rightarrow L = 52 \cdot 1,93 \text{ mm} = 100,36 \text{ mm} \\
r_{Cu} &= 0,965 \text{ mm} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{r_i - r_{Cu}}{r_{Cu}} = 70,64 > 52 \text{ (analog Teilaufgabe b)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Wicklung kann auf dem linken Teil des Jochs untergebracht werden!

Aufgabe 11: Magnetisches Drehfeld und Steinmetz-Schaltung

11. a) resultierendes Magnetfeld B_{res} zwischen Stator und Rotor

Überlagerung der Magnetfelder:

$$\begin{aligned} B_{res} &= B_R(\alpha) + B_S(\alpha) + B_T(\alpha) \\ &= K \left(i_R(t) \sin(\alpha) + i_s(t) \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + i_T(t) \sin\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

11. b) resultierendes Magnetfeld B_{res} mit $i_R(t) = i_S(t) = i_T(t) = I_0 \sin(\omega t)$

$$B_{res} = K I_0 \sin(\omega t) \left(\sin(\alpha) + \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \right) = 0$$

Magnetfelder heben sich auf!

11. c) resultierendes Magnetfeld B_{res} bei Drehstromspeisung

$$B_{res} = K I_0 \left(\sin(\omega t) \sin(\alpha) + \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \right)$$

Mit der gegebenen Hilfestellung erhält man

$$\begin{aligned} B_{res} &= K I_0 \left(\frac{3}{2} \cos(\omega t - \alpha) - \cos(\omega t + \alpha) - \cos(\omega t + \alpha - \frac{4\pi}{3}) - \cos(\omega t + \alpha - \frac{8\pi}{3}) \right) \\ B_{res} &= K I_0 \frac{3}{2} \cos(\omega t - \alpha) \end{aligned}$$

⇒ Für $t = t_0$ variiert das Magnetfeld mit dem Winkel α . Entlang des Umfanges eines gedachten Zylinders im Luftspalt ändert sich das Feld kosinusförmig.

11. d) Ersatzschaltbild

11. e) Ströme in Abhängigkeit der Induktivität, Kapazität und Spannung

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{ges} &= j\omega L + \frac{j\omega L \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right)}{j\omega L + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L + \frac{j\omega L(1 - \omega^2 LC)}{1 - 2\omega^2 LC} \\ &= j\omega L \left(1 + \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - 2\omega^2 LC} \right) = j\omega L \left(\frac{2 - 3\omega^2 LC}{1 - 2\omega^2 LC} \right) \\ I_0 &= \frac{U_0}{\underline{Z}_{ges}} = \frac{U_0}{j\omega L} \left(\frac{1 - 2\omega^2 LC}{2 - 3\omega^2 LC} \right) = -I_S \end{aligned}$$

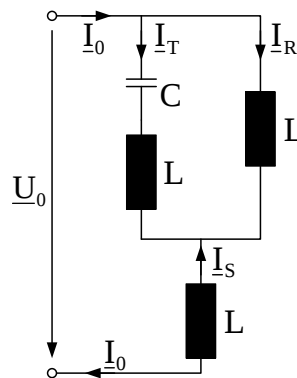


Abbildung 11.1: Ersatzschaltbild der Anordnung

$$\text{Stromteilerregel: } \frac{I_{\text{Zweig}}}{I_{\text{Gesamt}}} = \frac{Z_{\text{Gesamt}}}{Z_{\text{Zweig}}} \Rightarrow \frac{I_R}{I_0} = \frac{1}{j\omega L} \cdot \frac{j\omega L(1 - \omega^2 LC)}{1 - 2\omega^2 LC}$$

$$\Rightarrow I_R = \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - 2\omega^2 LC} \cdot I_0 = \frac{1 - \omega^2 LC}{2 - 3\omega^2 LC} \cdot \frac{U_0}{j\omega L}$$

$$I_T = I_0 - I_R = \frac{U_0}{j\omega L} \left(\frac{1 - 2\omega^2 LC}{2 - 3\omega^2 LC} - \frac{1 - \omega^2 LC}{2 - 3\omega^2 LC} \right) = \frac{U_0}{j\omega L} \cdot \frac{-\omega^2 LC}{2 - 3\omega^2 LC}$$

11. f) **resultierendes Magnetfeld $B_{res}(\alpha)$ (allgemeiner Ansatz)**

$$\begin{aligned} B_{res} &= K I_0 \sin(\omega t + \varphi) \left[w_R \sin(\alpha) + w_S \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) + w_T \sin\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \\ &= K I_0 \sin(\omega t + \varphi) \underbrace{\left[\sin \alpha \left(w_R - \frac{1}{2} w_S - \frac{1}{2} w_T \right) + \cos \alpha \left(\frac{\sqrt{3}}{2} w_T - \frac{\sqrt{3}}{2} w_S \right) \right]}_{B \sin(\alpha + \beta)} \\ &= B K I_0 \sin(\omega t + \varphi) \sin(\alpha + \beta) \quad \Rightarrow \quad \text{Drehfeld} \end{aligned}$$

Aufgabe 12: Betrieb eines Einphasentransformators

12. a) Strom $\underline{I}_2$ und Spannung $\underline{U}_{h2}$

$$S_2 = (4,8 + j3,6) \text{ MVA} = \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* \quad \text{und} \quad \underline{U}_2 = 100 \text{ kV } e^{j0}$$

$$\Rightarrow \underline{I}_2 = (48 - j36) \text{ A}$$

$$\underline{U}_{h2} = \underline{U}_2 + \underline{I}_2(R_2 + jX_2) = (103617 + j4405) \text{ V}$$

12. b) Strom $\underline{I}_{1,i}$, Spannung $\underline{U}_{h1}$, Magnetisierungsstrom $\underline{I}_\mu$ und Eisenverluststrom $\underline{I}_{Fe}$

$$\underline{U}_{h1} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \underline{U}_{h2} = 5180,83 \text{ V} + j220,25 \text{ V} = 5185 \text{ V } e^{j2,43}$$

$$\underline{I}_{1,i} = \frac{w_2}{w_1} \cdot \underline{I}_2 = 960 - j720 \text{ A}$$

$$\underline{I}_{Fe} = \frac{\underline{U}_{h1}}{R_{Fe}} = (1,758 + j0,075) \text{ A}; \quad \underline{I}_\mu = \frac{\underline{U}_{h1}}{jwL_H} = (0,0875 - j2,059) \text{ A}$$

12. c) Strom $\underline{I}_1$ und Spannung $\underline{U}_1$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{1,i} + \underline{I}_{Fe} + \underline{I}_\mu$$

$$= (961,85 - j721,98) \text{ A}$$

$$\underline{U}_1 = (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + \underline{U}_{h1} = (5361,94 + j440,7) \text{ V}$$

12. d) aufgenommene Leistung und Wirkungsgrad

$$S_1 = \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* = (4839204 + j4295104) \text{ VA} = 6,47 \text{ MVA } e^{j41,59}$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 0,9919$$