

## Schriftliche Prüfung

# Elektroenergiesysteme / Erzeugung, Übertragung und Verteilung elektrischer Energie

17. März 2010

*Musterlösung*

---

Vorname Nachname

---

Matrikelnummer

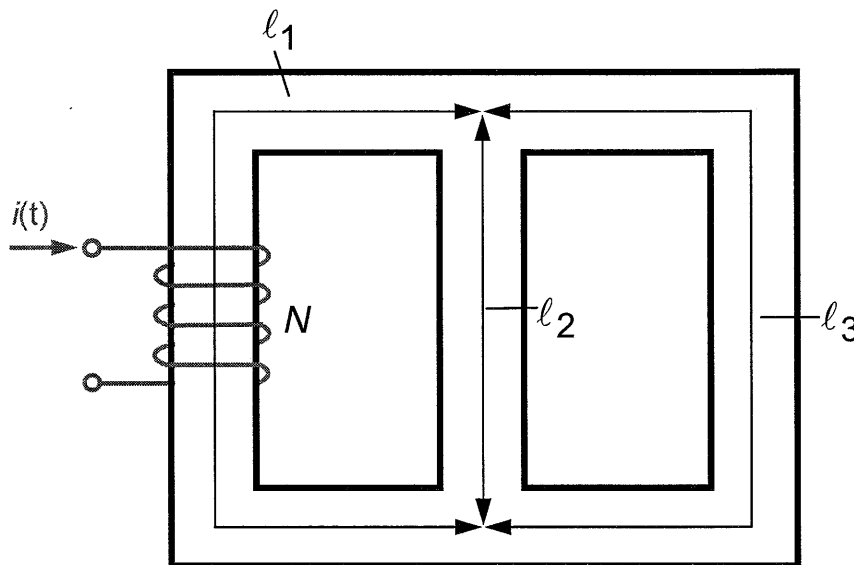
Aufgabenübersicht:	Punktezahl	
	maximal	erreicht
1.) Magnetischer Kreis	14	
2.) Maxwell-Wien-Brücke	17	
3.) R-C-Netzwerk	11	
4.) Einphasentransformator	18	
Gesamt:	60	

Die Klausur besteht aus 21 nummerierten Seiten (einschließlich Deckblatt).

Hinweis: Die Ergebnisse müssen den Lösungsansatz und den Rechenweg erkennen lassen, die Angabe eines Ergebnisses reicht nicht aus! Der Lösungsweg muss vollständig angegeben werden und nachvollziehbar sein. Begründen Sie Ihre Antworten! Bitte nicht mit Bleistift oder Rotstift schreiben, da dies nicht gewertet wird.

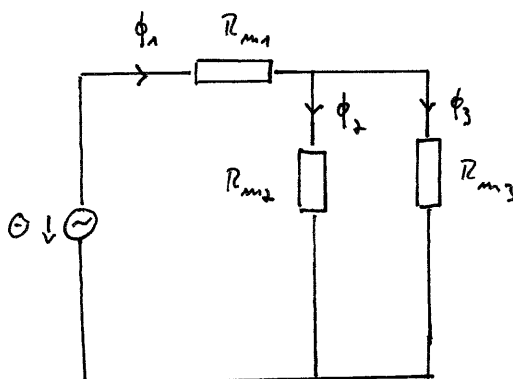
**Aufgabe 1: Magnetischer Kreis**

Gegeben sei der in Abbildung 1 dargestellte magnetische Kreis mit Verzweigungen. Der linke Schenkel sei mit  $N$  Windungen bewickelt, durch die der Strom  $i(t)$  fließe. Die Querschnittsfläche  $A$  sei quadratisch und überall gleich groß. Die relative Permeabilität  $\mu_r$  sei in der gesamten Anordnung konstant, es handelt sich um einen Kern aus Eisen ( $\mu_r > 1000$ ). Gegeben seien weiterhin die Längen  $l_1$ ,  $l_2$  und  $l_3$ . Die Streuung und die Verzerrung der Feldlinien in den Kanten seien in der gesamten Aufgabe zu vernachlässigen.



**Abbildung 1: Magnetischer Kreis mit Verzweigungen**

- a. Berechnen Sie den magnetischen Fluss durch den bewickelten linken Schenkel und geben Sie diesen als Funktion  $\Phi_1(t) = f(N, i(t), \mu_0, \mu_r, A, l_1, l_2$  und  $l_3$ .) an. Stellen Sie hierfür zunächst das magnetische Ersatzschaltbild auf und berechnen Sie die erforderlichen magnetischen Widerstände.



$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r A}, \quad R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r A}, \quad R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r A}$$

$$R_{m2} \parallel R_{m3} = \frac{R_{m2} \cdot R_{m3}}{R_{m2} + R_{m3}} = \frac{l_2 l_3}{l_2 + l_3} \cdot \frac{1}{\mu_0 \mu_r A}$$

$$R_{ges} = \left( l_1 + \frac{l_2 l_3}{l_2 + l_3} \right) \cdot \frac{1}{\mu_0 \mu_r A}$$

$$\Theta = N i(t) = \phi_1(t) \cdot R_{ges} \Rightarrow \phi_1(t) = \frac{N \cdot i(t) \mu_0 \mu_r A}{l_1 + \frac{l_2 l_3}{l_2 + l_3}}$$

(4)

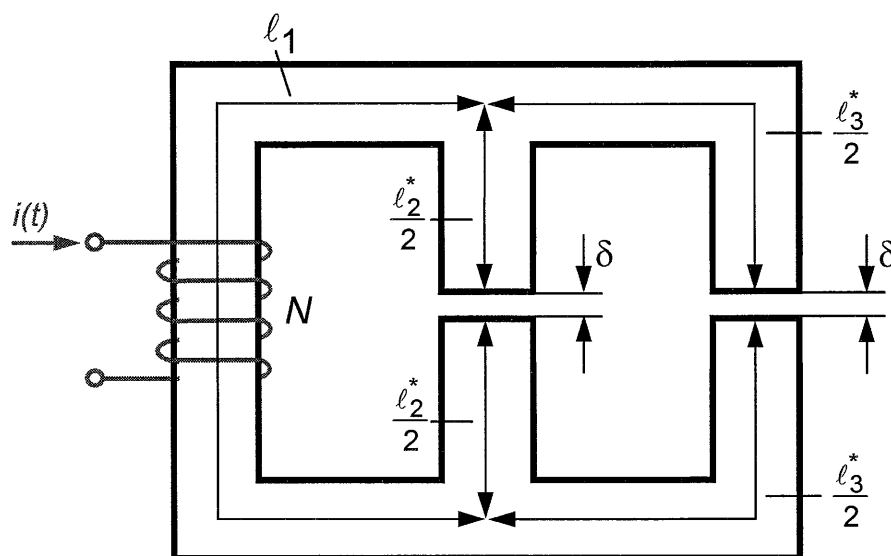
b. Bestimmen Sie die Induktivität  $L$  der Anordnung in Abbildung 1!

$$N \cdot \frac{d\phi_1}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} = \frac{N^2 \frac{di}{dt} \mu_0 \mu_r A}{l_1 + \frac{l_2 l_3}{l_2 + l_3}}$$

$$\Rightarrow L = \frac{N^2 \mu_0 \mu_r A}{l_1 + \frac{l_2 l_3}{l_2 + l_3}}$$

(2)

- c. Der mittlere und der rechte Schenkel der Anordnung werde jeweils mit einem Luftspalt der Länge  $\delta$  versehen, siehe Abbildung 2. Die verbleibenden Strecken im Eisen werden als gleich lang  $l_2^* = l_3^* = l_0$  betrachtet.



**Abbildung 2:** Magnetischer Kreis mit Verzweigungen und Luftspalten

Berechnen Sie die magnetische Induktion im Luftspalt des mittleren Schenkels und geben Sie diese als Funktion  $B_{L2}(t) = f(N, i(t), \mu_0, \mu_r, l_1, l_0, \delta)$  an. Die Aufweitung des Felds in den Luftspalten kann vernachlässigt werden.

$$R_{m2} = R_{m3} = \frac{l_0}{\mu_0 \mu_r A} + \frac{\delta}{\mu_0 A} = \frac{l_0 + \mu_r \delta}{\mu_0 \mu_r A}$$

$$R_{m2} \parallel R_{m3} = \frac{1}{2} \frac{l_0 + \mu_r \delta}{\mu_0 \mu_r A}$$

$$R_{m, \text{ges}} = \left( l_1 + \frac{1}{2} (l_0 + \mu_r \delta) \right) \cdot \frac{1}{\mu_0 \mu_r A}$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \frac{1}{2} \phi_1 = \frac{1}{2} \frac{\Theta}{R_{m, \text{ges}}} = \frac{1}{2} N i(t) \mu_0 \mu_r A \cdot \frac{1}{l_1 + \frac{1}{2} (l_0 + \mu_r \delta)}$$

$$B_{L2} = \frac{\phi_2}{A} = \frac{1}{2} N i(t) \mu_0 \mu_r \cdot \frac{1}{l_1 + \frac{1}{2} (l_0 + \mu_r \delta)} \quad (5)$$

- d. In der gesamten Anordnung (verzweigter Kern mit Luftspalten) soll eine maximale magnetische Feldstärke  $H_{\max}$  nicht überschritten werden. Wie groß darf die magnetische Durchflutung in der Wicklung auf dem linken Schenkel maximal werden? Geben Sie diese als Funktion  $\Theta_{\max} = f(H_{\max}, \mu_r, l_1, l_0, \delta)$  an.

maximale Feldstärke  $H_{\max}$ : im den Luftspalten!

$$H_{\max} = \frac{B_{\max}}{\mu_0} = \frac{1}{2} i_{\max} N \cdot \mu_r \frac{1}{l_1 + \frac{1}{2} (l_0 + \mu_r \delta)}$$

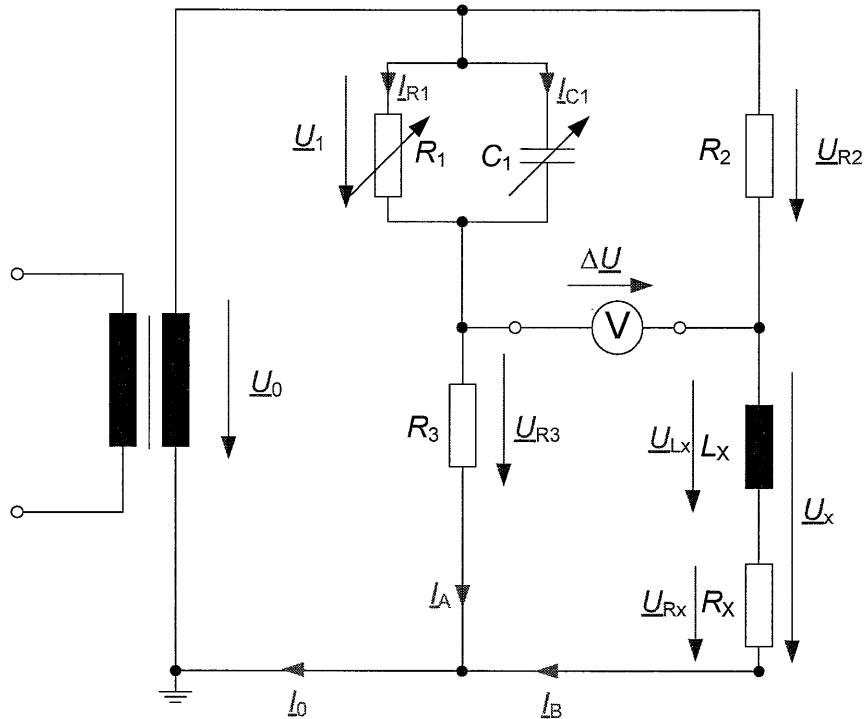
$$\Theta_{\max} = N \cdot i_{\max}$$

$$i_{\max} = \frac{2 H_{\max}}{\mu_r} (l_1 + \frac{1}{2} (l_0 + \mu_r \delta))$$

③

**Aufgabe 2: Maxwell-Wien-Brücke**

Die Maxwell-Wien-Brückenschaltung in Abbildung 3 dient der Bestimmung der unbekannt-ten Induktivität  $L_x$  und des zugehörigen Verlustfaktors  $\tan \delta_{L_x}$ . Dazu werden der Widerstand  $R_1$  und die Kapazität  $C_1$  so lange verändert, bis die Spannung  $\Delta U$  zu Null wird. Die Brückenschaltung wird bei 50 Hz betrieben.



**Abbildung 3:** Maxwell-Wien-Brückenschaltung

- a. Berechnen Sie die Spannungen  $\underline{U}_1$  und  $\underline{U}_{R2}$  als Funktion der speisenden Spannung  $\underline{U}_0$  und der Schaltungselemente. Beachten Sie, dass das Voltmeter einen sehr hohen Innenwiderstand aufweist.

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \frac{\frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1}}{\frac{R_1}{1 + j\omega C_1 R_1} + R_3} = \frac{R_1}{R_1 + R_3 + j\omega C_1 R_1 R_3}$$

$$\frac{\underline{U}_{R2}}{\underline{U}_0} = \frac{R_2}{R_2 + R_x + j\omega L_x}$$

(2)

- b. Berechnen Sie die Werte der gesuchten Elemente  $L_x$  und  $R_x$ , falls die Abgleichbedingung  $\underline{U}_{R2} = \underline{U}_1$  erfüllt ist, d.h. die gemessene Spannung  $\Delta \underline{U} = 0$  ist.

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{R2}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_1} + j\omega C_1 R_3} = \frac{1}{1 + \frac{R_x}{R_2} + j\omega \frac{L_x}{R_2}} \Rightarrow \frac{R_3}{R_1} = \frac{R_x}{R_2} \Rightarrow R_x = \frac{R_2}{R_1} R_3$$

$$L_x = C_1 R_2 R_3$$

(3)

- c. Berechnen Sie den Bereich der bestimmbaren Induktivitäten  $L_x$ , wenn  $C_1$  im Wertebereich  $50 \text{ nF} \leq C_1 \leq 1 \text{ } \mu\text{F}$  liegt. Es gelte:  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 50 \text{ } \Omega$ .

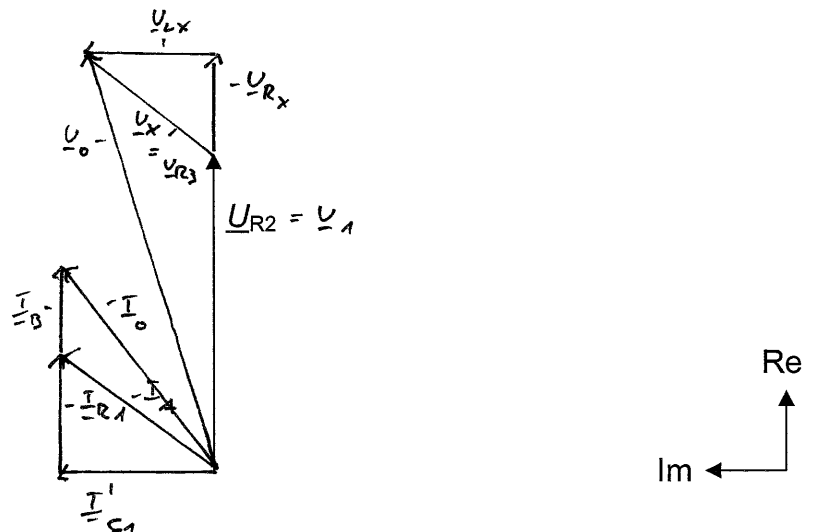
$$L_x = C_1 R_2 R_3$$

$$0,05 \text{ H} \leq L_x \leq 1 \text{ H}$$





- d. Zeichnen Sie qualitativ das vollständige Zeigerdiagramm der Anordnung in Abbildung 3. Die Brücke sei im abgeglichenen Zustand, d.h. die gemessene Spannung ist  $\Delta U = 0$ . Berücksichtigen Sie alle Spannungen und Ströme, die in Abbildung 3 eingetragen sind und nutzen Sie den gegebenen Zeiger von  $\underline{U}_{R2}$ !



⑤

- e. Der Verlustwinkel  $\delta_{Lx}$  sei definiert als der Phasenwinkel zwischen der Spannung über der Induktivität  $\underline{U}_{Lx}$  und der gesamten Spannung über dem Prüfling  $\underline{U}_x$ . Wie groß ist der maximal und der minimal messbare Verlustfaktor  $\tan \delta_{Lx}$  eines Prüflings mit einer Induktivität von  $L_x = 0,191 \text{ H}$ , wenn der Widerstand  $R_1$  im Bereich  $166,65 \text{ k}\Omega \leq R_1 \leq 8332,72 \text{ k}\Omega$  liegen soll? Es gelte weiterhin  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ,  $R_3 = 50 \text{ }\Omega$ .

$$\tan \delta_{Lx} = \frac{|U_{Rx}|}{|U_{Lx}|} = \frac{R_x}{\omega L_x} = \frac{R_2 R_3}{R_1 \omega L_x}$$

$$166,65 \text{ k}\Omega \rightarrow \tan \delta_{Lx} = 0,1$$

$$8332,72 \text{ k}\Omega \rightarrow \tan \delta_{Lx} = 0,002$$

③

- f. Die Brückenschaltung werde nun bei 500 Hz betrieben. Wie verändern sich bei unveränderter Dimensionierung von  $R_1$ ,  $C_1$ ,  $R_2$  und  $R_3$ , der angezeigte Wert der Induktivität  $L_x$  und der messbare Bereich des Verlustfaktors  $\tan \delta_{Lx}$  für den Prüfling aus Teilaufgabe e?

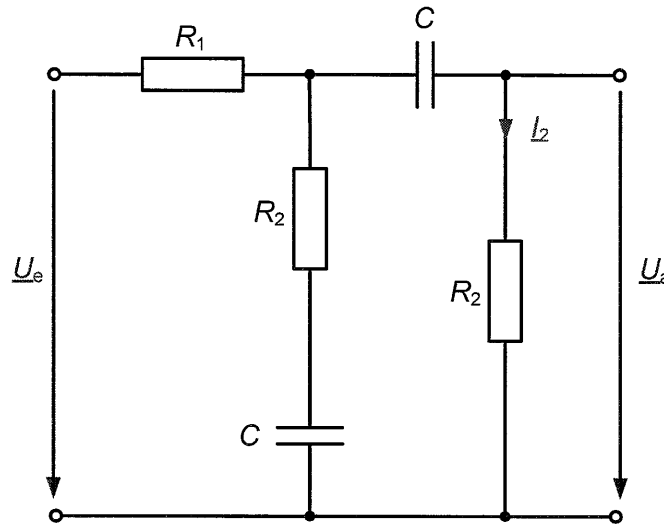
Anzeige wert von  $L_x$  ändert sich nicht,  $L_x = C_1 R_2 R_3$ ;

$$\tan \delta_{Lx, \max} = 0,01, \quad \tan \delta_{Lx, \min} = 0,2 \cdot 10^{-3}, \quad \text{Abhängigkeit mit } \frac{1}{\omega}$$

②

**Aufgabe 3: R-C-Netzwerk**

Gegeben sei das R-C-Netzwerk in Abbildung 4.



**Abbildung 4:** R-C-Netzwerk

- a. Berechnen Sie die Transferfunktion  $\underline{F}(\omega) = \underline{U}_a(\omega)/\underline{U}_e(\omega) = f(\omega, C, R_1, R_2)$  mittels der komplexen Wechselstromrechnung. Die Energiespeicher seien zu Beginn ungeladen.

Bringen Sie das Ergebnis auf die Form  $\underline{F}(\omega) = \frac{\alpha + j\beta}{\gamma + j\delta}$ .

$$\underline{F}(\omega) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{\underline{z}}{\underline{z} + R_1}, \quad \underline{z} = \frac{1}{2} \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)$$

$$\underline{F}(\omega) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}{\frac{1}{2} \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right) + R_1} = \frac{\frac{1}{2} R_2}{R_1 + \frac{1}{2} \left( R_2 + \frac{1}{j\omega C} \right)}$$

$$= \frac{R_2}{2R_1 + R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega C R_2}{1 + j\omega C (2R_1 + R_2)}$$

(3)

- b. Geben Sie den Amplitudengang  $|F(\omega)| = |\underline{U}_a(\omega)/\underline{U}_e(\omega)|$  und den Phasengang  $\varphi = \arg\{\underline{U}_a(\omega)/\underline{U}_e(\omega)\}$  der Transferfunktion aus Teilaufgabe a. an. Bei welcher Kreisfrequenz  $\omega_0$  gilt  $\varphi(\omega_0) = \pi/4$ ? Werden Gleichspannungsanteile in der Eingangsspannung  $\underline{U}_e$  übertragen? Begründen Sie Ihre Aussage.

$$|F(\omega)| = \frac{\omega C R_2}{\sqrt{1 + (\omega C)^2 (2R_1 + R_2)^2}}$$

$$\varphi = \arg\{\text{Zähler}\} - \arg\{\text{Nenner}\}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega C (2R_1 + R_2))$$

$$\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arctan[\omega_0 C (2R_1 + R_2)] = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_0 C (2R_1 + R_2) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\omega_0 = \frac{1}{(2R_1 + R_2) C}$$

Keine Übertragung von Gleichanteilen, da  $|F(\omega)| = 0$  für  $\omega = 0$

(4)

- c. Am Eingang werde ein Spannungssprung der Höhe  $U_0$  angelegt,  $u_e(t) = U_0 \cdot \sigma(t)$ . Wie muss das Verhältnis  $R_1/R_2$  gewählt werden, damit der rechtsseitige Grenzwert der Ausgangsspannung für den Zeitpunkt  $t = 0$   $\lim_{t \rightarrow 0^+} u_a(t) = \frac{U_0}{3}$  beträgt? Bestimmen Sie den Strom  $i_2(t)$  aus Abbildung 4 unter dieser Bedingung.

Hinweis: Die Energiespeicher seien zu Beginn ungeladen. Rechnen Sie im Laplace-Bereich, ersetzen Sie hierzu das  $j\omega$  der komplexen Wechselstromrechnung durch  $p$ . Es gelten folgende Korrespondenzen:

$$\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = \frac{1}{p}$$

$$\mathcal{L}\{\sigma(t) \cdot [e^{\alpha t}]\} = \frac{1}{(p - \alpha)}$$

$$U_e = \frac{U_0}{p}, \quad U_a = \frac{p C R_2}{1 + p C (2R_1 + R_2)} \cdot \frac{U_0}{p} = U_0 \cdot \frac{\frac{R_2}{2R_1 + R_2}}{p + \frac{1}{C(2R_1 + R_2)}}$$

$$u_a(t) = U_0 \cdot \frac{R_2}{2R_1 + R_2} \cdot \exp\left\{-\frac{t}{C(2R_1 + R_2)}\right\} \cdot \sigma(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u_a(t) = \frac{R_2}{2R_1 + R_2} \cdot U_0 \stackrel{!}{=} \frac{U_0}{3} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 1$$

$$i_2(t) = \frac{u_0}{3} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot e^{-\frac{1}{3R_2C}t} \cdot \sigma(t)$$

(4)

**Aufgabe 4: Einphasentransformator**

Gegeben sei ein einphasiger Prüftransformator mit folgenden Daten

$$S_N = 75 \text{ kVA} \quad U_{N1} = 400 \text{ V} \quad U_{N2} = 50 \text{ kV} \quad f = 50 \text{ Hz}$$

und den Windungszahlen

$$N_1 = 76 \quad N_2 = 9500.$$

a. Bestimmen Sie die Nennströme  $I_{N1}$  und  $I_{N2}$  der Unter- und Oberspannungsseite!

$$I_{N1} = \frac{S_N}{U_{N1}} = 187,5 \text{ A}$$

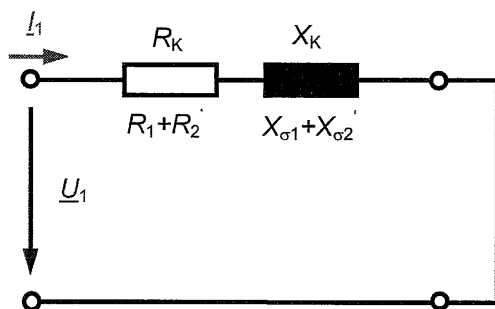
$$I_{N2} = \frac{S_N}{U_{N2}} = 1,5 \text{ A}$$



①

- b. Es werde ein Kurzschlussversuch durchgeführt. Dabei wird die Oberspannungsseite kurzgeschlossen. Es gelte das in Abbildung 5 dargestellte Ersatzschaltbild, wobei  $R_1 = R_2'$  und  $X_{\sigma 1} = X_{\sigma 2}'$  angenommen werden kann. Die Spannung wird solange erhöht bis bei  $U_1 = 16 \text{ V}$  gerade Nennstrom in der Wicklung fließt, d.h. es gilt  $I_1 = I_{N1}$ . Die gemessenen Verluste betragen  $P_k = 1500 \text{ W}$ .

Bestimmen Sie die relative Kurzschlussspannung  $u_k$ , die Kurzschlussimpedanz  $Z_k$ , sowie die Größen  $R_1$ ,  $R_2'$ ,  $X_{\sigma 1}$  und  $X_{\sigma 2}'$ .



**Abbildung 5:** Kurzschlussersatzschaltbild des Einphasentransformators

$$u_k = \frac{16 \text{ V}}{400 \text{ V}} = 4\% \quad , \quad z_k = u_k \cdot \frac{U_N^2}{S_N} = 85,3 \text{ m}\Omega$$

$$R_k = \frac{P_k}{I_{N1}^2} = 42,67 \text{ m}\Omega \quad \Rightarrow \quad R_1 = R_2' = 21,3 \text{ m}\Omega$$

$$X_k = \sqrt{z_k^2 - R_k^2} = 73,9 \text{ m}\Omega \quad \Rightarrow \quad X_{\sigma 1} = X_{\sigma 2}' = 36,95 \text{ m}\Omega$$

(4)



- c. Es werde ein Leerlaufversuch durchgeführt. Dabei wird an der Unterspannungsseite Nennspannung angelegt, die Oberspannungsseite bleibt unbelastet. Es gelte das in Abbildung 6 dargestellte Ersatzschaltbild.  $R_1$ ,  $R_2'$ ,  $X_{\sigma 1}$  und  $X_{\sigma 2}'$  können bei diesem Versuch vernachlässigt werden. Der Strom in der Unterspannungswicklung beträgt hierbei  $I_1 = 3,06 \text{ A}$ , die gemessenen Leerlaufverluste betragen  $P_0 = 0,6 \text{ kW}$ . Berechnen Sie den Wirkwiderstand  $R_{Fe}$  und den Eisenverluststrom  $I_{Fe}$ . Wie groß sind der Magnetisierungsstrom  $I_{\mu 1}$  und die Hauptfeldreaktanz  $X_H$ ?

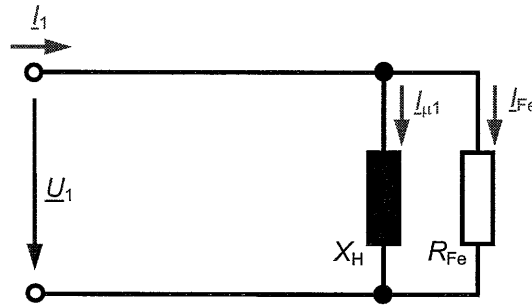


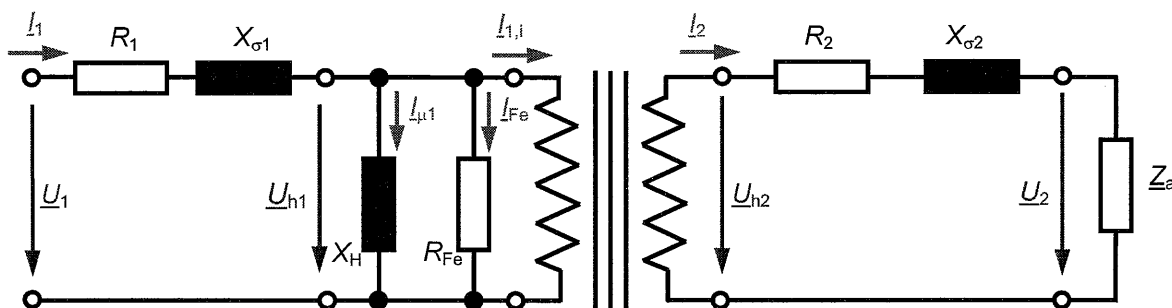
Abbildung 6: Leerlaufersatzschaltbild des Einphasentransformators

$$R_{Fe} = \frac{U_1^2}{P_0} = 266,67 \Omega \quad \Rightarrow \quad I_{Fe} = \frac{U_1}{R_{Fe}} = 1,5 \text{ A}$$

$$\frac{I}{m} I_{\mu 1} = \sqrt{I_1^2 - I_{Fe}^2} = 2,67 \text{ A} \quad \Rightarrow \quad X_H = \frac{U_1}{I_{\mu 1}} = 149,97 \Omega$$

(4)

- d. Auf der Oberspannungsseite des Einphasentransformators wird eine Last angeschlossen. Berechnen Sie den Strom  $I_1$  der auf der Unterspannungsseite in den Transformator hineinfließt, wenn die Spannung an den Klemmen der Oberspannungsseite die Nennspannung  $\underline{U}_2 = (50 + j0) \text{ kV}$  erreichen soll und die Last in diesem Fall eine Scheinleistung von  $\underline{S}_2 = (25 - j70,71) \text{ kVA}$  aufnimmt. Es gelte das in Abbildung 7 dargestellte Ersatzschaltbild.



**Abbildung 7:** Vollständiges Ersatzschaltbild des Einphasentransformators

Rechnen Sie mit den Werten  $R_1 = R_2' = 0,035 \Omega$ ,  $X_{\sigma 1} = X_{\sigma 2}' = 0,05 \Omega$ ,  $X_H = 200 \Omega$  und  $R_{Fe} = 300 \Omega$ . Verwenden Sie nicht die Ergebnisse aus den Teilaufgaben b) und c)! Es gelte weiterhin  $S_N = 75 \text{ kVA}$ ,  $U_{N1} = 400 \text{ V}$ ,  $U_{N2} = 50 \text{ kV}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $N_1 = 76$  und  $N_2 = 9500$ .

$$\underline{I}_2 = \left( \frac{\underline{S}_2}{\underline{U}_2} \right)^* = (0,5 - j1,4142) \text{ A}$$

$$R_2 = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \cdot R_2' = 546,88 \Omega, \quad X_{\sigma 2} = \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \cdot X_{\sigma 2}' = 781,25 \Omega$$

$$\begin{aligned} \underline{U}_{h2} &= \underline{U}_2 + \underline{I}_2 (R_2 + j X_{\sigma 2}) = 50 \text{ kV} + (-831,40 + j1164,02) \text{ V} \\ &= (49168,6 + j1164,02) \text{ V} \end{aligned}$$

$$\underline{U}_{h1} = \underline{U}_{h2} \cdot \frac{N_1}{N_2} = (393,35 + j9,31) \text{ V}$$

$$\underline{I}_{\mu 1} = \frac{\underline{U}_{h1}}{j X_H} = (0,0466 - j1,967) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{R_{Fe}} = \frac{\underline{U}_{h1}}{R_{Fe}} = (1,311 + j0,031) \text{ A}$$

$$\underline{I}_{1,i} = \underline{I}_2 \cdot \frac{N_2}{N_1} = (62,5 + j176,775) \text{ A}$$

(7)

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \underline{I}_{1,i} + \underline{I}_{M1} + \underline{I}_{R_{Fe}} \\ &= (63,86 + j174,84) \text{ A} \\ &= 186,13 \text{ A} \cdot e^{j69,94^\circ}\end{aligned}$$

- e. Die Oberspannungsseite des Einphasentransformators soll nun rein kapazitiv belastet werden  $\underline{Z}_a = \frac{1}{j\omega C_a}$ . Zeichnen Sie die Größen der Oberspannungsseite  $\underline{I}_2$ ,  $\underline{U}_{h2}$ ,  $\underline{U}_2$  und die Spannungsabfälle über  $R_2$  und  $X_{\sigma 2}$  für diesen Fall qualitativ in ein Zeigerdiagramm. Es gelte das Ersatzschaltbild in Abbildung 7. Nutzen Sie den gegebenen Zeiger von  $\underline{U}_2$ .

