Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Elektroenergiesysteme
und Hochspannungstechnik
Prof. Dr.-Ing. Thomas Leibfried

Manuskript zur Vorlesung

ELEKTROENERGIESYSTEME

von

Prof. Dr.-Ing. Thomas Leibfried

SS 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Das elektrische Energieversorgungsnetz und seine Struktur

1.1 Das elektrische Verbundnetz in Deutschland

Basis der elektrischen Energieerzeugung wie wir sie heute kennen war die Entdeckung der elektromagnetischen Induktion durch *Michael Faraday* (1831). Weitere wesentliche Entwicklungsschritte waren die Entdeckung des dynamoelektrischen Prinzips durch *Werner von Siemens,* der Beginn der großtechnischen Herstellung von Glühlampen durch *Thomas A. Edison* und die erste elektrische Energieübertragung mit Gleichstrom (Miesbach – München, 57 km, U_N = 1500...2000 V, 1 kW, Wirkungsgrad ca. 22 %) im Jahr 1882.

1891 wurde die weltweit erste elektrische Energieübertragung mit Drehstrom (Lauffen am Neckar – Frankfurt, 175 km, U_N = 15 kV, 70 kW, Wirkungsgrad ca. 75 %) realisiert.

Nur wenige Jahre nach dieser ersten Drehstromverbindung entstanden überwiegend in Stadt- und Ballungsgebieten die ersten regional begrenzten Versorgungsgebiete in Deutschland. Einzelne Erzeugungseinheiten versorgten die Verbraucher, wobei zumeist jeweils nur ein Kraftwerksblock ein solches Teilnetz speiste. Der Ausfall dieses Kraftwerks bedeutete den sofortigen Versorgungsausfall für alle angeschlossenen Verbraucher. Mit steigendem Bedarf an Elektrizität und der damit verbundenen Forderung nach Verbesserung der Versorgungssicherheit schalteten nach und nach alle bestehenden deutschen EVU ihre Höchstspannungsteilnetze zusammen und es entstand im Laufe der Jahrzehnte das heutige „Deutsche Verbundnetz“. Seine Struktur ist in ***Bild 1.1*** dargestellt.

Parallel fahrende Kraftwerke können sich gegenseitig bei einem Kraftwerksausfall Reserve stellen. Weitherhin können Kraftwerke durch die Zusammenschaltung der Netze wirtschaftlicher eingesetzt werden. Durch die Parallelschaltung erreicht man in allen Netzen, vor allem aber im Höchstspannungsnetz, eine sehr hohe Verfügbarkeit. Die Netzstruktur besteht aus Leitungsringen und Leitungsmaschen. Bei Ausfall einer Leitung kann der Strom über die verbleibende(n) Leitung(en) zum Verbraucher fließen.

Das *Höchstspannungsnetz* (380 kV und 220 kV) dient als Verbundnetz dem überregionalen und internationalen Austausch elektrischer Energie, sowie der <u>Übertragung elektrischer Energie</u> von den Großkraftwerken zu Umspannanlagen in der Nähe der Verbrauchsschwerpunkte. Dort wird die Spannung von 380 kV oder 220 kV auf die Spannung der nachgeordneten Netze, d. h. Hoch-, Mittel- und Niederspannungsnetz, herunter transformiert. In Einzelfällen werden große Industriebetriebe mit sehr hohem Energiebedarf (z. B. Stahl- und Walzwerke) direkt ans Höchstspannungsnetz angeschlossen.

Das *Hochspannungsnetz* (> 60 kV, meist 110 kV) ist dem 380-kV- und 220-kV-Netz unterlagert und übernimmt die <u>Primärverteilung</u>. In die Hochspannungsebene speisen kleinere und mittlere Kraftwerke ein. In den Umspannanlagen wird die Höchstspannung auf 110 kV herab transformiert. Von hier aus verteilen dann die Hochspannungsleitungen des 110-kV-Netzes die elektrische Energie zu den Verbraucherschwerpunkten mit einem Leistungsbedarf von 10 bis 100 MW, z. B. zur Großindustrie und zu den Umspannanlagen in Städten oder ländlichen Gebieten.

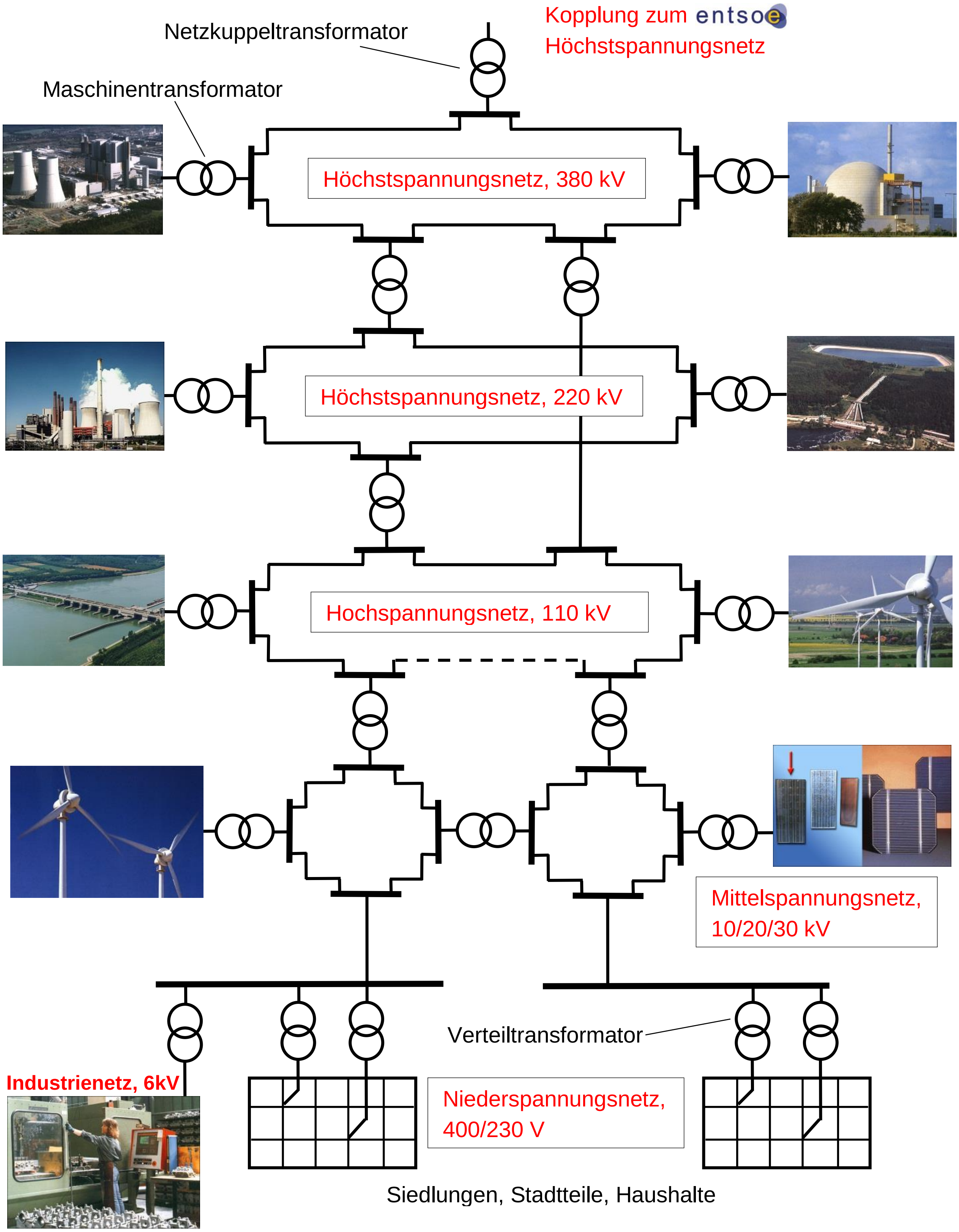


Bild 1.1 Struktur des elektrischen Energienetzes in Deutschland

Die *Mittelspannungsnetze* übernehmen die <u>Sekundärverteilung</u>. Der Spannungsbereich reicht von > 1 kV bis 60 kV, am gebräuchlichsten sind 10 kV und 20 kV, gelegentlich 30 kV. Das Mittelspannungsnetz speist Industriebetriebe mit einem Leistungsbedarf zwischen einigen hundert kW und mehreren MW sowie die Niederspannungs-Ortsnetze.

Tarifkunden, d. h. Haushalte, Gewerbe- und kleinere Industriebetriebe, der öffentlichen Energieversorgung werden über das *Niederspannungsnetz* gespeist. Die Leiterspannung des Drehstromnetzes ist 400 V, einphasig stehen dann 230 V zur Verfügung.

In *Industrienetzen* ist die 6-kV-Ebene weit verbreitet, da mit dieser Spannung Motoren betrieben werden. In diesem Fall ist der Mittelspannungsebene (10 kV oder 20 kV) die 6-kV-Ebene unterlagert.

1.2 Netztopologien

Bild 1.2 zeigt mögliche Strukturen von elektrischen Energieübertragungs- und –verteilungsnetzen.

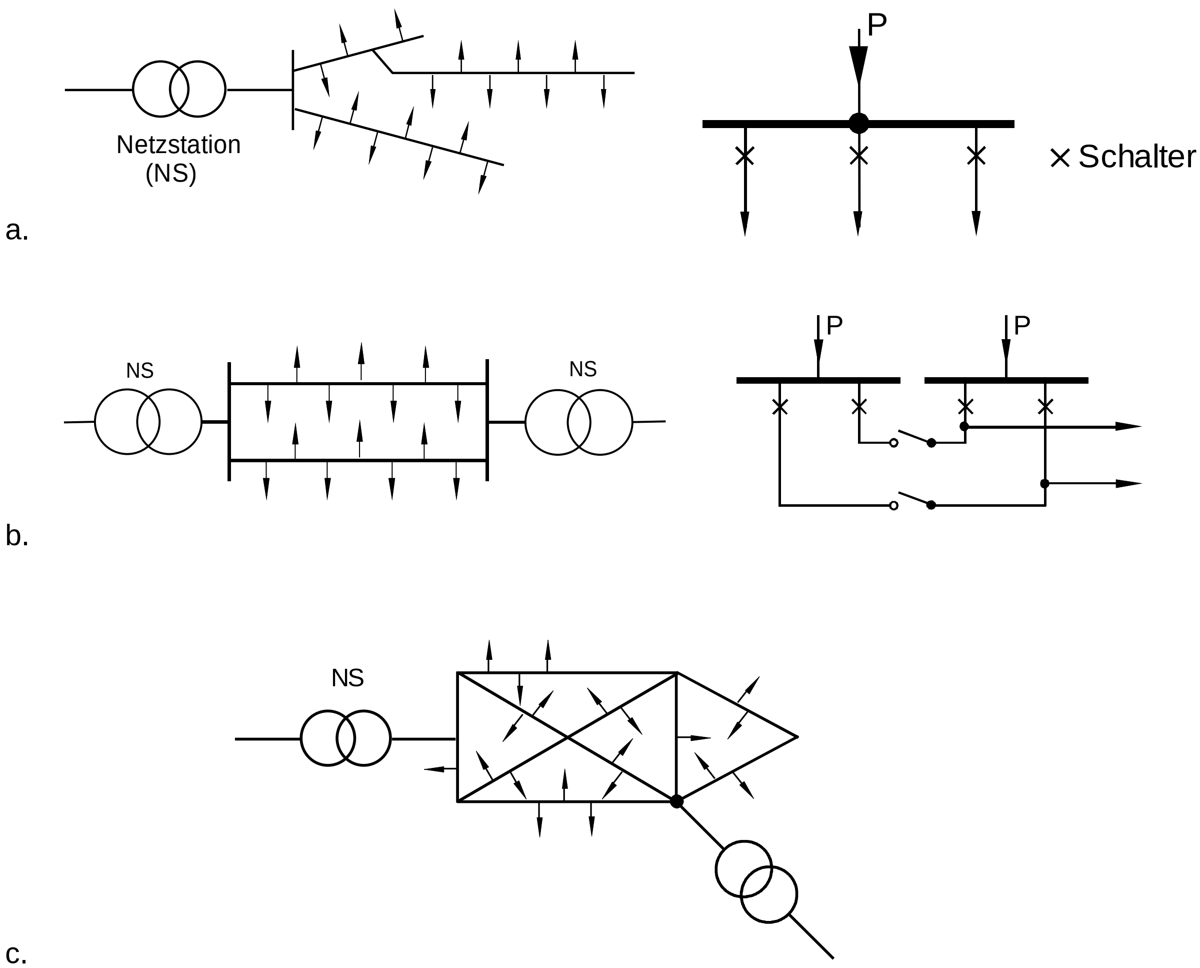


Bild 1.2 Struktur von elektrischen Energieübertragungs- und -verteilnetzen
a. Strahlennetz
b. Ringnetz
c. Maschennetz

Strahlennetz (***Bild 1.2a***)

Einseitig gespeiste Leitung:

- ⇒ einfacher Aufbau aber geringe Versorgungssicherheit und möglicherweise Probleme mit Spannungshaltung bei großen Lastsprüngen.

Ringnetz (***Bild 1.2b***)

Zweiseitig gespeiste Ringleitung:

- ⇒ größere Versorgungssicherheit im Fehlerfall, z. B. bei Ausfall einer Einspeisung,
- ⇒ Stadtnetze sind als Ringnetze aufgebaut.

Maschennetz (***Bild 1.2c***)

Mehrfache Einspeisung

- ⇒ optimale Versorgungssicherheit (Lastausgleich, Spannungshaltung)
- ⇒ geringe Verluste

aber

- ⇒ höherer Kostenaufwand
- ⇒ höhere Kurzschlussleistung, kleinere Netzimpedanz

Das Höchstspannungsnetz (380 kV und 220 kV) hat überwiegend maschenförmige Topologie.

1.3 Das europäische Verbundnetz (ENTSO-E)

Die Entwicklung nationaler elektrischer Energienetze verlief weltweit – und verläuft noch heute in den Entwicklungs- und Schwellenländern - in ähnlicher Weise. National unterscheiden sich lediglich die Spannungspegel der einzelnen Spannungsebenen (Höchst-, Hoch-, Mittel- und Niederspannungsebene).

In Europa entstand nach 1945 über einige Zwischenschritte das heutige europäische Verbundnetz (ENTSO-E-Netz). Ziel der ENTSO-E (European Network of Transmission System Operators for Electricity) ist, die bereits bestehenden oder noch zu errichtenden Stromübertragungsanlagen bestmöglich auszunutzen. Der internationale Austausch elektrischer Energie zwischen den Verbundpartnern soll erleichtert und gefördert werden, damit jedes Unternehmen die wirtschaftlich optimale Versorgung seiner Kunden erreichen kann.
Internationale Kuppelleitungen verbinden ganz Europa (***Bild 1.3***) auf der Höchstspannungsebene und schalten die Teilnetze zu einem *synchron betriebenen* europäischen Energieversorgungsnetz zusammen.

Das ENTSO-E-Netz ist als ein Verbundblock zu betrachten, in welchem die Netze der einzelnen Partner im Parallelbetrieb zusammengeschaltet sind. Durch diese Zusammenschaltung aller Netze entsteht eine „Schicksalsgemeinschaft", da sich Störungen in einem Teil-Netz über die Netzfrequenz auf alle Partner auswirken. Die Netze aller Teilnehmer werden daher nach einheitlichen Regeln und Kriterien betrieben, die für alle Mitglieder der Organisation Geltung haben. Grundsatz in der Betriebsführung dieses komplexen Systems ist die Eigenverantwortlichkeit jedes Partners für sein Netz. Probleme des Betriebs, die alle Partner betreffen, werden durch die ENTSO-E koordiniert. Auf der Grundlage der Betriebserfahrungen werden Regeln, Richtlinien und Empfehlungen erarbeitet und regelmäßig auf den neuesten Stand gebracht. Sie bilden den gemeinsamen Rahmen für die internationale Zusammenarbeit bei der Betriebsführung.

Gemeinsame Regeln und Empfehlungen betreffen die folgenden Themen:

- Netzregelung (Primär- und Sekundärregelung),
- Sicherung der Bedarfsdeckung zu jeder Zeit (Autarkie),
- Austauschprogramme und Abrechnung des Energieaustausches,
- Kraftwerksreserven,
- Schutzkonzepte,
- Maßnahmen gegen Großstörungen,
- Austausch von Netzdaten in Echtzeit für Off-line-Rechnungen,
- Koordination von Leitungsabschaltungen,
- Spannungs- und Blindleistungsregelung.

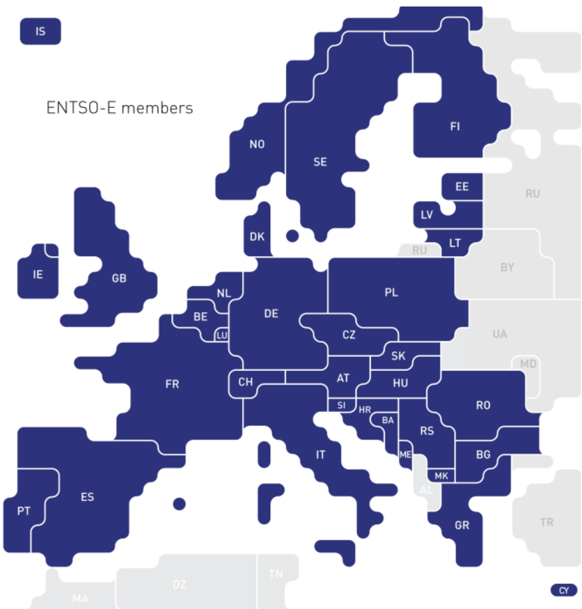


Bild 1.3 Bereich des synchronen elektrischen ENTSO-E-Netzes

Momentan gibt es Bestrebungen, das ENTSO-E-Netz nach Osten zu erweitern. Dem sind allerdings durch die Netzstabilität und die Frequenzhaltung zunehmend Grenzen gesetzt. Im ENTSO-E-Netz gilt die Forderung

$$f_{Netz} = f_0 \pm \Delta f \qquad \text{mit} \qquad \begin{aligned} f_0 &= 50\,\text{Hz} \\ \Delta f &= 50\,\text{mHz} \end{aligned} \quad . \tag{1.1}$$

Die Frequenzabweichung des Netzes in Russland und anderen GUS-Staaten kann bis zu $\Delta f = 1$ Hz betragen. Eine direkte Kopplung eines solchen Netzes mit dem ENTSO-E-Netz ist daher ohne weitere Maßnahmen nicht denkbar. Möglichkeiten, diese Beschränkungen zu überwinden ergeben sich durch

- den Einsatz moderner Steuerelemente in Netzen (FACTS-Betriebsmittel) und durch
- die Anbindung an das ENTSO-E-Netz durch Gleichstromkopplungen.

1.4 Struktur der Energieversorgungsunternehmen

Bis in die 90er Jahre existierten 9 überregional tätige Verbundunternehmen, d. h. Unternehmen, die an das Deutsche Verbundnetz (380 kV und 220 kV) angeschlossen waren. Diese Unternehmen operierten in ihren festgelegten Versorgungsgebieten autark – technisch und wirtschaftlich. Sie waren in der *Deutschen Verbundgesellschaft (DVG)* zusammengeschlossen und bildeten das *Deutsche Verbundnetz*. Zu jedem Verbundunternehmen gehörten alle Bereiche, die zur Erzeugung, Übertragung und Verteilung elektrischer Energie notwendig sind. Von den Verbundunternehmen bezogen die regionalen Energieversorger und die Stadtwerke den größten Teil ihrer elektrischen Energie. Es gab - und gibt auch heute noch - aber auch regionale Stromversorger mit eigenen Kraftwerken zur Energieerzeugung.

Um im liberalisierten Strommarkt konkurrenzfähiger zu sein, fusionierten die Unternehmen, so dass heute nur noch 4 so genannte Regelzonen existieren. Diese 4 Transportnetzbetreiber haben die Aufgabe, das einwandfreie Funktionieren des Verbundbetriebes zu garantieren.

Ziel der Liberalisierung des Strommarktes ist die Förderung des Wettbewerbs innerhalb Europas. Waren früher die Stromkunden an „ihren" Energieversorger gebunden, so können sie heute ihren Lieferanten frei wählen. Die Netzbetreiber sind verpflichtet – gegen angemessene Entlohnung – Strom fremder Lieferanten zu Kunden in ihrem früheren Versorgungsgebiet durchzuleiten. In der Folge sind – im Wesentlichen für Sondervertragskunden aus der Industrie – die Strompreise z. T. erheblich gesunken. Gemäß dem 1998 in Kraft getretenen *Energiewirtschaftsgesetz* müssen die Erzeugung, Übertragung und Verteilung elektrischer Energie <u>wirtschaftlich getrennt</u> erfolgen. Demgemäß haben sich die EVU's in den letzten Jahren umstrukturiert.

Bild 1.4 Regelzonen in Deutschland, Stand 2018

Zurzeit sind diese vier Netzbetreiber in Deutschland:

- Amprion (vormals *RWE Transportnetz Strom GmbH*),
- Transnet BW GmbH,
- TenneT TSO GmbH (vormals *transpower stromübertragungs GmbH*, jetzt im Besitz der niederländischen Tennet), und
- 50Hertz (vormals *Vattenfall Europe Transmission GmbH*). 50Hertz wurde im März 2010 an einen australischen Investmentfonds und Elia, den belgischen TSO, verkauft.

1.5 Energiewende im Bereich der elektrischen Energieerzeugung und des Netzmanagements

Die bisherige Energieversorgung wurde zum überwiegenden Teil durch große Kraftwerke getragen, die fossile Energieträger (z. B. Braun- und Steinkohle) oder Kernbrennstoffe (Uran) nutzten und deren Energiebereitstellung gesteuert werden konnte. Aufgrund dieser Steuermöglichkeit war es möglich, elektrische Energie so zu erzeugen, dass der zu jedem Zeitpunkt geforderte Leistungsbedarf abgefahren werden konnte.

Aus der Tagesbelastungskurve (***Bild 1.5***) geht hervor, dass eine bestimmte Last immer vorhanden ist. Man kann daher eine *Grundlast* definieren, die durch Grundlastkraftwerke bereitgestellt wird. In den Nachtstunden kann ein Teil der durch Grundlastkraftwerke erzeugten Energie sogar zur *Pumpspeicherung*, d. h. zum Auffüllen von Speicherseen benutzt werden. Tagsüber und am Abend tritt zusätzlich zur Grundlast die Mittellast auf. Um die Mittagsstunden und am Abend gegen 18 Uhr tritt die Spitzenlast auf, die durch Spitzenlastkraftwerke gedeckt wird.

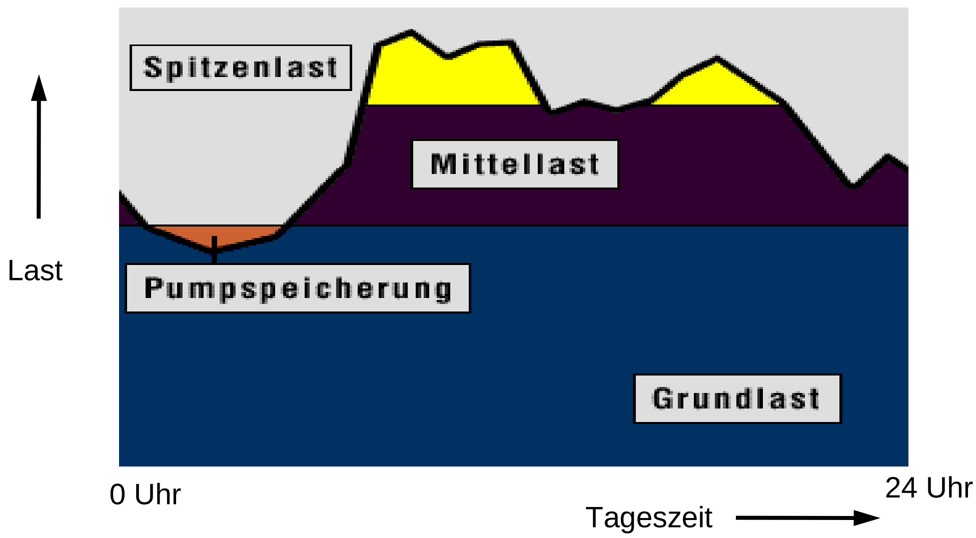


Bild 1.5 Prinzipieller zeitlicher Verlauf der in einem größeren Energienetz verbrauchten Wirkleistung $P_V(t)$, bezeichnet als *Tagesbelastungskurve*

Im klassischen Energiemix unterscheidet man:

- Grundlastkraftwerke:
  - Braunkohlekraftwerke
  - Kernkraftwerke
  - Laufwasserkraftwerke
- Mittellastkraftwerke:
  - Steinkohlekraftwerke
  - Speicherkraftwerke
  - Pumpspeicherkraftwerke
- Spitzenlastkraftwerke:
  - Gasturbinenkraftwerke
  - Pumpspeicherkraftwerke

Braunkohle- und Kernkraftwerke arbeiten mit dem geringsten Brennstoffbedarf pro kWh im kontinuierlichen Betrieb ohne Anfahrphasen. Laufwasserkraftwerke sind in Flussläufen angeordnet; durch die gleichmäßig fließende Wassermenge kann eine konstante elektrische Leistung erzeugt werden. Diese Kraftwerke werden daher als Grundlastkraftwerke eingesetzt.

Als Spitzenlastkraftwerke werden Kraftwerkstypen eingesetzt, die innerhalb kürzester Zeit auf Maximalleistung gefahren werden können. Dies ist sowohl bei Gasturbinen- als auch bei Pumpspeicherkraftwerken innerhalb weniger Minuten der Fall.

Erneuerbare Energien wie Wind- und Sonnenenergie stehen nicht deterministisch, d. h. geplant zur Verfügung. Sie sind volatil. Damit ist die Erzeugung elektrischer Energie durch Windenergie- und PV-Anlagen vom regionalen und überregionalen Wetter abhängig, das nicht beeinflusst werden kann (***Bild 1.6***). Inzwischen wurden die Werkzeuge für eine Prognose der am Folgetag erzeugbaren Energie aus regenerativen Quellen zwar erheblich verbessert, gesteuert werden kann sie dennoch nicht.

Der erforderliche Ausgleich der Volatilität regenerativer Energiequellen hat erhebliche Konsequenzen, insbesondere wenn sie einen hohen Anteil an den Primärenergiequellen haben sollen:

- *Konventionelle Kraftwerke gleichen die Volatilität regenerativer Energien aus*
  Die wird heute gemacht und führt dazu, dass konventionelle Kraftwerke aufgrund des Vorrangs regenerativ erzeugter Energien entsprechend deren Volatilität an- und abgefahren werden müssen. Das hat erhöhte Brennstoffkosten und einen erhöhten Verschleiß konventioneller Kraftwerke zur Folge. In vielen Fällen sind diese nicht mehr wirtschaftlich betreibbar. Mit zunehmendem Ausbau regenerativer Energieen werden sie an immer weniger Stunden im Jahr gebraucht, müssen aber letztlich doch für eine zuverlässige Energieversorgung bereit gehalten werden.
- *Ausbau regenerativer Energien bis die Spitzenleistung in jedem Fall gedeckt werden kann*
  Prinzipiell wäre diese Lösung denkbar. In den Nachtstunden und bei schlechtem Wetter liefern PV-Anlagen keine oder nur wenig Energie. Damit müsste man im Wesentlichen auf Windenergie setzen. Eine elektrische Energieversorgung nur auf Basis von Wind-

energieanlagen ist nicht zuverlässig realisierbar, zumindest dann nicht, wenn keine größräumige Vernetzung, z. B. über ganz Europa gegeben ist. Außerdem wäre ein erheblicher Ausbau der Windenergie in ganz Europa erforderlich. Generell müsste bei diesem Ansatz ein Vielfaches an installierter Leistung regenerativer Energien im Vergleich zur Spitzenlast vorhanden sein. Weiterhin würde an vielen Stunden im Jahr mehr elektrische Energie produziert als benötigt wird. Vereinzelt ist dies bereits heute der Fall und führte auch schon in der Vergangenheit zu einem negativen Strompreis.

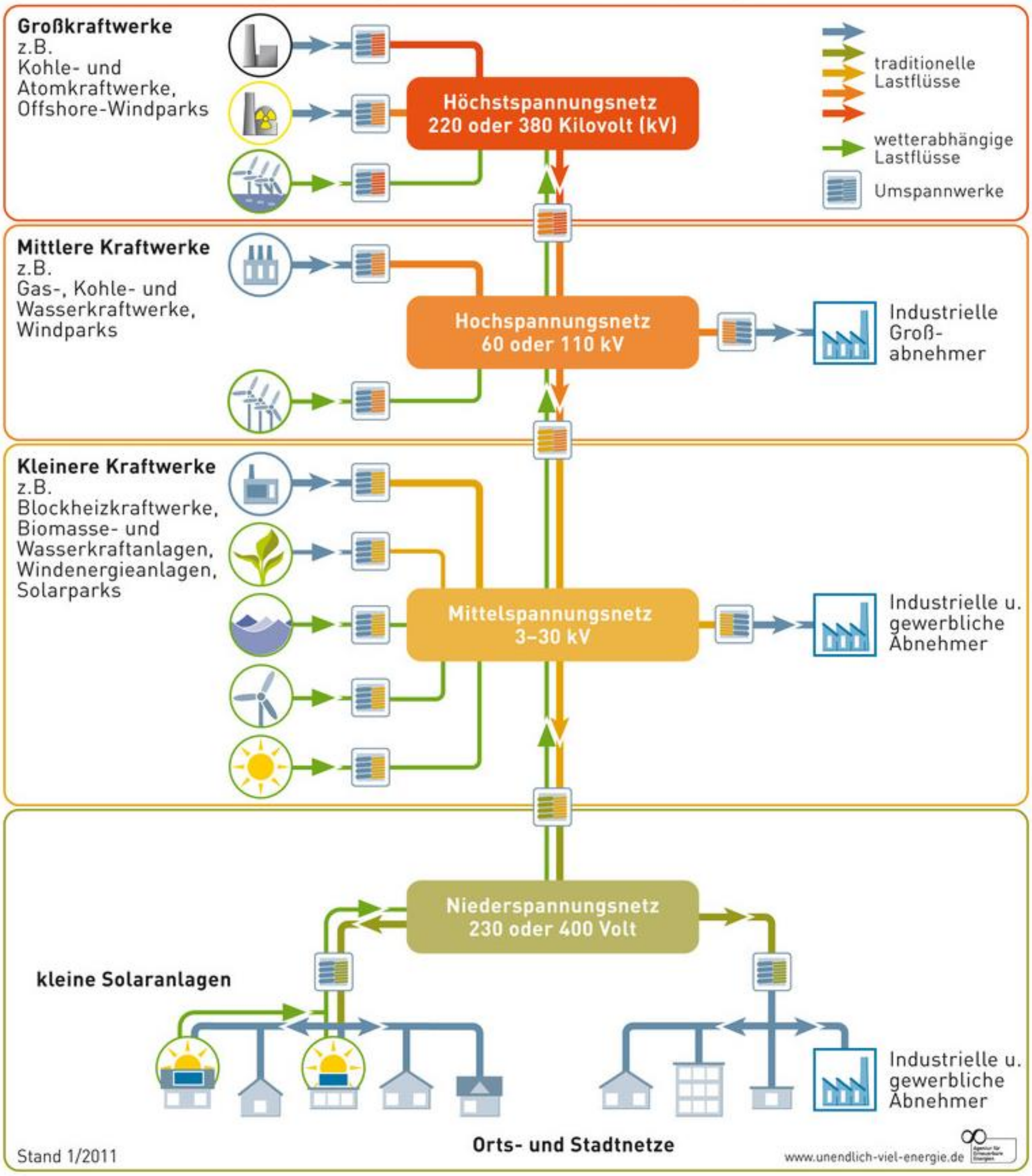


Bild 1.6 Struktur des elektrischen Energienetzes in Deutschland

- *Einsatz von Energiespeichern*

  Idealerweise würde man regenerative Energien nur soweit ausbauen, dass unter Verwendung geeigneter Energiespeicher stets die nachgefragte Leistung bereit gestellt werden kann. Eine gewisse Reserve eingerechnet wäre das mit hoher Wahrscheinlich-

keit die kostengünstigste und ressourcenschonendste Variante der elektrischen Energieversorgung.
Hierbei kann man einen Schritt weiter gehen und andere Energieformen und -netze betrachten. Mit Power-to-X wird der Übergang von elektrischer Energie in andere Energieträger bezeichnet. Möglichkeiten sind die Umwandlung elektrischer Energie in Wasserstoff durch Elektrolyse und ggf. anschließende Methanisierung zur Gewinnung von CH_4 (Methan), welches ins bestehende Gasnetz eingespeist werden kann. Dies wird als Power-to-Gas (P2G) bezeichnet. Ein weitere Möglichkeit ist die Umwandlung elektrischer Energie in Wärme und wird als Power-to-Heat (P2H) bezeichnet.

Insbesondere Power-to-Gas wird als aussichtsreiche Technologie angesehen. Prinzipell bestünde die Möglichkeit das erzeugte Gas wieder für die Stromerzeugung zu nutzen. Es gibt aber auch genügend Gas-Anwendungen, die eine sinnvolle und wirtchaftliche Nutzung des Gases erlauben. Grundgedanke ist dabei vor allem, die überschüssig erzeugte elektrische Energie aus regenerativen Quellen in Gas umzuwandeln, um eine Abregelung von Windenergieanlagen vermeiden zu können und die regenerativ erzeugte Energie zu einem möglichst hohen Anteil nutzen zu können. Hinzu kommt, dass das bestehende Gasnetz ein außerordentlich großer Energiespeicher ist.

Aufgabe des Netzmanagements ist es, eine

- zuverlässige
- nachhaltige und
- wirtschaftliche

Energieversorgung sicherzustellen. Hierzu können verschiedene Werkzeuge eingesetzt werden:

- Energiespeicher
- Sektorenkopplung

Bei der Sektorenkopplung betrachtet man die heute existierenden Energiesektoren „Strom“, „Gas“ und „Wärme“ nicht mehr entkoppelt voneinander, wie das bisher weitestgehend der Fall war, sondern man schafft gezielt Verbindungen zwischen diesen Energiesystemen und betrachtet sie im Sinne einer Optimierung ganzheitlich. Bestandteile der Sektorenkopplung sind z. B. Power-to-Gas (P2G) oder Power-to-heat (P2H), wobei dies im Grunde nur einen Teil der Sektorenkopplung darstellt.

Die Idee von Power-to-Gas (P2G) ist, Strom aus erneuerbaren Quellen (Wind, Solar) in Wasserstoff oder Methan umzuwandeln. Der Reiz dieses Ansatzes liegt darin, dass zum Transport und zur Speicherung des Gases die vorhandene Gasinfrastruktur genutzt werden kann. Das aus überschüssigem Strom erzeugte Gas kann in den verschiedenen Gas-Anwendungsbereichen genutzt werden oder bei Bedarf unter Berücksichtigung des Wirkunggrades wieder verstromt werden. Die Umwandlung von Strom in synthetisches Erdgas erfolgt in zwei Schritten: Zunächst wird Wasserstoff mittels Elektrolyse erzeugt, anschließend folgt die Methanisierung.

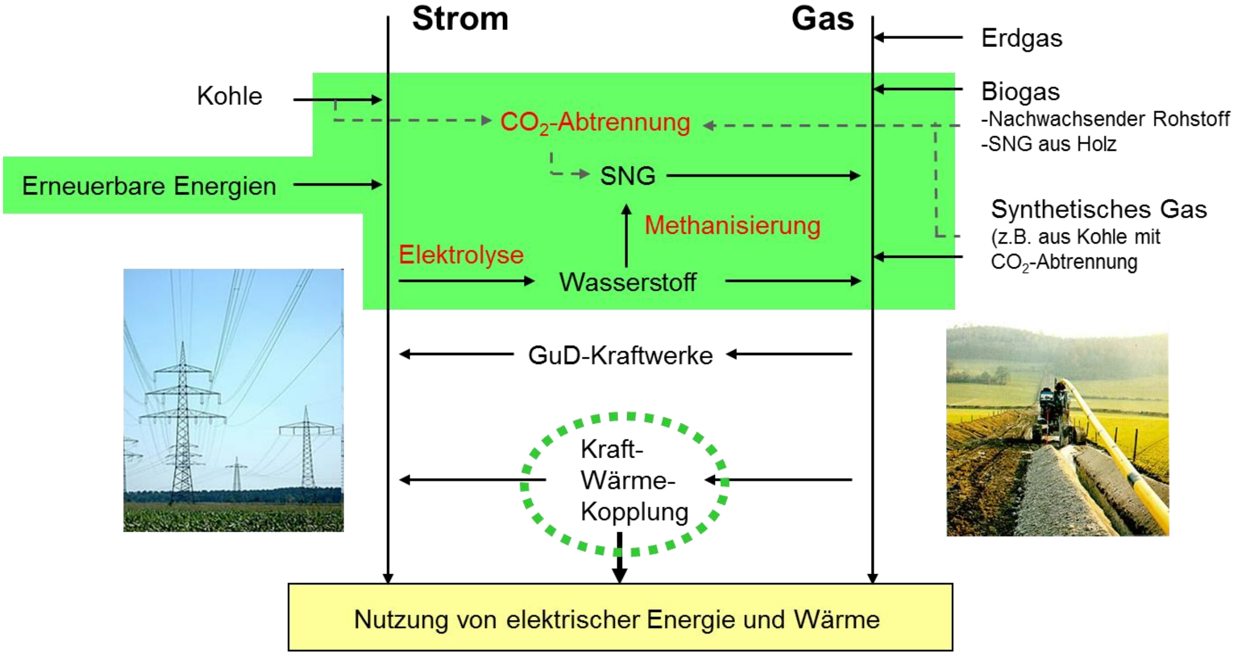


Bild 1.7 Grundprinzip des Systemansatzes „Power-to-Gas“

Für die Wasserelektrolyse stehen derzeit drei Verfahren zur Verfügung:

- die alkalische Elektrolysetechnik mit einem basischen Flüssigelektrolyten (AEL),
- die PEM (Proton Exchange Membrane)-Elektrolysetechnik mit einem polymeren Festelektrolyten (PEMEL),
- die Hochtemperatur-Elektrolysetechnik mit einem Festoxidelektrolyten (HTEL).

Während die alkalische Elektrolyse seit Mitte des 20. Jahrhunderts in kommerziellen Großanlagen zur Wasserstoffgewinnung genutzt wird, befinden sich die PEM-Elektrolyse und die Hochtemperatur-Elektrolyse noch in der Entwicklung und Erprobungsstadium.

Mit Hilfe der Methanisierung wird aus Wasserstoff (H_2) und Kohlenstoffdioxid (CO_2) oder Kohlenstoffmonoxid (CO) synthetisches Methan (CH_4) erzeugt. Die größte technische Herausforderung des Prozesses ist die Gewährleistung einer konstanten, gleichmäßigen Wärmeabfuhr, da der Prozess exotherm abläuft. Für den Prozess wurden Zwei- und Drei-Phasen-Systeme entwickelt. Bei beiden Systemen sind die Edukte gasförmig und die Katalysatoren fest. Zusätzlich besitzen Drei-Phasen-Systeme noch ein flüssiges Wärmeträgermedium, welches bei Zwei-Phasen-Systemen aufgrund des Reaktoraufbaus nicht benötigt wird. Zwei-Phasen-Systeme sind derzeit als Festbett- und Wirbelschichtreaktoren kommerziell erhältlich, wobei Festbettreaktoren am häufigsten zum Einsatz kommen. Das bisher einzige Drei-Phasen-Konzept, die Blasensäule, konnte sich noch nicht durchsetzen und wird gegenwärtig weiterentwickelt und in Pilotanlagen getestet. Der Vorteil des Drei-Phasen-Systems ist, dass es Lastschwankungen besser verkraftet als Zwei-Phasen-Systeme.

Das bei der Methanisierung benötigte CO_2 kann grundsätzlich aus fossilen oder regenerativen Quellen stammen. Auf fossilen Energieträgern beruhende CO_2-Quellen sind z. B. aus Kohlekraftwerken abgeschiedenes CO_2, industrielle Prozesse wie bei der Kalk- oder Zementproduktion oder aus der Luft absorbiertes CO_2. Durch die Nutzung biogener CO_2-Quellen, wie Biogasanlagen, Biomassevergasungsanlagen oder Kläranlagen, kann synthetisches Erdgas aus rein erneuerbaren Quellen hergestellt werden. Unter Berücksichtigung der Decarbonisierungsstrategie der Bundesregierung ist eine Nutzung regenerativer CO_2–Quellen für die Systemlösung Power to Gas unerlässlich.

Power-to-Heat (P2H) bedeutet die Umwandlung von elektrischer Energie in Wärmeenergie. So könnte die überschüssig produzierte elektrische Energie direkt in Wärme zur Versorgung größerer Städte oder auch einzelner Haushalte mit Wärme verwendet werden. In Zeiten extrem niedriger Strompreise waren sogenannte Nachtspeicherheizungen populär.

Vorteil dieser Technologie ist die Verfügbarkeit der notwendigen technischen Lösungen in Form von Heizstäben. Nachteilig ist, dass elektrische Energie „höherwertiger" ist, als Wärmeenergie. Elektrische Energie kann vergleichsweise einfach in andere Energieformen gewandelt werden, was bei Wärmeenergie nicht der Fall ist. Daher ist P2H sowohl politisch als auch unter Experten umstritten.

1.6 Gesamtheitliche Betrachtung des Energienetzes

Das derzeitige Energiesystem besteht im Wesentlichen aus getrennten Energieflüssen. Hinsichtlich des Energienetzes kann man zwischen dem Stromnetz und dem Gasnetz unterscheiden. Diese beiden Netze sind überregional verfügbar, das Wärmenetz ist ein in größeren Städten lokal verfügbares Netz. Übergangsstellen zwischen den Energieträgern dieser Netze findet man heute im Wesentlichen bei den Gas- und GuD-Kraftwerken. Hier wird Erdgas zur Befeuerung der Turbinen genutzt, um elektrische Energie zu erzeugen. Der Dampf kann lokal als Prozessdampf in enetsprechenden Industrieanlagen genutzt werden.

Abgesehen davon gibt es jedoch kaum eine Kopplung der 3 Energienetze. Mit P2G ist diese Kopplung möglich und gleichzeitig kann das Gasnetz als Speichermedium genutzt werden. Dies bietet weitreichend, heute noch kaum untersuchte Möglichkeiten der Nutzung von Synergien.

Erforderlich für die Hebung dieser Synergien ist die ganzheitliche Betrachtung und insbesondere die Modellierung der Energienetze. Hierbei kommt die größte Bedeutung der Kopplung zwischen Strom- und Gasnetz zu (***Bild 1.8***). Das Wärmenetz kann aber lokal durchaus eine erhebliche Rolle spielen. Die ganzheitliche Modellierung von Strom- und Gasnetz wird in der Forschung eine wichtige Rolle spielen. Einige physikalische Eigenschaften und damit die Modellansätze sich sehr unterschiedlich:

<u>Stromnetz</u>

- Zeitlich synchron im gesamten Energienetz,
- Wirk- und Blindleistung hat im Gasnetz kein Pendant,
- Zeitliche Vorgänge werden (stationär) durch komplexe Zeiger beschrieben.

Gasnetz

- Die Vermischung verschiedener Gasqualitäten muss berücksichtigt werden, weiterhin muss der Transport des Gases in der Gasleitung modelliert werden. Der Transportvorgang einer Gasmenge kann im Bereich von Stunden oder Tagen liegen,
- Gas hat einen von der Gasqualität abhängigen Brennwert, der einer Wirkleistung entpricht,
- Zeitliche Vorgänge werden durch Strömungsgleichungen beschrieben.

Für eine Optimierung des Energienetzes und der Energieversorgung muss eine kombinierte Betrachtung angegangen werden. Aktuelles Ziel der Forschung in diesem Bereich ist die einheitliche mathematische Beschreibung beider Netze, mit dem Ziel auf dieser Basis eine Optimierung durchführen zu können.

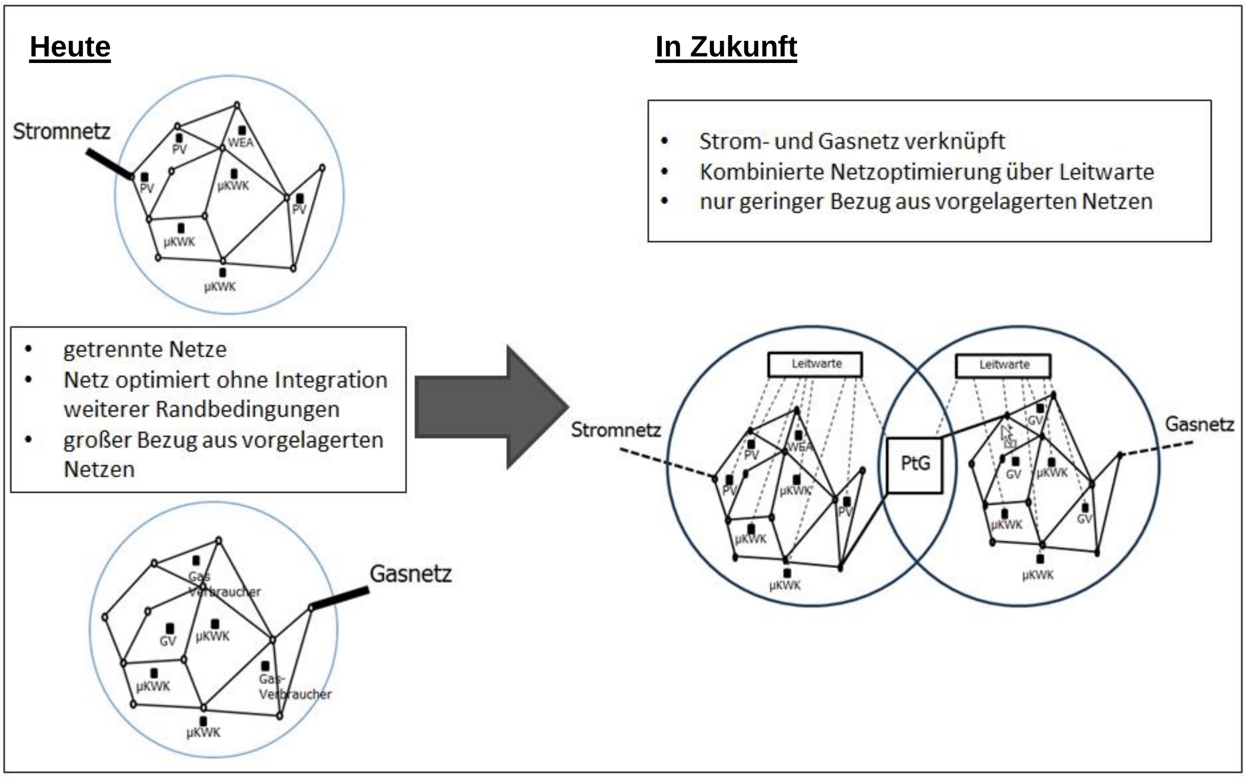


Bild 1.8 Prinzip der Kopplung von Strom- und Gasnetz

2 Mathematische Behandlung elektrischer Netzwerke

2.1 Partielle und gewöhnliche Differentialgleichung (DGL)

Schaltungen mit konzentrierten Elementen (Widerstand *R*, Kapazität *C*, Induktivität *L*, ideale Transformatoren *ü*) führen auf eine mathematische Beschreibung durch *gewöhnliche Differentialgleichungen*. Bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung treten neben der gesuchten Funktion *y(t)* auch deren Ableitungen (z. B. *y'(t)*, *y"(t)*,…) auf, außerdem hängt die Funktion *y* nur von einer Veränderlichen, nämlich der Zeit *t* ab. Dies schließt die Forderung ein, dass alle Bauelemente *zeitinvariant und linear* sind.

Schaltungen mit verteilten Bauelementen führen dagegen auf *partielle Differentialgleichungen*. Bei ihnen hängt die gesuchte Funktion *y* von mehreren Parametern ab. Ein Beispiel ist die mathematische Beschreibung von langen Leitungen. Bei ihnen sind Spannung und Strom sowohl vom Ort (*x*) als auch von der Zeit (*t*) abhängig. Die mathematische Beschreibung langer Leitungen enthält daher zusätzlich noch partielle Ableitungen, z. B. $\partial u/\partial t$ oder $\partial u/\partial x$.

2.2 Bauelemente elektrischer Netzwerke und ihre mathematische Beschreibung

Elektrische und elektronische Schaltungen können durch die 3 elektrotechnischen Bauelemente Widerstand *R*, Kapazität *C*, Induktivität *L* sowie ggf. einen idealen Transformator (Übertrager) *ü* beschrieben werden. Halbleiterbauelemente lassen sich durch Ersatzschaltungen aus diesen Elementen sowie gesteuerten Quellen in dem jeweils interessierenden Frequenzbereich beschreiben. In ***Bild 2.1*** sind beispielhaft einfache Ersatzschaltungen für Bipolar- und Feldeffekttransistoren (FET) sowie von Operationsverstärkern für *niedrige Frequenzen* angegeben.

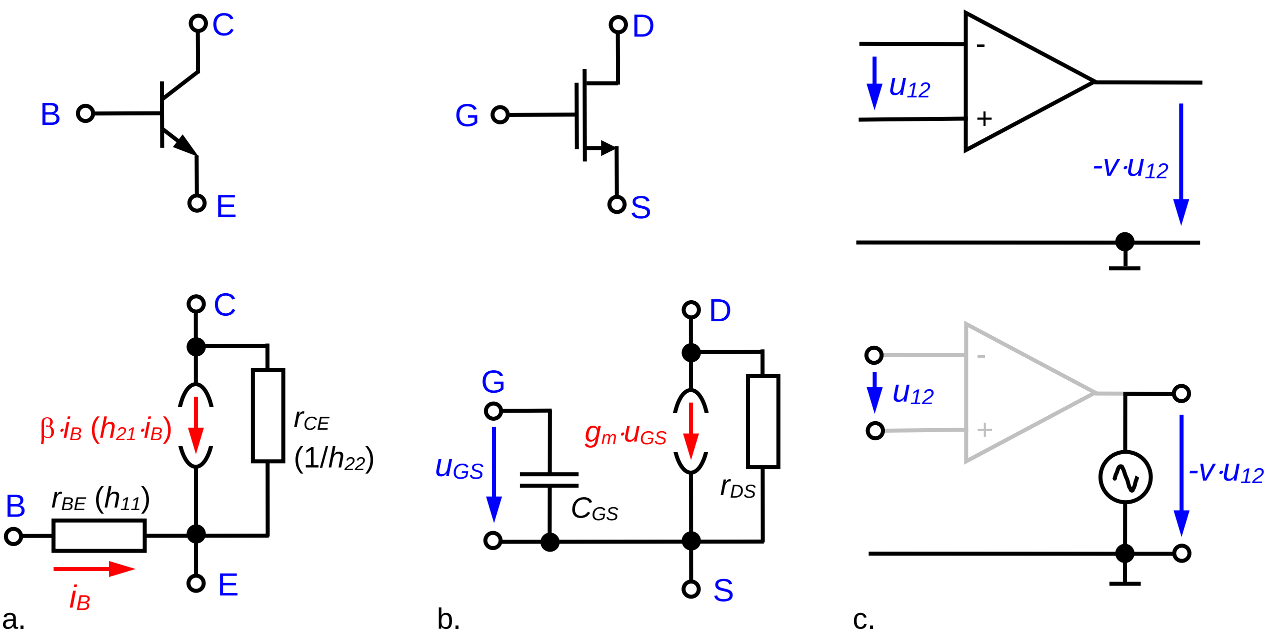


Bild 2.1 Vereinfachte Ersatzschaltungen für niedrige Frequenzen (NF-Ersatzschaltbild)
a. Bipolartransistor (stromgesteuerte Stromquelle)
b. Feldeffekttransistor (MOSFET, JFET), (spannungsgesteuerte Stromquelle)
c. Operationsverstärker (spannungsgesteuerte Spannungsquelle)

Bild 2.2 zeigt eine Zusammenstellung der für die Bauelemente Widerstand *R*, Kapazität *C*, Induktivität *L* geltenden Gleichungen für Strom und Spannung.

Induktivität *L* und Kapazität *C* sind Energiespeicher. *Energiekennzeichnende Größen* sind der Strom i_L durch eine Induktivität (Drosselstrom) und die Spannung u_C an einer Kapazität (Kondensatorspannung). Diese beiden Größen können sich nicht sprungartig ändern. Eine sprungartige Änderung der Kondensatorspannung oder des Drosselstromes würde eine unendlich hohe Leistung erfordern – dies ist in der Natur nicht möglich. Später wird sich zeigen, dass der Strom durch eine Induktivität und die Spannung an einer Kapazität *Zustandsgrößen* sind. Sie beschreiben den energetischen Zustand eines elektrischen Netzwerkes.

Von Bedeutung für die Lösung von Differentialgleichungen sind die Anfangsbedingungen der Energiespeicher, d. h. die Anfangswerte des Drosselstromes $i_L(t=0) = i_L(0)$ und der Kondensatorspannung $u_C(t=0) = u_C(0)$.

Weitere Eigenschaften der Bauelemente Widerstand *R*, Kapazität *C*, Induktivität *L* sind bisweilen von Interesse:

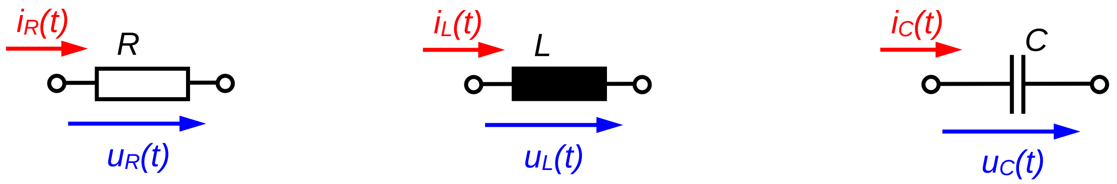
- Wirkleistung $P(t) = u_R(t) \cdot i_R(t)$ kann nur an einem ohmschen Widerstand umgesetzt werden. Die Wirkleistung, die dem Widerstand in Form von Strom und Spannung zugeführt wird, wird in Wärmeleistung umgewandelt,
- an einer Induktivität kann im *zeitlichen Mittel* keine Gleichspannung abfallen, da dies einen stetig ansteigenden Strom zur Folge hätte,
- über eine Kapazität kann im *zeitlichen Mittel* kein Gleichstrom fließen, da dies eine stetig ansteigende Spannung über der Kapazität zur Folge hätte.

Als weiteres passives Bauelement ist noch der ideale Transformator von Bedeutung. Netzwerktheoretisch gesehen findet lediglich eine Spannungs- und Stromtransformation mit dem Windungszahlverhältnis des Transformators statt (***Bild 2.3***):

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{w_1}{w_2} = ü \qquad \frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{ü} \quad . \tag{2.1}$$

In einem idealen Transformator findet keine Speicherung elektrischer Energie statt. Dies kann man leicht nachweisen:

$$p_1(t) = u_1(t) \cdot i_1(t) = u_2(t) \cdot ü \cdot \frac{1}{ü} \cdot i_2(t) = u_2(t) \cdot i_2(t) = p_2(t) \quad . \tag{2.2}$$



$$u_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \qquad u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i_C(t)dt + u_C(t=0)$$

$$i_R(t) = \frac{1}{R} \cdot u_R(t) \qquad i_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \int u_L(t)dt + i_L(t=0) \qquad i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Bild 2.2 Beziehung zwischen Strom und Spannung für Widerstand, Induktivität und Kapazität

Wie im vorigen Kapitel gezeigt wurde, kann ein realer Transformator stets durch einen idealen Transformator und weitere Bauelemente (Widerstände, Induktivitäten und für Hochfrequenz-Ersatzschaltbilder zusätzlich Kapazitäten) dargestellt werden.

Ein idealer Transformator bewirkt eine Impedanztransformation. Für die auf der Primärseite (Index „1“) sichtbare Impedanz in den Transformator gilt:

$$R_1 = \frac{u_1(t)}{i_1(t)} = u_2(t) \cdot \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{1}{i_2(t)} \cdot \frac{w_1}{w_2} = R_2 \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 = R_2 \cdot ü^2 \quad , \qquad (2.3)$$

d. h. der Widerstand R_2 transformiert sich mit dem Faktor $(w_1/w_2)^2$ auf die jeweils andere Seite.

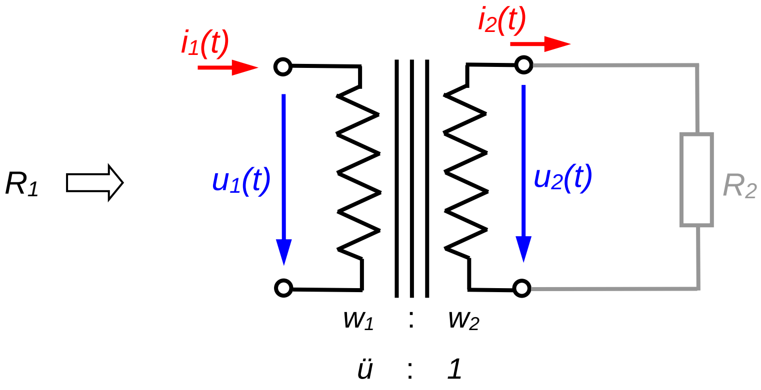


Bild 2.3 Beziehung zwischen Strom und Spannung bei einem idealen Transformator

2.3 Wechselstrom, Drehstrom und einfache dreiphasige Schaltungen

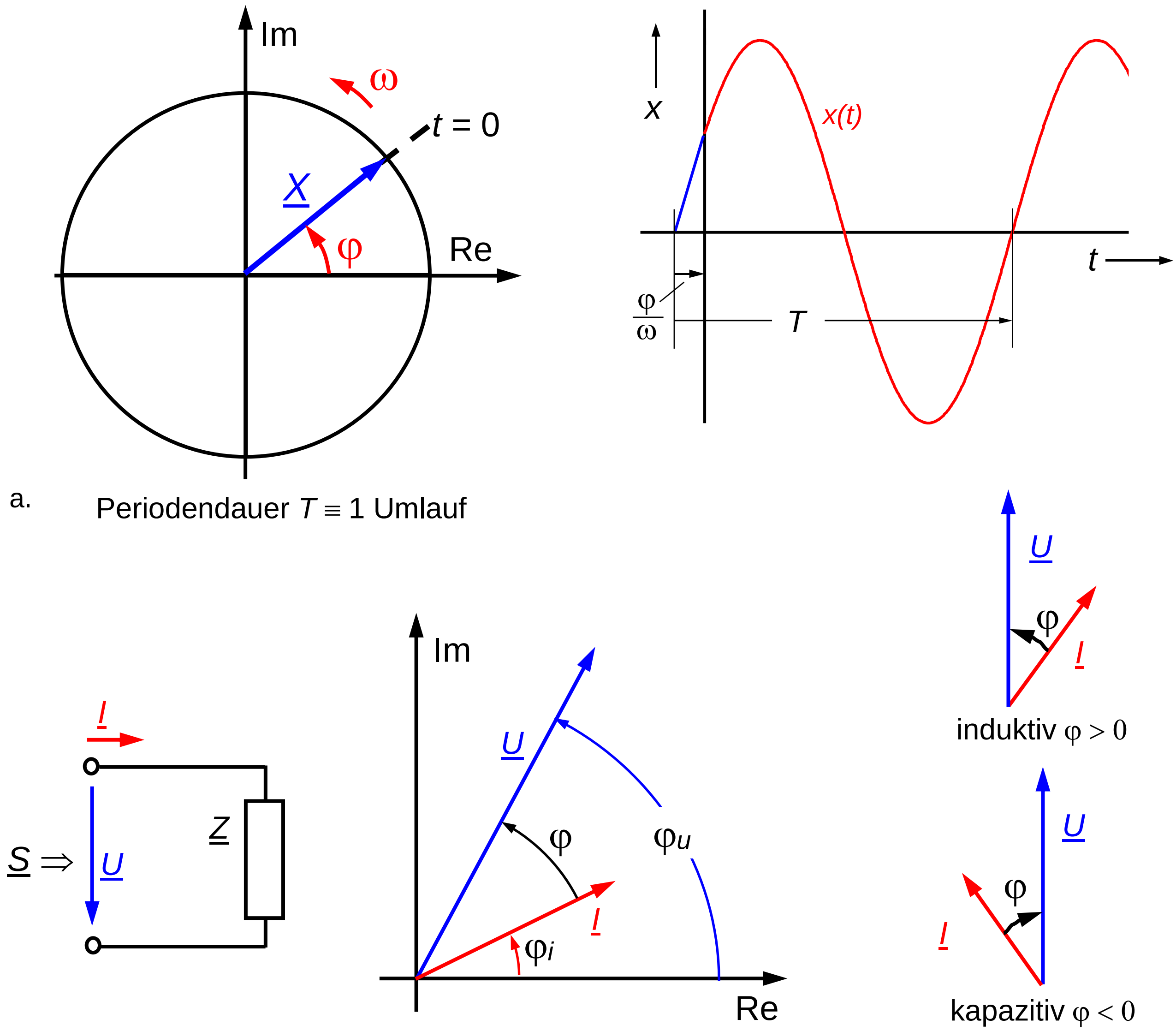
2.3.1 Einphasiges Wechselstromsystem

Eine komplexe Größe $\underline{x}(t)$ wird im Zeigerdiagramm als umlaufender Zeiger dargestellt. Dies kann eine Spannung oder ein Strom, prinzipiell auch jede andere physikalische Größe sein. Real- und Imaginärteil ergeben sich durch die Projektion des Zeigers auf die reelle und imaginäre Achse (***Bild 2.4***).

In der allgemeinen Darstellung eines Zeigers wird eine Drehung des Zeigers im *mathematisch positiven Sinn* gegenüber der reellen Achse um einen Winkel φ eingeführt.

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \hat{X} \cdot \left(\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)\right) = \hat{X} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} \\ &= \left(\sqrt{2}\ X \cdot e^{j\varphi}\right) \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \cdot \left(X \cdot e^{j\varphi}\right) \cdot e^{j\omega t} = \sqrt{2} \cdot \underline{X} \cdot e^{j\omega t} \quad . \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Im Zeigerdiagramm werden üblicherweise die Effektivwerte $\underline{X}$ benutzt. Philosophie des Zeigerdiagramms ist, dass nur die Winkel der Zeiger zueinander und zu einer Bezugsachse (der reellen Achse) betrachtet werden. Im stationären Zustand und Anregung des Systems mit einer Frequenz f_0 rotieren alle Zeiger mit derselben Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$, daher kann man diese Rotation in der Darstellung der Zeiger auch weglassen. Dies vereinfacht die Darstellung der Wechselgrößen deutlich.



b. c.

Bild 2.4 Einphasiges Wechselstromsystem

a. Komplexe Größe im Zeigerdiagramm und Darstellung im Zeitbereich

b. Spannung, Strom und Leistung einer einphasigen Wechselstromschaltung

c. Phasenbeziehung zwischen Strom und Spannung (gemäß DIN 40 110 vom Strom zur Spannung hin gepfeilt)

In der Zeigerdarstellung bedeutet

$$e^{j \cdot \alpha}$$

- Drehung gegen den Uhrzeigersinn für $\alpha > 0$ (mathematisch positive Richtung),
- Drehung in Richtung des Uhrzeigersinns für $\alpha < 0$ (mathematisch negative Richtung).

Die Lage der reellen Achse ist prinzipiell frei wählbar. Wählt man sie wie in ***Bild 2.4a*** dargestellt horizontal, so gilt für die Spannung im Zeitbereich

$$x(t) = \mathrm{Im}\{\underline{x}(t)\} = \hat{X} \cdot \mathrm{Im}\{(\cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi))\} = \hat{X} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad , \tag{2.5}$$

wenn der Zeiger $\underline{x}(t)$ auf die imaginäre Achse projiziert wird. Wird der Zeiger $\underline{x}(t)$ auf die reelle Achse projiziert, so gilt für die Spannung im Zeitbereich

$$x(t) = \mathrm{Re}\{\underline{x}(t)\} = \hat{X} \cdot \mathrm{Re}\{(\cos(\omega t + \varphi) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi))\} = \hat{X} \cdot \cos(\omega t + \varphi) \quad . \tag{2.6}$$

Prinzipiell ist beides anwendbar.

Für den Effektivwert der Scheinleistung $\underline{S}$, die ein Verbraucher in einem einphasigen Wechselstromsystem aufnimmt (***Bild 2.4c***), gilt mit den komplexen Effektivwerten $\underline{U}$ und $\underline{I}$ von Spannung und Strom:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + j \cdot Q \quad . \tag{2.7}$$

Üblicherweise legt man die Spannung *u(t)* in die reelle Achse. Der Strom *i(t)* ist dann gegenüber der Spannung – abhängig von der Art der Belastung – um den Phasenwinkel φ verschoben. Für die Zeiger von Spannung und Strom erhält man damit:

$$\underline{U} = U \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} \qquad \text{und} \qquad \underline{I} = I \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} \quad , \tag{2.8}$$

daraus folgt für die Scheinleistung (Effektivwert)

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U \cdot e^{j\omega t} \cdot I \cdot e^{-j\omega t} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = U \cdot I \cdot e^{j\varphi} = U \cdot I \cdot (\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)) = P + jQ$$
$$\text{mit} \qquad P = U \cdot I \cdot \cos(\varphi) \qquad Q = U \cdot I \cdot \sin(\varphi) \qquad \text{und} \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad . \tag{2.9}$$

Für den zeitlichen Momentanwert der Wirkleistung *P(t)* eines 1-phasigen Wechselstromsystems gilt:

$$\begin{aligned} P(t) &= \hat{U} \cdot \sin(\omega t) \cdot \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \varphi) = \frac{\hat{U} \cdot \hat{I}}{2} \cdot (\cos(\varphi) - \cos(2\omega t + \varphi)) \\ &= \underbrace{U \cdot I \cdot \cos(\varphi)}_{=const=P=P_{eff}} - \underbrace{U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi)}_{zeitabhängig} \end{aligned} \quad . \tag{2.10}$$

Man erkennt, dass der durch ein 1-phasiges Wechselstromsystem übertragene Momentanwert der Wirkleistung *P(t)* zeitlich nicht konstant ist, sondern mit der Kreisfrequenz $2 \cdot \omega$, d. h. mit der doppelten Netzfrequenz schwingt. Für die Übertragung großer Leistungen ist dies sehr ungünstig, da die pulsierende Wirkleistung auch pulsierende Drehmomente erzeugt, insbesondere die Fundamente 1-phasiger Generatoren werden durch diese pulsierenden Drehmomente belastet. Eine wechselnde Belastung führt auf Dauer zu Materialermüdungen und damit zu Schäden an den betreffenden Anlagen.

2.3.2 Drehstromsystem (Dreiphasensystem)

In der elektrischen Energietechnik spielt das symmetrische Drehstromsystem eine zentrale Rolle. Die wesentlichen Vorteile des Drehstromes sind:

- konstante Wirkleistungsübertragung (im Gegensatz zum einphasigen Wechselstrom)
- geringere Leiterquerschnitte im Vergleich zum einphasigen Wechselstrom bei gleicher übertragener Leistung
- einfache Spannungserzeugung durch Drehfeldmaschinen
- im Gegensatz zum Gleichstrom kann bei Wechsel- und Drehstrom das auf dem Induktionsgesetz beruhende transformatorische Prinzip angewandt werden und dadurch auf einfache Weise eine Spannungsanpassung erfolgen.

Bild 2.5 zeigt die Orientierung der Sternspannungen im Dreiphasensystem. Mathematisch lassen sich die einzelnen Zeiger (Effektivwertzeiger) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_R &= U_R \cdot e^{j(\omega t - 0^o)} = U_R \cdot e^{j\omega t} \\
\underline{U}_S &= U_S \cdot e^{j(\omega t - 120^o)} = U_S \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \\
\underline{U}_T &= U_T \cdot e^{j(\omega t - 240^o)} = U_T \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} = U_T \cdot e^{j\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)}
\end{aligned} \quad . \qquad (2.11)$$

Gleichung (2.11) beschreibt die Sternspannungen von den Leitern zum Sternpunkt, manchmal auch als Strangspannungen bezeichnet. *Die Sternspannungen sind besonders bei der Betrachtung einphasiger Ersatzschaltbilder von Bedeutung.*

Die Phasenfolge R, S und T ist in Richtung des Uhrzeigersystems orientiert, d. h. ausgehend von $\underline{U}_R$ folgt um 120° versetzt $\underline{U}_S$ in Richtung des Uhrzeigersinns und wiederum um 120° versetzt zu $\underline{U}_S$ folgt $\underline{U}_T$. Ein „außen" feststehender Beobachter „sieht" nacheinander die Zeiger $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, und $\underline{U}_T$ an sich vorbeistreichen.

Von Bedeutung sind noch die Leiterspannungen gemäß (***Bild 2.5c***)

$$\underline{U}_{TR} = U_{TR} \cdot e^{j(\omega t - 210^o)} \qquad \underline{U}_{RS} = U_{RS} \cdot e^{j(\omega t - 330^o)} \qquad \underline{U}_{ST} = U_{ST} \cdot e^{j(\omega t - 90^o)}, \qquad (2.12)$$

diese Darstellung entspricht zwar dem in ***Bild 2.5*** gewählten Koordinatensystem, ist aber ungünstig. Wegen der im Term $e^{j\omega t}$ enthaltenen Drehung kann man auch einen für Berechnungen besser geeigneten Ausdruck analog zu (2.11) verwenden:

$$\underline{U}_{RS} = U_{RS} \cdot e^{j\omega t} \qquad \underline{U}_{ST} = U_{ST} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \qquad \underline{U}_{TR} = U_{TR} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \quad . \qquad (2.13)$$

In der elektrischen Energietechnik kann man bis auf wenige Ausnahmen von einem symmetrischen Dreiphasensystem ausgehen. Bei einem symmetrischen Dreiphasensystem sind die Effektivwerte (und Amplituden) der Stern- und Leiterspannungen identisch:

$$U_R = U_S = U_T = U_Y \qquad \text{und} \qquad U_{RS} = U_{ST} = U_{TR} = U_L \quad . \qquad (2.14)$$

Für die Beträge von Leiter- und Sternspannungen gilt weiter (***Bild 2.5a***):

$$\cos(30^o) = \frac{\frac{U_{RS}}{2}}{U_R} = \frac{U_L}{2U_Y} \qquad \text{oder} \qquad U_L = 2 \cdot \underbrace{\cos(30^o)}_{\sqrt{3}/2} \cdot U_Y = \sqrt{3} \cdot U_Y \quad . \qquad (2.15)$$

Die Bemessungsspannung U_r (engl.: rated voltage) eines Systems ist immer die Leiterspannung U_L!

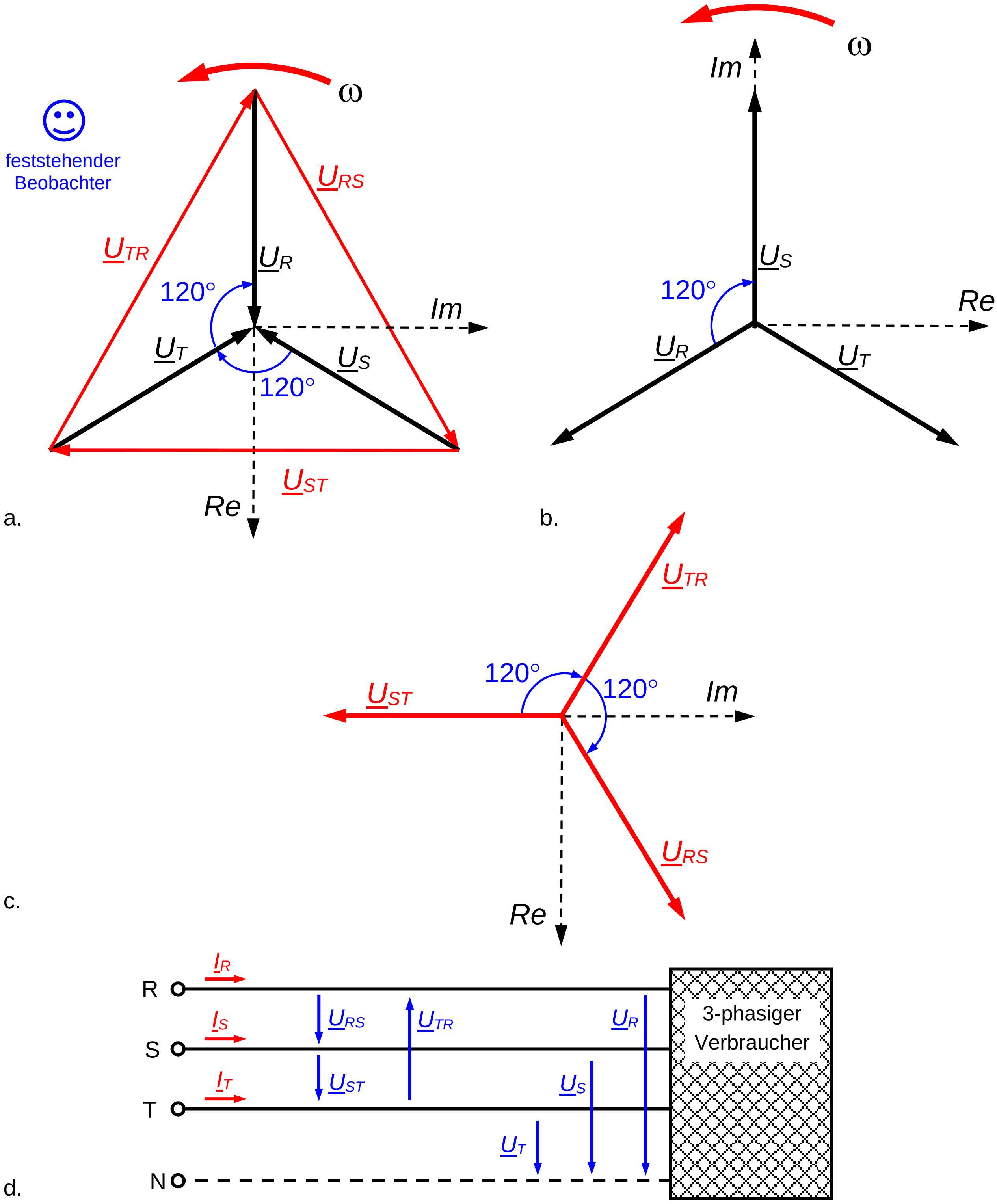


Bild 2.5 Spannungen und Ströme im Dreiphasensystem
a. Zeigerdiagramm der Stern- und Leiterspannungen
b. Zeigerdiagramm der Sternspannungen in der komplexen Ebene
c. Zeigerdiagramm der Leiterspannungen in der komplexen Ebene
d. Spannungen und Ströme an einem 3-phasigen Verbraucher

Aus den Gleichungen (2.11) und (2.13) folgt für die Leiterspannungen $\underline{U}_{RS}$, $\underline{U}_{ST}$, und $\underline{U}_{TR}$ sowie für die Sternspannungen $\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$, und $\underline{U}_T$:

$$\underline{U}_{RS} + \underline{U}_{ST} + \underline{U}_{TR} = 0 \qquad \text{und} \qquad \underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T = 0 \quad . \tag{2.16}$$

Bei ebenfalls symmetrischem 3-phasigem Verbraucher gilt außerdem:

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \quad . \tag{2.17}$$

Im elektrischen Energienetz können die Ströme meist als symmetrisch betrachtet werden.

Ein symmetrisches *Drehspannungssystem* kann repräsentativ durch einen einzigen Zeiger, z. B. $\underline{U}_R$ dargestellt werden. Die Lage aller anderen Zeiger ergebt sich aus der Symmetrie. Entsprechend (2.11) ergibt sich bei vollständig symmetrischen Verhältnissen

$$\underline{U}_R = U_0 \cdot e^{j\omega t} \qquad \underline{U}_S = U_0 \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \qquad \underline{U}_T = U_0 \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \quad . \tag{2.18}$$

Fasst man das Zeigerdiagramm (***Bild 2.5b***) als komplexe Ebene auf, ergibt sich der Zeiger $\underline{U}_S$, indem man den Zeiger $\underline{U}_R$ um 240° in mathematisch positive Richtung dreht, entsprechend ergibt sich $\underline{U}_T$, wenn man $\underline{U}_R$ um 120° in mathematisch positive Richtung dreht:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_R &= U_0 \cdot e^{j\omega t} \\
\underline{U}_S &= \underbrace{U_0 \cdot e^{j\omega t}}_{\underline{U}_R} \cdot e^{+j\frac{4\pi}{3}} = U_0 \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} = \underline{U}_R \cdot e^{+j\frac{4\pi}{3}} = \underline{U}_R \cdot \underline{a}^2 \\
\underline{U}_T &= \underbrace{U_0 \cdot e^{j\omega t}}_{\underline{U}_R} \cdot e^{+j\frac{2\pi}{3}} = U_0 \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} = \underline{U}_R \cdot e^{+j\frac{2\pi}{3}} = \underline{U}_R \cdot \underline{a} \qquad \text{mit} \quad \underline{a} = e^{+j\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned} \quad . \tag{2.19}$$

Wie aus ***Bild 2.5d*** hervorgeht, kann der Momentanwert der übertragenen Wirkleistung in einem Dreiphasensystem durch die Betrachtung von 3 Einphasensystemen mit den jeweiligen Sternspannungen und den Leiterströmen berechnet werden. Damit erhält man für die von den einzelnen Phasen übertragenen Wirkleistungen analog zu Gleichung (2.10):

$$\begin{aligned}
P_R(t) &= \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \left(\cos(\varphi) \; - \; \cos(2\omega t + \varphi)\right) \\
P_S(t) &= \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \left(\cos(\varphi) \; - \; \cos(2\omega t - \frac{4 \cdot \pi}{3} + \varphi)\right) \\
P_T(t) &= \frac{U_L}{\sqrt{3}} \cdot I_L \cdot \left(\cos(\varphi) \; - \; \cos(2\omega t - \frac{8 \cdot \pi}{3} + \varphi)\right)
\end{aligned} \quad . \tag{2.20}$$

Durch Anwendung der Additionstheoreme kann der von einem symmetrischen Drehstromsystem übertragene Momentanwert der Wirkleistung berechnet werden:

$$P(t) = P_R(t) + P_S(t) + P_T(t) = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \cos(\varphi) \quad . \tag{2.21}$$

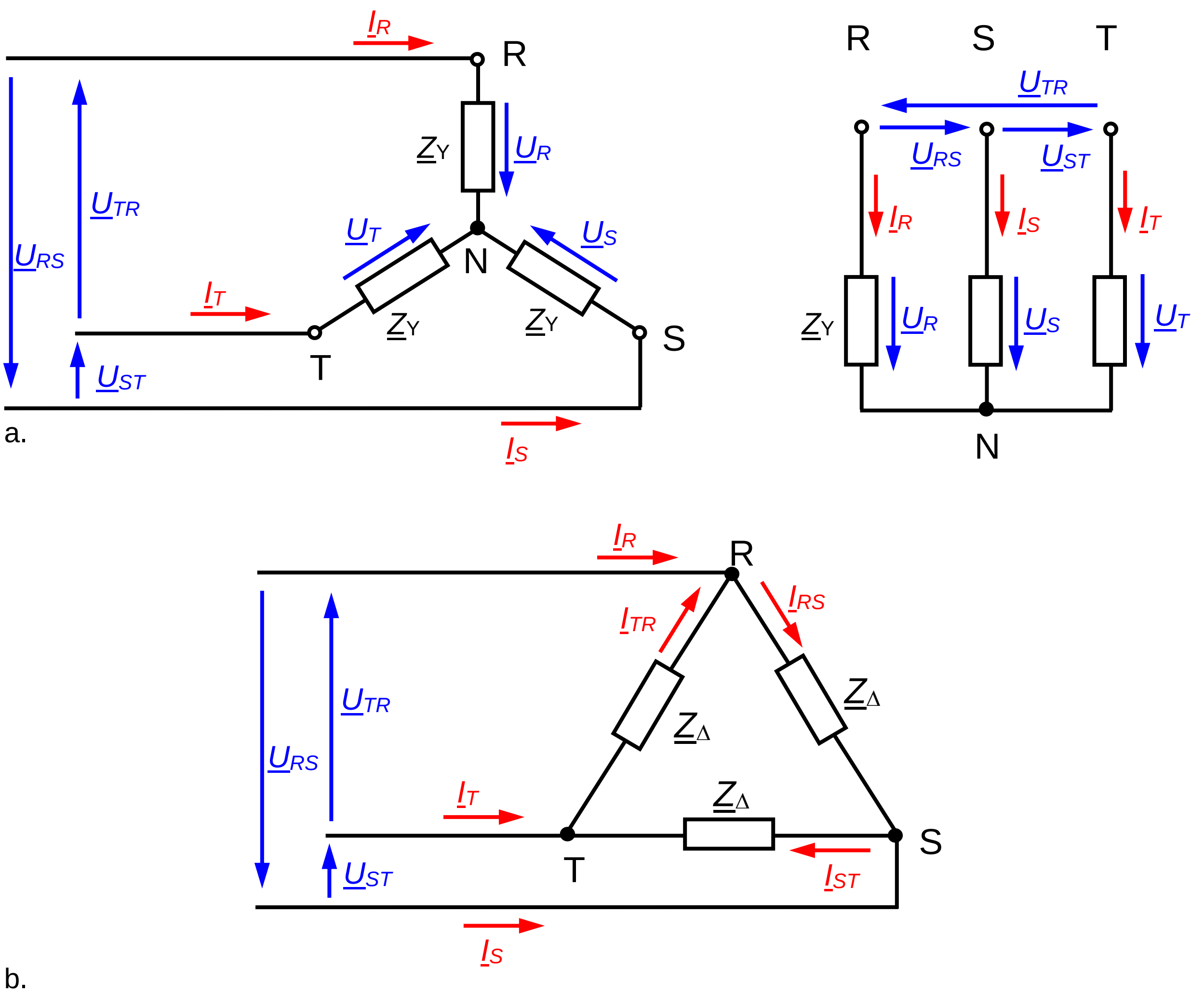
Der Momentanwert *P(t)* der von einem Verbraucher aufgenommenen elektrischen Wirkleistung ist also konstant und gleich dem Effektivwert dieser Wirkleistung. Das ist einer der wesentlichen Vorteile des symmetrischen Drehstromsystems gegenüber dem einphasigen Wechselstromsystem. Es treten keine pulsierenden Drehmomente und damit keine wechselnden Beanspruchungen von Tragwerken und Konstruktionen auf.

2.3.3 Einfache dreiphasige Schaltungen

In der Praxis kann in aller Regel von einer Speisung der 3-phasigen Verbraucher durch ein symmetrisches Drehspannungssystem gemäß (2.11) oder (2.13) ausgegangen werden.

2.3.3.1 Symmetrische Drehstromschaltungen in Stern- und Dreieckschaltung

Ein symmetrischer Verbraucher in einem Drehstromsystem kann im Stern oder im Dreieck geschaltet sein (***Bild 2.6***). Bei einem symmetrischen Verbraucher sind die Impedanzen zwischen den 3 Phasen identisch.



b.

Bild 2.6 Symmetrisches Drehstromsystem mit symmetrischer Belastung, Verbraucher in
a. Sternschaltung
b. Dreieckschaltung

Sternschaltung

Aufgrund der Gleichung (2.11) gilt *bei symmetrischer Last* (***Bild 2.6a***):

$$\begin{aligned}
\underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{Z}_Y} = \frac{U_R}{Z_Y}\cdot e^{-j\varphi}\cdot e^{j(\omega t-0^o)} = \left[\frac{U_Y}{Z_Y}\cdot e^{-j\varphi}\right]\cdot e^{j\omega t}\\
\underline{I}_S &= \frac{\underline{U}_S}{\underline{Z}_Y} = \frac{U_S}{Z_Y}\cdot e^{-j\varphi}\cdot e^{j(\omega t-120^o)} = \left[\frac{U_Y}{Z_Y}\cdot e^{-j\varphi}\right]\cdot e^{j\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)} \qquad . \qquad (2.22)\\
\underline{I}_T &= \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_Y} = \frac{U_T}{Z_Y}\cdot e^{-j\varphi}\cdot e^{j(\omega t-240^o)} = \left[\frac{U_Y}{Z_Y}\cdot e^{-j\varphi}\right]\cdot e^{j\left(\omega t-\frac{4\pi}{3}\right)} \qquad \text{mit} \quad \underline{Z}_Y = Z_Y\cdot e^{j\varphi}
\end{aligned}$$

Die Zeiger der Ströme in den einzelnen Phasen sind also gegenüber den korrespondierenden Sternspannungen um den Winkel φ verschoben. Dieser kann je nach Art der Impedanz $\underline{Z}_Y$ positiv oder negativ sein.

Außerdem sind die Beträge der Ströme gleich. Da sie in den Leitern fließen, werden sie im Folgenden als Leiterströme bezeichnet. Aufgrund der Symmetrie der Spannungen sind die Beträge der Leiterspannungen und der Sternspannungen der einzelnen Phasen identisch. Damit erhält man:

$$|\underline{I}_R| = |\underline{I}_S| = |\underline{I}_T| = I_L \qquad \text{und damit} \qquad Z_Y = \frac{U_Y}{I_L} = \frac{U_L}{\sqrt{3}\cdot I_L} \quad . \qquad (2.23)$$

Allgemein ergibt sich die gesamte Scheinleistung als Summe der Scheinleistungen in den 3 Phasen. Aufgrund der Symmetrie der Last und der speisenden Spannung sind die einzelnen Scheinleistungen jedoch identisch:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_Y &= \underline{I}_R^*\cdot\underline{U}_R + \underline{I}_S^*\cdot\underline{U}_S + \underline{I}_T^*\cdot\underline{U}_T = \left(\underline{Y}_R^*\cdot\underline{U}_R^*\right)\cdot\underline{U}_R + \left(\underline{Y}_S^*\cdot\underline{U}_S^*\right)\cdot\underline{U}_S + \left(\underline{Y}_T^*\cdot\underline{U}_T^*\right)\cdot\underline{U}_T\\
&= \underline{Y}_R^*\cdot U_R^2 + \underline{Y}_S^*\cdot U_S^2 + \underline{Y}_T^*\cdot U_T^2 = \left(\underline{Y}_R^* + \underline{Y}_S^* + \underline{Y}_T^*\right)\cdot U_Y^2 \qquad . \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{S}_Y = \left(\underline{Y}_R^* + \underline{Y}_S^* + \underline{Y}_T^*\right)\cdot U_Y^2 \overset{\underline{Z}_Y = Z_Y\cdot e^{j\varphi}}{=} 3\cdot\frac{U_Y^2}{Z_Y}\cdot e^{j\varphi} = 3\cdot\frac{U_Y^2}{Z_Y}\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi)\\
&S = 3\cdot S_{Phase} = 3\cdot\frac{U_Y^2}{Z_Y} = 3\cdot U_Y\cdot I_L = \sqrt{3}\cdot U_L\cdot I_L \qquad P = S\cdot\cos(\varphi) \qquad Q = S\cdot\sin(\varphi) \qquad . \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Der Faktor √3 kommt also durch den Übergang von Sternspannungen auf Leiterspannungen zustande. Es gilt ferner:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_Y &= \underline{I}_R^*\cdot\underline{U}_R + \left[\underline{I}_S^*\cdot\underline{U}_S\right] + \left\{\underline{I}_T^*\cdot\underline{U}_T\right\}\\
&= \underline{I}_R^*\cdot\underline{U}_R + \left[\underline{I}_R^*\cdot e^{j\frac{2\pi}{3}}\cdot\underline{U}_R\cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right] + \left\{\underline{I}_R^*\cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}\cdot\underline{U}_R\cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right\} \qquad . \qquad (2.26)\\
&= \underline{I}_R^*\cdot\underline{U}_R + \underline{I}_R^*\cdot\underline{U}_R + \underline{I}_R^*\cdot\underline{U}_R = 3\cdot\underline{I}_R^*\cdot\underline{U}_R
\end{aligned}$$

Die komplexe Drehstrom-Scheinleistung lässt sich also aus der komplexen Sternspannung und dem komplexen Leiterstrom einer Phase, z. B. der Phase R, berechnen.

Dreieckschaltung

Aus ***Bild 2.6b*** geht folgender Zusammenhang hervor:

$$\underline{I}_{TR} = \frac{\underline{U}_{TR}}{\underline{Z}_\Delta} = \frac{U_{TR}}{Z_\Delta} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \qquad \underline{I}_{RS} = \frac{\underline{U}_{RS}}{\underline{Z}_\Delta} = \frac{U_{RS}}{Z_\Delta} \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{j(\omega t)} \quad . \tag{2.27}$$

$$\text{mit} \quad \underline{Z}_\Delta = Z_\Delta \cdot e^{j\varphi}$$

Damit lässt sich der Leiterstrom $\underline{I}_R$ berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \underline{I}_{RS} - \underline{I}_{TR} = \left[\frac{U_L}{Z_\Delta} \cdot e^{-j\varphi}\right] \cdot \left(e^{j\omega t} - e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)}\right) \\ &= \left[\frac{U_L}{Z_\Delta} \cdot e^{-j\varphi}\right] \cdot e^{j\omega t} \cdot \left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) = \left[\frac{U_L}{Z_\Delta} \cdot e^{-j\varphi}\right] \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j\left(\omega t + 330^o\right)} \end{aligned} \quad , \tag{2.28}$$

für dessen Betrag gilt:

$$I_R = \left| \left[\frac{U_L}{Z_\Delta} \cdot e^{-j\varphi}\right] \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j\left(\omega t + 330^o\right)} \right| = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{Z_\Delta} = \sqrt{3} \cdot I_{TR} \quad . \tag{2.29}$$

Insgesamt erhält man also für die Beträge der Leiterströme und der Ströme in den Lastimpedanzen $\underline{Z}_\Delta$

$$\begin{aligned} &\left|\underline{I}_R\right| = \left|\underline{I}_S\right| = \left|\underline{I}_T\right| = I_L \\ &\left|\underline{I}_{RS}\right| = \left|\underline{I}_{ST}\right| = \left|\underline{I}_{TR}\right| = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = I_\Delta \qquad \text{und} \qquad Z_\Delta = \frac{U_L}{I_\Delta} = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{I_L} \end{aligned} \quad . \tag{2.30}$$

Auch hier kann man die Scheinleistung der 3-phasigen Last als Summe der Scheinleistungen der einzelnen Impedanzen berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{S}_\Delta &= \overset{*}{\underline{I}}_{RS} \cdot \underline{U}_{RS} + \overset{*}{\underline{I}}_{ST} \cdot \underline{U}_{ST} + \overset{*}{\underline{I}}_{TR} \cdot \underline{U}_{TR} \\ &= \left(\overset{*}{\underline{Y}}_{RS} \cdot \overset{*}{\underline{U}}_{RS}\right) \cdot \underline{U}_{RS} + \left(\overset{*}{\underline{Y}}_{ST} \cdot \overset{*}{\underline{U}}_{ST}\right) \cdot \underline{U}_{ST} + \left(\overset{*}{\underline{Y}}_{TR} \cdot \overset{*}{\underline{U}}_{TR}\right) \cdot \underline{U}_{TR} \\ &= \overset{*}{\underline{Y}}_{RS} \cdot U_{RS}^2 + \overset{*}{\underline{Y}}_{ST} \cdot U_{ST}^2 + \overset{*}{\underline{Y}}_{TR} \cdot U_{TR}^2 = \left(\overset{*}{\underline{Y}}_{RS} + \overset{*}{\underline{Y}}_{ST} + \overset{*}{\underline{Y}}_{TR}\right) \cdot U_L^2 \quad . \\ &\overset{\underline{Z}_\Delta = Z_\Delta \cdot e^{j\varphi}}{=} 3 \cdot \frac{U_L^2}{Z_\Delta} \cdot e^{j\varphi} = 3 \cdot \frac{U_L^2}{Z_\Delta} \cdot \left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) \end{aligned} \tag{2.31}$$

$$S = 3 \cdot S_{Phase} = 3 \cdot \frac{U_L^2}{Z_\Delta} = 3 \cdot U_L \cdot I_\Delta = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \qquad P = S \cdot \cos(\varphi) \qquad Q = S \cdot \sin(\varphi)$$

Die Dreieck- und die Sternschaltung sind identisch, falls bei gleicher Leiterspannung U_L die aufgenommene komplexe Scheinleistung der beiden Schaltungen identisch ist, d. h.:

$$3 \cdot \frac{U_Y^2}{Z_Y} \cdot e^{j\varphi} = \underline{S}_Y \overset{!}{=} \underline{S}_\Delta = 3 \cdot \frac{U_L^2}{Z_\Delta} \cdot e^{j\varphi}$$

$$\text{und damit} \qquad U_Y^2 \cdot \left(Z_\Delta \cdot e^{j\varphi}\right) \overset{!}{=} U_L^2 \cdot \left(Z_Y \cdot e^{j\varphi}\right) \quad . \tag{2.32}$$

Daraus folgt:

$$\underline{Z}_\Delta = 3 \cdot \underline{Z}_\text{Y} \qquad \text{mit} \qquad Z_\Delta = \sqrt{3} \cdot \frac{U_L}{I_L} \qquad Z_Y = \frac{U_L}{\sqrt{3} \cdot I_L} \quad . \tag{2.33}$$

2.3.3.2 Umwandlung von Stern- und Dreieckschaltungen

Manchmal kann es hilfreich sein, eine Sternschaltung in eine äquivalente Dreieckschaltung umzuwandeln oder umgekehrt. Dazu müssen die Impedanzen, die zwischen den Klemmen der Stern- und jenen der Dreieckschaltung gemessen werden, identisch sein. Dies gilt bei frequenzabhängigen Impedanzen (Induktivitäten und Kapazitäten) nur für eine einzige Frequenz. Für die Äquivalenz der beiden Schaltungen gemäß ***Bild 2.7*** ergibt sich die Forderung

$$\begin{aligned} &\underline{Z}_{12} \parallel \left(\underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{23}\right) = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \\ &\underline{Z}_{31} \parallel \left(\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23}\right) = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \quad . \\ &\underline{Z}_{23} \parallel \left(\underline{Z}_{31} + \underline{Z}_{12}\right) = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Daraus lassen sich die folgenden Beziehungen für die Umwandlung von Stern- in Dreieckschaltungen und umgekehrt ableiten.

Für die <u>Stern-Dreieck-Umwandlung</u> gilt:

$$\text{Y} \Rightarrow \Delta \qquad \begin{aligned} &\underline{Z}_{12} = \frac{\underline{Z}_\text{II}^2}{\underline{Z}_3} \qquad \underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_\text{II}^2}{\underline{Z}_1} \qquad \underline{Z}_{31} = \frac{\underline{Z}_\text{II}^2}{\underline{Z}_2} \quad . \\ &\text{mit} \qquad \underline{Z}_\text{II}^2 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Für die <u>Dreieck-Stern-Umwandlung</u> gilt:

$$\Delta \Rightarrow \text{Y} \qquad \begin{aligned} &\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12} \cdot \underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{ges}} \qquad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23} \cdot \underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{ges}} \qquad \underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31} \cdot \underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{ges}} \quad . \\ &\text{mit} \qquad \underline{Z}_{ges} = \underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31} \end{aligned} \tag{2.36}$$

Für symmetrische Belastung vereinfacht sich die Rechnung wegen

$$\begin{aligned} &\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}_\text{Y} \\ &\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z}_\Delta \end{aligned} \quad . \tag{2.37}$$

und man erhält:

$$\underline{Z}_Y = \frac{1}{3} \cdot \underline{Z}_\Delta \quad . \tag{2.38}$$

Dieses Ergebnis wurde auch bereits durch den Vergleich der komplexen Scheinleistung erzielt.

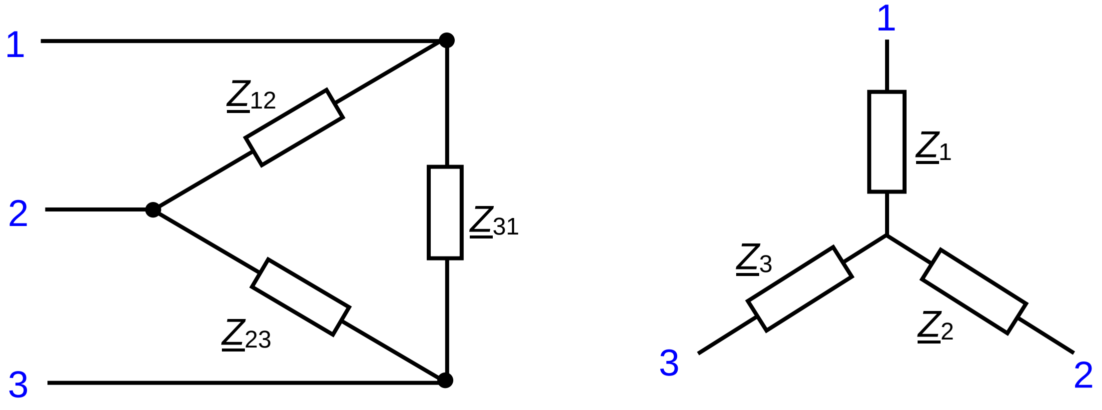


Bild 2.7 Dreiphasiger Verbraucher als Stern- oder Dreieckschaltung: Stern-Dreieck-Umwandlung

2.3.3.3 Unsymmetrische Stern- und Dreieckschaltungen

Sternschaltung

Bei einer unsymmetrischen Last in Sternschaltung kann der Sternpunkt der Last entweder mit dem Sternpunkt des speisenden Drehspannungssystems verbunden oder davon getrennt sein (***Bild 2.8***).

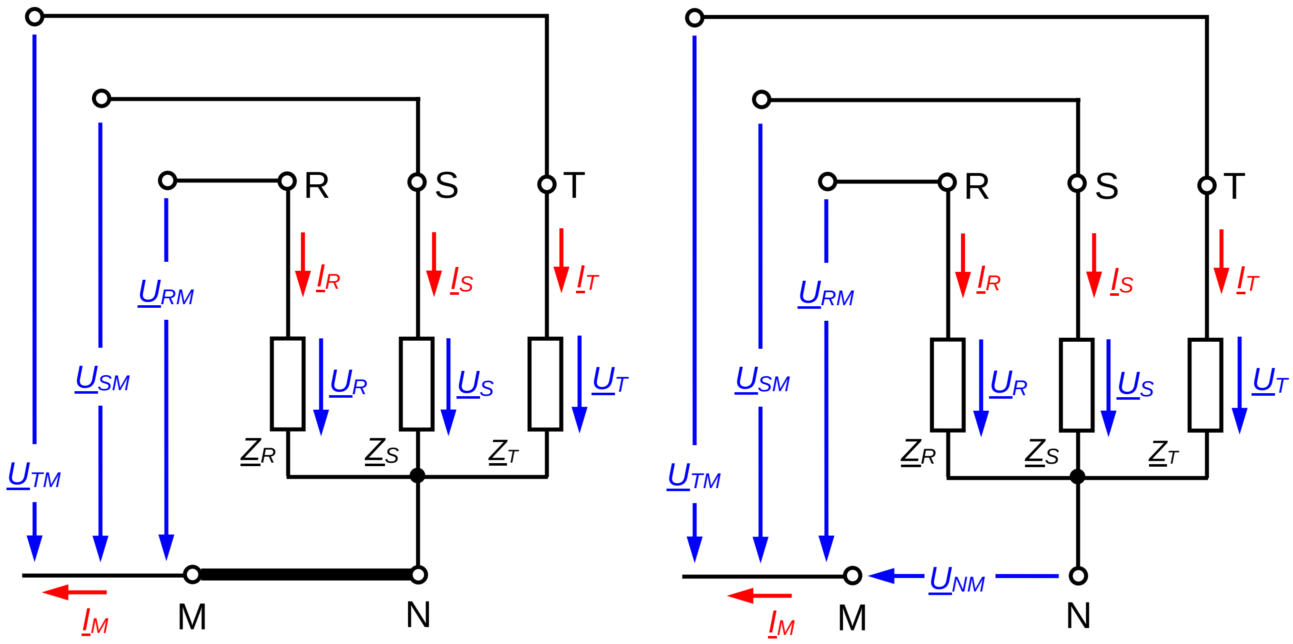


Bild 2.8 Unsymmetrischer Verbraucher in Sternschaltung

a. Sternpunkt N der Last und Sternpunkt M des speisenden Drehspannungssystems verbunden

b. Sternpunkte N und M getrennt, Verschiebungsspannung $\underline{U}_{NM}$ zwischen M und N

Unabhängig von der Art der Sternpunktbehandlung gilt allgemein:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{Z}_R} \qquad \underline{I}_S = \frac{\underline{U}_S}{\underline{Z}_S} \qquad \underline{I}_T = \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T} \quad . \tag{2.39}$$

Sind die Punkte M und N miteinander verbunden, so erhält man (***Bild 2.8a***):

$$\begin{aligned}
\underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{Z}_R} = \frac{\underline{U}_{RM}}{\underline{Z}_R} \\
\underline{I}_S &= \frac{\underline{U}_S}{\underline{Z}_S} = \frac{\underline{U}_{SM}}{\underline{Z}_S} \\
\underline{I}_T &= \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T} = \frac{\underline{U}_{TM}}{\underline{Z}_T} \quad .
\end{aligned} \tag{2.40}$$

und

$$\underline{I}_M = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \frac{\underline{U}_{RM}}{\underline{Z}_R} + \frac{\underline{U}_{SM}}{\underline{Z}_S} + \frac{\underline{U}_{TM}}{\underline{Z}_T} = \underline{Y}_R \cdot \underline{U}_{RM} + \underline{Y}_S \cdot \underline{U}_{SM} + \underline{Y}_T \cdot \underline{U}_{TM}$$

Die Speisung erfolgt durch ein symmetrisches Drehspannungssystem. Damit erhält man für den Strom $\underline{I}_M$ im Nulleiter:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_M &= \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = \underline{Y}_R \cdot \underline{U}_{RM} + \underline{Y}_S \cdot \underline{U}_{SM} + \underline{Y}_T \cdot \underline{U}_{TM} \\
&= \underline{Y}_R \cdot U_Y \cdot e^{j\omega t} + \underline{Y}_S \cdot U_Y \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} + \underline{Y}_T \cdot U_Y \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \quad . \\
&= U_Y \cdot e^{j\omega t} \cdot \left[\underline{Y}_R + \underline{Y}_S \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} + \underline{Y}_T \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right]
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Sind die Sternpunkte M und N nicht miteinander verbunden (***Bild 2.8b***), so entsteht im allgemeinen Fall eine Verschiebungsspannung $\underline{U}_{NM}$ zwischen den beiden Sternpunkten. Zur Analyse kann man wieder von Gleichung (2.39) ausgehen:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_R &= \frac{\underline{U}_R}{\underline{Z}_R} = \frac{1}{\underline{Z}_R} \cdot \left(\underline{U}_{RM} - \underline{U}_{NM}\right) = \underline{Y}_R \cdot \left(\underline{U}_{RM} - \underline{U}_{NM}\right) \\
\underline{I}_S &= \frac{\underline{U}_S}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{\underline{Z}_S} \cdot \left(\underline{U}_{SM} - \underline{U}_{NM}\right) = \underline{Y}_S \cdot \left(\underline{U}_{SM} - \underline{U}_{NM}\right) \quad . \\
\underline{I}_T &= \frac{\underline{U}_T}{\underline{Z}_T} = \frac{1}{\underline{Z}_S} \cdot \left(\underline{U}_{TM} - \underline{U}_{NM}\right) = \underline{Y}_T \cdot \left(\underline{U}_{TM} - \underline{U}_{NM}\right)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Aufgrund des fehlenden Rückleiters führt die Knotenregel auf:

$$\underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T = 0 \quad . \tag{2.43}$$

Daraus folgt:

$$\underline{Y}_R \cdot \left(\underline{U}_{RM} - \underline{U}_{NM}\right) + \underline{Y}_S \cdot \left(\underline{U}_{SM} - \underline{U}_{NM}\right) + \underline{Y}_T \cdot \left(\underline{U}_{TM} - \underline{U}_{NM}\right) = 0 \quad . \tag{2.44}$$

Somit lässt sich die Spannung zwischen den Punkten N und M in Abhängigkeit der Speisespannungen berechnen:

$$\underline{U}_{NM} = \frac{\underline{Y}_R \cdot \underline{U}_{RM} + \underline{Y}_S \cdot \underline{U}_{SM} + \underline{Y}_T \cdot \underline{U}_{TM}}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} = \frac{U_Y \cdot \left[\underline{Y}_R + \underline{Y}_S \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} + \underline{Y}_T \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right]}{\underline{Y}_R + \underline{Y}_S + \underline{Y}_T} \cdot e^{j\omega t} \quad . \tag{2.45}$$

Mit der nun bekannten Spannung $\underline{U}_{NM}$ kann man die Leiterströme $\underline{I}_R$, $\underline{I}_S$ und $\underline{I}_T$ aus Gleichung (2.42) berechnen.

Unabhängig von der Behandlung des Sternpunktes N der Last ergibt sich die Scheinleistung eines dreiphasigen Verbrauchers als Summe der Scheinleistungen an den einzelnen Verbrauchern.

Im Falle der Sternschaltung erhält man also:

$$\begin{aligned} \underline{S}_Y &= \underline{I}_R^* \cdot \underline{U}_{RN} + \underline{I}_S^* \cdot \underline{U}_{SN} + \underline{I}_T^* \cdot \underline{U}_{TN} & \qquad P_Y &= Re\left\{\underline{S}_Y\right\} \\ &= \left(\underline{Y}_R^* \cdot \underline{U}_{RN}^*\right) \cdot \underline{U}_{RN} + \left(\underline{Y}_S^* \cdot \underline{U}_{SN}^*\right) \cdot \underline{U}_{SN} + \left(\underline{Y}_T^* \cdot \underline{U}_{TN}^*\right) \cdot \underline{U}_{TN} & \qquad Q_Y &= Im\left\{\underline{S}_Y\right\} \quad . \\ &= \underline{Y}_R^* \cdot U_{RN}^2 + \underline{Y}_S^* \cdot U_{SN}^2 + \underline{Y}_T^* \cdot U_{TN}^2 \end{aligned} \tag{2.46}$$

Dreieckschaltung

Zur Berechnung eines unsymmetrischen Verbrauchers in Dreieckschaltung, das von einem symmetrischen Drehspannungssystem gespeist wird (***Bild 2.9***), kann man von den Leiterspannungen gemäß Gleichung (2.13) ausgehen. Aus ***Bild 2.9*** kann man ablesen:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{RS} &= \underline{Y}_{RS} \cdot \underline{U}_{RS} = \underline{Y}_{RS} \cdot U_L \cdot e^{j(\omega t)} \\ \underline{I}_{ST} &= \underline{Y}_{ST} \cdot \underline{U}_{ST} = \underline{Y}_{ST} \cdot U_L \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)} \quad . \\ \underline{I}_{TR} &= \underline{Y}_{TR} \cdot \underline{U}_{TR} = \underline{Y}_{TR} \cdot U_L \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Damit lassen sich die Leiterströme berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{I}_R &= \underline{I}_{RS} - \underline{I}_{TR} = \left(\underline{Y}_{RS} - \underline{Y}_{TR} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) \cdot \underline{U}_L \\ \underline{I}_S &= \underline{I}_{ST} - \underline{I}_{RS} = \left(\underline{Y}_{ST} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} - \underline{Y}_{RS}\right) \cdot \underline{U}_L \quad . \\ \underline{I}_T &= \underline{I}_{TR} - \underline{I}_{ST} = \left(\underline{Y}_{TR} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} - \underline{Y}_{ST} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) \cdot \underline{U}_L \qquad \text{mit} \quad \underline{U}_L = U_L \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \tag{2.48}$$

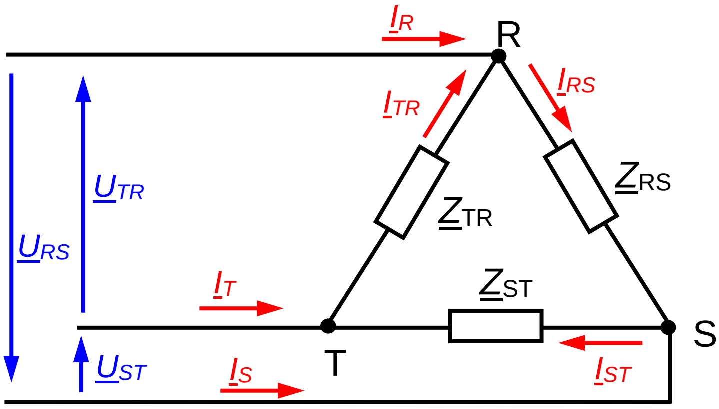


Bild 2.9 Unsymmetrischer Verbraucher in Dreieckschaltung

Bei identischen Leitwerten $\underline{G}_{TR} = \underline{G}_{ST} = \underline{G}_{RS} = \underline{G}_{\Delta}$, d.h. einer symmetrischen Belastung, erhält man letztlich das schon in Gleichung (2.28) gefundene Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_R &= \left(\underline{Y}_{RS} - \underline{Y}_{TR} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) \cdot \underline{U}_L = \underline{Y}_{\Delta} \cdot \left(1 - e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) \cdot \underline{U}_L = \sqrt{3} \cdot e^{j(330^o)} \underline{Y}_{\Delta} \cdot \underline{U}_L \\
\underline{I}_S &= \left(\underline{Y}_{ST} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}} - \underline{Y}_{RS}\right) \cdot \underline{U}_L = \underline{Y}_{\Delta} \cdot \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}} - 1\right) \cdot \underline{U}_L = \sqrt{3} \cdot e^{j(210^o)} \cdot \underline{Y}_{\Delta} \cdot \underline{U}_L \\
\underline{I}_T &= \left(\underline{Y}_{TR} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}} - \underline{Y}_{ST} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) \cdot \underline{U}_L = \underline{Y}_{\Delta} \cdot \left(e^{-j\frac{4\pi}{3}} - e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) \cdot \underline{U}_L = \sqrt{3} \cdot e^{j(90^o)} \cdot \underline{Y}_{\Delta} \cdot \underline{U}_L
\end{aligned} \quad . \qquad (2.49)$$

mit $\underline{U}_L = U_L \cdot e^{j\omega t}$

Für die Scheinleistungsaufnahme der unsymmetrischen Dreieckschaltung erhält man:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{\Delta} &= \underline{I}^*_{RS} \cdot \underline{U}_{RS} + \underline{I}^*_{ST} \cdot \underline{U}_{ST} + \underline{I}^*_{TR} \cdot \underline{U}_{TR} \\
&= \left(\underline{Y}^*_{RS} \cdot \underline{U}^*_{RS}\right) \cdot \underline{U}_{RS} + \left(\underline{Y}^*_{ST} \cdot \underline{U}^*_{ST}\right) \cdot \underline{U}_{ST} + \left(\underline{Y}^*_{TR} \cdot \underline{U}^*_{TR}\right) \cdot \underline{U}_{TR} \\
&= \underline{Y}^*_{RS} \cdot U^2_{RS} + \underline{Y}^*_{ST} \cdot U^2_{ST} + \underline{Y}^*_{TR} \cdot U^2_{TR}
\end{aligned} \quad . \qquad (2.50)$$

mit $P_{\Delta} = Re\{\underline{S}_{\Delta}\}$ $\qquad Q_{\Delta} = Im\{\underline{S}_{\Delta}\}$

2.4 Mathematische Behandlung von dreiphasigen Schaltungen

2.4.1 Allgemeines Drehstromsystem

Grundsätzlich müssen Dreiphasensysteme durch drei elektrisch und magnetisch gekoppelte Netzwerke beschrieben werden (***Bild 2.10***). Der allgemeinste Fall eines solchen Netzwerkes ist eine dreiphasige Spannungsquelle, die über Transformatoren und Leitungen einen Verbraucher speist. Durch die Leitungen und Transformatoren ergibt sich eine magnetische und kapazitive Kopplung der 3 Phasen untereinander. Der Verbraucher sei an die Klemmen R, S und T angeschlossen und kann ebenfalls Kopplungen zwischen den einzelnen Phasen aufweisen, so dass man ein Netzwerk aus Koppelimpedanzen ($\underline{Y}_{AB}$, A ≠ B) und aus Impedanzen gegen Erde ($\underline{Y}_{AA}$) erhält.

Durch Anwendung der Maschenregel und des Knotenpotenzialverfahrens lassen sich die folgenden Netzwerkgleichungen aufstellen:

$$\underline{U}_R = \underline{E}_R - j\omega L_{RR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{RS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{RT} \cdot \underline{I}_T - R_R \cdot \underline{I}_R - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

$$\underline{U}_S = \underline{E}_S - j\omega L_{SR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{SS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{ST} \cdot \underline{I}_T - R_S \cdot \underline{I}_S - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

$$\underline{U}_T = \underline{E}_T - j\omega L_{TR} \cdot \underline{I}_R - j\omega L_{TS} \cdot \underline{I}_S - j\omega L_{TT} \cdot \underline{I}_T - R_T \cdot \underline{I}_T - \underline{Z}_N \cdot \underline{I}_N$$

$$\underline{I}_R = \left(\underline{Y}_{RR} + \underline{Y}_{RS} + \underline{Y}_{RT}\right) \cdot \underline{U}_R - \underline{Y}_{RS} \cdot \underline{U}_S - \underline{Y}_{RT} \cdot \underline{U}_T \quad . \qquad (2.51)$$

$$\underline{I}_S = -\underline{Y}_{SR} \cdot \underline{U}_R + \left(\underline{Y}_{SS} + \underline{Y}_{SR} + \underline{Y}_{ST}\right) \cdot \underline{U}_S - \underline{Y}_{ST} \cdot \underline{U}_T$$

$$\underline{I}_T = -\underline{Y}_{TR} \cdot \underline{U}_R - \underline{Y}_{TS} \cdot \underline{U}_S + \left(\underline{Y}_{TT} + \underline{Y}_{TS} + \underline{Y}_{TR}\right) \cdot \underline{U}_T$$

und $\quad \underline{I}_N = \underline{I}_R + \underline{I}_S + \underline{I}_T$

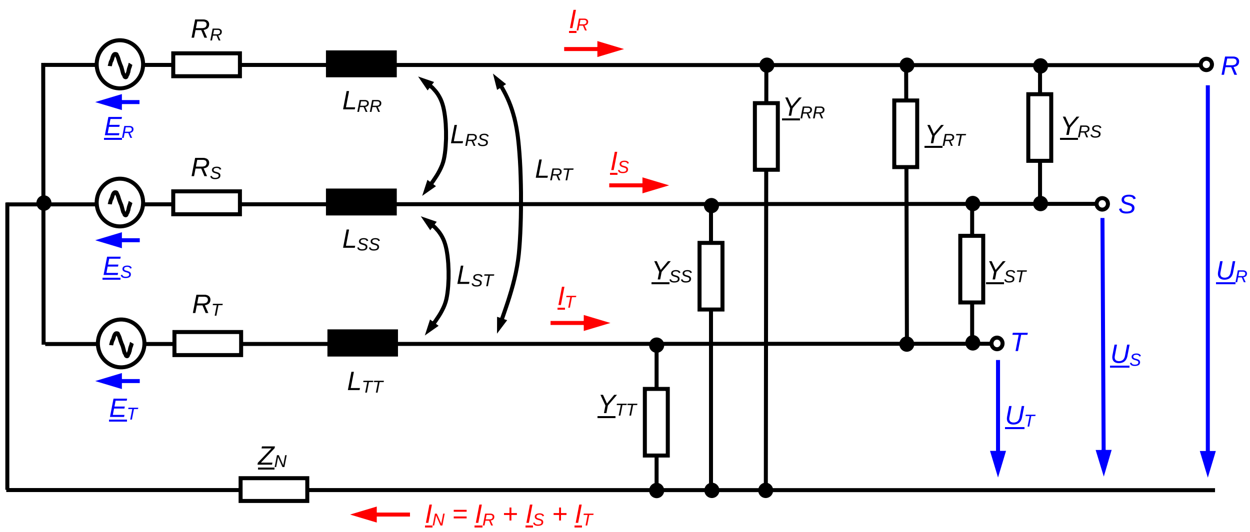


Bild 2.10 Kapazitiv und induktiv (magnetisch) gekoppeltes Drehstromnetzwerk

Ist das zu berechnende Dreiphasensystem unsymmetrisch, so muß die Berechnung über die gekoppelten Gleichungen gemäß (2.51) erfolgen. Für die meisten Berechnungen elektrischer Energienetze kann das Dreiphasensystem jedoch als symmetrisch betrachtet werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&L = L_{RR} = L_{SS} = L_{TT} \\
&R = R_R = R_S = R_T \\
&M = L_{RS} = L_{SR} = L_{RT} = L_{TR} = L_{ST} = L_{TS} \\
&\underline{Y}_E = \underline{Y}_{RR} = \underline{Y}_{SS} = \underline{Y}_{TT} \\
&\underline{Y}_K = \underline{Y}_{RS} = \underline{Y}_{SR} = \underline{Y}_{RT} = \underline{Y}_{TR} = \underline{Y}_{ST} = \underline{Y}_{TS}
\end{aligned} \quad . \qquad (2.52)$$

Damit vereinfacht sich das Gleichungssystem (2.51) deutlich:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix} - j\omega \underbrace{\begin{pmatrix} L & M & M \\ M & L & M \\ M & M & L \end{pmatrix}}_{\text{gekoppeltes System}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} - \underline{Z}_N \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{gekoppeltes System}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_R \\ \underline{I}_S \\ \underline{I}_T \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (\underline{Y}_E + 2\underline{Y}_K) & -\underline{Y}_K & -\underline{Y}_K \\ -\underline{Y}_K & (\underline{Y}_E + 2\underline{Y}_K) & -\underline{Y}_K \\ -\underline{Y}_K & -\underline{Y}_K & (\underline{Y}_E + 2\underline{Y}_K) \end{pmatrix}}_{\text{gekoppeltes System}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} \quad . \qquad (2.53)$$

oder

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} = \underline{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{RST}} - j\omega \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{RST}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{RST}} - \boldsymbol{R} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{RST}} - \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{N}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{RST}}$$

und . (2.54)

$$\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{RST}} = \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{RST}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}}$$

Zur Berechnung des Netzwerkes müssen die beiden Gleichungen des Systems (2.54) ineinander eingesetzt und nach der gewünschten Unbekannten aufgelöst werden. Dies wird bereits bei der Nachbildung von wenigen Betriebsmitteln (Generatoren, Transformatoren, Leitungen, Kompensatoren, etc.) sehr unübersichtlich und schwierig. Hauptproblem ist dabei die Kopplung der 3 Phasen untereinander.

2.4.2 Diagonalisierung der Systemmatrizen

Mit den Methoden der linearen Algebra (Diagonalisierung von Matrizen) lassen sich die 3 durch die Systemmatrizen gekoppelten Gleichungen entkoppeln. Damit wird jede Phase durch ein eigenes Netzwerk repräsentiert. Voraussetzung ist allerdings, dass das betrachtete dreiphasige Netzwerk symmetrisch aufgebaut ist und auch symmetrisch belastet wird. Diese Voraussetzung ist aber bei elektrischen Energienetzen aufgrund ihres Aufbaus – abgesehen von lokalen Unsymmetrien – erfüllt.

Aus der Mathematik ist folgendes bekannt:

Sei $\boldsymbol{T}$ eine symmetrische n×n-Matrix, dann gibt es eine Matrix $\boldsymbol{C}$ mit

$$\boldsymbol{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . \\ . & . & . & 0 \\ 0 & . & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{D} \quad .$$

Darin sind die λ_i die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{T}$, die gemäß

$$\det(\boldsymbol{T} - \lambda \cdot \boldsymbol{E}) = 0$$

bestimmt werden können.
Bei einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{T}$ existieren n reelle Eigenwerte λ_i und n zugehörige linear unabhängige Eigenvektoren Ψ_i. Die zu den Eigenwerten λ_i gehörigen Eigenvektoren Ψ gehorchen der Gleichung

$$\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\Psi} = \lambda_i \cdot \boldsymbol{\Psi} \quad \text{oder} \quad \left(\boldsymbol{T} - \lambda_i \cdot \boldsymbol{E}\right) \cdot \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{0} \qquad \text{mit} \quad i = 1, 2, ..., n \quad .$$

Bei einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{T}$ sind die Eigenvektoren Ψ_i orthogonal, d. h. das Skalarprodukt von 2 Eigenvektoren von verschiedenen Eigenwerten verschwindet:

$$\left\langle \boldsymbol{\Psi}_i \cdot \boldsymbol{\Psi}_k \right\rangle = 0 \qquad \text{für} \quad i \neq k \quad .$$

Die Eigenvektoren Ψ sind Spaltenvektoren der Matrix $\boldsymbol{C}$.

Die Matrizen $\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{RST}}$, $\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{RST}}$, $\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{N}}$ und $\boldsymbol{R}$ sind symmetrisch für ein symmetrisches dreiphasiges Netzwerk. Die allgemeine Struktur dieser Matrizen ist

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{pmatrix} \quad , \tag{2.55}$$

wobei A = B möglich ist.
Zur Bestimmung der Matrix $\underline{\boldsymbol{C}}$ werden nun die Eigenwerte λ_i der Matrix $\boldsymbol{T}$ bestimmt

$$\det(\boldsymbol{T} - \lambda \cdot \boldsymbol{E}) = \det \begin{pmatrix} A-\lambda & B & B \\ B & A-\lambda & B \\ B & B & A-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad . \tag{2.56}$$

Dies führt auf die charakteristische Gleichung

$$(A-\lambda)\left[(A-\lambda)^2 - B^2\right] - B\left[B(A-\lambda) - B^2\right] + B\left[B^2 - B(A-\lambda)\right] = 0 \quad , \tag{2.57}$$

deren Lösungen sind

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= A-B\\ \lambda_2 &= A-B \quad .\\ \lambda_3 &= A+2B\end{aligned} \tag{2.58}$$

Damit erhält man die folgenden Bestimmungsgleichungen für die drei Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} B & B & B\\ B & B & B\\ B & B & B\end{pmatrix}\boldsymbol{\Psi_1} = \boldsymbol{0} \qquad \begin{pmatrix} B & B & B\\ B & B & B\\ B & B & B\end{pmatrix}\boldsymbol{\Psi_2} = \boldsymbol{0} \qquad \begin{pmatrix} -2B & B & B\\ B & -2B & B\\ B & B & -2B\end{pmatrix}\boldsymbol{\Psi_3} = \boldsymbol{0} \quad . \tag{2.59}$$

Dies führt auf

$$\underline{\boldsymbol{C}} = \left(\underline{\boldsymbol{\Psi}}_1 \quad \underline{\boldsymbol{\Psi}}_2 \quad \underline{\boldsymbol{\Psi}}_3\right) = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13}\\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23}\\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33}\end{pmatrix}$$

mit (2.60)

$$\begin{aligned}&\psi_{11}+\psi_{21}+\psi_{31} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_1\\ &\psi_{12}+\psi_{22}+\psi_{32} = 0 \quad \text{für} \quad \lambda_2\end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned}-2\psi_{13}+\psi_{23}+\psi_{33} &= 0\\ \psi_{13}-2\psi_{23}+\psi_{33} &= 0\\ \psi_{13}+\psi_{23}-2\psi_{33} &= 0\end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \lambda_3$$

Formal kann man nun zunächst für den Übergang vom RST-System auf ein noch zu definierendes System XYZ schreiben:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} \overset{!}{=} \underline{\boldsymbol{C}}\cdot\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}} \qquad \text{und} \qquad \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}} \overset{!}{=} \underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}}\cdot\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} \quad . \tag{2.61}$$

Aus (2.54) folgt damit

$$\begin{aligned}&\underline{\boldsymbol{C}}\cdot\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}} = \underline{\boldsymbol{C}}\cdot\underline{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{XYZ}} - j\omega\cdot\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{RST}}\cdot\underline{\boldsymbol{C}}\cdot\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}} - \boldsymbol{R}\cdot\underline{\boldsymbol{C}}\cdot\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}} - \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{N}}\cdot\underline{\boldsymbol{C}}\cdot\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}}\\ &\text{und} \qquad\qquad .\\ &\underline{\boldsymbol{C}}\cdot\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}} = \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{RST}}\cdot\underline{\boldsymbol{C}}\cdot\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}}\end{aligned} \tag{2.62}$$

Durch die linksseitige Multiplikation mit $\underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}}$ folgt schließlich:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}} = \underline{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{XYZ}} - j\omega\underbrace{\left[\underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}}\cdot\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{RST}}\cdot\underline{\boldsymbol{C}}\right]}_{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{D}}}\cdot\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}} - \underbrace{\left[\underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\underline{\boldsymbol{C}}\right]}_{\boldsymbol{R_D}=\boldsymbol{R}}\cdot\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}} - \underbrace{\left[\underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}}\cdot\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{N}}\cdot\underline{\boldsymbol{C}}\right]}_{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{ND}}}\cdot\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}}$$

und .(2.63)

$$\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}} = \underbrace{\left[\underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}}\cdot\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{RST}}\cdot\underline{\boldsymbol{C}}\right]}_{\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{D}}}\cdot\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}}$$

mit den Diagonalmatrizen

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{D}} = \underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}} \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{RST}} \cdot \underline{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} L-M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L+2M \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{\boldsymbol{D}} = \underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \underline{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix} \qquad . \qquad (2.64)$$

$$\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{ND}} = \underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}} \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{N}} \cdot \underline{\boldsymbol{C}} = \underline{Z}_N \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{D}} = \underline{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{-1}} \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{RST}} \cdot \underline{\boldsymbol{C}} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_E \end{pmatrix}$$

Durch die Diagonalisierung kann eine symmetrische 3-phasige Schaltung durch 3 1-phasige Schaltungen im Koordinatensystem XYZ berechnet werden. Die anschließende Rücktransformation liefert die Ströme und Spannungen im RST-System.

Für die Wahl der Eigenvektoren gibt es im Grunde zahlreiche Möglichkeiten, die auf unterschiedliche Transformationsmatrizen $\underline{\boldsymbol{C}}$ führen. Die jeweilige Transformation besitzt spezifische Eigenschaften. Es zeigt sich aber, dass durch eine andere Betrachtung eine Transformation gefunden werden kann, die sehr vorteilhafte Eigenschaften aufweist.

2.4.3 Komponentensysteme und ihre Transformationen

2.4.3.1 Symmetrische Komponenten

Die Methode der symmetrischen Komponenten wurde 1918 von C. L. Fortescue erstmals vorgeschlagen. Fortescue erkannte, dass man ein beliebiges unsymmetrisches Drehstromsystem in 3 einzelne symmetrische Spannungssysteme zerlegen kann (***Bild 2.11b***):

- dem ***Mitsystem***, Index „1“ (einem symmetrischen Drehspannungssystem mit demselben Umlaufsinn wie das unsymmetrische RST-System und Phasenfolge RST)
- dem ***Gegensystem***, Index „2“ (einem symmetrischen Drehspannungssystem mit entgegesetzter Phasenfolge, d. h. TSR, im Vergleich zum Mitsystem)
- dem ***Nullsystem***, Index „0“ (ein Spannungssystem, bei dem alle drei Phasen dieselbe Phasenlage haben.

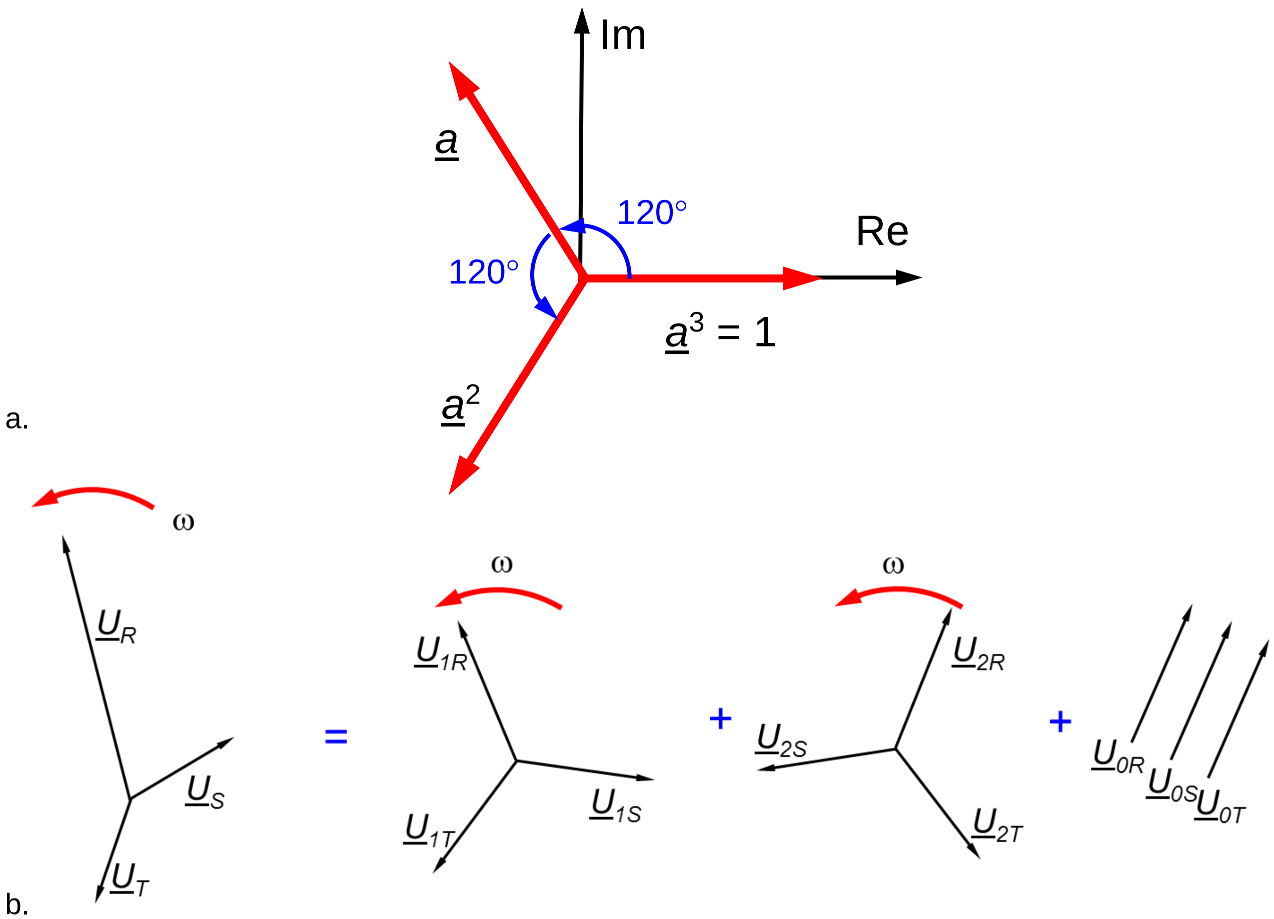


Bild 2.11 a. Symmetrisches System aus drei um 120° gegeneinander verschobenen Einheitszeigern 1, $\underline{a}$, $\underline{a}^2$
b. Darstellung von Mit-, Gegen- und Nullsystem in der komplexen Ebene

Ein symmetrisches Drehspannungssystem kann aufgrund seiner Symmetrieeigenschaften , wie Gleichung (2.19) zeigt, durch nur einen einzigen Zeiger vollständig beschrieben werden. Wenn die Lage dieses repräsentativen Zeigers bekannt ist, liegt die Lage des symmetrischen Drehspannungssystems deshalb fest, weil die Amplituden aller Zeiger identisch sind und die Phasendrehung zwischen den einzelnen Zeigern 120° beträgt.

Mit dem Einheitszeiger $\underline{a} = e^{j120°}$ lassen sich die Zeiger der Phasen S und T nur durch den Zeiger der Phase R für das System 1 (Mitsystem), das System 2 (Gegensystem) und das System 0 (Nullsystem) beschreiben:

$$\begin{array}{lll} \underline{U}_{1R} & \underline{U}_{1S} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{1R} & \underline{U}_{1T} = \underline{a} \cdot \underline{U}_{1R} \\ \underline{U}_{2R} & \underline{U}_{2S} = \underline{a} \cdot \underline{U}_{2R} & \underline{U}_{2T} = \underline{a}^2 \cdot \underline{U}_{2R} \\ \underline{U}_{0R} & \underline{U}_{0S} = \underline{U}_{0R} & \underline{U}_{0T} = \underline{U}_{0R} \end{array} \quad . \qquad (2.65)$$

mit

$$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \underline{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \underline{a}^3 = 1 \qquad 1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$$

Man betrachtet nun einen Zeiger in den 3 Systemen als Bezugsgröße. Üblicherweise werden die Komponentenzeiger $\underline{U}_{1R}$, $\underline{U}_{2R}$, $\underline{U}_0$ des Leiters R gewählt.

Nach Fortescue gilt, dass sich ein beliebiges Dreiphasensystem I_{RST} durch die Überlagerung eines Mitsystems (1), eines Gegensystems (2) und eines Nullsystems (0) darstellen lässt, d. h.:

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= \underline{U}_{1R} + \underline{U}_{2R} + \underline{U}_{0R} \\ \underline{U}_S &= \underline{U}_{1S} + \underline{U}_{2S} + \underline{U}_{0S} \quad . \\ \underline{U}_T &= \underline{U}_{1T} + \underline{U}_{2T} + \underline{U}_{0T} \end{aligned} \tag{2.66}$$

Aus (2.66) folgt damit

$$\begin{aligned} \underline{U}_R &= \underline{U}_{1R} + \underline{U}_{2R} + \underline{U}_{0R} &&= \underline{U}_{1R} + \underline{U}_{2R} + \underline{U}_0 \\ \underline{U}_S &= \underline{U}_{1S} + \underline{U}_{2S} + \underline{U}_{0S} &&= \underline{a}^2\underline{U}_{1R} + \underline{a}\underline{U}_{2R} + \underline{U}_0 \quad . \\ \underline{U}_T &= \underline{U}_{1T} + \underline{U}_{2T} + \underline{U}_{0T} &&= \underline{a}\underline{U}_{1R} + \underline{a}^2\underline{U}_{2R} + \underline{U}_0 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Dies kann auch in Matrizenschreibweise ausgedrückt werden, wobei man den Bezug „R“ auch weglassen kann:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_{1R} \\ \underline{U}_{2R} \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix}$$

oder . (2.68)

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} = \underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{120}}$$

Umgekehrt gilt

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{120}} = \left(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} \quad . \tag{2.69}$$

Damit sind die Transformationsmatrizen $\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}$ und $(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}})^{-1}$ einer Transformation mit speziellen Eigenschaften bekannt. In einem letzten Schritt wäre zu überprüfen, ob die Spalten der Matrix $\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}$ Eigenvektoren gemäß (2.59) sind. Man kann sich leicht überzeugen, dass dies der Fall ist. Damit erfüllt die Transformation die Forderung, dass eine gekoppelte Systemmatrix diagonalisiert wird.

Drehstromsysteme werden in aller Regel von einer symmetrischen Drehspannungsquelle gespeist. Anschaulich ist klar, dass eine symmetrische Drehspannungsquelle in symmetrischen Komponenten direkt das Mitsystem darstellt und sowohl das Gegen- als auch das Nullsystem keine Amplituden haben. Die Anwendung der symmetrischen Komponenten mit der Matrix $(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}})^{-1}$ gemäß (2.69) auf eine symmetrische Quelle bestätigt dies:

$$\underline{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{120}} = \left(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{RST}}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \underline{E}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{E}_S \\ \underline{E}_T \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{E}_R \\ \underline{a} \cdot \underline{E}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (2.70)$$

Wendet man die symmetrischen Komponenten (120-Komponenten) auf die allgemeinen Netzwerkgleichungen gemäß (2.63) an, so ergibt sich

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{120}} = \underline{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{120}} - j\omega \underbrace{\left[\left(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{RST}} \cdot \underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right]}_{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{D}}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{120}} - \underbrace{\left[\left(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right]}_{\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{R}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{120}} - \underbrace{\left[\left(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{N}} \cdot \underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right]}_{\underline{\boldsymbol{Z}}_{\boldsymbol{ND}}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{120}} \quad (2.71)$$

und

$$\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{120}} = \underbrace{\left[\left(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{RST}} \cdot \underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right]}_{\underline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{D}}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{120}}$$

oder in ausgeschriebener Form

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - j\omega \begin{pmatrix} L-M & 0 & 0 \\ 0 & L-M & 0 \\ 0 & 0 & L+2M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} - \underline{Z}_N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} . \quad (2.72)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_E + 3\underline{Y}_K & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung kann in Form von 3 unabhängigen Schaltungen dargestellt werden (***Bild 2.12***). Eine symmetrische Drehstromschaltung wird also durch die Diagonalisierung in 3 unabhängige 1-phasige Schaltungen transformiert. Für den Spezialfall der symmetrischen Komponenten ergibt sich für ein symmetrisches Drehspannungssystem als Anregung auch nur im Mitsystem eine treibende Quelle, das Nullsystem und das Gegensystem existieren nicht. Für den Fall einer symmetrischen Anregung einer symmetrischen Drehstromschaltung reduziert sich die Schaltungsberechnung also auf das Mitsystem.

Insgesamt kann man festhalten:

1. ***Die Berechnung einer vollständig symmetrischen Drehstromschaltung durch 1-phasige Wechselstromschaltungen ist erst durch die Diagonalisierung der Systemmatrizen möglich.***
2. ***Die symmetrischen Komponenten zerlegen ein beliebiges Drehspannungssystem in 3 Einzelsysteme. Eine symmetrische Drehspannungsquelle ist bereits das Mitsystem selbst, ein Gegen- und Nullsystem existieren nicht.***
3. ***Aus den erstgenannten Punkten ergibt sich, dass sich die Schaltungsberechnung einer symmetrischen Drehstromschaltung bei symmetrischer Anregung auf das Mitsystem reduziert.***

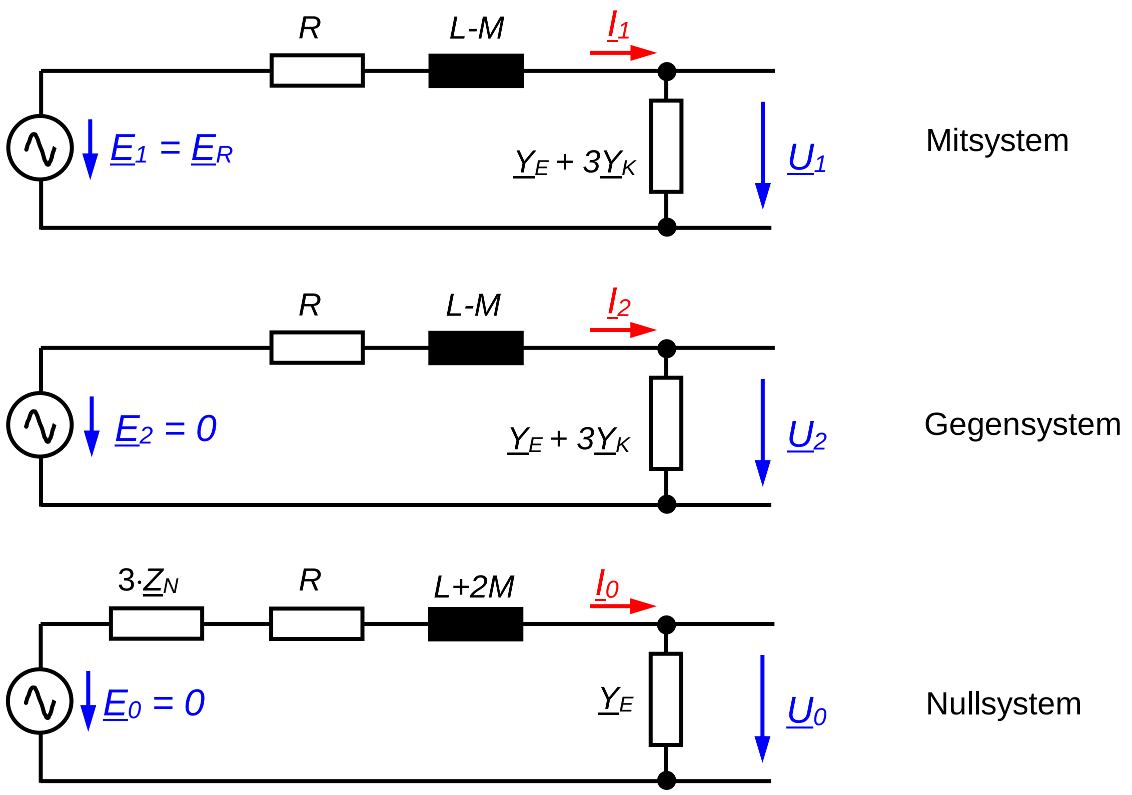


Bild 2.12 Transformation einer symmetrischen Drehstromschaltung mit einer symmetrischen Drehspannungsquelle als Anregung in 3 unabhängige (entkoppelte) 1-phasige Schaltungen mit nur einer Spannungsquelle im Mitsystem durch die symmetrischen Komponenten

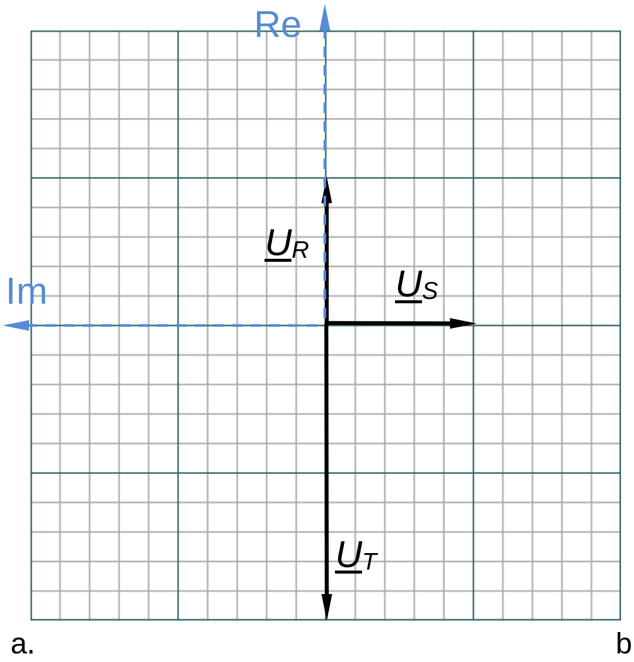
Im Folgenden sollen Mit-, Gegen- und Nullsystem sowie ihre physikalische Interpretation noch näher betrachtet werden. Dazu dient das folgende Beispiel:

<u>Beispiel:</u>
Es soll das in ***Bild 2.13a*** dargestellte unsymmetrische Drehspannungssystem in symmetrische Komponenten transformiert werden:

$$\underline{U}_R = \underline{U}_0 \cdot e^{j\omega t} \qquad \underline{U}_S = \underline{U}_0 \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} \qquad \underline{U}_T = 2\underline{U}_0 \cdot e^{j(\omega t - \pi)} \; . \tag{2.73}$$

Man erhält durch Anwendung der Transformation gemäß Gleichung (2.69)

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \underline{U}_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4+\sqrt{3}}{2} + j\frac{1+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4-\sqrt{3}}{2} + j\frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ -1-j \end{pmatrix} \; . \tag{2.74}$$



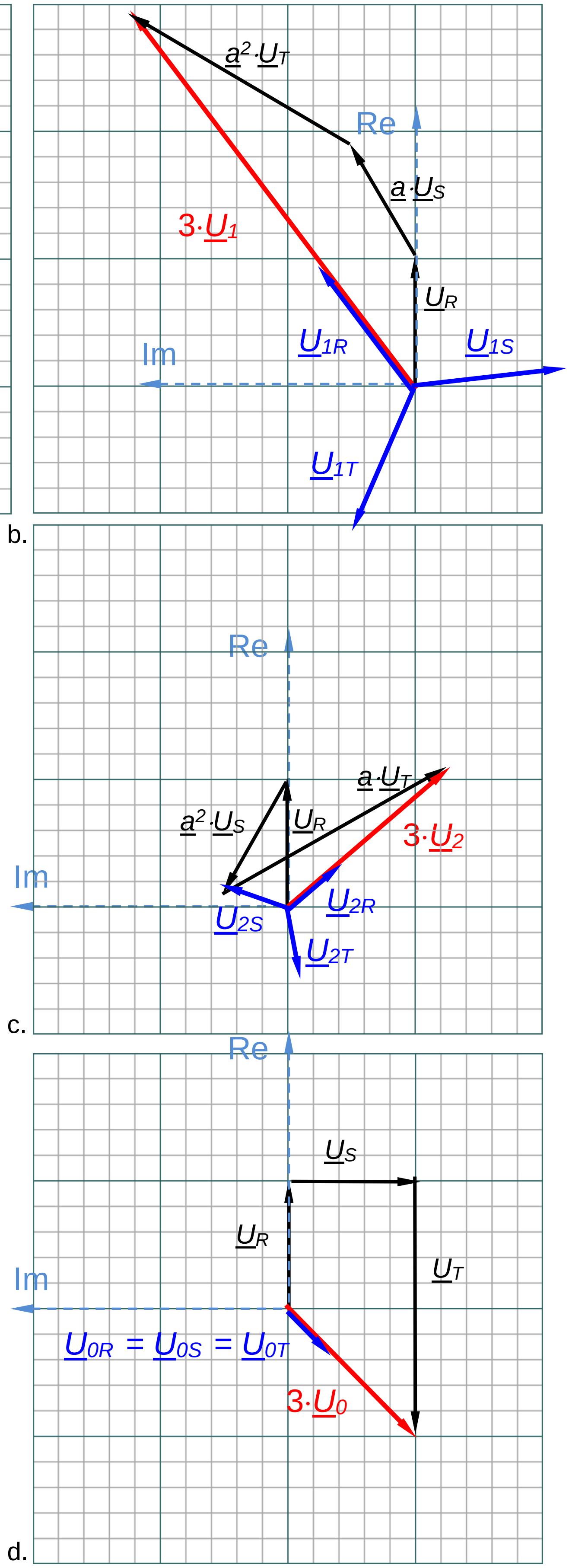


Bild 2.13 Graphische Konstruktion des Mit-, Gegen- und Nullsystems für das konkrete Beispiel gemäß (2.73) für $\omega \cdot t = 0$

a. RST-System
b. Mitsystem
c. Gegensystem
d. Nullsystem

Dem ***Bild 2.13*** lassen sich die folgenden Eigenschaften des Mit-, Gegen- und Nullsystems entnehmen:

- Durch Anwendung der Transformation gemäß (2.69) lassen sich die Zeiger $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_0$ konstruieren (und berechnen). Das Ergebnis der Berechnung gemäß (2.74) sind die Zeiger der Bezugsphase R. Die Lage der fehlenden Zeiger S und T der jeweiligen Spannungssysteme kann dann mit Kenntnis der Zusammenhänge gemäß (2.65) sofort angegeben werden.
- Die Zeiger des Mit-, Gegen- und Nullsystems $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_0$ (der Bezugsphase R) stehen für ein gegebenes unsymmetrisches Drehspannungssystem in einer festen Phasenbeziehung zueinander. Diese bleibt bei der Rotation ALLER Zeiger mit der Kreisfrequenz ω erhalten.
- Beim Nullsystem sind alle Zeiger in die selbe Richtung orientiert.

Prinzipiell können dem Drehspannungssystem auch Gleichspannungen überlagert sein. Um deren Transformation zu verdeutlichen wird das vorherige Beispiel noch etwas erweitert:

$$\underline{U}_R = U_0 \cdot e^{j\omega t} + U_{R,DC} \qquad \underline{U}_S = U_0 \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)} + U_{S,DC} \qquad \underline{U}_T = 2U_0 \cdot e^{j(\omega t - \pi)} + U_{T,DC} \ . \tag{2.75}$$

Die Anwendung der Transformation gemäß Gleichung (2.69) liefert

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot U_0 \cdot e^{j\omega t} \cdot \begin{pmatrix} \frac{4+\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{4-\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1-2\sqrt{3}}{2} \\ -1-j \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} U_{R,DC} + \underline{a}U_{S,DC} + \underline{a}^2 U_{T,DC} \\ U_{R,DC} + \underline{a}^2 U_{S,DC} + \underline{a}U_{T,DC} \\ U_{R,DC} + U_{S,DC} + U_{T,DC} \end{pmatrix} \ . \tag{2.76}$$

Der erste Term stellt, identisch zum vorigen Beispiel, drei Zeiger dar, die sich mit der Kreisfrequenz ω drehen. Beim zweiten Term handelt es sich um feststehende Zeiger. Falls die Gleichspannungen in allen drei Phasen identisch sind ($U_{R,DC} = U_{S,DC} = U_{T,DC} = U_{DC}$), verschwindet der zweite Term für das Mit- und Gegensystem und der zweite Term für das Nullsystem besteht aus der Gleichspannung U_{DC}.

Das Gegensystem soll noch gesondert betrachtet werden. Betreibt man einen Asynchronmotor an einem symmetrischen Drehspannungssystem, so ergibt sich eine bestimmte Drehrichtung der Welle aufgrund der Drehrichtung des magnetischen Drehfeldes in der Maschine. Vertauscht man 2 Phasen, z. B. S und T, so dreht sich die Welle des Motors anders herum. Also dreht sich auch das magnetische Drehfeld in die andere Richtung. Offensichtlich hat man durch die Vertauschung von 2 Phasen eines in mathematisch positiver Richtung mit der Phasenfolge RST drehenden Spannungssystems (Mitsystem) ein in mathematisch negative Richtung drehendes Spannungssystem geschaffen, also ein Gegensystem.

Anschaulich ist das in ***Bild 2.14*** dargestellt. Die Vertauchung der Phasen S und T des ursprünglichen Mitsystems (positiv drehend) führt zu einer Phasenfolge TSR bei Drehung in mathematisch positiver Richtung. Durch die Vertauschung von 2 Phasen eines Mitsystems erzeugt man also ein sogenanntes Gegensystem, dessen Phasenfolge umgekehrt zum Mitsystem ist (TSR). Die englischsprachigen Ausdrücke „positive sequence“ für Mitsystem und „negative sequence“ für Gegensystem beschreiben diesen Sachverhalt anschaulicher, als die deutschen Begriffe „Mit- und Gegensystem“. Mathematisch lässt sich das Gegensystem durch die folgenden Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{2R} &= U_2 \cdot e^{j(\omega t+\varphi)} \\ \underline{U}_{2S} &= U_2 \cdot e^{j\left(\omega t+\varphi-\frac{4\pi}{3}\right)} \\ \underline{U}_{2T} &= U_2 \cdot e^{j\left(\omega t+\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)} \end{aligned} \quad . \tag{2.77}$$

Tatsächlich lässt sich zeigen, dass sich das Drehfeld einer Dreiphasenwicklung beim Anlegen eines reinen Gegensystems ändert.

Das Gegensystem in ***Bild 2.14*b** rotiert in derselben Drehrichtung wie das Mitsystem, jedoch mit entgegen gesetzter Phasenfolge (TSR anstelle von RST). Bezüglich der Phasenfolge RST ist dazu ein in entgegengesetzter Richtung rotierendes System in dem Sinn äquivalent (***Bild 2.14c***), als dass ein mit beiden Drehspannungssystemen gespeister Asynchronmotor in dieselbe Richtung rotiert.

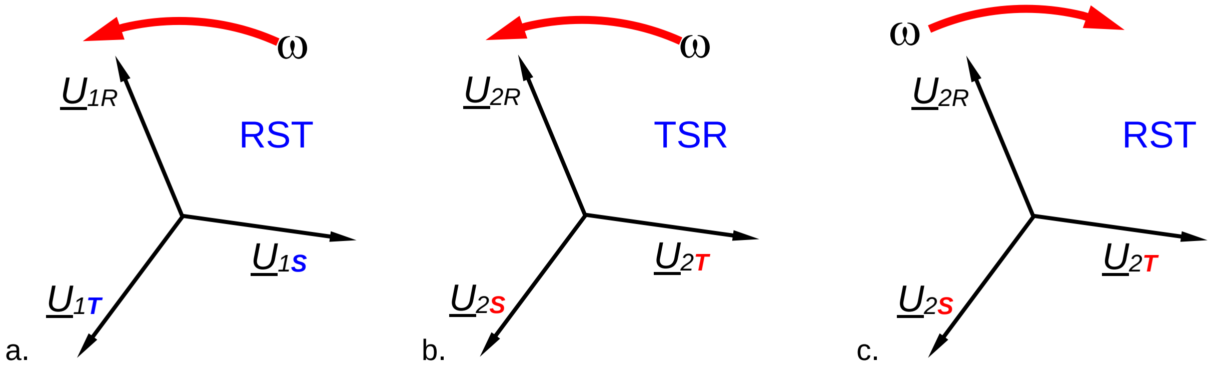


Bild 2.14 Spannungssysteme in der komplexen Ebene

a. Symmetrisches Drehspannungssystem, in mathematisch positive Richtung drehend (Mitsystem), Phasenfolge RST
b. Vertauschung der Phasen S und T gegenüber a., Phasenfolge ist TSR
c. in mathematisch negative Richtung drehendes Spannungssystem mit Phasenfolge RST (Gegensystem)

2.4.3.2 αβ0-Komponenten

Die αβ0-Komponenten (oder Diagonal-Komponenten) wurden 1948 von Edith Clarke vorgeschlagen. Der wesentliche Unterschied zu den symmetrischen Komponenten besteht darin, dass in der Transformationsmatrix $\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0}$ der αβ0-Komponenten nur reelle Elemente auftreten. Die αβ0-Komponenten transformieren das Drehspannungssystem in ein Orthogonalsystem, bei dem die Komponentenachsen α und β senkrecht aufeinander stehen. Aus didaktischer Sicht stellen die αβ0-Komponenten die Grundlage für die dq0-Komponenten dar.

Die Transformationsgleichungen der $\alpha\beta0$-Komponenten lauten

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} \overset{!}{=} \boldsymbol{C}_{\alpha\beta0} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} \quad \text{und} \quad \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} \overset{!}{=} \left(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} \tag{2.78}$$

mit

$$\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\left(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0}\right)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.79}$$

Man kann sich leicht überzeugen, dass Gleichung (2.59) zur Bestimmung der Eigenvektoren erfüllt wird.

Interessant ist die $\alpha\beta0$-Transformation eines unsymmetrischen Drehspannungssystems. Ein unsymmetrisches Drehspannungssystem lässt sich entweder direkt transformieren oder nach Fortescue in Mit-, Gegen- und Nullsystem zerlegen. Bei der Zerlegung eines *unsymmetrischen* Drehspannungssystems in Mit-, Gegen- und Nullsystem ergeben sich bei der $\alpha\beta0$-Transformation 3 einzelne Transformationen:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} = \left(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} = \left[\left(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{C}}_{120}\right] \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{120}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{120}} , \tag{2.80}$$

also

$$\underline{\boldsymbol{U}}^{1}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_{R1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{E}_{R1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R1} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{U}}^{2}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_{R2} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{E}_{R2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} . \tag{2.81}$$

$$\underline{\boldsymbol{U}}^{0}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E}_{R0} \end{pmatrix} = \underline{E}_{R0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_{R0} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_0)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In den Phasenwinkeln φ_1, φ_2 und φ_0 ist die für ein gegebenes unsymmetrisches Drehspannungssystem resultierende feste Phasenbeziehung zwischen (den jeweiligen Bezugsphasen R) des Mit-, Gegen- und Nullsystems enthalten. Im Fall des unsymmetrischen Drehspannungssystems bekommt man also 3 $\alpha\beta0$-Systeme, wobei sich die Nullsysteme der symmetrischen Komponenten und des $\alpha\beta0$-Systems identisch sind.

Man erkennt, dass bei der Transformation eines symmetrischen Drehspannungssystems zwar im Nullsystem keine treibende Spannung gegeben ist, wohl aber im α- und β-System. Auch bei vollständig symmetrischen 3-phasigen Netzwerken müssen daher bei Verwendung der $\alpha\beta0$-Transformation 2 1-phasige Schaltungen berechnet werden – ein deutlicher Nachteil gegenüber den symmetrischen Komponenten.

Interessant ist noch die Betrachtung im Zeitbereich. Aus (2.81) folgt bei Ansatz einer komplexen Zeitfunktion für das Mitsystem

$$\underline{\boldsymbol{U}}^1_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} = \underline{E}_{R1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R1} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_1)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_1) + j\sin(\omega t + \varphi_1) \\ \sin(\omega t + \varphi_1) - j\cos(\omega t + \varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.82}$$

Setzt man also für die Spannung der Phase R im Zeitbereich eine (reelle) Cosinus-Funktion als Realteil der entsprechenden e-Funktion $e^{-j(\omega t + \varphi_1)}$ an und entsprechend für die Phasen S und T eine Phasenverschiebung um je 120° gegeneinander, also

$$\begin{pmatrix} u_R(t) \\ u_S(t) \\ u_T(t) \end{pmatrix} = E_{R1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \cos(\omega t + \varphi_1 - 120^o) \\ \cos(\omega t + \varphi_1 - 240^o) \end{pmatrix} \quad , \tag{2.83}$$

so ergibt sich der Realteil der komplexen $\alpha\beta0$-Komponenten gemäß Gleichung (2.82), d. h.

$$\boldsymbol{U}^1_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} = \begin{pmatrix} U^1_\alpha \\ U^1_\beta \\ U^1_0 \end{pmatrix} = E_{R1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_1) \\ \sin(\omega t + \varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.84}$$

Zum selben Ergebnis kommt man auch, wenn man die Transformationsmatrix $(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0})^{-1}$ gemäß (2.79) mit der Zeitfunktion gemäß (2.83) multipliziert.

Aus Gleichung (2.84) geht hervor, dass die α-Komponente in dem gezeigten Beispiel mit $\varphi_1 < 0$ für $\omega \cdot t = 0$ positiv ist und den Wert $\cos(\varphi_1)$ annimmt. Die β-Komponente wird wegen $\varphi_1 < 0$ mit $\sin(\varphi_1)$ negativ. Mit dieser Überlegung ergibt sich die Lage der α- und β-Achsen. Aus der graphischen Darstellung gemäß ***Bild 2.15*** wird ersichtlich, dass es sich bei den Komponenten U_α und U_β um Projektionen des sich drehenden Zeigers $\underline{U}_{1R}$ auf ein feststehendes orthogonales Koordinatensystem handelt.

Für das Gegensystem erhält man mit derselben Überlegung:

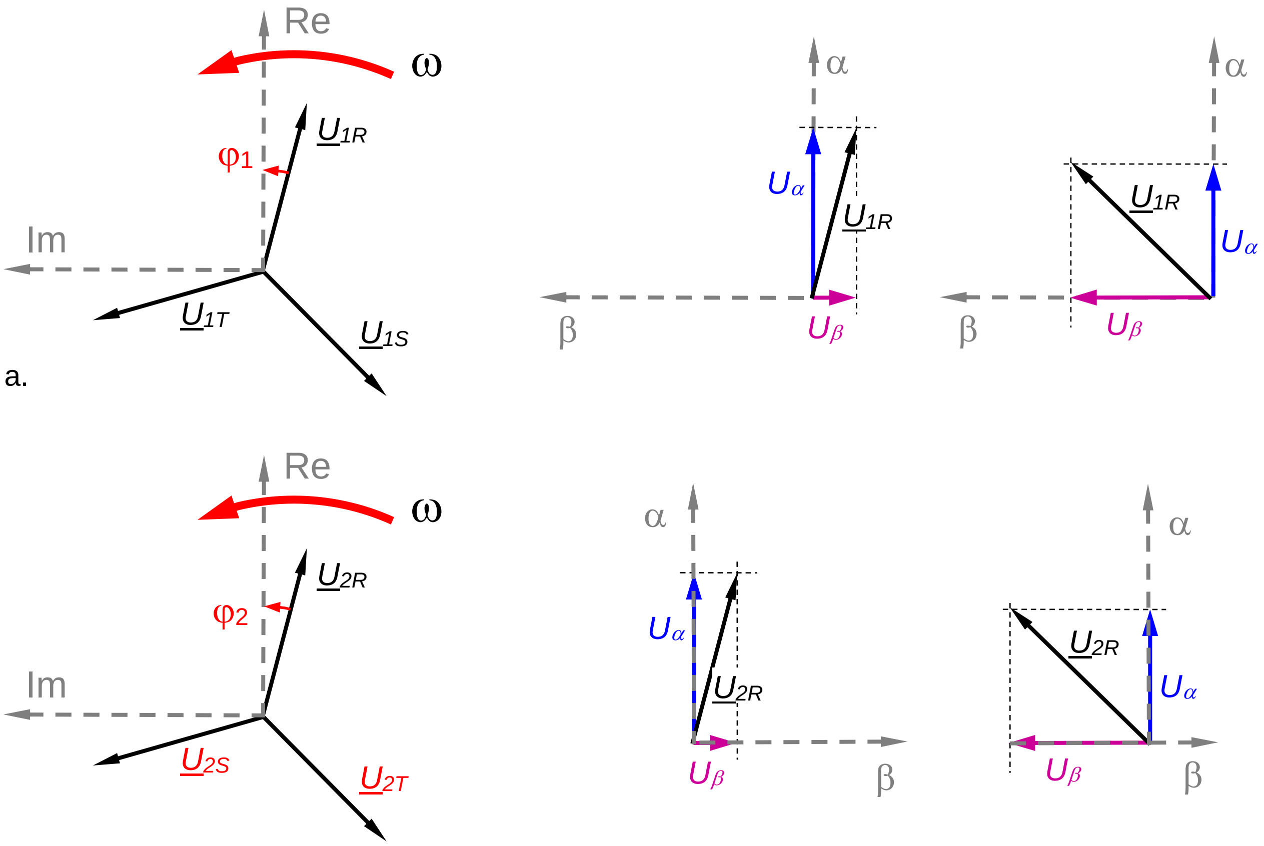
$$\underline{\boldsymbol{U}}^2_{\boldsymbol{\alpha\beta 0}} = \underline{E}_R \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_2) + j\sin(\omega t + \varphi_2) \\ -\sin(\omega t + \varphi_2) + j\cos(\omega t + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.85}$$

Das Gegensystem wird wieder als Cosinus-Funktion angesetzt:

$$\begin{pmatrix} u_R(t) \\ u_S(t) \\ u_T(t) \end{pmatrix} = E_{R2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_2) \\ \cos(\omega t + \varphi_2 - 240^o) \\ \cos(\omega t + \varphi_2 - 120^o) \end{pmatrix} \quad , \tag{2.86}$$

so ergibt sich der Realteil der komplexen αβ0-Komponenten gemäß Gleichung (2.85), d. h.

$$\boldsymbol{U}^2_{\boldsymbol{\alpha\beta 0}} = \begin{pmatrix} U^2_\alpha \\ U^2_\beta \\ U^2_0 \end{pmatrix} = E_{R2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_2) \\ -\sin(\omega t + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.87}$$



b.

Bild 2.15 Interpretation der αβ0-Transformation

a. Mitsystem, in mathematisch positive Richtung drehend, Phasenfolge RST, Phasenwinkel $\varphi_1 < 0$, zugehörige αβ-Komponenten für $\omega t = 0$ und für $\omega t > \varphi_1$

b. Gegensystem, in mathematisch positive Richtung drehend, Phasenfolge RTS, Phasenwinkel $\varphi_2 < 0$, zugehörige αβ-Komponenten für $\omega t = 0$ und für $\omega t > \varphi_2$

Aus Gleichung (2.87) geht nun hervor, dass die α-Komponente in dem gezeigten Beispiel mit $\varphi_2 < 0$ für $\omega \cdot t = 0$ positiv ist und den Wert $\cos(\varphi_2)$ annimmt. Die β-Komponente wird wegen $\varphi_2 < 0$ mit $-\sin(\varphi_2)$ nun aber positiv. Am Zeiger $\underline{U}_{1R}$ hat sich nichts geändert, er dreht mit der Kreisprequenz ω wie beim Mitsystem in mathematisch positive Richtung. Das Gegensystem wurde nur durch Vertauschung der Phasen S und T gegenüber dem Mitsystem hergestellt. Die Forderung nach einer positiven β-Komponente lässt sich nur durch die Umkehrung der β-Achse im Vergleich zum Mitsystem erreichen. Beim Gegensystem ist also die Richtung der β-Achse im Vergleich zum Mitsystem um 180° gedreht.

Interessant ist noch die folgende Betrachtung. Geht man zunächst von einem Mitsystem aus, so beschreibt Gleichung (2.84) die $\alpha\beta0$-Komponenten. Setzt man nun in Gleichung (2.84) *negative Frequenzen* ein, so ergibt sich

$$E_R \cdot \begin{pmatrix} \cos\left[(-\omega)t + \varphi_1\right] \\ \sin\left[(-\omega)t + \varphi_1\right] \\ 0 \end{pmatrix} = E_R \cdot \begin{pmatrix} \cos\left[(\omega)t - \varphi_1\right] \\ -\sin\left[(\omega)t - \varphi_1\right] \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.88}$$

Vergleicht man die Gleichungen (2.87) und (2.88), so stellt man fest, dass sie bis auf die Phasenverschiebung identisch sind. Offensichtlich erhält man die $\alpha\beta$-Komponenten des Gegensystems für aus der Gleichung der $\alpha\beta$-Komponenten des Mitsystems für negative Frequenzen oder anders ausgedrückt: Die $\alpha\beta$-Komponenten des Gegensystems lassen sich mit Hilfe negativer Frequenzen darstellen. Davon wird noch Gebrauch gemacht, um Mit- und Gegensystem aus einem beliebigen Dreiphasensystem zu extrahieren.

2.4.3.3 dq0-Transformation

Die dq0-Transformation (oder Park-Transformation) bildet ein Drehspannungssystem auf ein sich drehendes orthogonales Koordinatensystem ab.

Die Park-Transformation wurde 1929 von R.H. Park mit dem Ziel eingeführt, das dreiphasige Statorsystem einer Drehfeldmaschine in ein orthogonales Koordinatensystem zu transformieren, das mit dem Läufer rotiert. Auf diese Weise bleiben die im RST-System durch die Drehung des Läufers variablen Koppelinduktivitäten zwischen Stator- und Läuferwicklung konstant, was eine mathematische Analyse einer Drehfeldmaschine überhaupt erst ermöglicht.

Die dq0-Transformation erfolgt in 2 Schritten (***Bild 2.16***):

1) Transformation des RST-Systems in das ruhende und orthogonale $\alpha\beta0$-System.

2) Transformation des $\alpha\beta0$-Systems in das ebenfalls orthogonale, aber rotierende dq0-System.

Die Transformation des RST-Systems in das ruhende und orthogonale $\alpha\beta0$-System erfolgt gemäß den Gleichungen (2.78) und (2.79). Bei der Transformation des $\alpha\beta0$-Systems in das dq0-System bleibt die Nullkomponente erhalten. Auch die Orthogonalität des $\alpha\beta0$-Systems überträgt sich auf das dq0-System, da das dq0-System nur um den Winkel θ gegenüber dem $\alpha\beta0$-System gedreht ist. Der Winkel θ kann als zeitabhängig aufgefasst werden, z. B. mit

$$\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0 \quad . \tag{2.89}$$

Damit rotiert das dq-Koordinatensystem mit derselben Kreisfrequenz wie das Mitsystem im RST-System.

Stellt man sich eine Person vor, die auf einem Zeiger eines symmetrischen Drehspannungssystems (Mitsystem) sitzt, z. B. auf $\underline{U}_{1R}$, so rotiert sie mit der Kreisfrequenz ω. Transformiert ins dq-System rotiert sie ebenfalls mit ω und sieht auf der d-Achse und der q-Achse konstante Amplituden. Aus dieser Überlegung lässt sich ableiten, dass ein symmetrisches Drehspannungssystem im dq0-System mit konstanten Amplituden in d- und q-Achse - oder anders ausgedrückt - durch Gleichgrößen in dq-Komponenten darstellbar ist.

Die Transformationsgleichung lässt sich direkt dem ***Bild 2.16*** entnehmen und lautet:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}} = \left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta0\to dq0}}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0\to\alpha\beta0}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}}$$

$$= \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_\alpha \\ \underline{U}_\beta \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.90}$$

Die Matrix $\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0\to dq0}$ lässt sich entweder durch Inversion der Matrix $(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0\to dq0})^{-1} = \boldsymbol{C}_{dq0\to\alpha\beta0}$ errechnen oder durch geometrische Überlegungen ähnlich denen in ***Bild 2.16*** bestimmen:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta0\to dq0}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}} = \begin{pmatrix} \underline{U}_\alpha \\ \underline{U}_\beta \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.91}$$

Später wird noch von Bedeutung sein, dass sich die Matrix $(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0\to dq0})^{-1}$ ergibt, indem man in der Matrix $\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0\to dq0}$ anstelle $\theta = \omega t$ den negierten Term $-\theta = -\omega t$ einsetzt:

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta0\to dq0}}(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 0 \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta0\to dq0}}\right)^{-1} . \tag{2.92}$$

Die Transformation vom RST-System in das dq0-System ergibt sich über die $\alpha\beta0$-Transformation durch:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}} = \underbrace{\left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta0\to dq0}}\right)^{-1} \cdot \left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta0}}\right)^{-1}}_{\left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}}\right)^{-1}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_R \\ \underline{U}_S \\ \underline{U}_T \end{pmatrix} \quad . \tag{2.93}$$

Führt man die Matrixmultiplikation aus und vereinfacht das Ergebnis noch durch Zusammenfassen von Winkelfunktionen, so kommt man auf die Transformationsvorschrift:

$$\underline{U}_{RST} \overset{!}{=} \boldsymbol{C}_{dq0} \cdot \underline{U}_{dq0} \qquad \text{und} \qquad \underline{U}_{dq0} \overset{!}{=} \left(\boldsymbol{C}_{dq0}\right)^{-1} \cdot \underline{U}_{RST}$$

$$\text{mit} \qquad \boldsymbol{C}_{dq0} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 1 \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.94}$$

$$\text{und} \qquad \left(\boldsymbol{C}_{dq0}\right)^{-1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

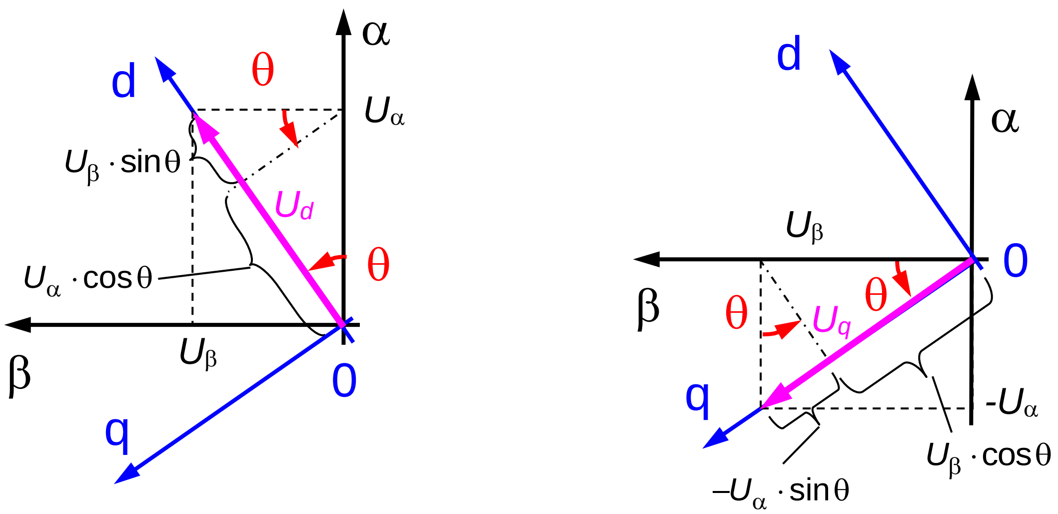


Bild 2.16 Übergang vom orthogonalen feststehenden αβ0-System in das orthogonale rotierende dq0-System für die d-Komponente (links) und die q-Komponente (rechts)

Interessant ist auch hier wieder die Betrachtung eines unsymmetrischen Drehspannungssystems. Möglich ist wie bei der αβ0–Transformation die direkte Transformation mit den Beziehungen (2.94) oder die Zerlegung des unsymmetrischen Drehspannungssystems in Mit-, Gegen- und Nullsystem

$$\underline{U}_{dq0} = \left(\boldsymbol{C}_{dq0}\right)^{-1} \cdot \underline{U}_{RST} = \left[\left(\boldsymbol{C}_{dq0}\right)^{-1} \cdot \boldsymbol{C}_{120}\right] \cdot \underline{U}_{120} = \begin{pmatrix} e^{-j\theta} & e^{j\theta} & 0 \\ -j \cdot e^{-j\theta} & j \cdot e^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{U}_{120} \quad . \tag{2.95}$$

Auch hier ergeben sich wieder 3 dq0-Systeme, d. h. je eines für das Mit-, Gegen- und Nullsystem:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}}^{1} = \begin{pmatrix} e^{-j\theta} & e^{j\theta} & 0 \\ -j\cdot e^{-j\theta} & j\cdot e^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_{R1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{E}_{R1} \cdot \begin{pmatrix} e^{-j\theta} \\ -j\cdot e^{-j\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R1}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_1)} \cdot \begin{pmatrix} e^{-j\theta} \\ -j\cdot e^{-j\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}}^{2} = \begin{pmatrix} e^{-j\theta} & e^{j\theta} & 0 \\ -j\cdot e^{-j\theta} & j\cdot e^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_{R2} \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{E}_{R2} \cdot \begin{pmatrix} e^{j\theta} \\ j\cdot e^{j\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R2}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_2)} \cdot \begin{pmatrix} e^{j\theta} \\ j\cdot e^{j\theta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \qquad (2.96)$$

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}}^{0} = \begin{pmatrix} e^{-j\theta} & e^{j\theta} & 0 \\ -j\cdot e^{-j\theta} & j\cdot e^{j\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E}_{R0} \end{pmatrix} = \underline{E}_{R0} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_{R0}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_0)} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die von θ abhängigen Vektoren verursachen zusammen mit dem Term $e^{j\omega t}$ die Drehung. Beachtenswert ist, dass die von θ abhängigen Vektoren, rot markiert für das Mitsystem und blau markiert für das Gegensystem, zueinander konjugiert komplex sind. Dadurch unterscheiden sich sowohl die Drehrichtung der d- und q-Koordinaten im Mitsystem und im Gegensystem voneinander, außerdem liegt bei der q-Achse noch eine Richtungsänderung vor. Auf diesen Umstand wird bei der Betrachtung des Gegensystems noch detailliert eingegangen.

Das Mitsystem, also ein symmetrisches Drehspannungssystem, transformiert sich in

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}}^{1} = \begin{pmatrix} U_d^1 \\ U_q^1 \\ U_0^1 \end{pmatrix} = E_{R1}\cdot e^{j(\omega t+\varphi_1)} \cdot \begin{pmatrix} e^{-j(\omega t+\theta_0)} \\ -j\cdot e^{-j(\omega t+\theta_0)} \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R1}\cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_0-\varphi_1) - j\sin(\theta_0-\varphi_1) \\ -\sin(\theta_0-\varphi_1) - j\cos(\theta_0-\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad (2.97)$$

mit $\theta = \omega t + \theta_0$

wobei das dq-Achsenkreuz mit derselben Winkelgeschwindigkeit ω wie das Mitsystem rotiert. Es handelt sich also bei u_d und u_q um Gleichgrößen, der Zeiger $\underline{E}_{R1}$ ist identisch mit jenem der $\alpha\beta$0-Transformation, θ_0 und φ_1 bewirken eine definierte Drehung gegenüber dem $\alpha\beta$-Achsenkreuz für $\omega \cdot t$ = 0. Häufig verwendet man θ_0 = -90° (***Bild 2.18***). So sind in MATLAB Simulink die Optionen „Aligned with phase A axis" (θ_0 = 0°) und "90 degrees behind phase A axis" (θ_0 = -90°) wählbar (***Bild 2.17***).

Nimmt man in Zeitbereich wieder ein Mitsystem mit der Formulierung gemäß Gleichung (2.83) an, so erhält man mit θ_0 = -90° („90 degrees behind phase A axis") im dq0-System den Realteil von Gleichung (2.97), d. h.

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}}^{1} = E_{R1}\cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_0-\varphi_1) \\ -\sin(\theta_0-\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\theta_0=-90^o}{=} E_{R1}\cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1+\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\varphi_1+\frac{\pi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R1}\cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi_1) \\ \cos(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\varphi_1=0^o}{=} E_{R1}\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \qquad (2.98)$$

d. h. der Zeiger $\underline{E}_{R1}$ liegt für $\varphi_1 = 0$ auf der q-Achse. Für mit $\theta_0 = 0°$ („Aligned with phase A axis“) folgt aus

$$\underline{\boldsymbol{U}}^1_{\boldsymbol{dq0}} = E_{R1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - \varphi_1) \\ -\sin(\theta_0 - \varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\theta_0 = 0^o}{=} E_{R1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(-\varphi_1) \\ -\sin(-\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\varphi_1) \\ \sin(\varphi_1) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\varphi_1 = 0^o}{=} E_{R1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.99)$$

dass der Zeiger $\underline{E}_{R1}$ für $\varphi_1 = 0$ auf der d-Achse liegt.

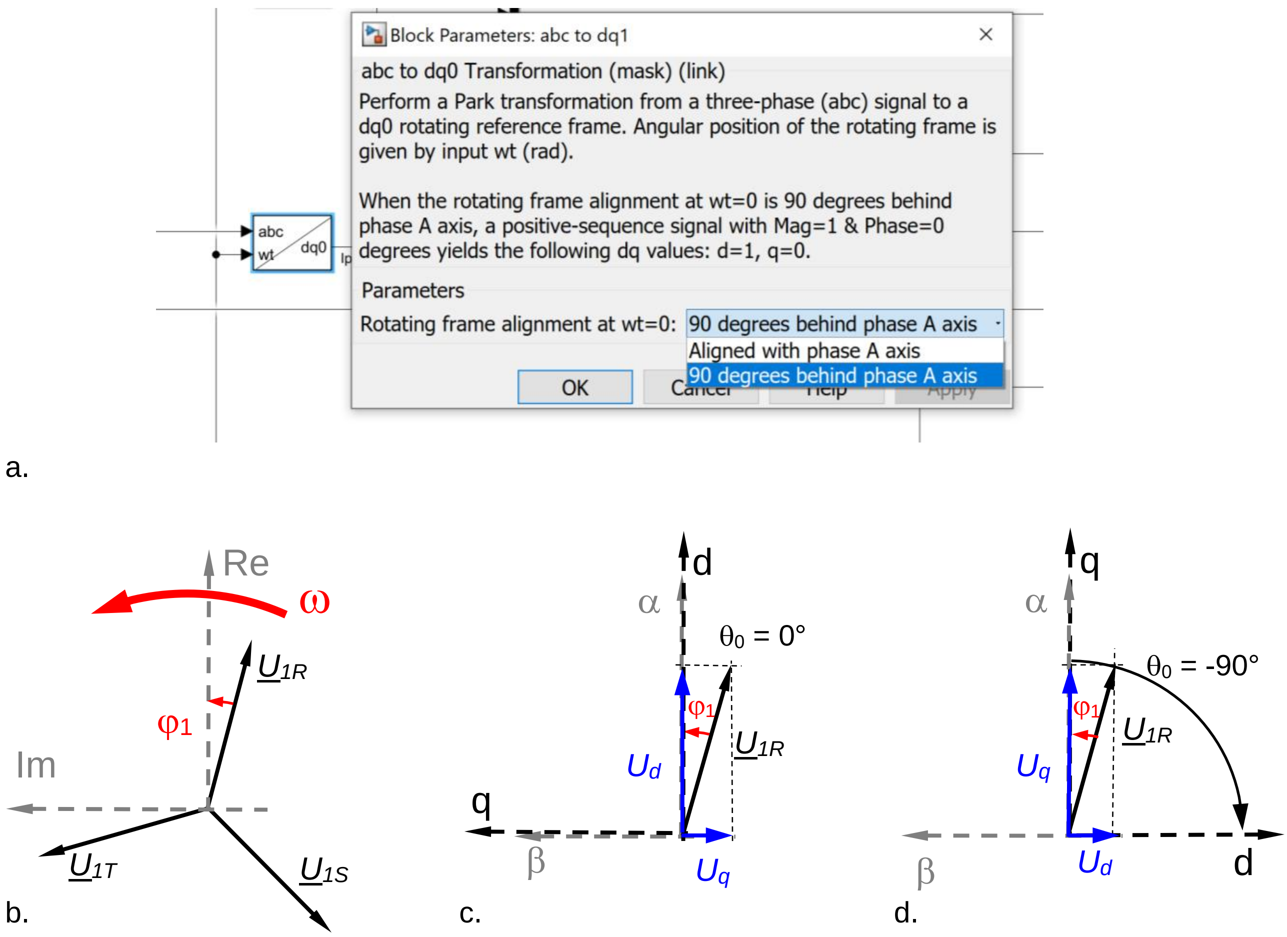


Bild 2.17 Drehung des dq-Achsenkreuzes gegenüber dem feststehenden $\alpha\beta$-Koordinatensystem durch den Winkel θ_0

- dq0-Transformation eines 3-phasigen Systems in MATLAB Simulink und die möglichen Optionen für θ_0
- symmetrisches Drehspannungssystem
- Lage von dq- und $\alpha\beta$-Koordinatensystem für $\theta_0 = 0°$, „Aligned with phase A axis“
- Lage von dq- und $\alpha\beta$-Koordinatensystem für $\theta_0 = -90°$, „90 degrees behind phase A axis“

Das Gegensystem wird wie folgt transformiert:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}}^{2} = E_{R2} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_2)} \begin{pmatrix} e^{j(\omega t + \theta_0)} \\ j \cdot e^{j(\omega t + \theta_0)} \\ 0 \end{pmatrix} = E_{R2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\omega t + \varphi_2 + \theta_0) + j \sin(2\omega t + \varphi_2 + \theta_0) \\ -\sin(2\omega t + \varphi_2 + \theta_0) + j \cos(2\omega t + \varphi_2 + \theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

Ausgehend von einem Gegensystem gemäß Gleichung (2.77) erhält man in dq0-Koordinaten den Realteil von Gleichung (2.100):

$$\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{dq0}}^{2} = E_{R2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\omega t + \varphi_2 + \theta_0) \\ -\sin(2\omega t + \varphi_2 + \theta_0) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\theta_0 = 0}{=} E_{R2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\omega t + \varphi_2) \\ -\sin(2\omega t + \varphi_2) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.101)$$

An dieser Stelle ist es lohnenswert, die Koordinatensysteme in dq0-Komponenten und im Vergleich dazu in $\alpha\beta$0-Komponenten für das Mit- und das Gegensytem genauer zu betrachten.

Bild 2.18a zeigt die dq0-Transformation für ein Mitsystem. Das dq-Achsenkreuz und der Spannungszeiger $\underline{U}_{1R}$ rotieren mit der Kreisfrequenz ω in mathematisch positiver Richtung. Für $\theta_0 = 0$ liegen die d-Achse und die α-Achse für $\omega t = 0$ auf einander, im Fall $\theta_0 = 90^\circ$ liegen d-Achse und die β-Achse für $\omega t = 0$ auf einander. Aufgrund der identischen Rotationsgeschwindigkeit von $\underline{U}_{1R}$ sowie d- und q-Achse bleibt die Aufspaltung

$$\underline{U}_{1R} = \frac{U_d}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{U_q}{\sqrt{2}} \quad (2.102)$$

zeitlich unverändert. Hierbei bezeichnet $\underline{U}_{1R}$ den Effektivwert, während U_d und U_q Amplituden, also Spitzenwerte sind. Die Aufspaltung des Zeigers $\underline{U}_{1R}$ in die d- und q-Komponente hängt nur von den Winkeln θ_0 und φ_1 ab. Dem Zeigerdiagramm ***Bild 2.18a*** kann man mit $\varphi_1 < 0$ direkt den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} U_d \\ U_q \end{pmatrix} = U_{R1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 - \varphi_1) \\ -\sin(\theta_0 - \varphi_1) \end{pmatrix} \quad (2.103)$$

entnehmen, also das aus Gleichung (2.98) bereits bekannte Ergebnis. Im Fall des Gegensystems gemäß ***Bild 2.18b*** kommt man über die Multiplikation des Gegensystems mit der Matrix $(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}})^{-1}$ zu dem Ergebnis

$$\begin{pmatrix} U_d \\ U_q \end{pmatrix} = U_{R2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\omega t + \varphi_2 + \theta_0) \\ -\sin(2\omega t + \varphi_2 + \theta_0) \end{pmatrix} \quad (2.104)$$

Dies geht nur, wenn das dq-Achsenkreuz in die Gegenrichtung, d. h. in mathematisch negativer Richtung rotiert und die Richtung der q-Achse um 180° gegenüber jener für das Mitsystem gedreht ist. Außerdem ist der Winkel θ_0 von der feststehenden α-Achse zur d-Achse hin orientiert und somit in ***Bild 2.18b*** positiv. Die Drehung des dq-Achsenkreuzes und die umgekehrte Orientierung der q-Achse beim Gegensystem im Vergleich zu Mitsystem korrespondiert auch zu den in Gleichung (2.96) rot und blau markierten und zueinander konjugiert komplexen Drehvektoren.

Somit kann festgehalten werden: Im Fall des Gegensystems drehen sich die Richtungen der β-Achse und der q-Achse im Vergleich zum Mitsystem um, außerdem rotiert das dq-Achsenkreuz in entgegengesetzte Richtung (mathematisch negativ). Dies entspricht einer Geschwindigkeitsdifferenz von $2\cdot\omega$, woraus für das Gegensystem in dq-Komponenten keine Gleichgrößen, sondern sinusförmige Größen mit der doppelten Frequenz resultieren.

Von Interesse ist noch die Rücktransformation von dq0-Koordinaten ins RST-System. Für ein Mitsystem erfolgt sie formal durch den Weg über die αβ-Transformation:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}} = \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta 0}} \cdot \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\alpha\beta 0 \rightarrow dq0}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ +\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix}_1 . \tag{2.105}$$

$$= \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{dq0}}$$

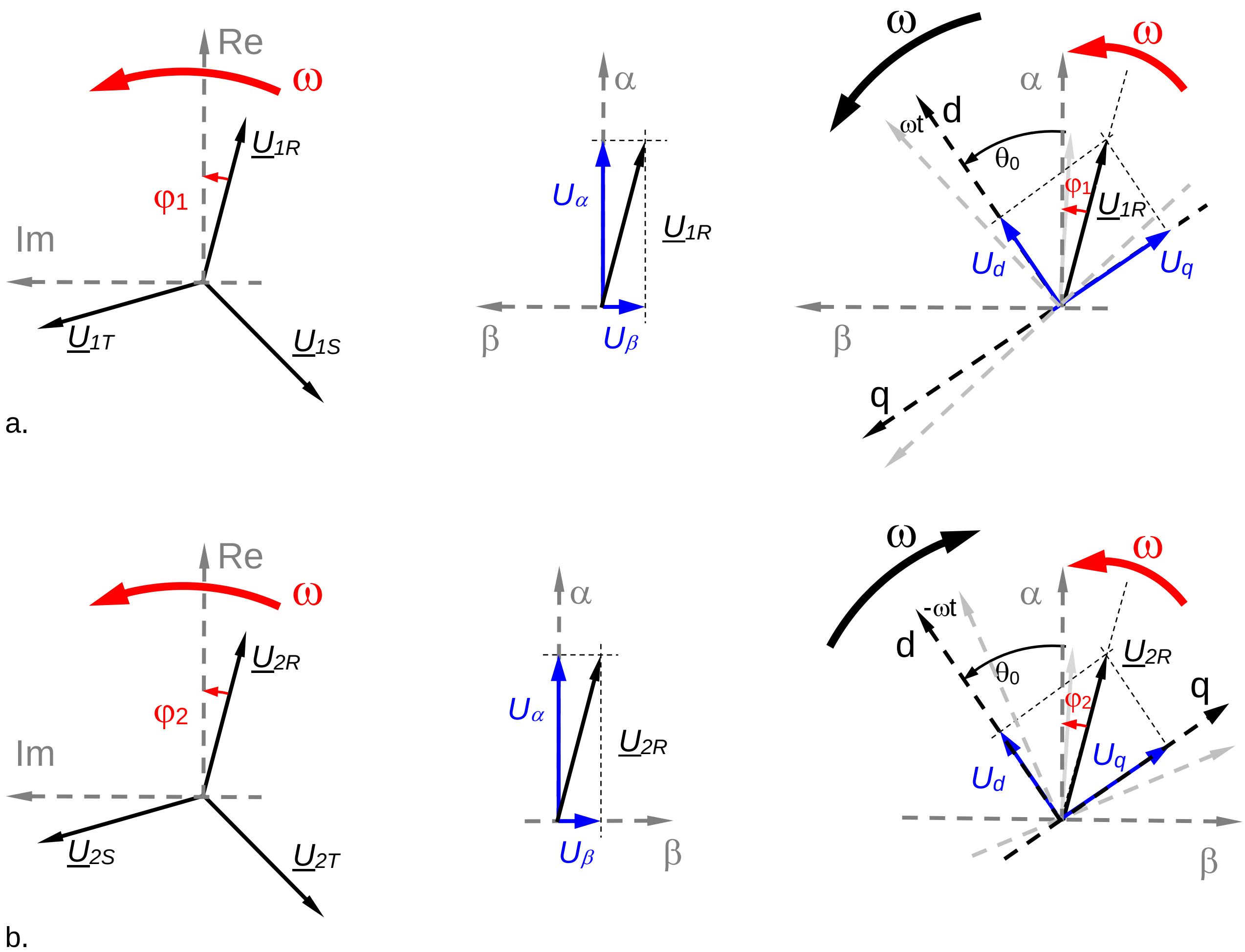


Bild 2.18 dq0-Transformation für ein Mitsystem und ein Gegensystem
a. Lage und Rotation des dq-Achsenkreuzes für ein Mitsystem (Phasenfolge RST) für $\theta_0 > 0$ sowie feststehendes αβ-System
b. Lage und Rotation des dq-Achsenkreuzes für ein Gegensystem (Phasenfolge TSR) für $\theta_0 < 0$ sowie feststehendes αβ-System

Die Matrix $\boldsymbol{C}_{dq0}$ ist mit Gleichung (2.94) bereits bekannt. Im Fall eines Gegensystems erhält man

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{RST} = \boldsymbol{C}_{\alpha\beta 0} \cdot \left(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta 0 \to dq0}\right)^{-1} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{dq0}^{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & +\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_d \\ \underline{U}_q \\ \underline{U}_0 \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{dq0}^{2} \quad . \tag{2.106}$$

Interessanterweise gilt:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\theta + \frac{4\pi}{3}) & \sin(\theta + \frac{4\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) & 1 \\ \cos(-\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(-\theta - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(-\theta - \frac{4\pi}{3}) & -\sin(-\theta - \frac{4\pi}{3}) & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{C}_{dq0}(-\theta) \cdot \tag{2.107}$$

Wenn also bekannt ist, dass es sich bei den dq0-Koordinaten um ein Gegensystem handelt, so wird dieses mit der Matrix $\boldsymbol{C}_{dq0}$ ins RST-System transformiert, jedoch mit dem Argument $-\theta = -\omega t$. Davon macht man bei Simulationen von entsprechenden Problemstellungen Gebrauch.

Die Scheinleistung $\underline{S}$ kann aus Spannung und Strom in dq-Koordinaten gemäß

$$\underline{U}_{1R} = \frac{U_d}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{U_q}{\sqrt{2}} \qquad \underline{I}_R = \frac{I_d}{\sqrt{2}} + j \cdot \frac{I_q}{\sqrt{2}} \tag{2.108}$$

durch den Ansatz

$$\begin{aligned} \underline{S} &= 3 \cdot \underline{U}_{1R} \cdot \underline{I}_R^{*} = \frac{3}{2} \cdot \left(U_d + j \cdot U_q\right) \cdot \left(I_d + j \cdot I_q\right)^{*} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \left(U_d \cdot I_d + U_q \cdot I_q\right) + j \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(U_q \cdot I_d - U_d \cdot I_q\right) = P + j \cdot Q \end{aligned} \tag{2.109}$$

berechnet werden. Hierbei ist berücksichtigt, dass die Größen im dq0-System für alle 3 Phasen identisch sind, weswegen man einfach mit dem Faktor 3 multiplizieren darf.

2.4.3.4 Invarianz der Transformationen hinsichtlich Leistung und Amplituden

Grundsätzlich kann man feststellen, dass die genannten Transformationen entweder leistungs- oder amplitudeninvariant sind. Die bisher angegebenen Transformationsmatrizen gelten für die amplitudeninvariante Form. Dies bedeutet, dass sich die Amplituden im Ausgangssystem, z. B. Spannungsamplituden im RST-System im Zielsystem, z. B. im $\alpha\beta0$-System oder im dq0-System nicht ändern. Dies ist jedoch gleichbedeutend mit einer Änderung der Leistungen. Die leistungsinvariante Form und die amplitudeninvariante Form der Transformation unterscheiden sich in den Vorfaktoren und den Nullkomponenten der Transformationsmatrizen. In der Literatur findet man beides und muss dementsprechend darauf achten, um welche der beiden Formen es sich handelt.

Die Gleichungen (2.81) und (2.96) zeigen, dass sich die Beträge α- und β-Komponente als auch die der d- und q-Komponente identisch mit der Amplitude des Mit-, Gegen- und Nullsystems (E_{R1}, E_{R2} und E_{R0}) des betrachteten Drehspannungsystems sind. Dies nennt man „bezugsleiter-invariant".

Die Bestimmung der Leistung im Dreiphasensystem erfolgt mit den Leiter-Erde-Spannungen und den Leiterströmen jeder Phase durch

$$\underline{S} = \underline{U}_R \cdot \underline{I}_R^* + \underline{U}_S \cdot \underline{I}_S^* + \underline{U}_T \cdot \underline{I}_T^* \quad . \tag{2.110}$$

Mit den Beziehungen für die Koordinatentransformationen ergeben sich die folgenden Gleichungen zur Leistungsberechnung:

$$\begin{aligned}
\underline{S}_{120} &= 3 \cdot \left[\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* \right] + 3 \cdot \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* \\
\underline{S}_{\alpha\beta 0} &= \frac{3}{2} \cdot \left[\underline{U}_\alpha \cdot \underline{I}_\alpha^* + \underline{U}_\beta \cdot \underline{I}_\beta^* \right] + 3 \cdot \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^* \quad , \\
\underline{S}_{dq0} &= \frac{3}{2} \cdot \left[\underline{U}_d \cdot \underline{I}_d^* + \underline{U}_q \cdot \underline{I}_q^* \right] + 3 \cdot \underline{U}_0 \cdot \underline{I}_0^*
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Man erkennt hier die zur Leistungsberechnung nötigen Korrekturfaktoren von 3 und 3/2.

Ausgehend von einer allgemeinen Koordinatentransformation in ein XYZ-System kann man entsprechend Gleichung (2.61) auch schreiben:

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \left(\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{RST}}\right)^T \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{RST}}^* = \left(\underline{\boldsymbol{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}}\right)^T \cdot \left(\underline{\boldsymbol{C}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}}\right)^* \\
&\overset{!}{=} \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}} \cdot \left(\underline{\boldsymbol{C}}\right)^T \cdot \underline{\boldsymbol{C}}^* \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}}^* \overset{erfordert}{=} \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{XYZ}} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{XYZ}}^*
\end{aligned} \quad , \tag{2.112}$$

wobei ***E*** die Einheitsmatrix ist. Die Gleichheit der Leistungsberechnung im RST-System und im XYZ-System ist nur gegeben, wenn gilt

$$\left(\underline{\boldsymbol{C}}\right)^T \cdot \underline{\boldsymbol{C}}^* = \boldsymbol{E} \, . \tag{2.113}$$

1. Symmetrische Komponenten

Die folgende Berechnung zeigt, dass das Matrixprodukt bei den symmetrischen Komponenten im 3-fachen der Einheitsmatrix resultiert. Die Leistungsberechung der symmetrischen Komponenten wird somit um den Faktor 3 zu gering. Somit müssen die Transformationsmatrizen $\underline{\boldsymbol{C}}_{120}$ und $(\underline{\boldsymbol{C}}_{120})^{-1}$ um den Faktor

$$\left(\underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}\right)^T \cdot \underline{\boldsymbol{C}}_{\boldsymbol{120}}^* = \begin{pmatrix} 1 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{-j\frac{4\pi}{3}} & e^{-j\frac{2\pi}{3}} & 1 \\ e^{-j\frac{2\pi}{3}} & e^{-j\frac{4\pi}{3}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \underset{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} \cdot \boldsymbol{E} \cdot \tag{2.114}$$

Für eine leistungsinvariante Transformation müssen die Transformationsmatrizen $\underline{\boldsymbol{C}}_{120}$ und $(\underline{\boldsymbol{C}}_{120})^{-1}$ um den Faktor $1/\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$ korrigiert werden, also:

$$\underline{\boldsymbol{C}}_{120,\mathrm{LI}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}^2 & \underline{a} & 1 \\ \underline{a} & \underline{a}^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\underline{\boldsymbol{C}}_{120,\mathrm{LI}}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.115}$$

2. $\alpha\beta0$-Transformation

Bei der $\alpha\beta0$-Transformation genügt es nicht, nur den Vorfaktor zu ändern, da sich nicht direkt die Einheitsmatrix ergibt.

$$\left(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0}\right)^T \cdot \boldsymbol{C}^*_{\alpha\beta0} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & \sqrt{3} & 2 \\ -1 & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \tag{2.116}$$

Der sich ergebende Vorfaktor von 3/2 muss mit $\sqrt{(2/3)}$ bei der Matrix $\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0}$ korrigiert werden, für die Elemente der letzten Spalte in $\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0}$ ergibt die Gleichung $\sqrt{(2/3)}\cdot\sqrt{(2/3)}\cdot(1/2)\cdot(1/2)\cdot3\cdot x^2 = 1$ den Wert $\sqrt{2}$, also

$$\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0,\mathrm{LI}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \left(\boldsymbol{C}_{\alpha\beta0,\mathrm{LI}}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad . \tag{2.117}$$

3. dq0-Transformation

Auch bei der dq0-Transformation genügt es nicht, nur den Vorfaktor zu ändern, da sich hier ebenfalls nicht direkt die Einheitsmatrix ergibt.

$$\left(\boldsymbol{C}_{dq0}\right)^T \cdot \boldsymbol{C}^*_{dq0} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.118}$$

Der sich ergebende Vorfaktor von 3/2 muss mit $\sqrt{(2/3)}$ bei der Matrix $\boldsymbol{C}_{dq0}$ korrigiert werden, für die Elemente der letzten Spalte in $\boldsymbol{C}_{dq0}$ ergibt die Gleichung $\sqrt{(2/3)}\cdot\sqrt{(2/3)}\cdot3\cdot x^2 = 1$ den Wert $1/\sqrt{2}$ oder $\sqrt{2}/2$, also

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{dq\,0,LI}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{dq0,LI}}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin\theta & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad . \qquad (2.119)$$

Diese leistungsinvarianten Transformationen sind nicht betragsinvariant. Im Allgemeinen bietet es sich an, die bezugsgrößeninvariante Form der Transformation zu verwenden. Die Leistungsvarianz der betragsinvarianten Form der Transformation kann umgangen werden, indem die Leistung entweder über die originalen RST-Koordinaten berechnet wird, oder aber ein Korrekturfaktor bei der Leistungsberechnung in den anderen Komponentensystemen berücksichtigt wird.

2.4.4 Anwendung der Komponententransformation

Die Komponentensysteme spielen bei folgenden Anwendungsbereichen eine wesentliche Rolle:

- Berechnung unsymmetrischer Kurzschlüsse (1- und 2-polige Fehler) bei symmetrischer Speisung des Netzes und Netzberechnung bei unsymmetrische Speisung; hier kommen die symmetrischen Komponenten zum Einsatz,
- Analyse elektrischer Maschinen; hier spielt vor allem die dq0-Transformation eine wesentliche Rolle,
- Regelung von Frequenzumrichtern zur Netzeinspeisung sowie Regelung von Umrichtern zur Hochspannungsgleichstromübertragung, hier kommen die symmetrischen Komponenten, die $\alpha\beta 0$- und die dq0-Transformation zum Einsatz.

2.4.5 Beispiel 1: PLL (Phase-Locked-Loop) zur Phasensynchronisierung

In der Energietechnik wird ein PLL (Phasenregelkreis) dazu verwendet, die Phasenlage der Netzspannung zu bestimmen, auf die dann Umrichterspannungen geregelt werden. Dies wird z. B. bei Netzeinspeisungen oder speziellen Betriebsmitteln zur Blindleistungseinspeisung benötigt. Bei PLL's im Drehspannungssystem finden sowohl die $\alpha\beta 0$- als auch die dq0-Transformation Anwendung.

2.4.5.1 Grundlagen zum PLL

Ein PLL besteht im Wesentlichen aus den folgenden 3 Komponenten (***Bild 2.19*a**)

- *Phasendetektor*
  Der Phasendetektor liefert an seinem Ausgang eine Spannung, die in einem linearen oder nichtlinearen Zusammenhang mit der Phasendifferenz der Eingangssignale steht.
- *Filter*
  Das Filter dient zur Beseitigung von unerwünschten Signalanteilen und Störsignalen.
- *VCO (Voltage Controlled Oscillator)*
  Der VCO liefert eine Schwingung mit der Kreisfrequenz ω, wobei seine Frequenz durch eine Spannung gesteuert werden kann.

Ein einfacher Phasendetektor ist ein Multiplikator mit anschließendem Tiefpass-Filter. Geht man von zwei Signalen gleicher Frequenz aber (zeitlich) unterschiedlicher Phasenlage aus:

$$s_1(t) = U_1 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_1(t)) \qquad s_2(t) = U_2 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_2(t)) \ , \tag{2.120}$$

so ergibt sich bei Multiplikation der beiden Signale:

$$v(t) = s_1(t) \cdot s_2(t) = \frac{U_1 \cdot U_2}{2} \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) + \frac{U_1 \cdot U_2}{2} \cdot \sin(2\omega_0 t + \varphi_1(t) + \varphi_2(t)) \quad . \tag{2.121}$$

Der Anteil mit doppelter Kreisfrequenz $2 \cdot \omega_0$ wird durch ein Tiefpassfilter herausgefiltert, so dass als Ausgangssignal des Filters das Signal

$$u(t) = \frac{U_1 \cdot U_2}{2} \cdot \sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \tag{2.122}$$

übrig bleibt.

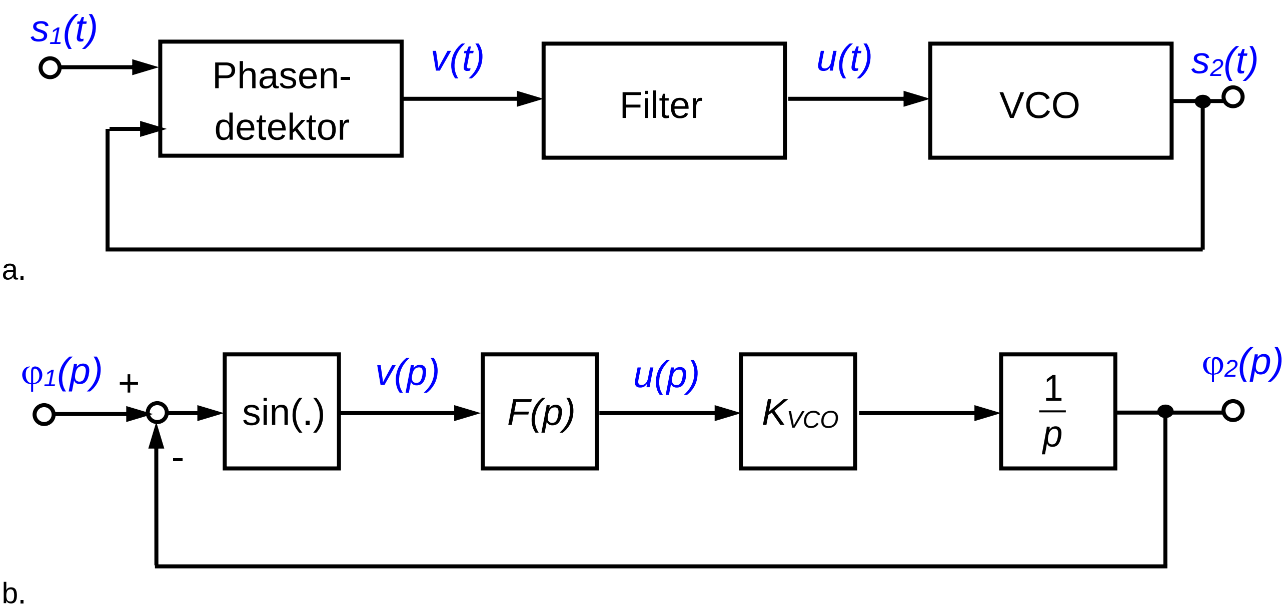


Bild 2.19 Strukturbild einer PLL
a. Darstellung der Komponenten einer PLL
b. Phasenersatzschaltung im Laplace-Bereich

Der VCO schwingt ohne Eingangssignal (*u(t)* = 0) mit der Kreisfrequenz ω_0 , bei Anliegen einer Spannung *u(t)* ändert er seine Frequenz:

$$\omega = \omega_0 + K_{VCO} \cdot u(t) \quad . \tag{2.123}$$

Für den Zusammenhang zwischen Kreisfrequenz und Phasenwinkel gilt (allgemein)

$$\frac{d}{dt}\varphi_2(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) \quad , \tag{2.124}$$

oder als Laplace-transformierte

$$\varphi_2(p) = \frac{1}{p}\cdot\left(\omega_0 + \Delta\omega(p)\right) = \frac{1}{p}\cdot\left(\omega_0 + K_{VCO}\cdot U(p)\right) \quad . \tag{2.125}$$

In der sogenannten Basisbanddarstellung erhält man das in ***Bild 2.19*b** dargestellte Phasenersatzschaltbild des PLL. Der Phasendetektor ist mit der Sinus-Funktion im vorliegenden Fall nichtlinear. Für kleine Phasenabweichungen kann diese Funktion linearisiert werden.

2.4.5.2 Dreiphasiger PLL

Zur Bestimmung der Phasenlage eines Drehspannungssystems bietet es sich an, alle 3 Phasen zu nutzen. ***Bild 2.20*** zeigt die Struktur der dreiphasigen PLL. Ausgangspunkt ist die Betrachtung eines nicht von Störungen überlagerten symmetrischen Drehspannungssystems gemäß Gleichung (2.83) mit einem variablen Phasenwinkel:

$$\begin{pmatrix} u_R(t) \\ u_S(t) \\ u_T(t) \end{pmatrix} = E_{R1}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta_N) \\ \cos(\theta_N - 120^o) \\ \cos(\theta_N - 240^o) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \theta_N(t) = \int \omega_N \, dt = \int\left[\omega_0 + \Delta\omega_N(t)\right]dt \quad . \tag{2.126}$$

Die Netzfrequenz wird also ausgehend von der synchronen Kreisfrequenz ω_0 in gewissen Grenzen als veränderlich angenommen.

Die $\alpha\beta0$-Transformation führt auf

$$\boldsymbol{U^1_{\alpha\beta 0}} = \begin{pmatrix} U^1_\alpha \\ U^1_\beta \\ U^1_0 \end{pmatrix} = E_{R1}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta_N) \\ \sin(\theta_N) \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.127}$$

Der PLL liefert an seinem Ausgang einen Phasenwinkel von

$$\theta_{PLL}(t) = \int \omega_{PLL}\, dt = \int\left[\omega_0 + \Delta\omega_{PLL}(t)\right]dt \quad , \tag{2.128}$$

dieser ist das Eingangssignal für die dq0-Transformation. Die dq0-Transformation von U_α^1 und U_β^1 mit dem Phasenwinkel θ_{PLL} des PLL ergibt:

$$\boldsymbol{U^1_{dq0}} = E_{R1}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta_{PLL} - \theta_N) \\ -\sin(\theta_{PLL} - \theta_N) \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\theta_{PLL}-\theta_N \text{ klein}}{\approx} E_{R1}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -\left(\theta_{PLL} - \theta_N\right) \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \tag{2.129}$$

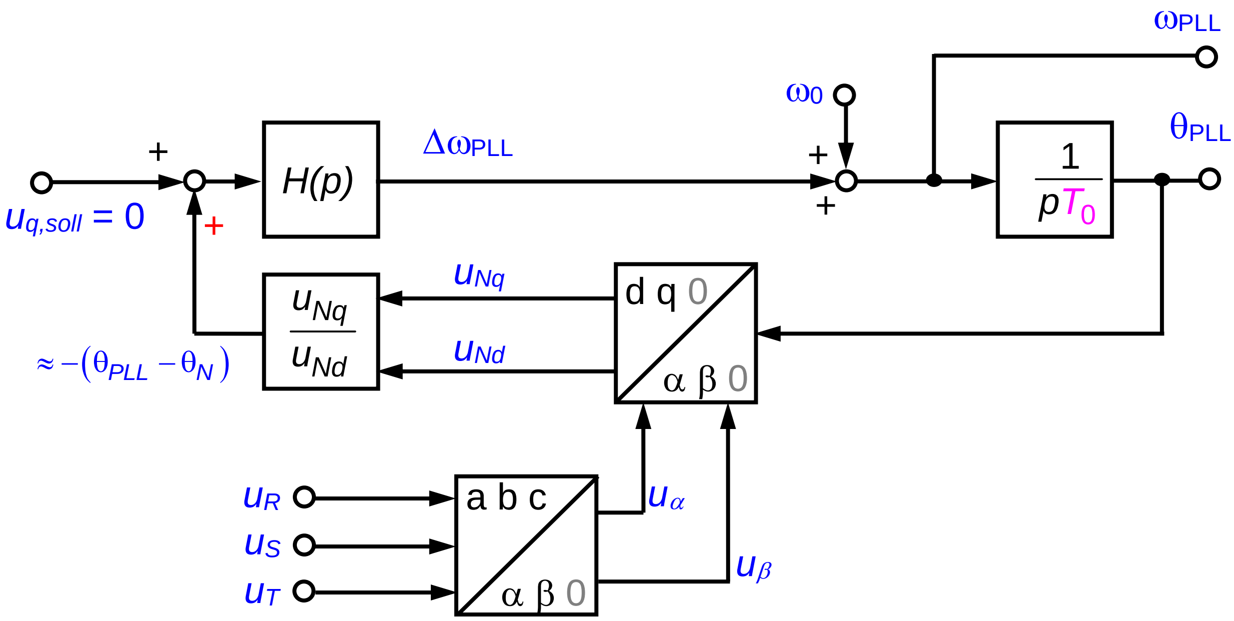


Bild 2.20 Strukturbild der dreiphasigen PLL (SRF-PLL, Synchronous Reference Frame PLL), bei der Summation wird ein +-Zeichen benötigt, damit θ_{PLL} negativ zurück gekoppelt wird, T_0 = 1s

Hier erkennt man den Vorteil des dreiphasigen PLL: Man benötigt kein Tiefpass-Filter, denn in der q-Komponente steckt direkt der Winkelfehler, d. h. die Differenz zwischen Netzwinkel und Winkel am Ausgang des PLL. Die d-Komponente liefert eine Schätzung für die Amplitude der Netzspannung, u_{Nd} entspricht bei kleinem Winkelfehler (θ_{PLL}-θ_N) der Netzspannungsamplitude E_{R1}. Durch die Division von u_{Nq} mit u_{Nd} wird die Netzspannungsamplitude eliminiert.
Der Winkelfehler (θ_{PLL}-θ_N) soll durch den PLL ausgeregelt, d. h. zu Null geregelt werden. Da der Winkelfehler der q-Komponente entspricht, ist deren Sollwert $u_{q,soll}$ = 0. Im eingeschwungenden Zustand des PLL sollte die dq-Transformation für die q-Komponente u_{Nq} der Netzspannung genau diesen Wert ergeben.
Für die Übertragungsfunktion *H(p)* kann man einen PI-Regler verwenden. Dieser verändert seinen Ausgang so lange, bis die Differenz zwischen θ_{PLL} und θ_N verschwunden ist, d. h. (θ_{PLL}-θ_N) = 0. Das Ausgangssignal des PI-Reglers ist die Kreisfrequenzänderung $\Delta\omega_{PLL}$, die im Idealfall exakt einer Netzfrequenzänderung $\Delta\omega_N$ folgen würde. Tatsächlich geht das nur mit einem Zeitverhalten, das durch den PI-Regler ganz wesentlich bestimmt wird. Zu der Kreisfrequenzänderung $\Delta\omega_{PLL}$ wird ω_0 hinzuaddiert und ($\omega_0 + \Delta\omega_{PLL}$) integriert, wodurch man gemäß Gleichung (2.128) den Phasenwinkel θ_{PLL} erhält.

Aus ***Bild 2.20*** lässt sich die Übertragungsfunktion direkt entnehmen, wobei T_0 die Zeitkonstante des Integrierers ist, also hier T_0 = 1s:

$$\left[H(p)\cdot\left(\theta_N-\theta_{PLL}\right)+\omega_0\right]\cdot\frac{1}{pT_0}=\theta_{PLL} \quad . \tag{2.130}$$

Mit der Übertragungsfunktion des PI-Reglers

$$H(p)=K_P+\frac{1}{pT_I} \tag{2.131}$$

erhält man

$$\theta_{PLL} = \frac{1 + pT_I K_P}{1 + pT_I K_P + p^2 T_I T_0} \cdot \theta_N + \frac{\omega_0 \cdot pT_I}{1 + pT_I K_P + p^2 T_I T_0} \quad . \tag{2.132}$$

Das Einschwingverhalten wird wesentlich durch das Nennerpolynom bestimmt. Für

$$K_P > 2 \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T_I}} \tag{2.133}$$

erhält man 2 reelle Pole mit negativem Realteil, so dass keine Schwingungen entstehen.

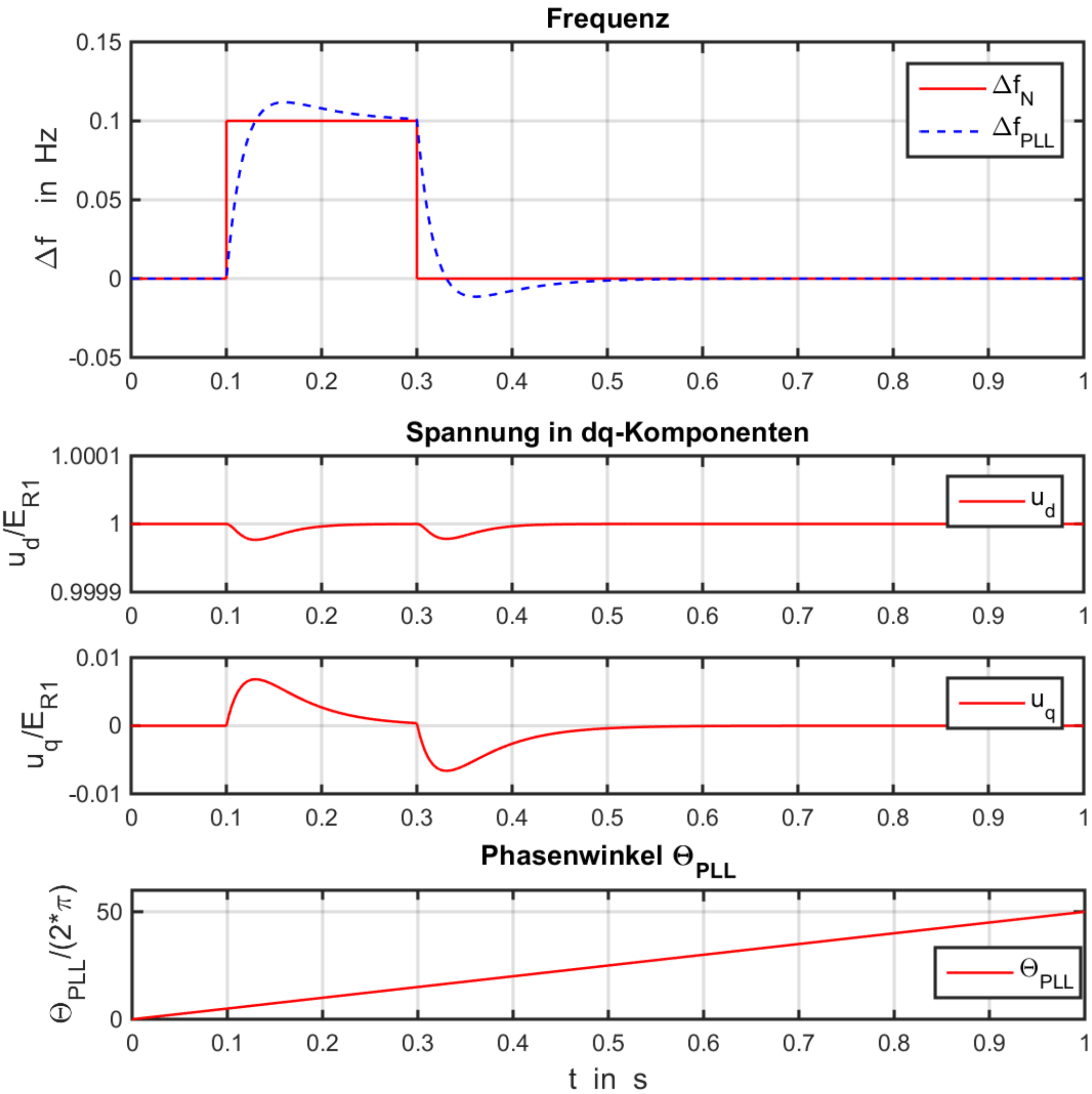


Bild 2.21 Systemantwort des PLL auf eine Netzfrequenzänderung für K_P = 70 und T_I = 1ms

In ***Bild 2.21*** ist ein Beispiel für die Wirkungsweise des 3-phasigen PLL dargestellt. Nach 0,1 s wird die Netzfrequenz sprunghaft auf 50,1 Hz erhöht und bei 0,3 s wird sie wieder auf 50,0 Hz zurückgenommen. Das Ausgangssignal des PI-Reglers folgt der Netzfrequenz bei gegebenen Reglereinstellungen bestmöglich. Die Spannung u_{Nq} erfährt eine Änderung, die mit der Zeit verschwindet. Auch der Wert von u_{Nd} ändert sich, aber nur sehr geringfügig. Der Winkel θ_{PLL} steigt stetig und wäre ohne die Änderung der Netzfrequenz exakt $\theta_{PLL} = \omega_0 \cdot t$.

Im vorliegenden Fall wurden K_P = 70 und T_I = 1ms gewählt. Wenn man K_P erhöht und T_I verringert, lässt sich das Antwortverhalten des PLL noch wesentlich verbessern.

2.4.6 Beispiel 2: Regelung eines Ladestromrichters für Batterien

Das folgende Beispiel behandelt die Regelung eines Ladestromrichters für Batterien, der am Drehstromnetz betrieben wird (***Bild 2.22***). Das sogenannte „Active Front End (AFE)“ soll in der Lage sein, den Stromfluss in beide Richtungen zu führen um die Batterie zu laden und auch wieder zu entladen. Jedem IGBT-Modul ist deshalb eine Rückwärtsdiode parallel geschaltet. Die Zwischenkreisspannung U_{ZK} muss größer als der Spitzenwert der verketteten Netzspannung gewählt werden ($\approx \sqrt{2} \cdot 400$ V = 566 V bei Anschluss des Umrichters ans 400-V-Netz), da ansonsten nur die Rückwärtsdioden und nicht die Transistoren leiten. Die Induktivitäten L und die Widerstände R repräsentieren einen Transformator oder eine Drossel sowie die Zuleitung zwischen dem Netz und dem Umrichter.

Sinn des Active Front End ist es, einen Energiefluss in beide Richtungen zu ermöglichen und dabei den Leistungsfaktor cos φ in gewissen Grenzen einstellen zu können. Gleichspannungsseitig ist eine Batterie über einen weiteren Umrichter angeschlossen, der die hohe Zwischenkreisspannung auf die Batteriespannung anpasst. Für die folgende Betrachtung wird der Gleichstromkreis vereinfachend durch den Widerstand R_L dargestellt. Das Active Front End könnte beispielsweise bei einem Batteriespeichersystem in Verbindung mit einer Solaranlage zum Einsatz kommen.

Als Regelkonzept wird eine Kaskadenregelung mit einem unterlagerten Stromregler und einem überlagerten Regler der Zwischenkreisspannung entworfen. Die Stromregelung definiert den Eingangsstrom, die überlagerte Spannungsregelung stellt eine konstante Zwischenkreisspannung sicher.

Aus dem einphasigen Ersatzschaltbild ***Bild 2.22***a lässt sich die folgende Gleichung analog zu Gleichung (2.54) ableiten, wobei auf der Umrichterseite vereinfachend nur die Grundschwingung der Spannung betrachtet wird:

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N,RST}} = R \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{RST}} + L \cdot \frac{d}{dt} \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{RST}} + \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{U,RST}} \quad . \tag{2.134}$$

Durch die gewünschte Regelung von Wirk- und Blindleistung ist ein Übergang zu dq0-Koordinaten gemäß (2.94) sinnvoll:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \cdot \left(\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N,dq0}} - \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{U,dq0}} \right) &= R \cdot \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{dq0}} + L \cdot \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{dq0}} \right) \\ &= R \cdot \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{dq0}} + L \cdot \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \right) \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{dq0}} + L \cdot \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \frac{d}{dt} \left(\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{dq0}} \right) \end{aligned} \quad . \tag{2.135}$$

Wichtig ist, dass die zeitliche Ableitung aus dem Produkt von Transformationsmatrix und dq0-Stromvektor gemäß der Produktregel abgeleitet wird, weil der Winkel θ mit $\omega \cdot t$ zeitabhängig ist. Die linksseitige Multiplikation mit $(\boldsymbol{C}_{dq0})^{-1}$ führt auf

$$\underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{N,dq0}} - \underline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{U,dq0}} = R \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{dq0}} + L \cdot \left[\left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \right)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \right) \right] \cdot \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{dq0}} + L \cdot \frac{d}{dt} \left(\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{dq0}} \right) \quad . \tag{2.136}$$

Mit

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \right) = \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & 0 \\ -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) & -\cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.137}$$

erhält man

$$\left[\left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \right)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \left(\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{dq0}} \right) \right] = \omega \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.138}$$

Durch die Einträge dieser Matrix in den Nebendiagonalelementen (-1 und 1) ergibt sich eine Kreuzkopplung des d- und q-Systems, die beiden Systeme sind nicht mehr entkoppelt. Diese Kreuzkopplung muss bei der Auslegung der Regelung berücksichtigt werden.

An dieser Stelle kann man von symmetrischen Netzverhältnissen ausgehen, auch der Umrichter wird symmetrisch betrieben. Dadurch kann die Nullkomponente entfallen. Außerdem darf angenommen werden, dass die Netzfrequenz konstant ist ($\omega = \omega_0$). Die Systemgleichungen in dq-Komponenten lauten damit:

$$\begin{pmatrix} U_{N,d} \\ U_{N,q} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_{U,d} \\ U_{U,q} \end{pmatrix} - \omega_0 L \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_d \\ I_q \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} I_d \\ I_q \end{pmatrix} + L \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_d \\ I_q \end{pmatrix} \quad . \tag{2.139}$$

Nun bietet es sich an, eine Laplace-Transformation in den Bildbereich durchzuführen. Damit erhält man:

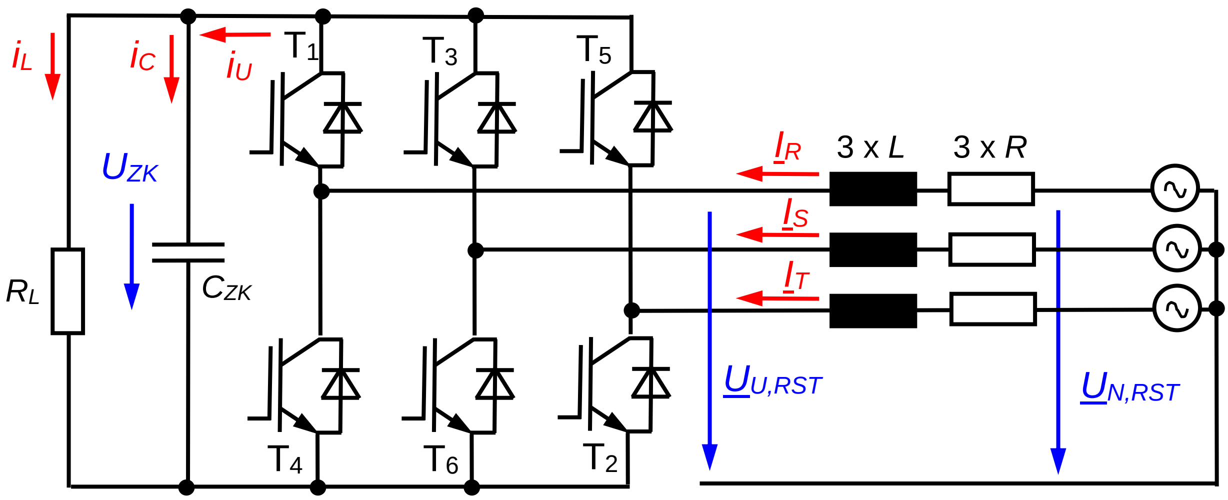


Bild 2.22 Active Front End eines Batteriespeichersystems am dreiphasigen Netz

$$\begin{aligned} u_{N,d}(p) - u_{U,d}(p) + \omega_0 L \cdot i_q(p) &= \left(R + p \cdot L\right) \cdot i_d(p) \\ u_{N,q}(p) - u_{U,q}(p) - \omega_0 L \cdot i_d(p) &= \left(R + p \cdot L\right) \cdot i_q(p) \end{aligned} \tag{2.140}$$

und es ergibt sich das in ***Bild 2.23*** dargestellte regelungstechnische Strukturbild für die Regelstrecke.

In ***Bild 2.23*** erkennt man deutlich die Kreuzkopplung in der Regelstrecke, aufgrund der die beiden Ströme i_d und i_q nicht unabhängig von einander geregelt werden können. Zur Lösung des Problems gibt es mehrere Möglichkeiten. Die Einfachste besteht darin – insbesondere bei geringer Verzögerungszeit T_{SR} des Umrichters - die Kreuzkopplung durch eine sogenannte *Vorsteuerung* aufzulösen. Dazu werden die Istwerte der Ströme i_d und i_q gemessen und gewichtet mit dem Faktor $\omega_0 L$ mit dem im Vergleich zur Regelstrecke umgekehrten Vorzeichen über Kreuz vor dem Umrichter aufgeschaltet. Auch die als Störgröße wirkende Netzspannung in d- und q-Komponenten ($U_{N,d}$ und $U_{N,q}$) werden gemessen und mit umgekehrtem Vorzeichen vorgesteuert. Hierbei ist zu beachten, dass die Umrichterspannungen $U_{U,d}$ und $U_{U,q}$ mit negativem Vorzeichen auf die Regelstrecke wirken. Bei der Vorsteuerung der Netzspannungen $U_{N,d}$ und $U_{N,q}$ muss dieses Vorzeichen berücksichtigt werden.

Durch die Vorsteuerung kann das System vereinfachend als zwei einschleifige Regelungen betrachtet werden. Voraussetzung dafür ist eine ausreichend hohe Dynamik des Stromrichters, d. h T_{SR} muss klein gegenüber L/R sein. Als Regler soll ein PI-Regler mit einer Bypass-I-Struktur zum Einsatz kommen. Hierbei ist auch wieder die negative Aufschaltung der Umrichterspannungen $U_{U,d}$ und $U_{U,q}$ zu beachten. Damit sich ein positiver Regelsinn ergibt, muss der Reglerausgang negativ auf die Summationspunkte der Vorsteuerung geschaltet werden. Dadurch heben sich die negativen Vorzeichen auf und die Ströme i_d und i_q sind bei positiven Sollwerten ebenfalls positiv. Für die Regelstrecke ergibt sich am Beispiel der oberen Schleife:

$$u_{U,d}(p) \cdot \frac{1}{R + p \cdot L} = i_d(p) \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} u_{U,d}(p) &= i_d(p) \cdot \left(R + p \cdot L\right) \\ &= i_d(p) \cdot R \left(1 + p \cdot \frac{L}{R}\right) \end{aligned} \quad . \tag{2.141}$$

Für die Reglerstruktur kann man ***Bild 2.23*** entnehmen:

$$u_{U,d}(p) = -K_W \cdot \left[i_{d,soll}(p) + \frac{1}{pT_I} \cdot \left(i_{d,soll}(p) - i_d(p) \right) - K_P \cdot i_d(p) \right] \quad . \tag{2.142}$$

Durch Gleichsetzen erhält man unter Vernachlässigung des PT_1-Verhaltens des Stromrichters und damit der Zeitkonstanten T_{SR} die Führungsübertragungsfunktion $G_I(p)$ des Systems für den Strom i_d:

$$\begin{aligned} G_I(p) = \frac{i_d(p)}{i_{d,soll}(p)} &= \frac{1 + pT_I}{1 + pT_I \left(K_P + \dfrac{R}{K_W} \right) + p^2 \dfrac{R}{K_W} \dfrac{L}{R} T_I} \\ &\overset{!}{=} \frac{1 + pT_I}{\left(1 + pT_I\right) \cdot \left(1 + pT_{0,I}\right)} = \frac{1}{1 + pT_{0,I}} \end{aligned} \quad . \tag{2.143}$$

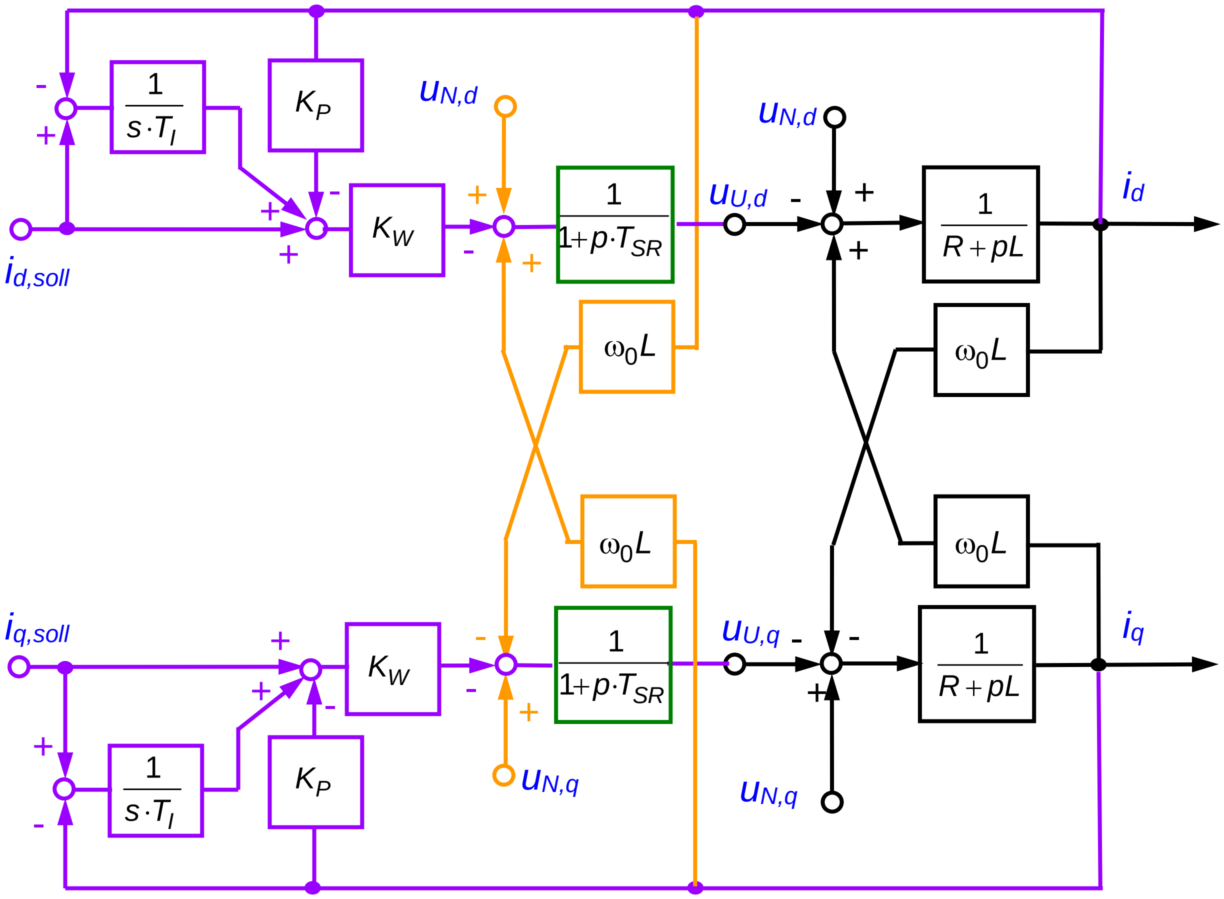


Bild 2.23 Strukturbild der Stromregelung eines Stromrichters, der in ein Energienetz einspeist
schwarz: Regelstrecke
violett: Rückführung der Regelgröße und PI-Regler
grün: Stromrichternachbildung durch ein PT1-Glied
orange: Vorsteuerung zur Aufhebung der Kreuzkopplung und der Störgröße durch die Netzspannung

Der Vorteil der Bypass-I-Struktur ist, dass die Ordnung des Systems – im Gegensatz zu einem normalen PI-Regler – nicht um 1 erhöht wird und trotzdem ein Integralverhalten vorliegt.

Um die Reduzierung der Ordnung zu erreichen muss gelten:

$$K_W = \frac{L}{T_{0,I}} \qquad K_P = 1 + T_{0,I}\left(\frac{1}{T_I} - \frac{1}{\frac{L}{R}}\right) \quad . \tag{2.144}$$

Der verbleibende Freiheitsgrad ist die Zeitkonstante T_0 des Systemverhaltens der Stromregelung, die Wahl der Integriererzeitkonstanten zu $T_I \approx 2 \cdot T_{0,I}$ hat sich oft als brauchbar erwiesen.

Nun muss noch die Zwischenkreisspannungsregelung entworfen werden. Ein Blick auf ***Bild 2.22*** liefert die Grundgleichungen. Der Strom I_U aus dem Umrichter setzt sich aus dem Kondensatorstrom I_C und dem Laststrom I_L zusammen:

$$I_C = C_{ZK} \cdot \frac{dU_{ZK}}{dt} = I_U - I_L \quad . \tag{2.145}$$

Weiterhin ist der Laststrom

$$I_L = \frac{P_L}{U_{ZK}} \quad . \tag{2.146}$$

Zunächst muss eine Beziehung zwischen dem Strom auf der Netzseite und dem Umrichterausgangsstrom I_U gefunden werden. Ein einfacher Ansatz ist die Verwendung des Leistungsgleichgewichts unter Vernachlässigung der Verluste in Umrichter und Phasendrosseln sowie der Annahme, dass Netzspannung und Zwischenkreisspannung ihren Nennwerten entsprechen (siehe Gleichung (2.111)):

$$P_{AC} = \frac{3}{2} \cdot \left(U_{N,dN} \cdot I_d + U_{N,qN} \cdot I_q \right) = U_{ZK,N} \cdot I_U \quad . \tag{2.147}$$

Diese Gleichung gilt jedoch erst, nachdem die Zwischenkreisspannung ihren Nennwert erreicht hat, sie gilt insbesondere nicht, während die Zwischenkreiskapazität auf den Nennwert $U_{ZK,N}$ ihrer Spannung aufgeladen wird. Daher kann man während dieser Aufladephase das Zeitverhalten der im Folgenden zu dimensionierenden Regelung nicht erwarten. Es wird sich aber zeigen, dass die Regelung dennoch ein akzeptables Zeitverhalten aufweist.
Ein Phasenregelkreis (PLL), mit dem die Phasensynchronität zwischen Netzspannung und Umrichterspannung hergestellt wird, regelt die Spannung $U_{N,q}$ zu $U_{N,q} = 0$ aus. Somit ergibt sich der Zwischenkreisstrom I_U zu

$$I_U = \frac{3}{2} \cdot \frac{U_{Nd,N}}{U_{ZK,N}} \cdot I_d \quad . \tag{2.148}$$

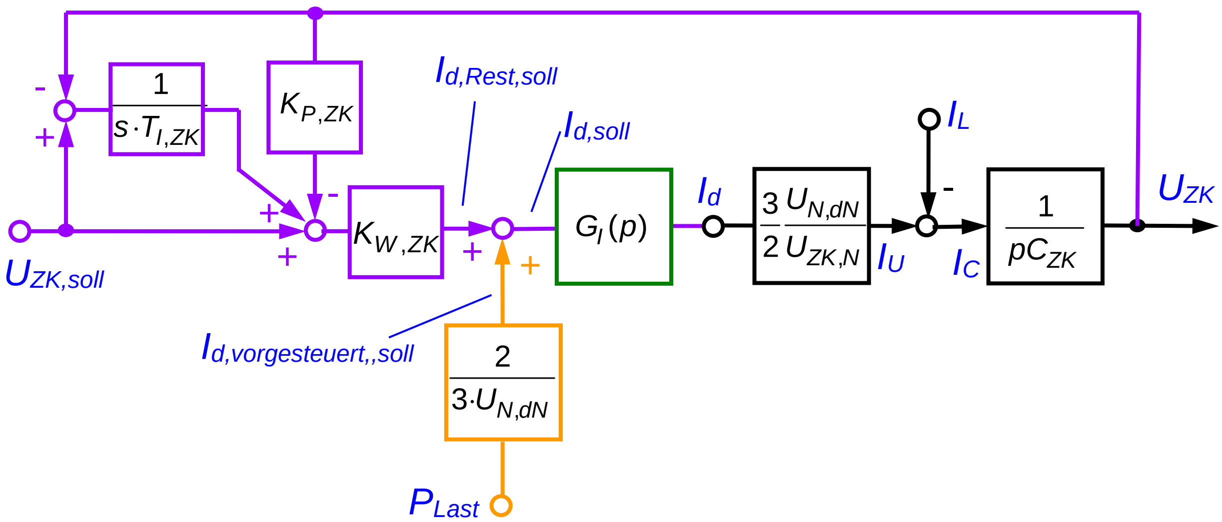


Bild 2.24 Strukturbild der Zwischenkreisspannungsregelung eines Stromrichters, der in ein Energienetz einspeist
schwarz: Regelstrecke
violett: Rückführung der Regelgröße und PI-Regler
grün: Stromgeregelter Umrichter (näherungsweise ist $G_I(p) = 1$)
orange: Vorsteuerung der Störgröße durch den Laststrom

Ansatz für die Regelung ist nun, die Leistungsaufnahme der Last zu messen und den Strom I_L entsprechend vorzusteuern, so dass die „Störgröße“ I_L eliminiert werden kann. Gedanklich teilt man den Umrichterausgangsstrom in einen vorgesteuerten Anteil $I_{U,vorgesteuert}$ infolge der bekannten Last und einen „Rest“ $I_{U,ZK}$ infolge der Nachladung der Zwischenkreiskapazität auf:

$$I_U = I_{U,ZK} + I_{U,vorgesteuert} = \frac{3}{2} \cdot \frac{U_{Nd,N}}{U_{ZK,N}} \cdot \left(I_{d,ZK} + I_{d,vorgesteuert} \right) \quad . \tag{2.149}$$

Damit erhält man für den Sollwert des vorzusteuernden Netzstromes (genauer: des Wirkstroms):

$$I_{d,vorgesteuert} = \frac{2}{3} \cdot \frac{U_{ZK,N}}{U_{Nd,N}} \cdot I_{U,vorgesteuert} = \frac{2}{3} \cdot \frac{U_{ZK,N}}{U_{Nd,N}} \cdot \frac{P_{Last}}{U_{ZK}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{U_{Nd,N}} \cdot P_{Last} \quad . \tag{2.150}$$

Somit folgt aus der Gleichung (2.145) nach einer Laplace-Transformation:

$$p \cdot U_{ZK}(p) = \frac{1}{C_{ZK}} \cdot I_{U,ZK} = \frac{3}{2} \cdot \frac{U_{Nd,N}}{U_{ZK,N}} \cdot \frac{1}{C_{ZK}} \cdot I_{d,ZK} \quad . \tag{2.151}$$

Die Führungsübertragungsfunktion für die Spannungsregelung lautet:

$$\begin{aligned} G_{ZK}(p) = \frac{U_{ZK}(p)}{U_{ZK,soll}(p)} &= \frac{1 + pT_{I,ZK}}{1 + pT_{I,ZK} K_{P,ZK} + p^2 \dfrac{C_{ZK}}{K_{W,ZK}} \left(\dfrac{2U_{ZK,N}}{3U_{N,dN}} \right) T_{I,ZK}} \quad . \\ &\overset{!}{=} \frac{1 + pT_{I,ZK}}{\left(1 + pT_{I,ZK}\right) \cdot \left(1 + pT_{0,ZK}\right)} = \frac{1}{1 + pT_{0,ZK}} \end{aligned} \tag{2.152}$$

Entsprechend der Forderung von Gleichung (2.152) können die Reglerparameter bestimmt werden:

$$K_{P,ZK} = 1 + \frac{T_{0,ZK}}{T_{I,ZK}} \qquad K_{W,ZK} = \frac{C_{ZK}}{T_{0,ZK}} \left(\frac{2U_{ZK,N}}{3U_{Nd,N}} \right) \quad . \tag{2.153}$$

Auch hier ist die Wahl der Integriererzeitkonstanten mit $T_{I,ZK} \approx 2 \ldots 4 \cdot T_{0,ZK}$ ein brauchbar Ansatz. Wichtig für das Funktionieren der Regelung ist, dass sich der Stromregler bezüglich des Spannungsreglers stets im eingeschwungenen Zustand befindet, also:

$$T_{0,ZK} \gg T_{0,I} \quad . \tag{2.154}$$

Für die q-Komponente des Stromes (I_q) existiert offenbar keine Vorgabe, die sich aus dem Betrieb des Batteriespeichers ergibt. Prinzipiell ist dieser Strom also frei wählbar. Man kann ihn dazu verwenden, die Blindleistungseinspeisung ins Netz vorzugeben. Gemäß Gleichung erhält man für die Blindleistung:

$$Q = \frac{3}{2} \cdot \left(U_q \cdot I_d - U_d \cdot I_q \right) \overset{U_q = 0}{=} -\frac{3}{2} \cdot U_d \cdot I_q \tag{2.155}$$

Durch eine entsprechende Vorgabe des Sollwertes $I_{q,soll}$ lässt sich die Blindleistung am Netzanschlusspunkt einstellen.

2.5 Behandlung von Schaltungen mit konzentrierten Bauelementen

Die mathematische Beschreibung eines linearen und zeitinvarianten elektrischen Netzwerks bei Anregung durch beliebige Zeitsignale führt auf

- *eine Differentialgleichung höherer Ordnung*

  Die Ordnung der Differentialgleichung ist gleich der Zahl der Energiespeicher. Es ergeben sich entsprechend viele Anfangsbedingungen für die Drosselströme und Kondensatorspannungen.

- *oder ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung*

  für jeden Energiespeicher erhält man eine Differentialgleichung 1. Ordnung mit der zugehörigen Anfangsbedingung.

Bei zeitinvarianten Bauelementeigenschaften sind die Koeffizienten der DGL konstant. Die DGL höherer Ordnung oder das DGLS 1. Ordnung können dann durch vergleichsweise einfache Verfahren gelöst werden.

2.5.1 Lösung gewöhnlicher DGL mit konstanten Koeffizienten

Die allgemeine Form einer Differentialgleichung (DGL) höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet:

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + a_{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \ldots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = f(t) \quad . \qquad (2.156)$$

f(t) wird als *Störfunktion* bezeichnet. Für *f(t)* = 0 wird die DGL als *homogene Differentialgleichung* bezeichnet. Die allgemeine Lösung der DGL (2.156) ergibt sich aus der Summe der Lösung der homogenen DGL $y_{hom}(t)$ und einer partikulären Lösung $y_{part}(t)$:

$$y(t) = y_{\text{hom}}(t) + y_{part}(t) \quad . \qquad (2.157)$$

2.5.1.1 Lösung der homogenen DGL

Man erhält ein Fundamentalsystem von Lösungen, indem man den Ansatz

$$y(t) = K \cdot e^{\lambda \cdot t} \qquad (2.158)$$

in Gleichung (2.156) einsetzt. Dies führt auf die *charakteristische Gleichung*

$$\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + a_{n-2} \cdot \lambda^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot \lambda + a_0 = 0 \quad . \qquad (2.159)$$

Gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra hat Gleichung (2.159) genau *n* reelle oder komplexe Lösungen. Demgemäß müssen bei der Bestimmung der Lösung der homogenen DGL die folgenden 3 Fälle unterschieden werden:

1. *Die charakteristische Gleichung hat n reelle, voneinander verschiedene Lösungen*

   Lösung der charakteristischen Gleichung seien:

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{für} \quad i \neq j \quad . \qquad (2.160)$$

   Die Lösung der homogenen DGL ist dann als Linearkombination all der Lösungen der charakteristischen Gleichung darstellbar:

$$y(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \ldots + K_{n-2} \cdot e^{\lambda_{n-2} \cdot t} + K_{n-1} \cdot e^{\lambda_{n-1} \cdot t} + K_n \cdot e^{\lambda_n \cdot t} \quad . \qquad (2.161)$$

2. *Die charakteristische Gleichung hat reelle, jedoch mehrfache Lösungen*

   Lösung der charakteristischen Gleichung seien:

$$\lambda_k \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \lambda_k \text{ tritt m-fach auf} \quad . \tag{2.162}$$

   Die Lösung der homogenen DGL ist dann als Linearkombination all der Lösungen der charakteristischen Gleichung darstellbar:

$$\begin{aligned} y(t) &= ... + K_1 \cdot e^{\lambda_k \cdot t} + K_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_k \cdot t} + ... + K_{m-1} \cdot t^{m-2} \cdot e^{\lambda_k \cdot t} + K_m \cdot t^{m-1} \cdot e^{\lambda_k \cdot t} + ... \\ &= ... + \left(K_1 + K_2 \cdot t + ... + K_{m-1} \cdot t^{m-2} + K_m \cdot t^{m-1}\right) \cdot e^{\lambda_k \cdot t} + ... \end{aligned} \quad . \tag{2.163}$$

3. *Die charakteristische Gleichung hat konjugiert komplexe Lösungen*

   Lösung der charakteristischen Gleichung seien:

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm j\omega \quad . \tag{2.164}$$

   Damit erhält man die beiden Exponentialfunktionen:

$$\begin{aligned} y_i(t) &= e^{(\alpha + j\omega)\cdot t} = e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{j\omega \cdot t} = e^{\alpha \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega \cdot t) + j \sin(\omega \cdot t)\right) \\ y_{i+1}(t) &= e^{(\alpha - j\omega)\cdot t} = e^{\alpha \cdot t} \cdot e^{-j\omega \cdot t} = e^{\alpha \cdot t} \cdot \left(\cos(\omega \cdot t) - j \sin(\omega \cdot t)\right) \end{aligned} \quad . \tag{2.165}$$

   Bei komplexwertigen Lösungen sind sowohl Realteil als auch Imaginärteil selbst reelle Lösungen der DGL. Beiträge zur Lösung der DGL mit den Eigenwerten der charakteristischen Gleichung gemäß (2.164) sind

$$y(t) = ... + K_i \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) + K_{i+1} \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t) + ... \quad . \tag{2.166}$$

   Tritt das Lösungspaar $\lambda_{i,i+1} = \alpha \pm j\omega$ nicht einfach, sondern *m*-fach auf, so sind die Koeffizienten K_i und K_{i+1} durch Polynome entsprechend Gleichung (2.163) zu ersetzen.

2.5.1.2 Bestimmung der partikulären Lösung

Eine Möglichkeit zur Bestimmung einer partikulären Lösung besteht in der Variation der Konstanten. Alternativ dazu kann man in Abhängigkeit der Störfunktion *f(t)* einen geeigneten Ansatz für die partikuläre Lösung machen. ***Bild 2.25*** zeigt eine Zusammenstellung der in der Praxis wichtigen Störfunkionen *f(t)* und Ansätze für die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Störfunktion *f(t)*	Ansatz für die partikuläre Lösung $y_{part}(t)$
$a_0 + a_1 \cdot t + ... + a_n \cdot t^n$	$c_0 + c_1 \cdot t + ... + c_n \cdot t^n$
$a \cdot e^{\lambda \cdot t}$	$c \cdot e^{\lambda \cdot t}$
$a \cdot \cos(\omega t)$ oder $a \cdot \sin(\omega t)$	$c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t)$
$\left[a_0 + a_1 \cdot t + ... + a_n \cdot t^n\right] \cdot e^{\lambda \cdot t}$	$\left[c_0 + c_1 \cdot t + ... + c_n \cdot t^n\right] \cdot e^{\lambda \cdot t}$
$\left[a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)\right] \cdot e^{\lambda \cdot t}$	$\left[c_1 \cdot \cos(\omega t) + c_2 \cdot \sin(\omega t)\right] \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Bild 2.25 Zusammenstellung einiger Ansätze für die partikuläre Lösung einer inhomogenen DGL in Abhängigkeit der Störfunktion *f(t)*

2.5.2 Beispiel: RLC-Reihenschwingkreis

Als weiteres Beispiel soll ein RLC-Reihenschwingkreis untersucht werden, der an eine Spannungsquelle geschaltet wird (***Bild 2.26***). Der Schalter S werde zum Zeitpunkt $t = 0$ geschlossen. Zu Beginn der Betrachtung sei der Kondensator C auf die Spannung U_{C0} aufgeladen, d. h. $u_C(t=0) = U_{C0}$, die Drossel L führt den Strom I_{L0}, $i_L(t=0) = I_{L0}$.

Auf die Frage, wie diese Anfangsbedingungen zustande kommen, wird hier nicht weiter eingegangen. Entsprechende elektronische Lösungen wären aber realisierbar.

Aus der Maschenregel ergibt sich

$$u_C(t) + u_R(t) + u_L(t) = u_0(t) \qquad i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \qquad u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \qquad u_R(t) = i(t) \cdot R$$

und damit . (2.167)

$$u_C(t) + RC \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + LC \cdot \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = u_0(t)$$

Die charakteristische Gleichung und ihre Lösungen lauten

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \qquad \text{Lösungen:} \quad 1)\ R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$2)\ R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \qquad . \quad (2.168)$$

$$3)\ R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Man muss 3 Fälle unterscheiden: zwei unterschiedliche reelle Lösungen, zwei identische reelle Lösungen und ein konjugiert komplexes Lösungspaar. Dementsprechend gibt es auch 3 unterschiedliche Lösungen für die homogene DGL:

$$1)\ R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad u_C(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \qquad \text{mit} \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$2)\ R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad u_C(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + K_2 \cdot t \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \qquad \text{mit} \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \qquad . \quad (2.169)$$

$$3)\ R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad u_C(t) = K_1 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega t) + K_2 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t) \qquad \text{mit} \qquad \lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \alpha \pm j\omega$$

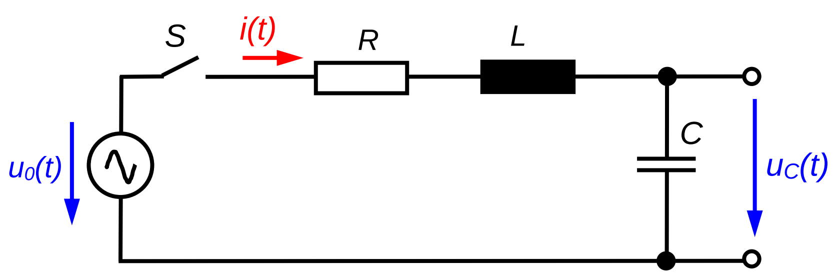


Bild 2.26 RLC-Schaltung, die über den Schalter S an eine Spannungsquelle geschaltet wird

Zunächst soll der Reihenschwingkreis auch wieder an eine Gleichspannungsquelle U_0 geschaltet werden. Setzt man den Lösungsansatz $u_C(t) = c_0$ für die partikuläre Lösung in die DGL ein, so erhält man als partikuläre Lösung:

$$u_C(t) = U_0 \quad . \tag{2.170}$$

Die vollständige Lösung soll für den 3. Fall bestimmt werden. Allgemein erhält man als Lösung:

$$u_C(t) = K_1 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega t) + K_2 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t) + U_0 \quad . \tag{2.171}$$

Aus der Anfangsbedingung für die Kondensatorspannung erhält man K_1 entsprechend Gleichung (2.171) für $t = 0$. Die Anfangsbedingung für den Strom kann verwendet werden, indem die Kondensatorspannung differenziert wird. Für die Konstante K_2 erhält man

$$K_2 = \frac{I_{L0}}{\omega C} + \frac{R}{2\omega L}\left(U_{C0} - U_0\right) \quad . \tag{2.172}$$

und damit insgesamt:

$$u_C(t) = e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \left[\left(U_{C0} - U_0\right) \cdot \cos(\omega t) + \left(\frac{I_{L0}}{\omega C} + \frac{R}{2\omega L}\left(U_{C0} - U_0\right)\right) \cdot \sin(\omega t)\right] + U_0$$

$$\text{mit} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad . \tag{2.173}$$

Setzt man als Störfunktion wieder die eingeschaltete Wechselspannungsquelle mit

$$u_0(t) = U_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad . \tag{2.174}$$

an, so erhält man als partikuläre Lösung

$$u_C(t) = \frac{U_0}{\left(1 - \omega_0^2 LC\right)^2 + (\omega_0 RC)^2} \cdot \left[\left(1 - \omega_0^2 LC\right) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) - (\omega_0 RC) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)\right] \quad . \tag{2.175}$$

Mit den genannten Anfangsbedingungen ergeben sich die Konstanten des allgemeinen Lösungsansatzes

$$\begin{aligned} u_C(t) &= K_1 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\omega t) + K_2 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\omega t) \\ &+ \frac{U_0}{\left(1 - \omega_0^2 LC\right)^2 + (\omega_0 RC)^2} \cdot \left[\left(1 - \omega_0^2 LC\right) \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) - (\omega_0 RC) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)\right] \quad . \end{aligned} \tag{2.176}$$

zu

$$\begin{aligned} K_1 &= U_{C0} - \frac{U_0}{\left(1 - \omega_0^2 LC\right)^2 + (\omega_0 RC)^2} \cdot \left[\left(1 - \omega_0^2 LC\right) \cdot \sin(\varphi) - (\omega_0 RC) \cdot \cos(\varphi)\right] \\ K_2 &= \frac{I_{L0}}{\omega C} - \frac{U_0}{\left(1 - \omega_0^2 LC\right)^2 + (\omega_0 RC)^2} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right) \cdot \left[\left(1 - \omega_0^2 LC\right) \cdot \cos(\varphi) + (\omega_0 RC) \cdot \sin(\varphi)\right] + \frac{R}{2\omega L} \cdot K_1 \end{aligned} \quad . \tag{2.177}$$

In ***Bild 2.27*** sind die zeitlichen Verläufe der Kondensatorspannung für die Zuschaltung einer Gleichspannung und die Zuschaltung einer Wechselspannung mit einer Phasenverschiebung und einer Kondensatorspannung U_{C0} gezeigt.

a.

b.

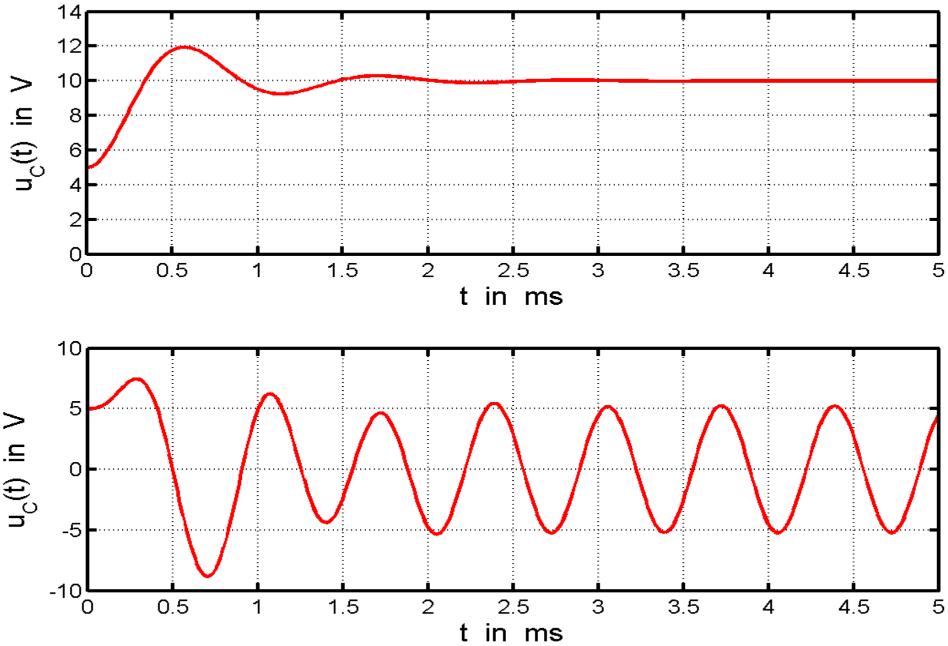


Bild 2.27 RLC-Reihenschwingkreis (R = 10 Ω, L = 3 mH, C = 10 μF, U_{C0} = 5 V, I_{L0} = 0) bei
a. Anregung mit einer Gleichspannung U_0 = 10 V
b. Anregung mit einer Wechselspannung (U_0 = 10 V, f_0 = 1500 Hz, φ = 30°)

2.5.3 Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung (DGLS)

2.5.3.1 Zustandsraumdarstellung elektrischer Netzwerke

Bei Netzwerken mit mehreren gekoppelten Zustandsgrößen (Kondensatorspannungen und Drosselströme) tritt ein System von Differentialgleichungen auf. Auch eine Differentialgleichung höherer Ordnung kann in ein System von Differentialgleichungen umgewandelt werden.

Es wird von den Zustandsgrößen $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ ausgegangen. Das System wird mit dem Signal $u(t)$ angeregt. Von Interesse sind möglicherweise nicht nur die Zustandsgrößen selbst, sondern eine weitere Größe $y(t)$, die von den Zustandsgrößen und von der Anregung $u(t)$ abhängen kann. Bei linearen und zeitinvarianten Systemen (LTI-Systeme) sind sämtliche Koeffizienten konstante Größen. Allgemein lautet ein System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11} \cdot x_1(t) + a_{12} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{1n} \cdot x_n(t) + b_1 \cdot u(t) \\
\frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21} \cdot x_1(t) + a_{22} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{2n} \cdot x_n(t) + b_2 \cdot u(t) \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad . \\
\frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1} \cdot x_1(t) + a_{n2} \cdot x_2(t) + \ldots + a_{nn} \cdot x_n(t) + b_n \cdot u(t) \\
y(t) &= c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + \ldots + c_n \cdot x_n(t) + d \cdot u(t)
\end{aligned}
\tag{2.178}
$$

Diese Gleichungen kann man auch in der folgenden Matrixschreibweise darstellen:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x(t)} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x(t)} + \boldsymbol{B}\cdot u(t) \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{x(}t=0\boldsymbol{)} \neq 0$$

$$y(t) \quad = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{x(t)} + D\cdot u(t)$$

mit

$$\boldsymbol{x(t)} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \quad . \qquad (2.179)$$

2.5.3.2 Berechnung einer Schaltung durch MATLAB

Zur Berechnung von Ausgangssignalen *y(t)* einer Schaltung als Antwort auf ein beliebiges Eingangssignal *u(t)* kann das Softwarepaket MATLAB eingesetzt werden. Hierzu eignet sich die Zustandsraumdarstellung gemäß Gleichung (2.179) in ausgezeichneter Weise.

Zunächst muss in MATLAB ein Zustandsraummodell definiert werden. Dies erfolgt durch die folgende Anweisung

```
[SYS] = ss(A,B,C,D)    .
```

Anfangsbedingungen der Zustandsgrößen können durch

```
x0 = [x01;x02;…;x0N]
```

definiert werden, wobei x_{01}, x_{02}, …, x_{0N} die Anfangswerte der einzelnen Zustandsgrößen sind.

Durch die Anweisung

```
[y,t,x] = lsim(SYS,u,t,x0)
```

kann das Ausgangssignal *y(t)* des durch die Zustandsmatrizen ***A***, ***B***, ***C*** und ***D*** gegebenen Systems mit den Anfangsbedingungen x_{01}, x_{02}, …, x_{0N} der Zustandsgrößen bei Anregung durch das Signal *u(t)* berechnet werden. Hierzu muss in MATLAB der Zeitbereich durch den Vektor *t* definiert werden, für den die Berechnung durchgeführt werden soll:

```
t = (0:dt:Tend)    ,
```

wobei *dt* die Schrittweite bezeichnet und *Tend* die Zeit, bis zu der die Berechnung erfolgen soll. Für denselben Vektor muss das Eingangssignal *u* angegeben werden, z. B.

```
u = U0*sin(2*pi*f*t+phi)    .
```

2.5.4 Beispiel: Numerische Lösung mit Hilfe von MATLAB

Als Beipiel soll hier wieder der RLC-Schwingkreis aufgegriffen werden. Aus den Netzwerkgleichungen gemäß (2.167) erhält man durch Auflösung nach den Ableitungen der Zustandsgrößen Kondensatorspannung und Drosselstrom:

$$\begin{aligned} \frac{du_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} \cdot i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} &= \frac{1}{L} \cdot u_L(t) = \frac{1}{L} \cdot \left(u_0(t) - u_C(t) - u_R(t)\right) = \frac{1}{L} \cdot \left(u_0(t) - u_C(t) - i(t) \cdot R\right) \end{aligned} \quad . \qquad (2.180)$$

und damit in Matrixschreibweise:

$$\begin{bmatrix} \frac{du_C(t)}{dt} \\ \frac{di(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}}_{A} \cdot \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}_{B} \cdot u_0(t) \qquad u_C(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \cdot \begin{bmatrix} u_C(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \underbrace{0}_{D} \cdot u_0(t) \quad . \qquad (2.181)$$

Mit den bereits genannten MATLAB-Anweisungen und den in Gleichung (2.181) angegebenen Matrizen der Zustandsraumdarstellung für den RLC-Reihenschwingkreis erhält man für die Kondensatorspannung $u_C(t)$ für die in ***Bild 2.27*** angegebenen Parameter denselben Kurvenverlauf wie in ***Bild 2.27*** dargestellt.

Der Hauptvorteil der numerischen Berechnung von Schaltungen – sei es durch MATLAB, SIMULINK oder ein anderes Simulationstool – liegt in der schnellen Gewinnung eines Ergebnisses. Bereits bei Schaltungen mit wenigen Bauelementen führt der analytische Weg zu einem nicht mehr realisierbaren Rechenaufwand. Selbst wenn man die Zeit zur Berechnung in Kauf nimmt, verliert das analytische Ergebnis aufgrund der entstehenden extrem langen Terme an Übersichtlichkeit, von Fehlern bei Umformungen einmal völlig abgesehen.

Die analytische Berechnung von Schaltungen hat dennoch ihre Berechtigung. Durch Vereinfachungen komplexer Systeme können oft Ersatzschaltungen mit wenigen Bauelementen abgeleitet werden, deren prinzipielles Verhalten mit Hilfe der analytischen Schaltungsberechnung analysiert werden kann. Diese sich dadurch ergebenden Gleichungen lassen Abhängigkeiten des Systemverhaltens von einzelnen Bauelementen erkennen, wodurch das Verständnis der Wirkungszusammenhänge erleichtert oder überhaupt erst möglich wird.

2.6 Behandlung von Schaltungen mit verteilten Bauelementen (Leitungen)

Leitungen sind räumlich ausgedehnte Gebilde. Sie können daher nicht wie ein elektrisches Netzwerk mit konzentrierten Elementen durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden. Hier kommen partielle Differentialgleichungen zum Einsatz, deren Lösungen Wanderwellenvorgänge sind. Für den Spezialfall kurzer Leitungen ist eine Beschreibung mit gewöhnlichen Differentialgleichungen zulässig und man kommt auf eine Ersatzschaltung mit konzentrierten Elementen.

Eine längere Leitung kann man sich aus mehreren kurzen Leitungen zusammengesetzt denken, so daß sich eine längere Leitung *näherungsweise* durch eine Kettenschaltung (Hintereinanderschaltung) der Ersatzschaltbilder für eine kurze Leitung modellieren läßt.

2.6.1 Leitungstheorie für sinusförmige Spannungen und Ströme

2.6.1.1 Allgemeine Leitungsgleichungen

Im Folgenden werden die Leitungsgleichungen für den *Spezialfall sinusförmiger Spannungen und Ströme* abgeleitet. Dazu wird ein differentiell kleines Leitungselement gemäß ***Bild 2.28*** betrachtet, dem ein

- Widerstandsbelag R‘
- Induktivitätsbelag L‘
- Kapazitätsbelag C‘
- Ableitungsbelag G‘

zugeordnet wird.

Es werden ausschließlich *homogene Leitungen* betrachtet, d. h. die Leitungsbeläge bleiben über der Leitungslänge konstant. Die einzelnen Beläge können zu einer komplexen Impedanz und zu einer komplexen Admittanz zusammengefasst werden:

$$\underline{Z}' = R' + j\omega \cdot L' \qquad\qquad \underline{Y}' = G' + j\omega \cdot C' \quad . \tag{2.182}$$

Aus der Maschengleichung (***Bild 2.28b***)

$$\underline{U} + d\underline{U} = \underline{Z}'\cdot dx \cdot \left(\underline{I} + d\underline{I}\right) + \underline{U} \tag{2.183}$$

folgt mit $\underline{Z}'\cdot\underline{I}\cdot dx >> \underline{Z}'\cdot d\underline{I}\cdot dx$

$$\frac{d\underline{U}}{dx} = \underline{Z}'\cdot\underline{I} \quad ; \tag{2.184}$$

aus der Knotengleichung ergibt sich

$$\underline{I} + d\underline{I} = \underline{Y}'\cdot dx \cdot \underline{U} + \underline{I} \tag{2.185}$$

und damit

$$\frac{d\underline{I}}{dx} = \underline{Y}'\cdot\underline{U} \quad . \tag{2.186}$$

Durch differenzieren und gegenseitiges Einsetzen der beiden Differentialgleichungen ergeben sich daraus die partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung, auch als Wellengleichungen bezeichnet

$$\frac{d^2\underline{I}}{dx^2} - \underline{Z}'\cdot\underline{Y}'\cdot\underline{I} = 0 \qquad\qquad \frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - \underline{Z}'\cdot\underline{Y}'\cdot\underline{U} = 0 \quad . \tag{2.187}$$

Der Ansatz

$$\underline{U}(x) = \underline{A}\cdot e^{\underline{\gamma}x} + \underline{B}\cdot e^{-\underline{\gamma}x} \qquad\qquad \underline{I}(x) = \underline{C}\cdot e^{\underline{\gamma}x} + \underline{D}\cdot e^{-\underline{\gamma}x} \tag{2.188}$$

führt zusammen mit den Gleichungen (2.184), (2.186) und (2.187) auf die folgenden Lösungen der Wellengleichungen:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{A}\cdot e^{\underline{\gamma}x} + \underline{B}\cdot e^{-\underline{\gamma}x} && \text{mit} \quad \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'} = \sqrt{(R'+j\omega L')(G'+j\omega C')} \\ \underline{I}(x) &= \frac{1}{\underline{Z}_W}\left(\underline{A}\cdot e^{\underline{\gamma}x} - \underline{B}\cdot e^{-\underline{\gamma}x}\right) && \text{und} \quad \underline{Z}_W = \sqrt{\frac{\underline{Z}'}{\underline{Y}'}} \end{aligned} \quad . \qquad (2.189)$$

Mit den Randbedingungen $\underline{U}(x\!=\!0) = \underline{U}_2$ und $\underline{I}(x\!=\!0) = \underline{I}_2$ gemäß ***Bild 2.28a*** folgt

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \frac{1}{2}\left(\underline{U}_2 + \underline{Z}_W\cdot\underline{I}_2\right)e^{\underline{\gamma}x} + \frac{1}{2}\left(\underline{U}_2 - \underline{Z}_W\cdot\underline{I}_2\right)e^{-\underline{\gamma}x} \\ \underline{I}(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} + \underline{I}_2\right)e^{\underline{\gamma}x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W} - \underline{I}_2\right)e^{-\underline{\gamma}x} \end{aligned} \quad . \qquad (2.190)$$

oder

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2\cdot\cosh(\underline{\gamma}x) + \underline{Z}_W\cdot\underline{I}_2\cdot\sinh(\underline{\gamma}x) \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_2\cdot\cosh(\underline{\gamma}x) + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_W}\cdot\sinh(\underline{\gamma}x) \end{aligned} \quad . \qquad (2.191)$$

Es gelten folgende Definitionen und Bezeichnungen:

- Wellenwiderstand: $\underline{Z}_W$
- Übertragungskonstante: $\underline{\gamma}$
- Dämpfungskoeffizient: $\alpha = \mathrm{Re}\{\underline{\gamma}\}$ $\quad \underline{\gamma} = \alpha + j\cdot\beta$
- Phasenkoeffizient: $\beta = \mathrm{Im}\{\underline{\gamma}\}$
- Komplexes Dämpfungsmaß für Leitungen der Länge ℓ: $\underline{g} = \underline{\gamma}\cdot\ell$
- Dämpfungsmaß für Leitungen der Länge ℓ: $a = \alpha\cdot\ell$
- Dämpfungswinkel für Leitungen der Länge ℓ: $b = \beta\cdot\ell$

Die hyperbolischen Funktionen (sinh() und cosh()) führen zu einer komprimierten Schreibweise der Leitungsgleichungen; für praktische Berechnungen ist die Schreibweise mit den komplexen Exponentialfunktionen besser geeignet.

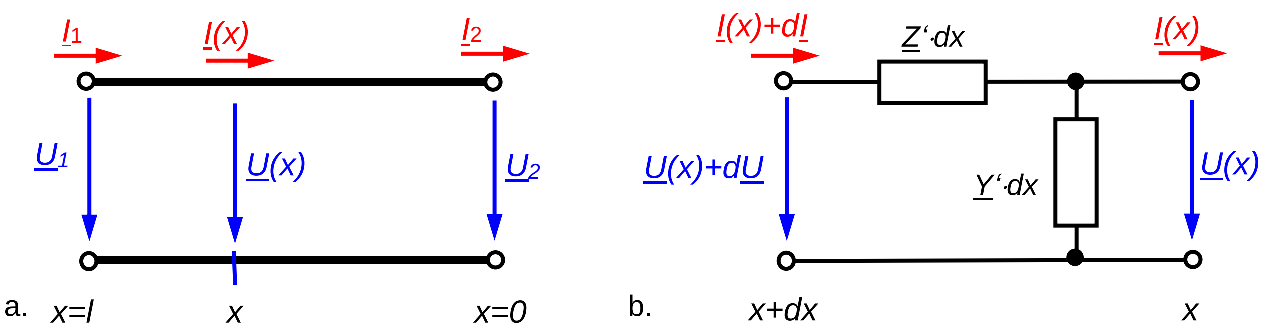


Bild 2.28 Ersatzschaltbild einer Leitung
a. Spannungen und Ströme am Anfang und am Ende einer homogenen Leitung
b. Differentielles Leitungselement der Länge *dx*

2.6.1.2 Verlustfreie Leitung

Übertragungsleitungen der elektrischen Energietechnik, d. h. Hochspannungsfreileitungen und Kabel, sind verlustarm. Aufgrund der Komplexität der Leitungsgleichungen gemäß (2.190) ist es für viele Untersuchungen nicht sinnvoll, alle 4 Leitungsbeläge bei Berechnungen zu berücksichtigen. Die Leitungsgleichungen und damit die Berechnung elektrischer Leitungsnetze werden deutlich vereinfacht, wenn die Leitungen als verlustfrei angenommen werden. Bei Übertragungsleitungen der elektrischen Energietechnik ist diese Annahme mit guter Näherung erfüllt. Für verlustfreie Leitungen gilt:

$$\begin{aligned} R' &= 0 \\ G' &= 0 \end{aligned} \quad . \tag{2.192}$$

Damit erhält man für die Übertragungskonstante und den Wellenwiderstand:

$$\begin{aligned} &\underline{\gamma}_0 = j\omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} = j\beta_0 \\ &\text{mit} \quad \alpha = 0 \quad \beta_0 = \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} \qquad \underline{Z}_W = Z_0 = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \end{aligned} \quad . \tag{2.193}$$

Der Wellenwiderstand $\underline{Z}_W$ wird also rein reell (Z_0), die Übertragungskonstante $\underline{\gamma}$ wird rein imaginär. Die Welle bewegt sich während einer Periodendauer T um eine Wellenlänge, d. h. um die Strecke $x = \lambda$, vorwärts. Für $x = \lambda$ ist $\beta_0 \cdot x = \beta_0 \cdot \lambda = 2\pi$. Daraus folgt:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0} \quad . \tag{2.194}$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle ist:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T \cdot \beta_0} = 2\pi \cdot f \cdot \frac{1}{\beta_0} = \frac{\omega}{\beta_0} = \frac{1}{\sqrt{L' \cdot C'}} \quad . \tag{2.195}$$

Für eine Zweidrahtleitung gilt beispielsweise:

$$C' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \pi}{\ln\left(\frac{2D}{d}\right)} \qquad L' = \frac{\mu_0 \mu_r}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{2D}{d}\right) \quad , \tag{2.196}$$

wobei D der Drahtabstand und d der Drahtdurchmesser ist. Für die Wellenlänge erhält man daraus:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta_0} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{1}{f \cdot \sqrt{L' \cdot C'}} = \frac{1}{f \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} \quad , \tag{2.197}$$

Hierin ist c die Lichtgeschwindigkeit mit c = 299792,458 km/s. Für die Netzfrequenz f = 50 Hz ergibt sich für die Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{299792{,}458 \,\frac{\text{km}}{\text{s}}}{50 \,\frac{1}{\text{s}} \cdot \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = 5995{,}65 \,\text{km} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} \quad . \tag{2.198}$$

Bei einer Freileitung (μ_r = 1, ε_r = 1) beträgt die Wellenlänge bei Netzfrequenz ca. 6000 km, bei einem Kabel (μ_r = 1, $\varepsilon_r \approx 4$) ist es die Hälfte, also 3000 km.

Für den *Spezialfall der verlustfreien Leitung* vereinfachen sich die Leitungsgleichungen zu:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \cdot \cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) + j\left(Z_0 \cdot \underline{I}_2 \cdot \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})\right) \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_2 \cdot \cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) + j\left(\frac{\underline{U}_2}{Z_0} \cdot \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})\right) \end{aligned} \quad . \tag{2.199}$$

Von Interesse sind noch verschiedene besondere Betriebszustände von Leitungen, die am Beispiel der verlustfreien Leitung näher untersucht werden sollen. Dies sind

- Leerlauf am Leitungsende,
- Kurzschluß am Leitungsende,
- Abschluß der Leitung am Leitungsende mit ihrem Wellenwiderstand.

A) Leerlauf bei x = 0 ($\underline{I}_2 = 0$)

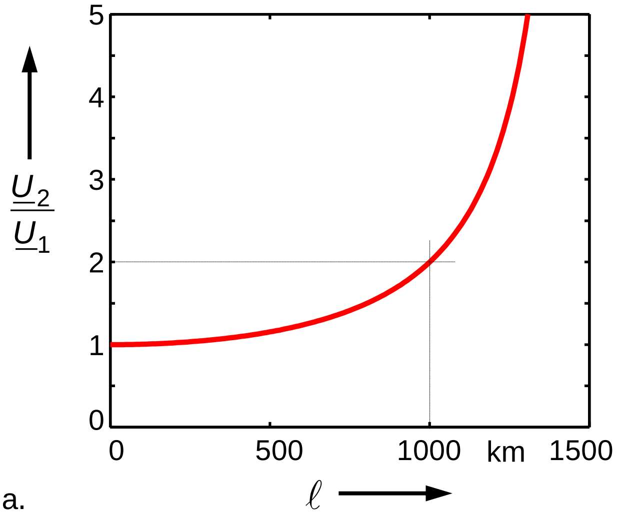
Für $\underline{I}_2 = 0$ läßt sich aus der Leitungsgleichung für die verlustlose Leitung direkt der folgende Zusammenhang ablesen:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \cdot \cos(2\pi \frac{x}{\lambda}) \\ \underline{I}(x) &= j\left(\frac{\underline{U}_2}{Z_0} \cdot \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})\right) \qquad \text{mit} \qquad \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = Z_0 \end{aligned} \quad . \tag{2.200}$$

Die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_{1L}$ der verlustlosen und leer laufenden Leitung ist

$$\underline{Z}_{1L} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}(x=\ell)}{\underline{I}(x=\ell)} = -j \cdot Z_0 \cdot \cot(2\pi \frac{x}{\lambda}) \quad . \tag{2.201}$$

Gemäß Gleichung (2.200) kann die Spannung am Ende einer leer laufenden Leitung sehr viel höhere Werte als die Eingangsspannung annehmen (***Bild 2.29***).



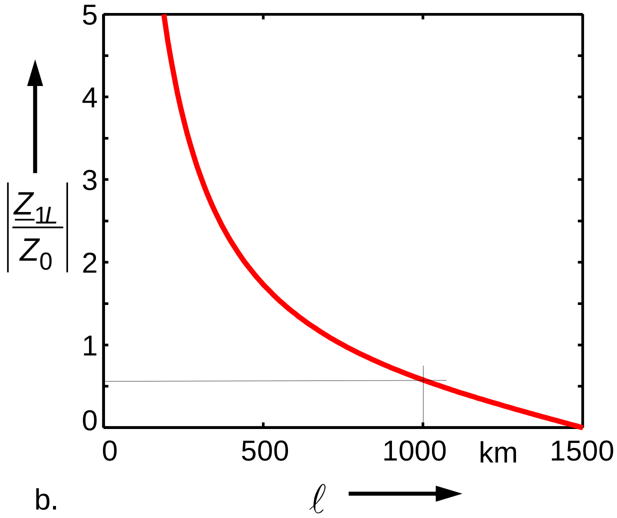


Bild 2.29 Leerlaufende Hochspannungsfreileitung (verlustfrei, λ = 6000 km)
a. Verhältnis der Spannungen am Leitungsanfang ($\underline{U}_1$) und am Leitungsende ($\underline{U}_2$)
b. auf den Wellenwiderstand Z_0 bezogene Eingangsimpedanz Z_{1L}

Dies wird als *Ferranti-Effekt* bezeichnet. Begrenzt wird der Ferranti-Effekt durch die sinkende Eingangsimpedanz der leer laufenden Leitung, die Quelle müsste bei einer Leitungslänge von $\lambda/4$ einen unendlich hohen Strom aufbringen. In der Praxis treten allerdings auch schon bei deutlich geringeren Leitungslängen als $\lambda/4$ (ab wenigen 100 km) beträchtliche Überspannungen auf. Deshalb werden schwach belastete und leer laufende Leitungen am Anfang und am Ende mit Erdungsdrosseln beschaltet.

B) Kurzschluss bei x = 0 ($\underline{U}_2 = 0$)

Für $\underline{U}_2 = 0$ ergibt sich für die verlustlose und kurzgeschlossene Leitung:

$$\underline{U}(x) = j\left(Z_0 \cdot \underline{I}_2 \cdot \sin(2\pi\frac{x}{\lambda})\right) \qquad \underline{I}(x) = \underline{I}_2 \cdot \cos(2\pi\frac{x}{\lambda}) \quad . \tag{2.202}$$

Der Eingangswiderstand $\underline{Z}_{1K}$ der verlustlosen und kurzgeschlossenen Leitung ist

$$\underline{Z}_{1K} = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} = j \cdot Z_0 \cdot \tan(2\pi\frac{x}{\lambda}) \quad . \tag{2.203}$$

C) Abschluss mit dem Wellenwiderstand bei x = 0

Die natürliche Leistung dient als Vergleichsmaß für die Beurteilung der Übertragungsfähigkeit einer langen Hochspannungsleitung. Sie ist gegeben, wenn die Leitung mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen ist. Die Leitungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}\cdot x} = \underline{U}_2 \cdot e^{\alpha x + j\beta_0 x} \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_2 \cdot e^{\underline{\gamma}\cdot x} = \underline{I}_2 \cdot e^{\alpha x + j\beta_0 x} \qquad \text{mit} \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_W \end{aligned} \quad . \tag{2.204}$$

Wenn eine *Leitung mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen* wird, so entsteht am Leitungsende keine reflektierte rücklaufende Welle. Das geht wegen $\underline{U}_2 = \underline{Z}_W \cdot \underline{I}_2$ direkt aus der *allgemeinen Leitungsgleichung* gemäß (2.190) hervor. Im Spezialfall der verlustfreien Leitung ist die Dämpfung Null, d. h. $\alpha = 0$.

Damit vereinfachen sich die Leitungsgleichungen zu:

$$\begin{aligned} \underline{U}(x) &= \underline{U}_2 \cdot e^{j\beta_0 x} \\ \underline{I}(x) &= \underline{I}_2 \cdot e^{j\beta_0 x} \qquad \text{mit} \quad \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \underline{Z}_W \end{aligned} \quad . \tag{2.205}$$

Strom und Spannung erfahren längs der Leitung eine gleichartige Phasendrehung $\beta_0 \cdot x$; sie sind längs der Leitung in Phase, d. h. es wird wegen $\cos\varphi = 1$ nur Wirkleistung übertragen. Man bezeichnet diese Wirkleistung als „natürliche Leistung"

$$\underline{S}_{2,nat} = 3 \cdot \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* = 3\frac{U_2^2}{\underline{Z}_W^*} \overset{\alpha=0}{=} 3\frac{U_2^2}{Z_0} \quad . \tag{2.206}$$

Im Falle der verlustbehafteten Leitung ($\alpha \neq 0$) entsteht längs der Leitung ein Spannungsabfall, die gleichartige Phasendrehung von Strom und Spannung bleibt aber erhalten.

2.6.2 Leitungstheorie für impulsförmige Spannungen und Ströme

2.6.2.1 Wanderwellen

Bei steilflankigen Spannungen und Strömen auf Leitungen treten schnell veränderliche elektrische und magnetische Felder auf. Zu deren mathematischer Beschreibung müssen die Maxwell'schen Gleichungen in vollständiger Form gelöst werden. Dazu kann man ähnlich dem Vorgehen bei der Herleitung der Leitungsgleichungen für den Spezialfall sinusförmiger Spannungen und Ströme ein Leitungselement mit differentiellen Elementen betrachten (***Bild 2.28***). *L'* und *C'* sind der Induktivitäts- und Kapazitätsbelag der Leitung. Für die *verlustfreie Leitung* lassen sich aus der Knoten- und Maschenregel die folgenden partiellen Differentialgleichungen ableiten:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - L^{'} C^{'} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - L^{'} C^{'} \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{2.207}$$

Die Lösungen dieser partiellen Differentialgleichungen sind Wanderwellen. Sie bestehen aus 2 Anteilen:

$u_v(x\text{-}v{\cdot}t)$ und $i_v(x\text{-}v{\cdot}t)$: einem vorwärts laufenden Anteil, der sich in positive x-Richtung ausbreitet (x > 0),

$u_r(x+v{\cdot}t)$ und $i_r(x+v{\cdot}t)$: einem rückwärts laufenden Anteil, der sich in negative x-Richtung ausbreitet (x < 0).

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit *v* der Wanderwellen und der Wellenwiderstand betragen:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L^{'} \cdot C^{'}}} \qquad Z = \sqrt{\frac{L^{'}}{C^{'}}} \quad . \tag{2.208}$$

Allgemein lauten die Gleichungen für die Wanderwellen, d. h. die Lösungen der Gleichung (2.207):

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_v(x - v \cdot t) + u_r(x + v \cdot t) \\ i(x,t) &= \frac{1}{Z}\left[u_v(x - v \cdot t) - u_r(x + v \cdot t)\right] = i_v(x - v \cdot t) + i_r(x + v \cdot t) \end{aligned} \quad . \tag{2.209}$$

Diese Gleichung besagt, dass sich die Spannung *u(x,t)* an jedem Ort *x* und zu jedem Zeitpunkt *t* aus einer vorlaufenden Welle $u_v(x\text{-}v{\cdot}t)$ und einer rücklaufenden Wellen $u_r(x+v{\cdot}t)$ zusammensetzt. Entsprechendes gilt für den Strom *i(x,t)*. Spannungs- und Stromwanderwellen gehören immer zusammen, es sind nur 2 unterschiedliche Darstellungsformen derselben Wanderwellenerscheinung. Meist arbeitet man jedoch mit der Spannungsgleichung.

Man kann sich die Wanderwelle als eine rechteckförmige Welle vorstellen, die sich mit der Geschwindigkeit *v* auf der Leitung fortbewegt (***Bild 2.30***).

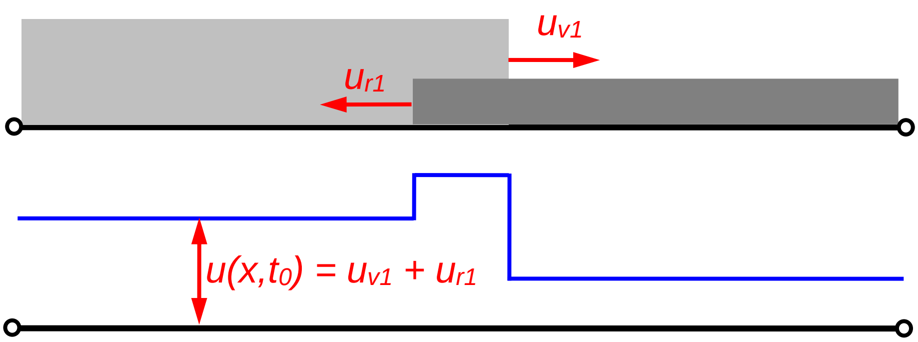


Bild 2.30 Wanderwellen auf einer Leitung: vorlaufende Welle (u_{v1}) und rücklaufende Welle (u_{r1}) sowie Spannung $u(x,t_0)$ längs der Leitung zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0

2.6.2.2 Brechung und Reflexion an einer Leitungsverzweigung

Auf der Leitung 1 läuft eine Wanderwelle bis auf den Knotenpunkt K vor. An diesem verzweigt sich die Leitung. Zur Berechnung der Wanderwellen bei einer Leitungsverzweigung gemäß ***Bild 2.31*** geht man von den Leitungsgleichungen gemäß (2.209) aus. Am Knotenpunkt K entsteht eine Spannung, die sich als Summe der vorlaufenden Welle u_{v1} und der rücklaufenden Welle u_{r1} ergibt. Diese Spannung u_{v2} läuft als Spannungswelle in die beiden an den Knoten angeschlossenen Leitungen ein. Die beiden Ströme i_{v2} und i_{v3} fließen in die beiden abzweigenden Leitungen. Man erhält:

$$u_{v1} + u_{r1} = u_{v2}$$

$$i_{v1} + i_{r1} = i_{v2} + i_{v3} \qquad \text{oder} \qquad \frac{u_{v1}}{Z_1} - \frac{u_{r1}}{Z_1} = \frac{u_{v2}}{Z_2} + \frac{u_{v2}}{Z_3} \quad . \tag{2.210}$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann u_{r1} eliminiert werden und die in die Leitungen 2 und 3 einlaufende Spannungswelle u_{v2} ergibt sich zu:

$$u_{v2} = 2 \cdot u_{v1} \cdot \frac{1}{Z_1 \cdot \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \right)} = 2 \cdot u_{v1} \cdot \frac{\left[\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} \right]}{Z_1 + \left[\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} \right]} \quad . \tag{2.211}$$

Für die auf der Leitung 1 zurücklaufende Welle erhält man:

$$u_{r1} = u_{v2} - u_{v1} = 2 \cdot u_{v1} \cdot \frac{\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}}{Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}} - u_{v1} = u_{v1} \cdot \frac{2\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} - Z_1 - \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}}{Z_1 + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}} = u_{v1} \cdot \frac{\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} - Z_1}{\frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} + Z_1} \quad . \tag{2.212}$$

Die rücklaufende Welle u_{r1} ist die an der Stelle K auftretende Reflexion, u_{v2} wird in die Leitungen 2 und 3 hineingebrochen. Ausgehend von diesem Spezialfall lassen sich allgemeine Beziehungen für den Brechungsfaktor und den Reflexionsfaktor angeben.

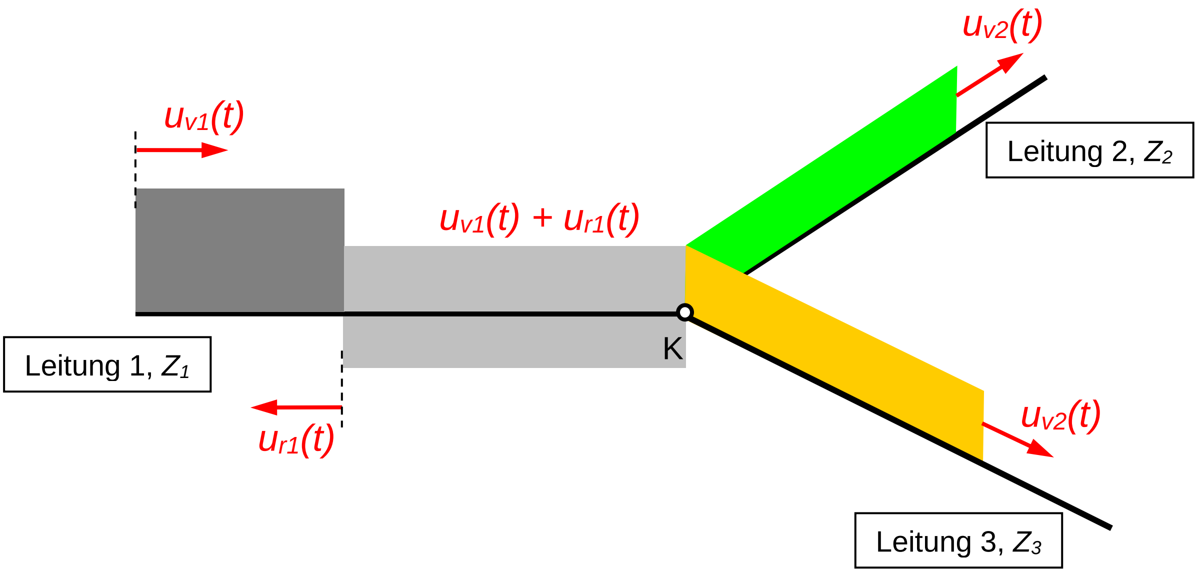


Bild 2.31 Wanderwelle auf einer Leitung mit einer Verzweigung

2.6.2.3 Wellenersatzschaltbild

Der Ausdruck $Z_2{\cdot}Z_3/(Z_2+Z_3)$ entspricht der Ersatzimpedanz für die Parallelschaltung der Leitungsimpedanzen Z_2 und Z_3 der beiden Leitungen 2 und 3. Aus Gleichung (2.211) ergibt sich unmittelbar das Wellenersatzschaltbild gemäß ***Bild 2.32***. Gemäß dem Wellenersatzschaltbild kann man die Spannungswelle, welche in die beiden abzweigenden Leitungen 2 und 3 einläuft, direkt berechnen. Als Quelle wird dazu das Doppelte der vorlaufenden Welle angesetzt. Im Längszweig wirkt die Leitung 1 mit ihrem Wellenwiderstand Z_1 im Knotenpunkt K wirkt die Parallelschaltung der Wellenwiderstände Z_2 und Z_3 der Leitungen 2 und 3:

$$u_2(t) = 2 \cdot u_1(t) \cdot \frac{Z_A}{Z_L + Z_A} \qquad \text{mit} \qquad Z_A = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad . \tag{2.213}$$

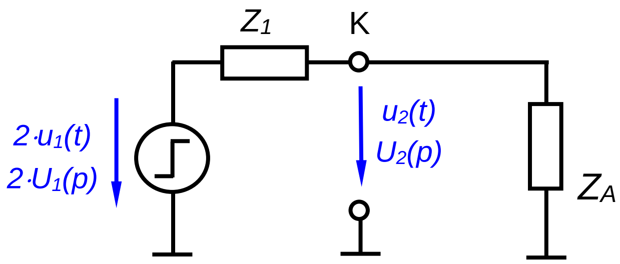


Bild 2.32 Wellenersatzschaltbild

Auch der Anschluss einer Leitung an eine Spannungsquelle $u_0(t)$ mit Innenimpedanz Z_0 kann durch das Wellenersatzschaltbild behandelt werden. Für eine in die Leitung einlaufende Wanderwelle wirkt die Leitung mit ihrem Wellenwiderstand, anders ausgedrückt: Die Welle „sieht" den Wellenwiderstand Z_L der Leitung. Hier liegt der größte Unterschied zum eingeschwungenen (stationären) Zustand mit sinusförmigen Größen. Dort variiert die Eingangsimpedanz einer Leitung mit dem Abschluß.

Wirkt nun die Leitung mit ihrem Wellenwiderstand, so lässt sich für die Quelle mit ihrer Innenimpedanz und die Leitung das in ***Bild 2.33b*** dargestellte Ersatzschaltbild angeben. Die in die Leitung einlaufende Welle berechnet sich dann gemäß

$$u_1(t) = \frac{Z_L}{Z_L + Z_0} \cdot u_0(t) = X \cdot u_0(t) \quad . \tag{2.214}$$

Die Größe X wird allgemein als *Einlauffaktor* bezeichnet.

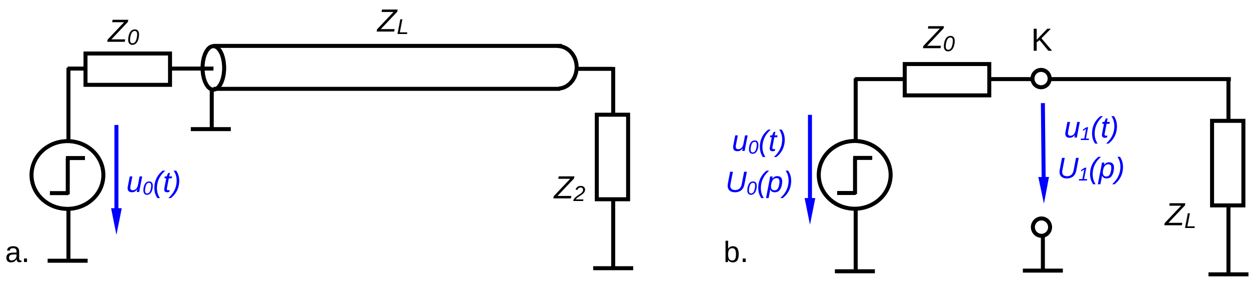


Bild 2.33 Anschluss einer Leitung an eine Spannungsquelle (a.) und zugehöriges Ersatzschaltbild (b.)

2.6.2.4 Berechnung der Wanderwellen bei allgemeinen Leitungsabschlüssen

Die Bedeutung des Wellenersatzschaltbildes liegt vor allem in der Möglichkeit den zeitlichen Verlauf der Wellen bei Abschluss der Leitung mit beliebigen Netzwerken aus R, L und C zu berechnen. Hierzu geht man zweckmäßigerweise auf die Beschreibung der Zeitfunktionen durch ihre Laplace-Transformierten über. Auch die Netzwerkbeziehungen werden der Laplace-Transformation unterzogen.

Als einfaches Beispiel soll die Spannungsmessung an einem Oszilloskop betrachtet werden (***Bild 2.34***). Dessen Eingang hat die oft in Datenblättern zu findende Angabe 1MΩ/20pF. Wenn die Innenimpedanz Z_0 der Quelle dem Wellenwiderstand Z_L der Leitung entspricht, ist der Einlauffaktor $X = ½$. Die Welle $u_1 = u_{v1} = X \cdot u_0(t) = ½ \cdot u_0(t)$ läuft auf der Leitung in Richtung des RC-Leitungsabschlusses. Geht man beispielsweise von einer Rechteckwelle $u_0(t)$ mit $U_0(p) = U_0 \cdot (1/p)$ aus, so erhält man aus dem Wellenersatzschaltbild für die Spannung am Leitungsende analog zu Gleichung (2.213):

$$U_2(p) = 2 \cdot U_1(p) \cdot \frac{Z_A(p)}{Z_L + Z_A(p)} = 2 \cdot \frac{U_0(p)}{2} \cdot \frac{Z_A(p)}{Z_L + Z_A(p)} = U_0(p) \cdot \frac{Z_A(p)}{Z_L + Z_A(p)} \quad . \tag{2.215}$$

$$\text{mit} \qquad Z_A(p) = \frac{R \cdot \frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{R}{1 + pRC}$$

Man erhält weiter

$$U_2(p) = U_0 \frac{1}{p} \cdot \frac{\frac{R}{1+pRC}}{Z_L + \frac{R}{1+pRC}} = U_0 \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{p \cdot \left(p + \frac{R + Z_L}{RZ_L C} \right)} \quad . \tag{2.216}$$

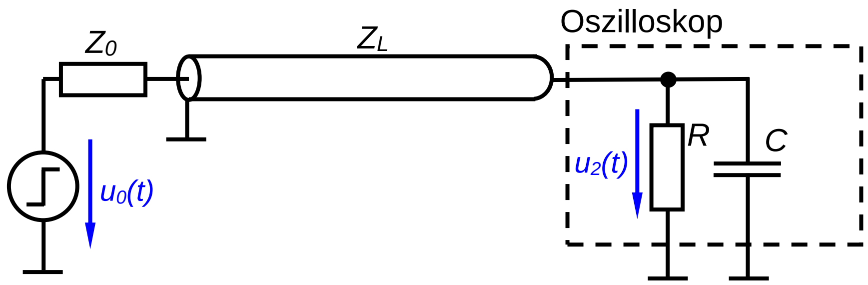


Bild 2.34 Messung einer Rechteckspannung über eine Meßleitung mit einem Oszilloskop mit einer RC-Eingangimpedanz (typ. 1MΩ/20pF)

Die Laplace-Transformierte der rücklaufenden Welle lässt sich mit dem Ansatz

$$U_1(p)+U_{1r}(p)=U_2(p) \tag{2.217}$$

zu

$$U_{1r}(p)=U_2(p)-U_1(p)$$

$$=U_0\frac{1}{CZ_L}\cdot\frac{1}{p\cdot\left(p+\frac{R+Z_L}{RZ_LC}\right)}-\frac{U_0}{2}\cdot\frac{1}{p}=-\frac{U_0}{2}\cdot\frac{p+\frac{1}{Z_LC}\cdot\frac{Z_L-R}{R}}{p\cdot\left(p+\frac{R+Z_L}{RZ_LC}\right)} \tag{2.218}$$

bestimmen.

Die zugehörigen Zeitfunktionen erhält man, indem die Laplace-Transformierten $U_2(p)$ und $U_{1r}(p)$ einer Rücktransformation in den Zeitbereich unterzogen werden. Üblicherweise nimmt man hierzu Korrespondenztabellen zur Hilfe.

Im vorliegenden Fall ist sicher die Spannung $u_2(t)$ von Interesse, die idealerweise einen Rechteckimpuls mit der Amplitude U_0 darstellen würde. Das tatsächliche Ergebnis lautet:

$$u_2(t)=U_0\cdot\frac{R}{Z_L+R}\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\overset{R\gg Z_L}{\approx}U_0\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{Z_LC}}\right)\quad \text{mit}\quad T=\frac{RC\cdot Z_L}{R+Z_L}\quad . \tag{2.219}$$

Genau genommen liegt also ein kleiner Amplitudenfehler vor. Geht man von $Z_L = 50\Omega$ und $R = 1\text{M}\Omega$ aus, so beträgt er 0,005% und ist damit vernachlässigbar gering. Die Zeitkonstante beträgt bei $C = 20\text{pF}$ $T = 1\text{ns}$. Die Messung von extrem steilflankigen Pulsen kann also verfälscht werden, wenn man bedenkt, dass der Endwert der Spannung $u_2(t)$ erst nach $(3\ldots5)\cdot T$ erreicht wird.

Zur Berechnung der Zeitfunktion der rücklaufenden Welle bietet sich zunächst eine Partialbruchzerlegung an:

$$-\frac{U_0}{2}\cdot\frac{p+\frac{1}{Z_L C}\cdot\frac{Z_L-R}{R}}{p\cdot\left(p+\frac{R+Z_L}{RZ_L C}\right)}=-\frac{U_0}{2}\cdot\left[\frac{A}{p}+\frac{B}{p+\frac{R+Z_L}{RZ_L C}}\right] \quad . \tag{2.220}$$

Dies kann umgeschrieben werden:

$$p+\frac{1}{Z_L C}\cdot\frac{Z_L-R}{R}=A\cdot\left(p+\frac{R+Z_L}{RZ_L C}\right)+B\cdot p \quad . \tag{2.221}$$

Setzt man in diese Gleichung spezielle Werte für p ein ($p = 0$ und $p = -(R+Z_L)/RZ_LC$), so lassen sich die Konstanten A und B berechnen und man erhält

$$U_{1r}(p)=-\frac{U_0}{2}\cdot\left[\frac{\frac{Z_L-R}{Z_L+R}}{p}+\frac{\frac{2R}{Z_L+R}}{p+\frac{R+Z_L}{RZ_L C}}\right] \tag{2.222}$$

und damit

$$u_{1r}(t)=-\frac{U_0}{2}\cdot\left[\frac{Z_L-R}{Z_L+R}+\frac{2R}{Z_L+R}\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right] \overset{R \gg Z_L}{\approx} \frac{U_0}{2}\cdot\left(1-2e^{-\frac{t}{Z_L C}}\right) \quad \text{mit} \quad T=\frac{RC\cdot Z_L}{R+Z_L} \quad . \tag{2.223}$$

2.6.2.5 Wellengitter nach Bewley

Im allgemeinen Fall der beidseitigen Fehlanpassung der Leitung, d. h. wenn sowohl die Innenimpedanz Z_0 der Quelle als auch die Abschlussimpedanz Z_A der Leitung von deren Wellenwiderstand Z_L abweichen, kommt es auf der Leitung zu Mehrfachreflexionen, wie dies in ***Bild 2.35*** dargestellt ist.

Nach dem Umlegen des Schalters S läuft eine Wanderwelle der Form $U_0(p)$, gewichtet mit dem Einlauffaktor $X(p)$ in die Leitung ein. Diese wird am Ende der Leitung mit dem Faktor $B(p)$ reflektiert und läuft an den Leitungsanfang. Dort wird die Welle mit dem Faktor $A(p)$ in die Leitung zurückreflektiert. Diese Mehrfachreflexionen können sehr anschaulich durch das nach Bewley benannte Wellengitter dargestellt werden. Einschränkend muss allerdings festgehalten werden, dass das Wellengitter nach Bewley bereits bei zwei in Serie geschalteten Leitungen mit zunehmender Zahl der betrachteten Reflexionsvorgänge recht schnell unübersichtlich wird. Geht man beispielsweise von dem einfachen Fall reeller Impedanzen Z_0, Z_A und Z_L aus, so erhält man:

$$A(p)=\frac{Z_0-Z_L}{Z_0+Z_L} \qquad B(p)=\frac{Z_A-Z_L}{Z_A+Z_L} \qquad C(p)=2\cdot\frac{Z_A}{Z_L+Z_A} \quad . \tag{2.224}$$

Interessant ist insbesondere die Spannung, die am Leitungsende infolge der Mehrfachreflexionen entsteht. Diese kann man durch Aufsummieren der durch jede am Leitungsende abfallende Spannung bestimmen.

Gemäß ***Bild 2.35*** ist

$$\begin{aligned}U_2(p) &= U_0(p)\cdot X(p)\cdot C(p) + U_0(p)\cdot X(p)\cdot A(p)\cdot B(p)\cdot C(p)\cdot e^{-2p\tau}\\ &\quad + U_0(p)\cdot X(p)\cdot A^2(p)\cdot B^2(p)\cdot C(p)\cdot e^{-4p\tau}\\ &\quad + U_0(p)\cdot X(p)\cdot A^3(p)\cdot B^3(p)\cdot C(p)\cdot e^{-6p\tau} + \ldots\\ &= U_0(p)\cdot X(p)\cdot C(p)\cdot\left[1 + A(p)\cdot B(p)\cdot e^{-2p\tau} + A^2(p)\cdot B^2(p)\cdot e^{-4p\tau} + A^3(p)\cdot B^3(p)\cdot e^{-6p\tau} + \ldots\right]\end{aligned} \quad . \quad (2.225)$$

Der Ausdruck in der Klammer entspricht einer geometrischen Reihe, d. h. es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \ldots = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1 \quad . \quad (2.226)$$

Damit ergibt sich für die Laplace-transformierte $U_2(p)$ der Spannung am Leitungsende

$$\begin{aligned}U_2(p) &= U_0(p)\cdot X(p)\cdot C(p)\\ &\quad \cdot\left[1 + A(p)\cdot B(p)\cdot e^{-2p\tau} + A^2(p)\cdot B^2(p)\cdot e^{-4p\tau} + A^3(p)\cdot B^3(p)\cdot e^{-6p\tau} + \ldots\right],\\ &= U_0(p)\cdot X(p)\cdot C(p)\cdot\frac{1}{1 - A(p)\cdot B(p)\cdot e^{-2p\tau}} = U_0(p)\cdot H(p)\end{aligned} \quad (2.227)$$

für die Übertragungsfunktion $H(p)$ gilt:

$$H(p) = \frac{X(p)\cdot C(p)}{1 - A(p)\cdot B(p)\cdot e^{-2p\tau}} \quad . \quad (2.228)$$

Bild 2.36 zeigt beispielhaft die Übertragungsfunktion $\underline{H}(p)$ und den zeitlichen Verlauf der Spannung $u_2(t)$ am Leitungsende.

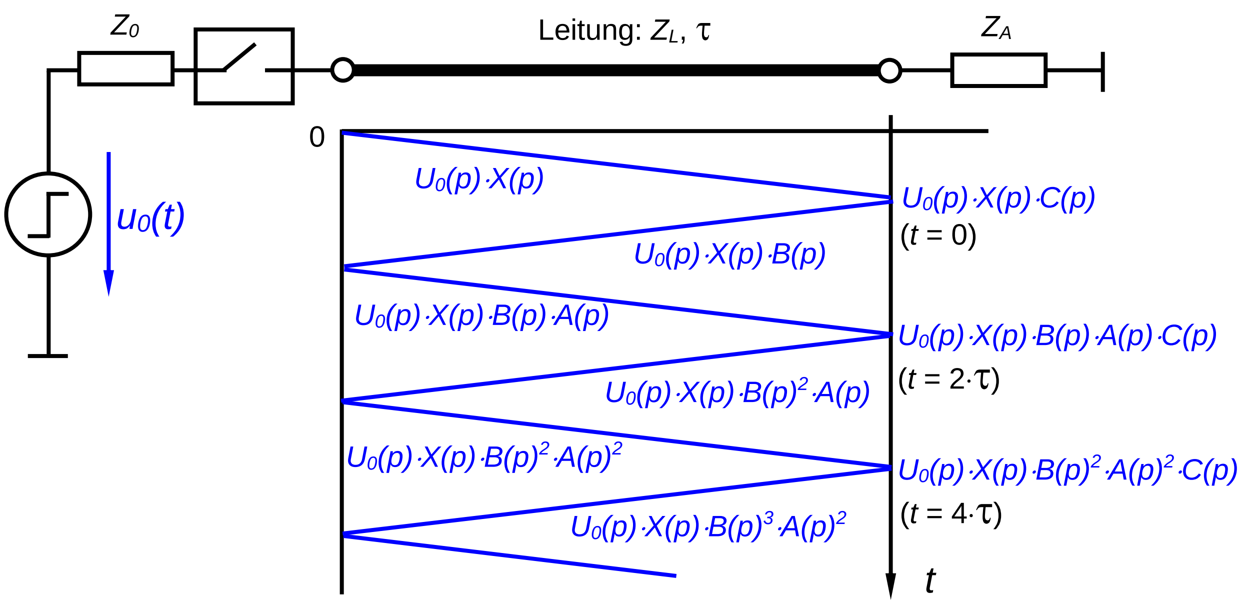


Bild 2.35 Mehrfachreflexionen auf einer Leitung mit Fehlabschluss an beiden Enden

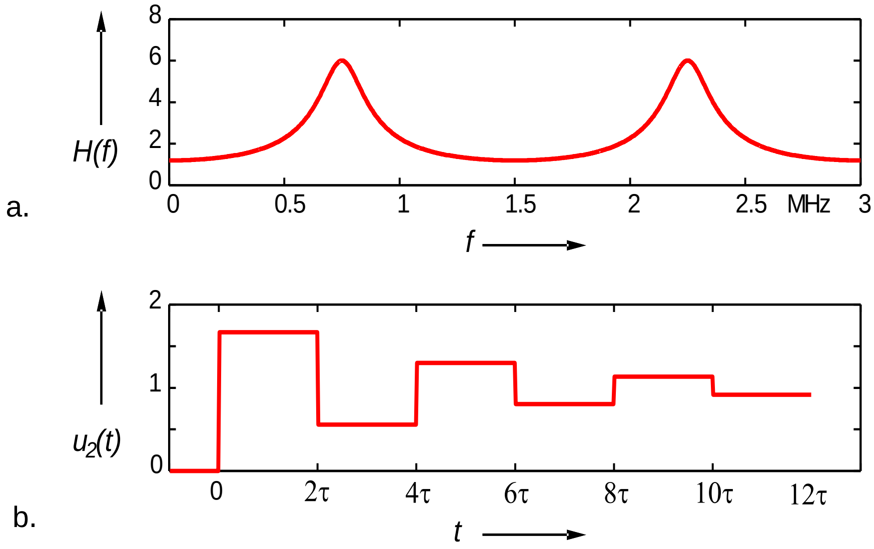


Bild 2.36 Spannung am Leitungsende durch Mehrfachreflexionen für $Z_A \to \infty$, $Z_L = 350\ \Omega$, $Z_0 = 70\ \Omega$, $\ell_0 = 100\text{m}$ ($\tau = 333{,}33$ ns)

a. Betrag *H(f)* der Übertragungsfunktion *H(p)*

b. Einschwingvorgang während der ersten Reflexionen

3 Verfahren zur Analyse elektrischer Netzwerke

3.1 Lösung von Differentialgleichungen durch die Laplace-Transformation

3.1.1 Bedeutung der Laplace-Transformation zur Netzwerkanalyse

Die Gründe für die Bedeutung der Laplace-Transformation in der Elektrotechnik sind:

- Vertiefte Einsicht in das Übertragungsverhalten $U_2(\omega)/U_1(\omega)$ eines elektrischen Netzwerkes, vor allem auch hinsichtlich der Stabilität.
- Algebraisierung von Differentialgleichungen und dadurch Vereinfachung der Lösung von DGL speziell bei der Berechnung elektrischer Netzwerke bei beliebigen Anregungen.
- Konvergenz der Laplace-Transformation auch bei Signalen, für welche die Fourier-Transformation nicht mehr konvergiert. Dabei ist zu beachten, dass der physikalische Sinn des Amplitudendichtespektrums, das die Fourier-Transformierte eines Signals darstellt, bei der Laplace-Transformation verloren geht. Der Grund dafür ist, dass die imaginäre Achse durch die komplexe Frequenz p verlassen wird.

Eine wichtige Anwendung des Zeitverschiebungssatzes der Laplacetransformation ist die Bestimmung der Laplace-Transformierten periodischer Zeitfunktionen. Wird die Zeitachse um T nach rechts verschoben, so gilt für die neue Zeitvariable $t^* = t - T$ und für die Laplace-Transformierte:

$$f(t^*) = f(t-T) \qquad \leftrightarrow \qquad e^{-p\cdot T} \cdot F(p) \quad . \tag{4.1}$$

Bild 3.1 zeigt die Funktion $f_0(t)$, die sich mit der primitiven Periode T ab dem Zeitpunkt $t = 0$ periodisch fortsetzt. Damit gilt:

$$F_0(p) = \int_0^{\infty} f_0(t) \cdot e^{-pt} dt \quad . \tag{4.2}$$

Insgesamt gilt für die gesamte Funktion $f(t)$ und der zugehörigen Laplace-Transformierten $F(p)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2\cdot T) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t - k\cdot T) \\ &\updownarrow \\ F(p) &= F_0(p) + F_0(p)\cdot e^{-p\cdot T} + F_0(p)\cdot e^{-p\cdot 2T} + F_0(p)\cdot e^{-p\cdot 3T} + \ldots \\ &= F_0(p)\cdot\left(1 + e^{-p\cdot T} + e^{-p\cdot 2T} + e^{-p\cdot 3T} + \ldots\right) = F_0(p)\cdot\frac{1}{1-e^{-p\cdot T}} \end{aligned} \quad . \tag{4.3}$$

Die geometrische Reihe konvergiert für

$$\left|e^{-p\cdot T}\right| = \left|e^{-(\alpha+j\omega)\cdot T}\right| = \left|e^{-\alpha\cdot T}\cdot e^{-j\omega\cdot T}\right| = \left|e^{-\alpha\cdot T}\right| \cdot \underbrace{\left|e^{-j\omega\cdot T}\right|}_{=1} = \left|e^{-\alpha\cdot T}\right| \overset{!}{<} 1 \quad , \tag{4.4}$$

und damit $\alpha > 0$

Die Laplace-Transformierte $F_0(p)$ konvergiert für Re{p} > α_0, die geometrische Reihe konvergiert für Re{p} > 0. Insgesamt liegt also Konvergenz für Re{p} > max(0, α_0) vor.

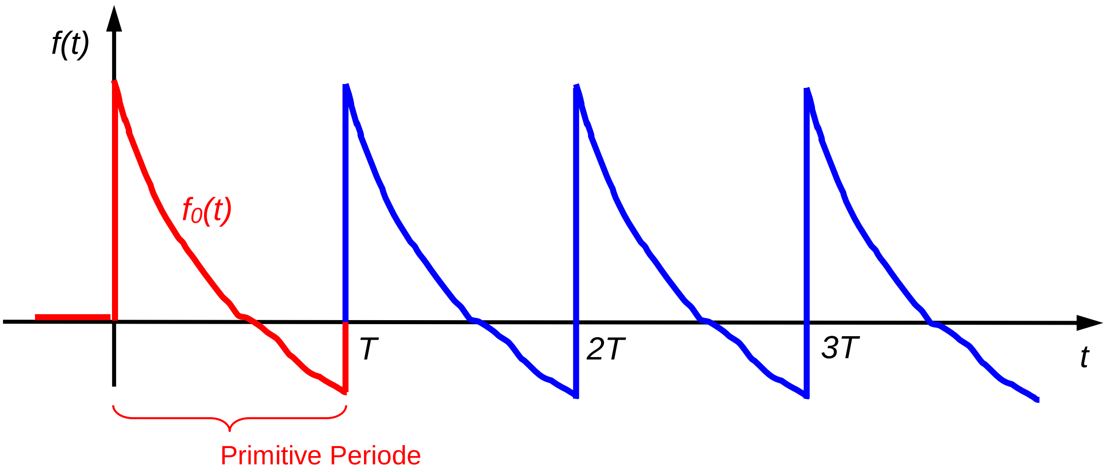


Bild 3.1 Laplace-Transformation einer periodischen Funktion *f(t)* mit der primitiven Periode *T* und der für $t \geq 0$ periodisch fortgesetzten Funktion $f_0(t)$

3.1.2 Impulsantwort und Übertragungsfunktion

Mit Hilfe des Faltungsintegrals, auch als Duhamel'sches Integral bezeichnet, lässt sich das Ausgangssignal $u_2(t)$ eines linearen und zeitinvarianten Systems bei beliebigem Eingangsignal $u_1(t)$ mit Hilfe der Impulsantwort *h(t)* berechnen:

$$u_2(t) = \int_0^t h(t-\tau)\cdot u_1(\tau)\cdot d\tau = \int_0^t h(\tau)\cdot u_1(t-\tau)\cdot d\tau \tag{4.5}$$

<u>Bemerkungen zum Duhamel'schen Integral:</u>

1) Das Duhamel'sche Integral gilt nur für lineare und zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme).

2) Die Impulsantwort *h(t)* beschreibt ein Netzwerk vollständig. *h(t)* tritt als Ausgangssignal auf, wenn im Netzwerk keine geladenen Energiespeicher vorhanden sind, d. h. alle Anfangsbedingungen $\equiv 0$ sind und das Netzwerk mit einem Dirac-Impuls $\delta(t)$ angeregt wird.

Die Laplace-Transformation des Duhamel'schen Integrals führt auf eine der wichtigsten Eigenschaften der Laplace-Transformation überhaupt und ist für die gesamte Elektrotechnik von grundlegender Bedeutung. Mit Hilfe der Beziehung

$$U_2(p) = H(p)\cdot U_1(p) \tag{4.6}$$

kann das Ausgangssignal im Bildbereich $U_2(p)$ durch Multiplikation der Übertragungsfunktion *H(p)* mit der Laplace-Transformierten des Eingangssignals $U_1(p)$ berechnet werden.

Die Übertragungsfunktion *H(p)* hat eine überragende Bedeutung in der Elektrotechnik und der Systemtheorie:

- Die Impulsantwort *h(t)* charakterisiert ein System vollständig. Gleiches gilt für die Systemübertragungsfunktion wegen

$$H(p) = \int_0^{\infty} h(t) \cdot e^{-pt} dt \quad . \tag{4.7}$$

- Die Übertragungsfunktion eines Netzwerkes *bei anfänglich ungeladenen Energiespeichern* (alle Anfangsbedingungen $\equiv 0$) kann durch komplexe Wechselstromrechnung meist auf einfache Weise berechnet werden. Dann gilt

$$\frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = F(j\omega) \; := \; H(p) \qquad \text{für} \qquad j\omega = p \quad . \tag{4.8}$$

  Man erhält die Systemübertragungsfunktion durch Analyse eines Netzwerkes mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung und muss dann im Ergebnis nur $j\omega$ durch *p* ersetzen, um zu *H(p)* zu gelangen.

3.1.3 Allgemeines Vorgehen und Aufstellen der Netzwerkgleichungen

Das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren ist allgemein und ohne Ausnahme zur Analyse linearer elektrischer Netzwerke anwendbar. Dazu müssen nacheinander die folgenden Schritte ausgeführt werden:

1) Aufstellen der Netzwerkgleichungen, d. h. des Systems der DGL, die das Netzwerk beschreiben.
2) Laplace-Transformation des Systems von DGL. Dies hat eine Algebraisierung der DGL zur Folge. Mit Hilfe der Matrizenrechnung lassen sich die gesuchten Größen im Frequenzbereich (Bildbereich, Unterbereich) bestimmen.
3) Die Rücktransformation vom Frequenzbereich in den Zeitbereich ergibt die endgültige Lösung.

Für die Gleichungen, die ein elektrisches Netzwerk beschreiben gilt die in ***Bild 3.2*** dargestellte Bilanz. Die Unbekannten werden im Folgenden mit $x_\nu(t)$ bezeichnet. Betrachtet man den in ***Bild 3.2*** dargestellten Gleichungstyp, so fällt auf, dass im Allgemeinen höchstens Ausdrücke der Form

$$a \cdot x_\nu(t) + b \cdot \frac{dx_\nu(t)}{dt} \tag{4.9}$$

auftreten können. Die Laplace-Transformierte dieses Ausdrucks lautet unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

$$a \cdot X_\nu(p) + b \cdot \left(p \cdot X_\nu(p) - x_\nu(0)\right) \quad . \tag{4.10}$$

Unbekannte	Gleichungstyp
k Maschenströme (enthalten die Drosselströme)	$i(t)\cdot R + L\dfrac{di(t)}{dt} + u_c(t)$
m Kondensatorspannungen	$i_c(t) = C\cdot\dfrac{du_c(t)}{dt}$
n magnetische Flüsse	$\phi(t) = c\cdot\sum_j w_j \cdot i_j$
abhängig von der Schaltung: weitere Gleichungen durch gesteuerte Quellen	Bipolar-Transistor: $i_C = \beta\cdot i_B$ Feldeffekt-Transistor: $i_{DS} = g_m\cdot u_{GS}$ Operationsverstärker: $u_a = -v\cdot u_{12}$

Bild 3.2 Allgemeine Gleichungen zur Beschreibung eines elektrischen Netzwerks aus diskreten Bauelementen *R, L, C, ü* im Zeitbereich

Mit jeder Unbekannten $x_\nu(t)$ kann also höchstens ein Polynom 1. Grades in p auftreten. Geht man von N Unbekannten aus, so lautet das System der DGL.

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}\cdot x_1(t)+b_{11}\cdot\dfrac{dx_1(t)}{dt} & a_{12}\cdot x_2(t)+b_{12}\cdot\dfrac{dx_2(t)}{dt} & \cdots & a_{1N}\cdot x_N(t)+b_{1N}\cdot\dfrac{dx_N(t)}{dt} & = & u_1(t) & \\
a_{12}\cdot x_1(t)+b_{12}\cdot\dfrac{dx_1(t)}{dt} & a_{22}\cdot x_2(t)+b_{22}\cdot\dfrac{dx_2(t)}{dt} & \cdots & a_{2N}\cdot x_N(t)+b_{2N}\cdot\dfrac{dx_N(t)}{dt} & = & 0 & . \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & = & \vdots & \\
a_{N1}\cdot x_1(t)+b_{N1}\cdot\dfrac{dx_1(t)}{dt} & a_{N2}\cdot x_2(t)+b_{N2}\cdot\dfrac{dx_2(t)}{dt} & \cdots & a_{NN}\cdot x_N(t)+b_{NN}\cdot\dfrac{dx_N(t)}{dt} & = & 0 &
\end{array} \qquad (4.11)$$

Durch Anwendung der Laplace-Transformierten gemäß (4.10) erhält man unter Berücksichtigung einer Anfangsbedingung daraus für das allgemeine Gleichungssystem zur Beschreibung eines elektrischen Netzwerks

$$\begin{array}{cccc|c}
X_1(p) & X_2(p) & \cdots & X_N(p) & = \\
\hline
a_{11}+b_{11}\cdot p & a_{12}+b_{12}\cdot p & \cdots & a_{1N}+b_{1N}\cdot p & U_1(p)+\sum\limits_{\nu=1}^{N} b_{1\nu}\cdot x_\nu(0) \\
a_{21}+b_{21}\cdot p & a_{22}+b_{22}\cdot p & \cdots & a_{2N}+b_{2N}\cdot p & \sum\limits_{\nu=1}^{N} b_{2\nu}\cdot x_\nu(0) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{N1}+b_{N1}\cdot p & a_{N2}+b_{N2}\cdot p & \cdots & a_{NN}+b_{NN}\cdot p & \sum\limits_{\nu=1}^{N} b_{N\nu}\cdot x_\nu(0) \\
\multicolumn{4}{c|}{\underbrace{\hspace{20em}}_{\boldsymbol{A}}} & \underbrace{\hspace{8em}}_{\boldsymbol{b}}
\end{array} . \qquad (4.12)$$

Für das lineare (N,N)-Gleichungssystem existiert genau eine Lösung, falls die Matrix $\boldsymbol{A}$ regulär ist, d. h. $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Die Lösung des Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{b} \tag{4.13}$$

gewinnt man auf einfache Weise durch Anwendung der ***Cramer'schen Regel***:

$$X_\nu(p) = \frac{D_\nu(p)}{D(p)} \quad \text{mit} \quad \nu = 1,2,\ldots,N \quad . \tag{4.14}$$

Dabei ist die Systemdeterminante

$$D(p) = \det \boldsymbol{A} = \det \left\{ \begin{matrix} a_{11} + b_{11} \cdot p & a_{12} + b_{12} \cdot p & \cdots & a_{1N} + b_{1N} \cdot p \\ a_{21} + b_{21} \cdot p & a_{22} + b_{22} \cdot p & \cdots & a_{2N} + b_{2N} \cdot p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} + b_{N1} \cdot p & a_{N2} + b_{N2} \cdot p & \cdots & a_{NN} + b_{NN} \cdot p \end{matrix} \right\} \quad ; \tag{4.15}$$

die Unterdeterminanten $D_\nu(p)$ erhält man aus der Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ dadurch, dass man die ν-te Spalte durch den Vektor $\boldsymbol{b}$ ersetzt

$$D_\nu(p) = \det \left\{ \begin{matrix} a_{11} + b_{11} \cdot p & a_{12} + b_{12} \cdot p & \cdots & U_1(p) + \sum\limits_{\nu=1}^{N} b_{1\nu} \cdot x_\nu(0) & \cdots & a_{1N} + b_{1N} \cdot p \\ a_{21} + b_{21} \cdot p & a_{22} + b_{22} \cdot p & \cdots & \sum\limits_{\nu=1}^{N} b_{2\nu} \cdot x_\nu(0) & \cdots & a_{2N} + b_{2N} \cdot p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} + b_{N1} \cdot p & a_{N2} + b_{N2} \cdot p & \cdots & \sum\limits_{\nu=1}^{N} b_{N\nu} \cdot x_\nu(0) & \cdots & a_{NN} + b_{NN} \cdot p \end{matrix} \right\} \quad . \tag{4.16}$$

ν-te Spalte der Matrix $\boldsymbol{A}$
wird durch den Vektor $\boldsymbol{b}$
ersetzt

Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind Polynome von höchstens 1. Grades mit reellen Koeffizienten $a_{\mu\nu}$ und $b_{\mu\nu}$. Die Lösungen $X_\nu(p)$ haben dadurch die folgenden wichtigen Eigenschaften:

- Die Systemdeterminante $D(p)$ ist ein Polynom mit reellen Koeffizienten von höchstens dem Grad N.
- Die Unterdeterminante $D_\nu(p)$ ist ebenfalls ein Polynom mit reellen Koeffizienten.
- Die Lösungen $X_\nu(p)$ sind daher Quotienten aus Polynomen mit reellen Koeffizienten, d. h. eine rationale Funktion in p. Dies gilt für alle RLCü-Netzwerke mit gesteuerten Quellen.

Mit den bisherigen Ergebnissen kann nun die für die Netzwerkanalyse und Systemtheorie so wichtige Gleichung (4.8) bewiesen werden. Dazu eliminiert man in (4.11) die Kondensatorspannungen. Mit $i_c = C \cdot du_c/dt$ erhält man durch Laplace-Transformation:

$$I_C(p) = C \cdot \left(pU_C(p) - u_C(0)\right) \qquad \text{und damit} \qquad U_C(p) = I_C(p) \cdot \frac{1}{pC} + \frac{u_C(0)}{p} \quad . \tag{4.17}$$

In den Spalten mit den Maschenströmen kommt ein Term der Form $1/pC$ hinzu. Der Term mit der Anfangsbedingung wird auf die rechte Seite des Gleichungssystems gebracht. Dadurch erhält ein allgemeines Element der Systemmatrix $\boldsymbol{A}$ die Gestalt $R + pL + 1/pC$.

Betrachtet man ein RLC-Netzwerk (mit konzentrierten Elementen), das durch sinusförmige Spannungs- und Stromquellen gespeist wird, so kann man die komplexe Wechselstromrechnung anwenden. Für einen beliebigen Maschenstrom $\underline{I}$ erhält man aus ***Bild 3.3***

$$\underline{I} \cdot \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \sum \underline{U} \quad . \tag{4.18}$$

Darin enthalten R, L und C alle in der Masche vorkommenden Bauelemente. $\sum \underline{U}$ stellt die Summe aller Spannungsquellen der Masche dar. Führt man dies nun für die Ströme sämtlicher Maschen durch und betrachtet die Ströme als Unbekannte, so erhält man ein Gleichungssystem, der Form

$$\underline{\boldsymbol{A}}(j\omega) \cdot \underline{\boldsymbol{I}} = \underline{\boldsymbol{U}} \quad . \tag{4.19}$$

Dies entspricht dem Gleichungssystem (4.12), falls dort alle Anfangsbedingungen $\equiv 0$ sind und die komplexe Frequenz p durch $j\omega$ ersetzt wird.

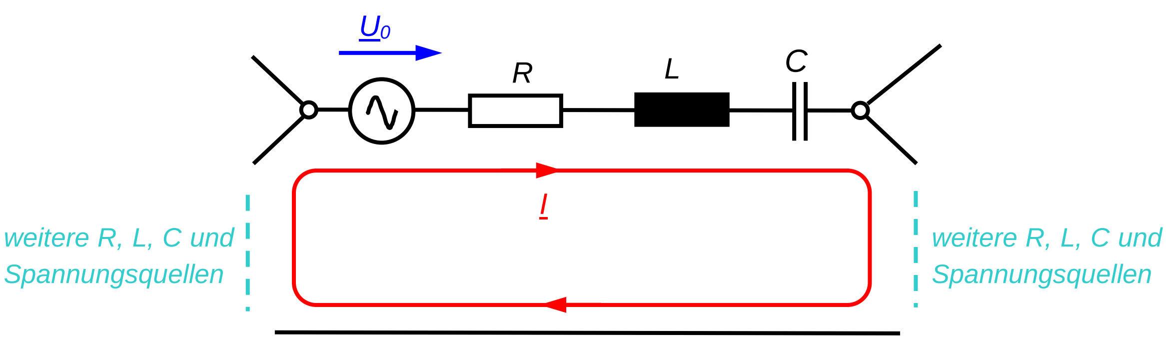


Bild 3.3 Allgemeiner Zweig eines aus Spannungsquellen, R, L und C bestehenden Netzwerkes (Stromquellen können in Spannungsquellen umgewandelt werden)

3.1.4 Beispiel: RLC-Reihenschwingkreis

Aus der Maschengleichung erhält man:

$$u_C(t) + i(t) \cdot R + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = u_1(t) \quad ; \tag{4.20}$$

für die Kondensatorspannung gilt

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad . \tag{4.21}$$

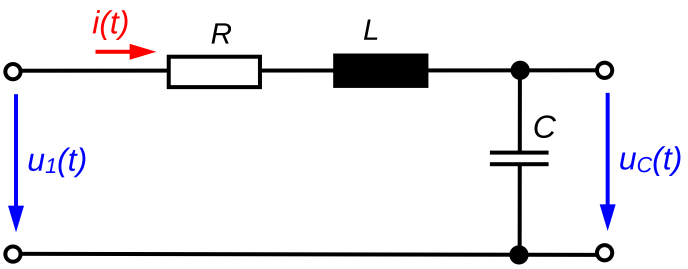


Bild 3.4 RLC-Reihenschwingkreis

Unbekannte sind der Strom *i(t)* und die Kondensatorspannung $u_C(t)$ sowie die jeweiligen Laplace-Transformierten *I(p)* und $U_C(p)$ dieser Größen. Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen *i(0)* und $u_C(0)$ erhält man durch Anwendung der Laplace-Transformation aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &U_C(p) + I(p)\cdot R + L\cdot\left[p\cdot I(p) - i(0)\right] = U_1(p) \\ &I(p) = C\cdot\left[p\cdot U_C(p) - u_C(0)\right] \end{aligned} \quad ; \qquad (4.22)$$

Etwas umgeordnet erhält man das folgende Schema:

$$\begin{array}{cc|c} U_C(p) & I(p) & = \\ \hline 1 & R+pL & U_1(p)+L\cdot i(0) \\ -pC & 1 & -C\cdot u_C(0) \end{array} \quad ; \qquad (4.23)$$

Die Systemdeterminante berechnet sich zu

$$D(p) = \det \boldsymbol{A} = \det\begin{Bmatrix} 1 & R+pL \\ -pC & 1 \end{Bmatrix} = 1 + pC\cdot(R+pL) = 1 + pRC + p^2LC \quad ; \qquad (4.24)$$

für die beiden Unterdeterminanten ergibt sich:

$$\begin{aligned} &D_{u_C}(p) = \det\begin{Bmatrix} U_1(p)+L\cdot i(0) & R+pL \\ -C\cdot u_C(0) & 1 \end{Bmatrix} = U_1(p) + L\cdot i(0) + (R+pL)\cdot C\cdot u_C(0) \\ &D_i(p) = \det\begin{Bmatrix} 1 & U_1(p)+L\cdot i(0) \\ -pC & -C\cdot u_C(0) \end{Bmatrix} = -C\cdot u_C(0) + pC\left(U_1(p) + L\cdot i(0)\right) \end{aligned} \quad . \qquad (4.25)$$

Somit erhält man für die Laplace-Transformierten *I(p)* und $U_C(p)$ der Unbekannten *i(t)* und $u_C(t)$:

$$U_C(p) = \frac{U_1(p) + L\cdot i(0) + (R+pL)\cdot C\cdot u_C(0)}{1 + pRC + p^2LC} \qquad I(p) = \frac{-C\cdot u_C(0) + pC\left(U_1(p) + L\cdot i(0)\right)}{1 + pRC + p^2LC} \quad . \qquad (4.26)$$

Falls alle Anfangsbedingungen $\equiv 0$ sind, so erhält man

$$F(p) = \frac{U_C(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{1 + pRC + p^2 LC} \quad . \tag{4.27}$$

Mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung erhält man durch Anwendung der Beziehungen für einen Spannungsteiler:

$$\frac{U_C(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} = H(j\omega) \quad . \tag{4.28}$$

Man erkennt sofort, dass *H(jω)* aus *F(p)* entsteht, indem man *p* durch *jω* ersetzt.

3.1.5 Rücktransformation in den Zeitbereich

3.1.5.1 Rücktransformation durch Korrespondenztabellen

Die Rücktransformation ist schwieriger als die Berechnung der Laplace-Transformierten *F(p)*, da sie Kenntnisse aus der Theorie komplexer Funktionen (Funktionentheorie) erfordert. Diese Schwierigkeiten können umgangen werden, wenn man sich auf die in der Praxis wichtigen Signale und deren zugehörigen Systemantworten beschränkt. Hierbei ist von besonderer Bedeutung, dass viele technisch relevanten Systeme und alle elektrischen Netzwerke, die aus diskreten Bauelementen bestehen, durch eine rationale Übertragungsfunktion *H(p)* beschrieben werden. Für eine Vielzahl relevanter Laplace-Transformierter existieren Korrespondenzen, die in entsprechenden Tabellen gelistet sind. Die Verwendung dieser Korrespondenztabellen ist sehr oft der einfachste Weg der Rücktransformation.

3.1.5.2 Rücktransformation bei endlich vielen Polen

Zur Rücktransformation vom Frequenzbereich in den Zeitbereich sind die folgenden Schritte notwendig:

- Partialbruchzerlegung der Frequenzfunktion (im p-Bereich).
- Rücktransformation der einzelnen Partialbrüche mit Hilfe von Korrespondenztabellen.
  Eine solche Tabellefindet sich in Anhang A.II.

3.1.5.3 Rücktransformation bei unendlich vielen Polen

Für eine ab $t = 0$ periodische Funktion *f(t)* gilt für die zugehörige Laplace-Transformierten *F(p)*:

$$\begin{gathered} f(t) = f_0(t) + f_0(t-T) + f_0(t-2\cdot T) + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t-k\cdot T) \\ \updownarrow \\ F(p) = F_0(p) \cdot \frac{1}{1-e^{-p\cdot T}} \end{gathered} \quad . \tag{4.29}$$

Die Pole von *F(p)* bestehen aus den Polen von $F_0(p)$ und den Polen der Funktion $1/(1-e^{-pT})$.

Diese Pole lassen sich aus $e^{-pT} = 1$ zu

$$p = +j \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot n \qquad mit \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{4.30}$$

berechnen.

Wird beispielsweise eine lineare Schaltung durch eine periodische Funktion *f(t)* angeregt, so entsteht am Ausgang der Schaltung eine Systemantwort, die aus einem flüchtigen und einem stationären Anteil besteht. Der stationäre Anteil hat dieselbe Periode *T* wie das Eingangssignal. Demnach kann die Laplace-Transformierte $U_2(p)$ durch einen flüchtigen und einen stationären Anteil dargestellt werden:

$$U_2(p) = U_{2,f}(p) + U_{2,stat}(p) = U_{2,f}(p) + U_{20}(p) \cdot \frac{1}{1-e^{-p \cdot T}} \quad . \tag{4.31}$$

Der flüchtige Anteil $U_{2,f}(p)$ enthält endlich viele Pole. Die Restfunktion $U_{2,stat}(p)$ enthält unendlich viele Pole auf der imaginären Achse, was im Zeitbereich zu unendlich vielen stationären Sinusschwingungen führt. Die Restfunktion $U_{2,stat}(p)$ kann in die „primitive Funktion $U_{20}(p)$ und die Funktion $1/(1-e^{-pT})$ zerlegt werden. Die primitive Funktion $U_{20}(p)$ weist damit dieselbe Periodendauer *T* wie das Eingangssignal auf.

3.1.5.4 Beispiel: Abschluss einer Leitung mit einem LC-Parallelnetzwerk

Schließt man eine Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_L mit einem LC-Parallelnetzwerk ab (***Bild 3.5***), so lautet die Laplacetransformierte der Spannung am Leitungsende bei Anregung der Leitung mit einer sprungartigen Spannung der Amplitude U_{10}:

$$U_2(p) = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{p^2 + p\frac{1}{CZ_L} + \frac{1}{LC}} = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)}$$

$$\text{mit} \quad 1)\; Z_L < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad p_{1/2} = -\frac{1}{2CZ_L} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad . \tag{4.32}$$

$$2)\; Z_L = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad p_{1/2} = -\frac{1}{2CZ_L} = -\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$3)\; Z_L > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad p_{1/2} = -\frac{1}{2CZ_L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2}$$

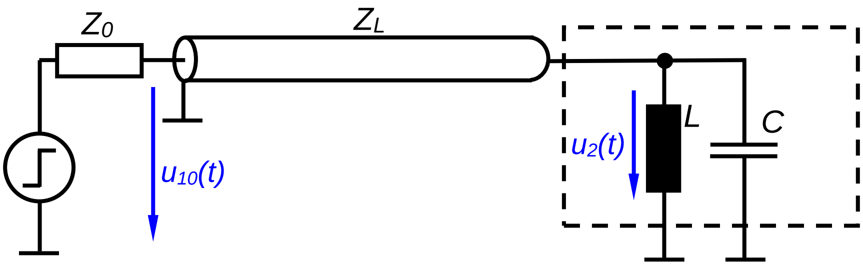


Bild 3.5 Abschluss einer Leitung mit einem LC-Parallelschwingkreis

1. Fall: zwei unterschiedliche reelle Pole

Aus der Beziehung

$$U_2(p) = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{(p-p_1)\cdot(p-p_2)} = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{p-p_2} \tag{4.33}$$

lassen sich die Koeffizienten zu

$$A = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{(p_1-p_2)} = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \qquad B = -2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \tag{4.34}$$

bestimmen und damit erhält man für die Lösung

$$u_2(t) = s(t) \cdot 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \cdot \left(e^{\left[-\frac{1}{2CZ_L} + \sqrt{\left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]\cdot t} - e^{\left[-\frac{1}{2CZ_L} - \sqrt{\left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}\right]\cdot t} \right). \tag{4.35}$$

2. Fall: zwei identische reelle Pole

Aus der Beziehung

$$U_2(p) = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{(p-p_1)\cdot(p-p_1)} = \frac{A}{p-p_1} + \frac{B}{(p-p_1)^2} \quad . \tag{4.36}$$

lassen sich die Koeffizienten zu

$$A = 0 \qquad B = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \tag{4.37}$$

bestimmen. Die Lösung kann damit direkt angegeben werden:

$$u_2(t) = s(t) \cdot 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot t \cdot e^{-t\cdot\sqrt{\frac{1}{LC}}} \quad . \tag{4.38}$$

3. Fall: ein konjugiert komplexes Polpaar

Mit einem Ansatz analog zu Gleichung (4.33) lauten die Koeffizienten

$$A = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{(p_1-p_2)} = 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{2j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2}} \qquad B = -2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{2j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2}} \tag{4.39}$$

und damit erhält man für die Lösung

$$u_2(t) = s(t) \cdot 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2}} \cdot \left(\frac{e^{\left[-\frac{1}{2CZ_L} + j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2}\right]\cdot t} - e^{\left[-\frac{1}{2CZ_L} - j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2}\right]\cdot t}}{2j} \right). \tag{4.40}$$

$$= s(t) \cdot 2 \cdot U_{10} \frac{1}{CZ_L} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2CZ_L}\cdot t} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{2CZ_L}\right)^2} \cdot t \right)$$

3.2 Maschenstromanalyse

3.2.1 Schaltungstopologie

Zunächst sollen einige Grundbegriffe der Schaltungstopologie vorgestellt werden. Betrachtet werden soll ein Netzwerk mit n Knoten und z Zweigen. Folgende Begriffe sind wichtig für die Beschreibung der Schaltungstopologie:

- *Graph*
  Den Graphen eines Netzwerks erhält man, indem alle Impedanzen und Spannungsquellen durch Linien ersetzt werden.

- *vollständiger Baum*
  Ein vollständiger Baum verbindet alle Knoten, ohne dass eine geschlossene Masche entsteht. In einem Netz mit n Knoten hat ein vollständiger Baum
  $$b = n - 1 \tag{4.41}$$
  Zweige.

- *Baumzweige*
  Die Zweige eines vollständigen Baumes werden Baumzweige genannt.

- *Komplementzweige*
  Die übrigen Zweige werden als Komplementzweige bezeichnet. Komplementzweige und Baumzweige bilden zusammen das vollständige Netzwerk.

- *fundamentale Masche*
  Betrachtet wird ein vollständiger Baum. Fügt man einen Komplementzweig ein, so muss daraus eine Masche entstehen, die als fundamentale Masche bezeichnet wird. Ein Netzwerk hat so viele fundamentale Maschen, wie Komplementzweige vorhanden sind, also
  $$a = z - b = z - (n - 1) \quad . \tag{4.42}$$

- *Maxwell-Zyklen*
  Neben den fundamentalen Maschen sind weitere Systeme von Maschen möglich. Ein spezielles System sind die Maxwell-Zyklen. Man wählt zunächst eine Masche in dem Netzwerk. Eine weitere Masche entsteht, indem eine Brücke über den noch nicht benutzten Teil des Netzwerks bei Benutzung von Teilen der alten Masche entsteht. Bei jeder Brücke muss mindestens ein neuer Zweig hinzu kommen. Forderung: Es müssen $a = z - (n - 1)$ Maschen gefunden werden, wobei mit jeder neuen Masche ein neuer Zweig hinzu kommt.

Zur Verdeutlichung der genannten Zusammenhänge und Begriffe wird eine Schaltung aufgegriffen (***Bild 3.6***), die in den folgenden Kapiteln sowohl mit der Maschenstromanalyse als auch mit der Knotenpotentialanalyse untersucht wird. Wichtig ist, dass die anregende Spannungsquelle (Eingangsspannung) mit berücksichtigt wird. Man kann mehrere Maschensysteme definieren, allerdings muss die Zahl der Maschen $a = z - (n - 1)$ sein, außerdem müssen sie den oben genannten Regeln entsprechen.

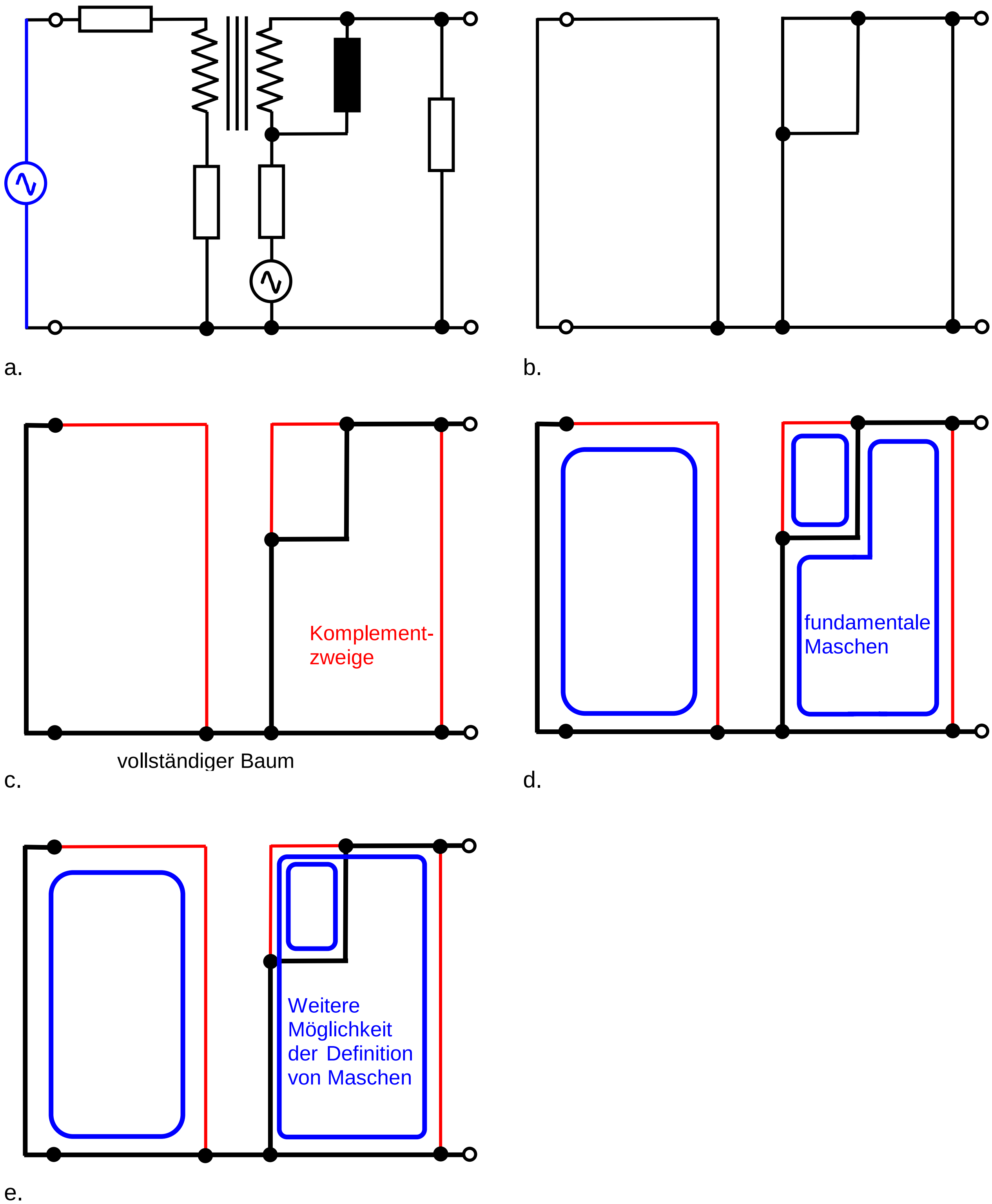


Bild 3.6 Schaltungstopologie

a. Schaltung mit gesteuerten Quellen und einem idealen Transformator
b. zugehöriger Graph
c. vollständiger Baum und Komplementzweige
d. System von fundamentalen Maschen, die aus dem vollständigen Baum durch Ergänzung mit Komplementzweigen entstehen
e. weitere Möglichkeit zur Festlegung eines vollständigen Systems von Maschen

3.2.2 Aufstellen der Maschenstromgleichungen

Das formalisierte Aufstellen der Maschenstromgleichungen erfordert das Abarbeiten der folgenden Schritte:

1) Umwandlung aller Stromquellen in äquivalente Spannungsquellen.
2) Eintragen der Maschenströme mit ihrer Richtung und Bezeichnung in ein vollständiges System von Maschen.
3) Aufstellen der einzelnen Maschengleichungen.

Hinsichtlich der Umwandlung einer Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle (und umgekehrt) ist zu ***Bild 3.7*** beachten. Durch Betrachtung der Parallelschaltung einer Stromquelle und einer Spannungsquelle mit Serienwiderstand kann man leicht die Äquivalenz zwischen der 2. und 3. sowie 4. Schaltungsvariante beweisen.

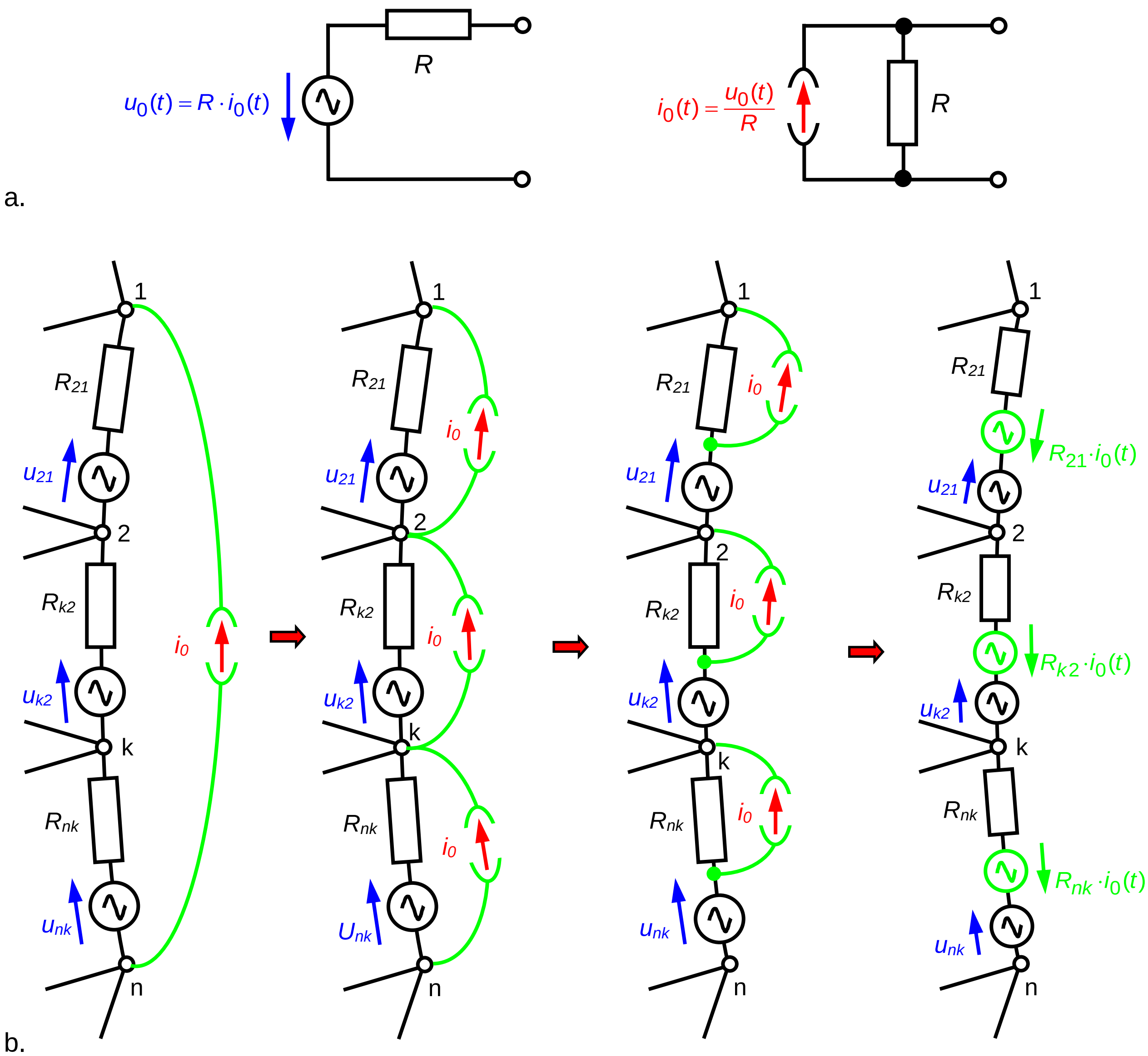


Bild 3.7 Umwandlung von Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen und umgekehrt
a. Umwandlung einfacher Quellen
b. Umwandlung einer Stromquelle in einem Netzwerk

Die Maschengleichungen liefern ein Gleichungssystem für die unbekannten Maschenströme (Kreisströme). Die Maschengleichungen können rein formal wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{array}{ccccc|c} I_1(p) & I_2(p) & I_3(p) & \cdots & I_n(p) & = \\ \hline Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1n} & U_1(p) \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2n} & U_2(p) \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & \cdots & Z_{3n} & U_3(p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & Z_{n3} & \cdots & Z_{nn} & U_n(p) \end{array} \tag{4.43}$$

oder

$$\left[Z_{ik}(p)\right] \cdot \begin{bmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ \vdots \\ I_n(p) \end{bmatrix} = \boldsymbol{Z}(p) \cdot \boldsymbol{I}(p) = \boldsymbol{U}(p) = \begin{bmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \\ \vdots \\ U_n(p) \end{bmatrix} \quad . \tag{4.44}$$

Für die Impedanzmatrix gilt:

$Z_{kk}(p)$ Summe aller Impedanzen in der Masche k

$Z_{ik}(p)$ Koppelimpedanz von Masche i in Masche k mit Vorzeichen

$Z_{ki}(p)$ Koppelimpedanz von Masche k in Masche i mit Vorzeichen

Der Vektor $\boldsymbol{U}(p)$ der Spannungen enthält dabei die anregenden Quellen sowie die Anfangsbedingungen, falls diese $\neq 0$ sind. Falls alle Anfangsbedingungen $\equiv 0$ sind und nur eine anregende Quelle $U_1(p)$ auftritt, vereinfacht sich der Spannungsvektor deutlich:

$$\boldsymbol{U}(p) = \begin{bmatrix} U_1(p) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{4.45}$$

Befinden sich ideale Transformatoren in dem Netzwerk, so treten die Spannungen an den Klemmen der Wicklungen des Transformators ($U_{w1}(p)$, $U_{w2}(p)$,… $U_{wN}(p)$) ebenfalls als Unbekannte auf. Hinzu kommen dann noch die Gleichungen, welche den idealen Transformator beschreiben. Dies sind N-1 Gleichungen für die Spannungsübersetzung und eine Gleichung für die Ströme:

$$\begin{aligned} 0 &= U_{w1}(p) - \frac{w_1}{w_2} \cdot U_{w2}(p) \\ 0 &= U_{w1}(p) - \frac{w_1}{w_3} \cdot U_{w3}(p) \\ \vdots & \qquad \vdots \\ 0 &= U_{w1}(p) - \frac{w_1}{w_N} \cdot U_{wN}(p) \qquad\qquad 0 = I_1(p) \cdot w_1 + I_2(p) \cdot w_2 + \ldots + I_N(p) \cdot w_N \end{aligned} \quad . \tag{4.46}$$

Reale Transformatoren können mit ihren Netzwerkelementen und einem idealen Transformator berücksichtigt werden.

3.2.3 Berechnung der Maschenströme

Die Ströme können durch Anwendung der ***Cramer'schen Regel*** berechnet werden:

$$I_\nu(p) = \frac{D_\nu(p)}{D(p)} \quad \text{mit} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n \quad . \tag{4.47}$$

Dabei ist die Systemdeterminante

$$D(p) = \det \boldsymbol{Z}(p) = \det \begin{Bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & Z_{nn} \end{Bmatrix} \quad ; \tag{4.48}$$

die Unterdeterminanten $D_\nu(p)$ erhält man aus der Determinante der Matrix ***Z****(p)* dadurch, dass man die ν-te Spalte durch den Vektor ***U****(p)* ersetzt

$$D_\nu(p) = \det \begin{Bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \cdots & U_1(p) & \cdots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \cdots & U_2(p) & \cdots & Z_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \cdots & \underbrace{U_n(p)} & \cdots & Z_{nn} \end{Bmatrix} \quad . \tag{4.49}$$

ν-te Spalte der Matrix ***Z****(p)* wird durch den Vektor ***U****(p)* ersetzt

Oft ist das Spannungsübersetzungsverhältnis $U_2(p)/U_1(p)$ der Spannungen von Ausgang und Eingang einer Schaltung von Interesse. Zu dessen Berechnung über die Maschenstromanalyse muss ein Zusammenhang zwischen einem der Ströme und der Spannung $U_2(p)$ aufgestellt werden. In der Berechnung dieses Stromes tritt dann die anregende Spannung $U_1(p)$ auf.

3.2.4 Beispiele

3.2.4.1 Transistorverstärker in Emitterschaltung

Bild 3.9a zeigt einen einfachen Verstärker mit einem Bipolartransistor in Emitterschaltung. Die Kondensatoren C_1 und C_2 dienen der Gleichstromentkopplung von der vorgeschalteten Verstärkerstufe und von der Eingangsimpedanz R_2 der nachgeschalteten Stufe. Der Spannungsteiler R_{B1} und R_{B2} dient der Einstellung des Arbeitspunktes des Transistors.

Der Arbeitspunkt soll bei U_{CE0} = 6 V liegen. Der dafür notwendige Basisstrom beträgt I_{B0} = 50 µA (***Bild 3.8***). Aus dem Kennlinienfeld kann man weiter ablesen, dass U_{BE0} = 0,7 V und I_{C0} = 17 mA beträgt. Es gilt ferner:

$$\begin{aligned} &U_{E0} = U_{B0} - U_{BE0} = \frac{R_{B2}}{R_{B1}+R_{B2}} \cdot U_B - U_{BE0} \qquad I_{B0} << \frac{U_{B0}}{R_{B2}}, \quad z.B.\ 10 \cdot I_{B0} = \frac{U_{B0}}{R_{B2}} \\ &R_E = \frac{U_{E0}}{I_{E0}} \approx \frac{U_{E0}}{I_{C0}} \\ &R_C = \frac{U_B - U_{CE0} - U_{E0}}{I_{C0}} = \frac{U_B - U_{CE0} - R_E \cdot I_{C0}}{I_{C0}} = \frac{U_B - U_{CE0}}{I_{C0}} - R_E \end{aligned} \quad . \tag{4.50}$$

Mit R_E = 120 Ω erhält man U_{E0} = 2,04 V. Damit ergibt sich der Widerstand R_C zu 233 Ω. Wählt man den nächsten Normwert von 220 Ω, so verändert sich der Kollektorstrom auf 17,65 mA. Die Spannung U_{B0} muss dann 2,818 V betragen, da U_{E0} auf 2,118 V ansteigt. Für den Widerstand R_{B2} folgt $R_{B2} = U_{B0}/10 \cdot I_{B0}$ = 5636 Ω, gewählt wird 5,6 kΩ. Für den Widerstand R erhält man schließlich 18246,7 Ω, der nächste Normwert beträgt 18 kΩ.

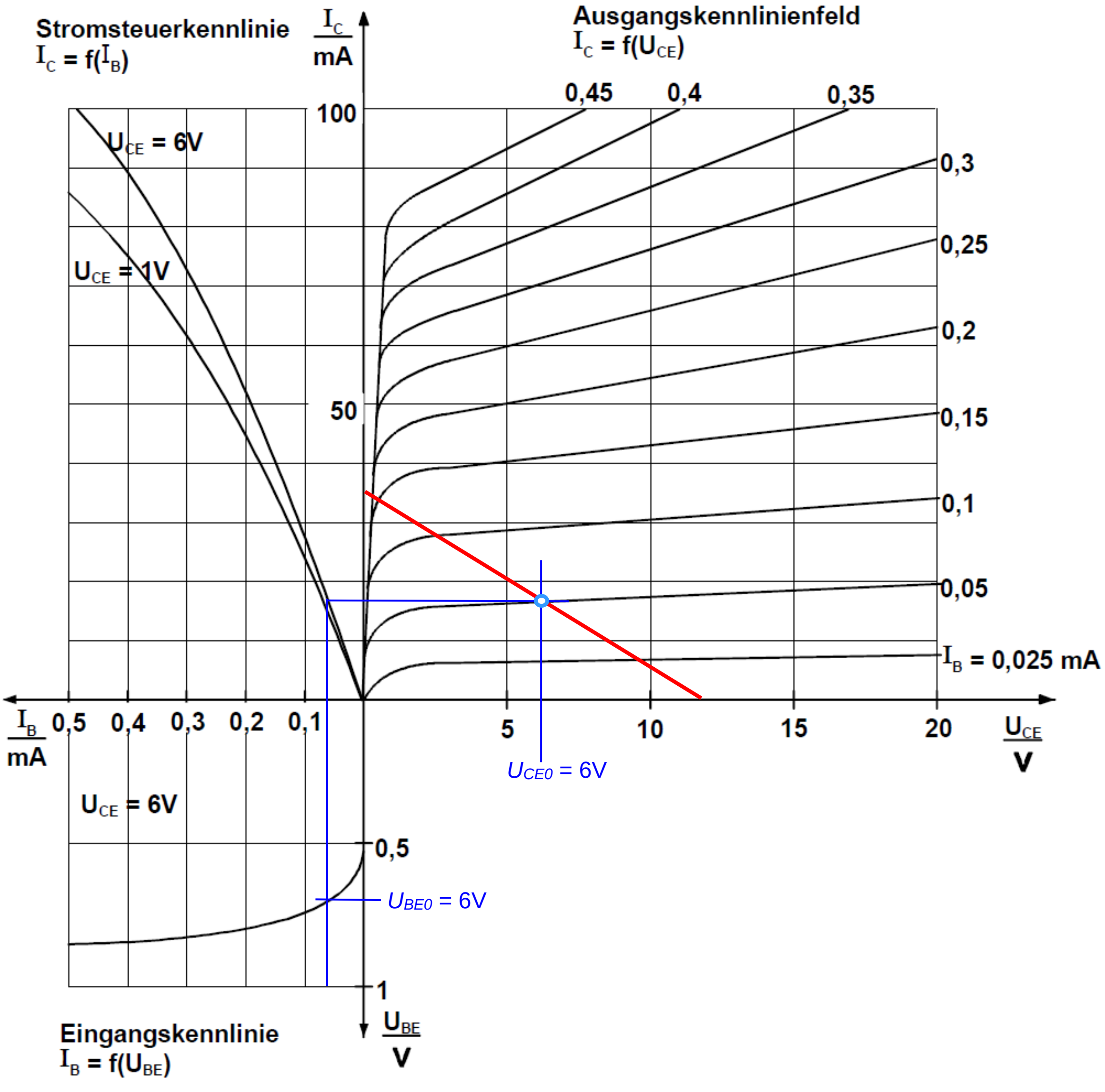


Bild 3.8 Kennlinienfeld des Transistors BC 107

In ***Bild 3.9b*** ist die NF-Ersatzschaltung der Schaltung dargestellt. Die Gleichspannungsquelle (Versorgungsspannung) U_B stellt für Wechselgrößen einen Kurzschluss dar. Deshalb ist der Widerstand RC in der NF-Ersatzschaltung gegen Erde geschaltet und der Widerstand R_B ergibt sich aus der Parallelschaltung von R_{B1} und R_{B2}. Das Bild zeigt außerdem die Umwandlung einer Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle, wie sie für die Maschenstromanalyse gebraucht wird. In ***Bild 3.9c*** sind die Maschenströme in die gesamte Ersatzschaltung eingetragen. Vereinfachend wird angenommen, dass der Leitwert $h_{22} \rightarrow 0$ geht, oder $1/h_{22} \rightarrow \infty$.

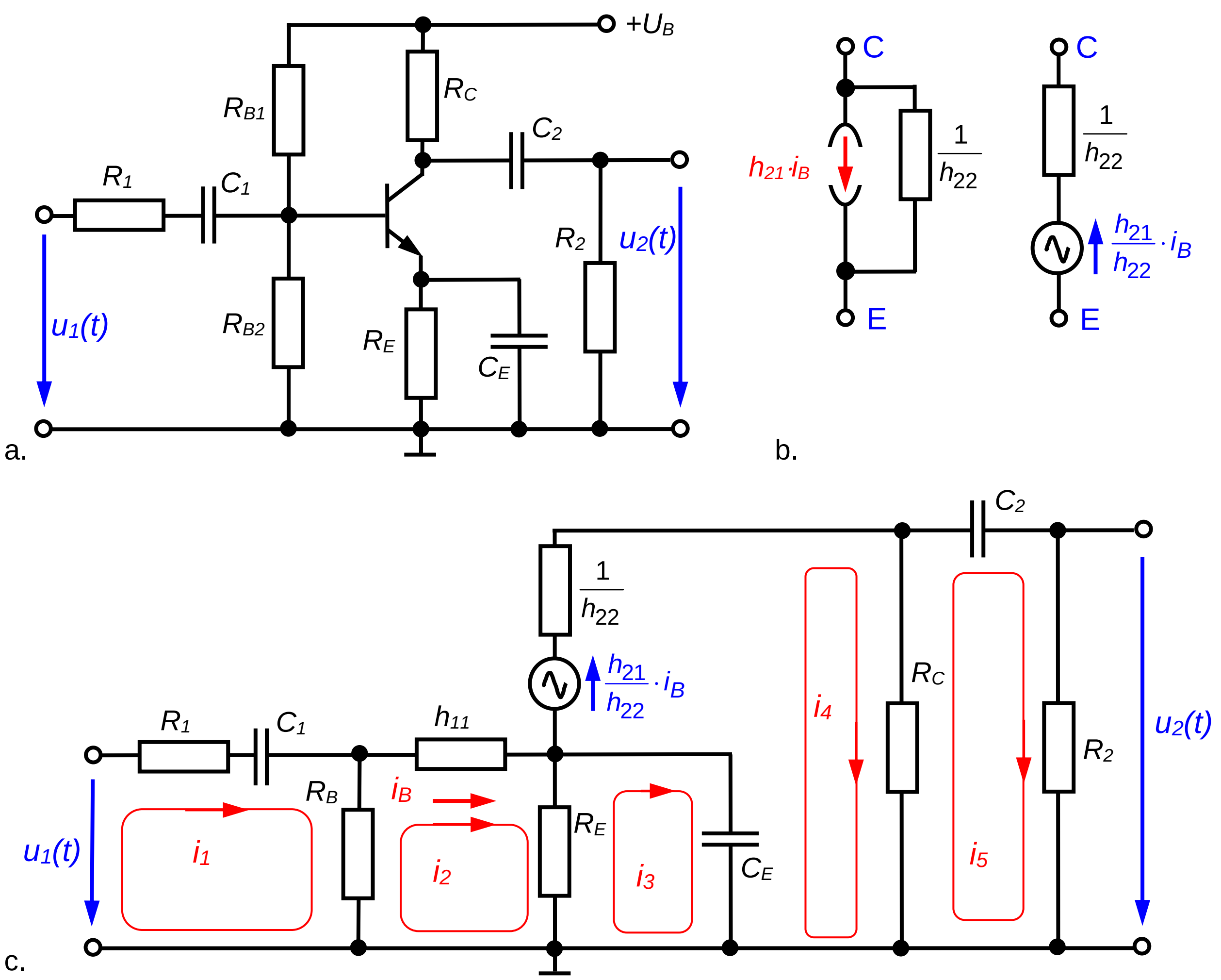


Bild 3.9 Schaltungsberechnung mit dem Verfahren der Maschenstromanalyse

a. Schaltung des Transistorverstärkers in Emitterschaltung

b. NF-Ersatzschaltung für einen Bipolar-Transistor, Umwandlung der Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle

c. NF-Ersatzschaltbild der Verstärkerschaltung

Das Gleichungssystem für die Maschenströme gemäß ***Bild 3.9c*** lautet unter der Voraussetzung, dass sämtliche Energiespeicher zu Beginn der Betrachtung leer, d. h. die Kapazitäten ungeladen sind:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
I_1(p) & I_2(p) & I_3(p) & I_4(p) & I_5(p) & = \\
\hline
R_1+R_B+\frac{1}{pC_1} & -R_B & 0 & 0 & 0 & U_1(p) \\
-R_B & R_B+h_{11}+R_E & -R_E & 0 & 0 & 0 \\
0 & -R_E & R_E+\frac{1}{pC_E} & -\frac{1}{pC_E} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{pC_E} & \frac{1}{h_{22}}+\frac{1}{pC_E}+R_C & -R_C & -\frac{h_{21}}{h_{22}} \cdot I_B(p) \\
0 & 0 & 0 & -R_C & R_C+R_2+\frac{1}{pC_2} & 0
\end{array}
\quad . \qquad (4.51)
$$

Mit $I_B(p) = I_2(p)$ kann der Term $-h_{21}/h_{22}$ auf die andere Seite gebracht werden:

$$\begin{array}{ccccc|c}
I_1(p) & I_2(p) & I_3(p) & I_4(p) & I_5(p) & = \\
\hline
R_1+R_B+\dfrac{1}{pC_1} & -R_B & 0 & 0 & 0 & U_1(p) \\
-R_B & R_B+h_{11}+R_E & -R_E & 0 & 0 & 0 \\
0 & -R_E & R_E+\dfrac{1}{pC_E} & -\dfrac{1}{pC_E} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{h_{21}}{h_{22}} & -\dfrac{1}{pC_E} & \dfrac{1}{h_{22}}+\dfrac{1}{pC_E}+R_C & -R_C & 0 \\
0 & 0 & 0 & -R_C & R_C+R_2+\dfrac{1}{pC_2} & 0
\end{array} \quad . \tag{4.52}$$

Die Ausgangsspannung $U_2(p)$ ergibt sich aus

$$U_2(p) = R_2 \cdot I_5(p) = R_2 \cdot \frac{D_{I_5}(p)}{D(p)} \quad . \tag{4.53}$$

Für die Unterdeterminante des Stromes $I_5(p)$ erhält man

$$D_{I_5}(p) = U_1(p) \cdot \det\begin{Bmatrix} -R_B & R_B+h_{11}+R_E & -R_E & 0 \\ 0 & -R_E & R_E+\dfrac{1}{pC_E} & -\dfrac{1}{pC_E} \\ 0 & \dfrac{h_{21}}{h_{22}} & -\dfrac{1}{pC_E} & \dfrac{1}{h_{22}}+\dfrac{1}{pC_E}+R_C \\ 0 & 0 & 0 & -R_C \end{Bmatrix} = -U_1(p) \cdot \frac{R_B R_C R_E C_E}{pC_E} \frac{h_{21}}{h_{22}} \left[p + \frac{1}{R_E C_E} - \frac{h_{22}}{h_{21}} \frac{1}{C_E} \right] . \tag{4.54}$$

Nach einiger Rechnung erhält man für die Systemdeterminante

$$\begin{aligned} D(p) = & \left[\left(R_1 + \frac{1}{pC_1} \right) (R_B + h_{11} + R_E) + R_B \cdot (h_{11} + R_E) \right] \\ & \cdot \left[\left(R_E + \frac{1}{pC_E} \right) \left\{ \left(R_C + \frac{1}{pC_E} + \frac{1}{h_{22}} \right) \left(R_C + R_2 + \frac{1}{pC_2} \right) - R_C^2 \right\} - \frac{1}{pC_E} \frac{1}{pC_E} \left(R_C + R_2 + \frac{1}{pC_2} \right) \right] \\ + \quad & \left[\left(R_1 + R_B + \frac{1}{pC_1} \right) \cdot R_E \right] \\ & \cdot \left[(-R_E) \left\{ \left(R_C + \frac{1}{pC_E} + \frac{1}{h_{22}} \right) \left(R_C + R_2 + \frac{1}{pC_2} \right) - R_C^2 \right\} + \frac{h_{21}}{h_{22}} \frac{1}{pC_E} \left(R_C + R_2 + \frac{1}{pC_2} \right) \right] \end{aligned} \cdot \tag{4.55}$$

Das gesuchte Übertragungsverhalten $U_2(p)/U_1(p)$ der Verstärkerschaltung kann mit der vereinfachenden Annahme $h_{22} \to 0$ oder $1/h_{22} \to \infty$ durch den folgenden Ausdruck berechnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= -\frac{R_2 \cdot R_B \cdot R_C \cdot h_{21}}{(R_2 + R_C)\left(h_{11} \cdot R_B + R_1 \cdot (h_{11} + R_B)\right)} \cdot \frac{p^2 \cdot \left(p + \dfrac{1}{R_E \cdot C_E} \right)}{\left(p + \dfrac{1}{(R_C + R_2) \cdot C_2} \right) \cdot \left(p^2 + a_1 \cdot p + a_0 \right)} \\ \text{mit} \quad a_1 &= \frac{R_1 (R_B + h_{11} + R_E) + R_B (h_{11} + R_E) + h_{21} \cdot R_E \cdot (R_B + R_1) + R_E \cdot \dfrac{C_E}{C_1} (h_{11} + R_B)}{R_E \cdot C_E \cdot \left(h_{11} \cdot R_B + R_1 \cdot (h_{11} + R_B) \right)} \\ a_0 &= \frac{h_{11} + R_B + R_E \cdot (h_{21} + 1)}{C_1 \cdot R_E \cdot C_E \cdot \left(h_{11} \cdot R_B + R_1 \cdot (h_{11} + R_B) \right)} \end{aligned} \quad . \tag{4.56}$$

Die Verstärkerschaltung enthält die 3 Kapazitäten C_1, C_2 und C_E als unabhängige Energiespeicher, damit entsteht eine Übertragungsfunktion 3. Ordnung in p.

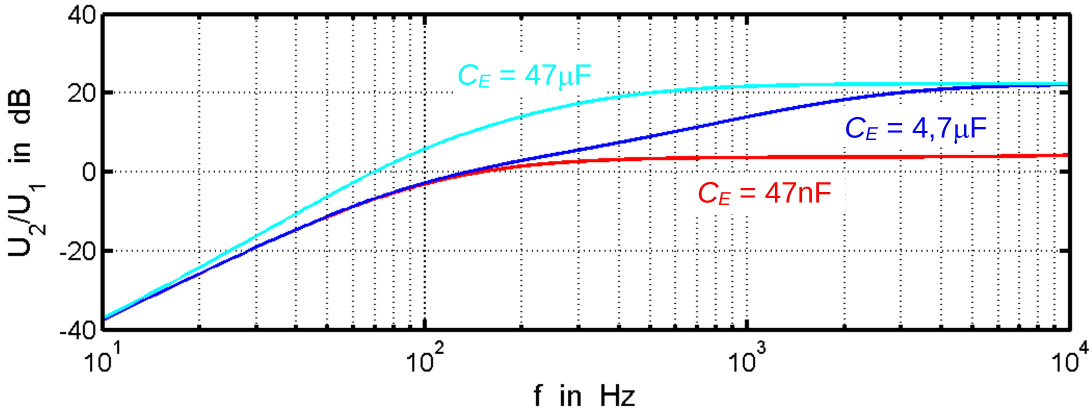


Bild 3.10 Übertragungsfunktion des Transistorverstärkers in Emitterschaltung für die Parameter $R_1 = 0$, $R_2 = 5\text{k}\Omega$, $R_C = 220\Omega$, $R_E = 120\Omega$, $R_{B1} = 18\text{k}\Omega$, $R_{B2} = 5{,}6\text{k}\Omega$, $C_1 = 330\text{nF}$, $C_2 = 330\text{nF}$, $h_{11} = 4\text{k}\Omega$, $h_{21} = 250$

3.2.4.2 Verstärkerschaltung mit einem Transformator

In ***Bild 3.11*****a** ist eine Verstärkerschaltung mit einem Transformator dargestellt, den Widerstand R_2 kann man sich beispielsweise als Lautsprecher vorstellen. ***Bild 3.11*****b** zeigt die zugehörige Ersatzschaltung. Dabei wird der reale Transformator durch einen idealen Transformator mit parallel geschalteter Hauptinduktivität L modelliert.

Zur Analyse der Schaltung müssen zunächst die Gleichungen des idealen Transformators aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{u_{w1}}{u_{w2}} &= \frac{w_1}{w_2} \quad \text{oder} \quad u_{w1} - \frac{w_1}{w_2}\cdot u_{w2} = 0 \\ \frac{i_1}{i_2} &= -\frac{w_2}{w_1} \quad \text{oder} \quad i_1 \cdot w_1 + i_2 \cdot w_2 = 0 \end{aligned} \quad ; \qquad (4.57)$$

In Matrixschreibweise erhält man für das Gleichungssystem der gesuchten Ströme und Spannungen an den Übertragern:

$I_1(p)$	$I_2(p)$	$I_3(p)$	$U_{w1}(p)$	$U_{w2}(p)$	$=$
$R_1 + h_{11}$	0	0	1	0	$U_1(p)$
0	pL	pL	0	1	$L\cdot[i_2(0)+i_3(0)]$
0	pL	$R_2 + \frac{1}{h_{22}} + pL$	0	0	$L\cdot[i_2(0)+i_3(0)] - \frac{h_{21}}{h_{22}}\cdot I_B(p)$
0	0	0	1	$-\frac{w_1}{w_2}$	0
w_1	w_2	0	0	0	0

. (4.58)

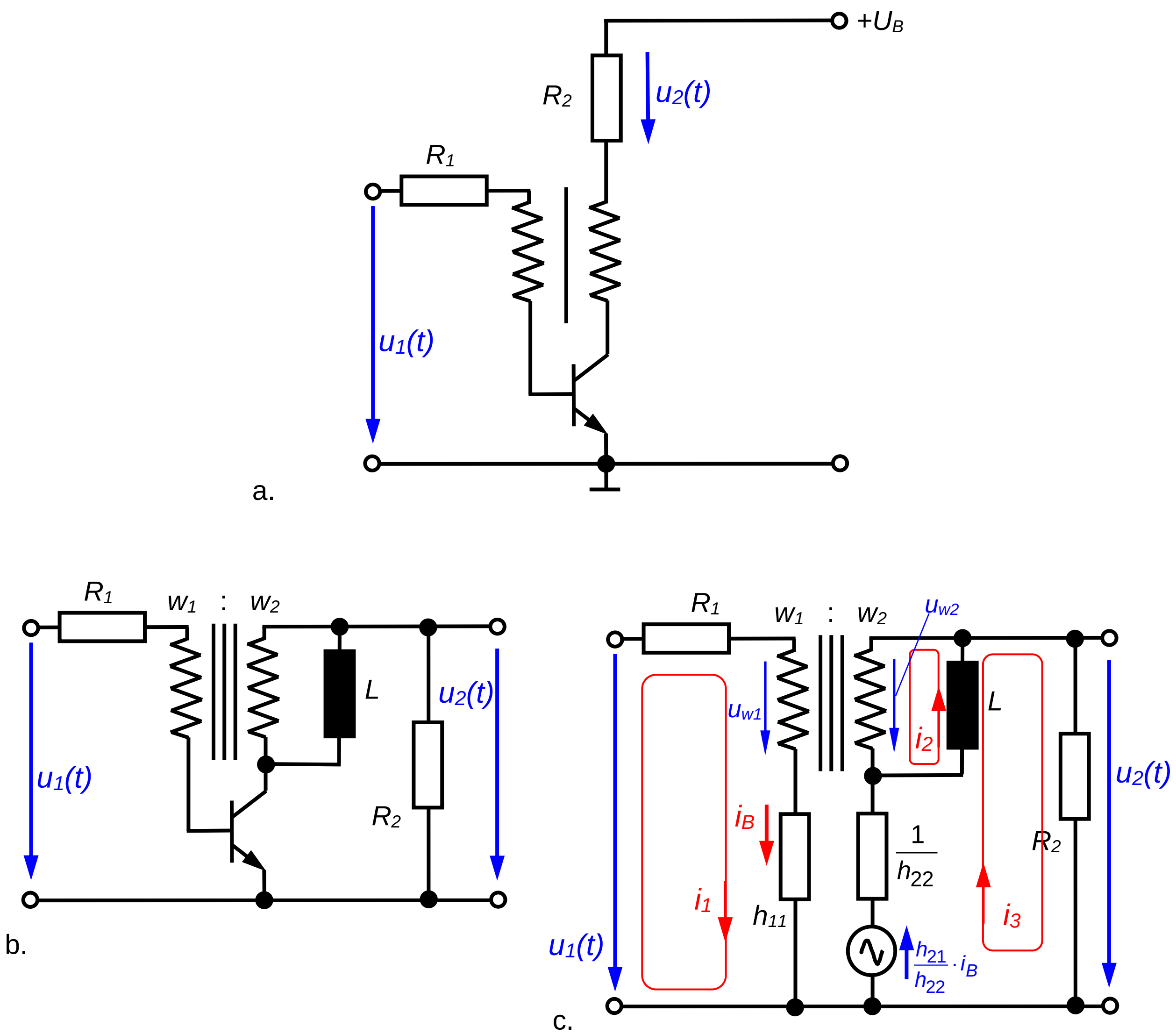


Bild 3.11 Transistorverstärker mit einem Übertrager

a. Schaltbild
b. Schaltbild für Wechselgrößen (die speisenden Gleichspannungsquellen sind bereits weggelassen)
c. NF-Ersatzschaltbild unter Berücksichtigung der NF-Ersatzschaltung für einen Bipolar-Transistor

Mit $I_B(p) = I_1(p)$ kann der Term $-h_{21}/h_{22}$ auf die andere Seite der Gleichung (3. Zeile) gebracht werden. Für den Spezialfall, dass kein Strom in der Induktivität L zu Beginn des betrachteten Vorganges fließt, d. h.

$$i_L(0) = [i_2(0) + i_3(0)] = 0 \quad . \tag{4.59}$$

erhält man:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
I_1(p) & I_2(p) & I_3(p) & U_{w1}(p) & U_{w2}(p) & = \\
\hline
R_1+h_{11} & 0 & 0 & 1 & 0 & U_1(p) \\
0 & pL & pL & 0 & 1 & 0 \\
\dfrac{h_{21}}{h_{22}} & pL & R_2+\dfrac{1}{h_{22}}+pL & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -\dfrac{w_1}{w_2} & 0 \\
w_1 & w_2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\quad . \qquad (4.60)
$$

Für die Unterdeterminante des Stromes $I_3(p)$ folgt daraus

$$
D_{I_3}(p) = U_1(p)\cdot \det\begin{Bmatrix} 0 & pL & 0 & 1 \\ \dfrac{h_{21}}{h_{22}} & pL & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\dfrac{w_1}{w_2} \\ w_1 & w_2 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = U_1(p)\cdot\left[\frac{h_{21}}{h_{22}}\cdot w_2 - pL\cdot w_1\right] \quad . \qquad (4.61)
$$

Die Systemdeterminante berechnet sich zu:

$$
D(p) = -\left[(R_1+h_{11})\left(pL+R_2+\frac{1}{h_{22}}\right)\cdot w_2 + pL\cdot\frac{w_1}{w_2}\left(w_2\cdot\frac{h_{21}}{h_{22}}+w_1\cdot\left(R_2+\frac{1}{h_{22}}\right)\right)\right] . \qquad (4.62)
$$

Für die Laplace-Transformierte $U_2(p)$ der Spannung $u_2(t)$ erhält man aus der Schaltung und mit der Anwendung der Cramer'schen Regel:

$$
U_2(p) = R_2\cdot I_3(p) = R_2\cdot\frac{D_{I_3}(p)}{D(p)} = -R_2\cdot\frac{U_1(p)\cdot\left[\dfrac{h_{21}}{h_{22}}\cdot w_2 - pL\cdot w_1\right]}{(R_1+h_{11})\left(pL+R_2+\dfrac{1}{h_{22}}\right)\cdot w_2 + pL\cdot\dfrac{w_1}{w_2}\left(w_2\cdot\dfrac{h_{21}}{h_{22}}+w_1\cdot\left(R_2+\dfrac{1}{h_{22}}\right)\right)} \ . \qquad (4.63)
$$

Für die gesuchte Übertragungsfunktion erhält man schließlich mit der vereinfachenden Annahme $h_{22}\to 0$ oder $1/h_{22}\to\infty$:

$$
\begin{aligned}
\frac{U_2(p)}{U_1(p)} &= -\frac{R_2\cdot h_{21}}{\ddot{u}\cdot L\cdot(h_{21}+\ddot{u})}\cdot\frac{1}{p+\dfrac{R_1+h_{11}}{\ddot{u}\cdot L\cdot(h_{21}+\ddot{u})}} \\
&= -\frac{R_2}{R_1+h_{11}}\cdot h_{21}\cdot\frac{1}{1+p\dfrac{\ddot{u}\cdot L}{R_1+h_{11}}\cdot(h_{21}+\ddot{u})}
\end{aligned}
\quad . \qquad (4.64)
$$

Die Schaltung besitzt mit der Induktivität L einen Energiespeicher, was auf eine Übertragungsfunktion 1. Ordnung führt. Die Ordnung des Nennerpolynoms ist hier um 1 höher, als die des Zählerpolynoms, das System ist daher stabil.

3.3 Knotenpotentialanalyse

3.3.1 Prinzip der Knotenpotentialanalyse und Knotenadmittanzmatrix

Bei diesem Verfahren sind folgende Schritte notwendig:

- Aus den Impedanzen der Netzelemente zwischen 2 Knoten werden Admittanzen gebildet. Für die Admittanz zwischen den Knoten i und k eines Netzwerkes gilt:

$$Y_{ik}(p) = \frac{1}{Z_{ik}(p)} \tag{4.65}$$

- An sämtlichen Knoten werden die ab- und zufließenden Ströme $\underline{I}_j$ eingetragen. Hinsichtlich der Vorzeichen für ab- und zufließende Ströme ist eine Kovention notwendig. Im Folgenden sollen abfließende Ströme mit positivem Vorzeichen (+), zufließende (speisende) Ströme mit negativem Vorzeichen (-) angesetzt werden.

Die Neutrale ist der Bezugsknoten 0 mit dem Potential 0. Die Spannungen $U_j(p)$ sind die Potentialdifferenzen zwischen den Knotenpunkten j und dem Bezugsknoten 0. Die inneren Ströme im Netzwerk lassen sich durch die Spannungen $U_j(p)$ und $U_k(p)$ und die Admittanzen $Y_{jk}(p)$ ausdrücken. Sie treten im Gleichungssystem nicht auf.

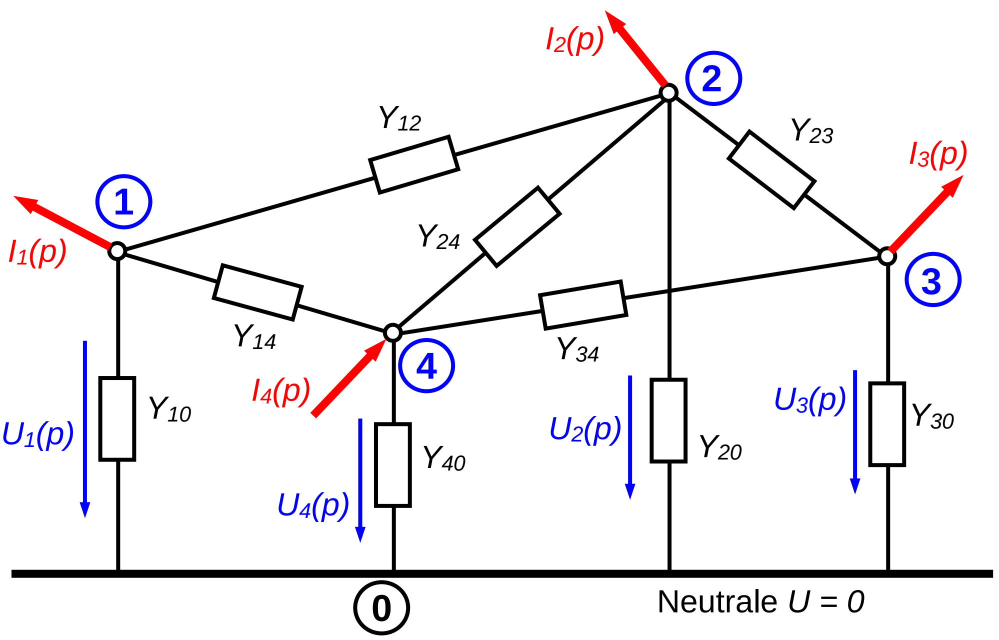


Bild 3.12 Netzwerk zur Demonstration des Kontenpotentialverfahrens

Für den Knoten 4 des in ***Bild 3.12*** dargestellten Beispielnetzes gilt:

$$I_4(p) = U_4(p)\cdot Y_{40} - [U_3(p) - U_4(p)]\cdot Y_{34} - [U_2(p) - U_4(p)]\cdot Y_{24} - [U_1(p) - U_4(p)]\cdot Y_{14}$$

oder . (4.66)

$$-I_4(p) = U_4(p)\cdot(-Y_{40} - Y_{34} - Y_{24} - Y_{14}) + U_3(p)\cdot Y_{34} + U_2(p)\cdot Y_{24} + U_1(p)\cdot Y_{14}$$

Eine derartige Gleichung läßt sich für jeden der Knotenpunkte aufstellen, damit ist das Netzwerk vollständig beschrieben:

$$\begin{array}{cccc|c}
U_1(p) & U_2(p) & U_3(p) & U_4(p) & = \\
\hline
-\left(Y_{10}+Y_{12}+Y_{14}\right) & +Y_{12} & 0 & +Y_{14} & I_1(p) \\
+Y_{12} & -\left(Y_{20}+Y_{12}+Y_{23}+Y_{24}\right) & +Y_{23} & +Y_{24} & I_2(p) \\
0 & +Y_{23} & -\left(Y_{30}+Y_{23}+Y_{34}\right) & +Y_{34} & I_3(p) \\
+Y_{14} & +Y_{24} & +Y_{34} & -\left(Y_{40}+Y_{14}+Y_{24}+Y_{34}\right) & -I_4(p)
\end{array} \tag{4.67}$$

In Matrizenform geschrieben ergibt sich

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1(p) \\ U_2(p) \\ \dots \\ U_n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1(p) \\ I_2(p) \\ \dots \\ I_n(p) \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{Y}(p)\cdot\boldsymbol{U}(p)=\boldsymbol{I}(p) \tag{4.68}$$

Y(p) wird als *Knoten-Admittanz-Matrix* (**KAM**) bezeichnet. ***U(p)*** bezeichnet die Knotenspannungen und ***I(p)*** sind die Ströme aus den Knoten (Vorzeichenkonvention!).

3.3.2 Erstellen der Knotenadmittanzmatrix

Für die Knotenadmittanzmatrix gibt es ein allgemeines Bildungsgesetz. Bei praktischen Berechnungen stellt man nicht die Gleichungen für die einzelnen Knoten auf, sondern man verwendet ein formales Verfahren zur Erstellung der KAM und damit der Gleichung (4.68).

<u>Bildungsgesetz der KAM</u>

- Außenelemente G_{ik} mit i ≠ k: Koppeladmittanzen vom Knoten i zum Knoten k.
- Diagonalelemente G_{kk} : negative Summe aller Admittanzen, die mit dem Knoten k verbunden sind. Dies ist die Summe der Koppeladmittanzen zu den anderen Knoten plus die Admittanz des Knotens k gegen Erde:

$$G_{kk} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(Y_{kj} + Y_{k0}\right) \tag{4.69}$$

Die Knotenpotentialanalyse hat zwei entscheidende Vorteile gegenüber der Maschenstromanalyse:

- Während es bei der Maschenstromanalyse mehrere Möglichkeiten geben kann, ein vollständiges System von Maschen zu definieren, ist die Vorgehensweise bei der Knotenpotentialanalyse sehr eindeutig. Die Knotenpotentialanalyse eignet sich deshalb hervorragend für eine Automatisierung der Berechnung.
- Durch die Knotenpotentialanalyse lassen sich Spannungsübertragungsfunktionen $U_2(p)/U_1(p) = F(p)$ auf einfache Weise berechnen.

3.3.3 Berechnung der Knotenpotentiale

Auch hier kann die ***Cramer'sche Regel*** vorteilhaft zur Berechnung der Spannungen eingesetzt werden:

$$U_\nu(p) = \frac{D_\nu(p)}{D(p)} \quad \text{mit} \quad \nu = 1,2,\ldots,n \quad . \tag{4.70}$$

Dabei ist die Systemdeterminante

$$D(p) = \det \boldsymbol{Y}(p) = \det \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{Bmatrix} \quad ; \tag{4.71}$$

die Unterdeterminanten $D_\nu(p)$ erhält man aus der Determinante der Matrix $\boldsymbol{Y}(p)$ dadurch, dass man die ν-te Spalte durch den Vektor $\boldsymbol{I}(p)$ ersetzt

$$D_\nu(p) = \det \begin{Bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & I_1(p) & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & I_2(p) & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & \underbrace{I_n(p)} & \cdots & G_{nn} \end{Bmatrix} \quad . \tag{4.72}$$

ν-te Spalte der Matrix ***Y****(p)* wird durch den Vektor ***I****(p)* ersetzt

Oft ist das Spannungsübersetzungsverhältnis $U_2(p)/U_1(p)$ der Spannungen von Ausgang und Eingang einer Schaltung von Interesse. Zu dessen Berechnung ist die Knotenpotentialanalyse besonders geeignet. So kann das Verhältnis zweier Spannungen ohne Berechnung der Systemdeterminante nur durch Berechnung der Unterdeterminanten bestimmt werden:

$$\frac{U_m(p)}{U_n(p)} = \frac{D_m(p)}{D(p)} \cdot \frac{D(p)}{D_n(p)} = \frac{D_m(p)}{D_n(p)} \quad . \tag{4.73}$$

Zur Berechnung der Spannungsübertragung einer Schaltung kann am Eingang ein zufließender Strom $I_1(p)$ angesetzt werden. ***Bild 3.13*** zeigt dies an einem Beipiel einer RLC-Schaltung. Man kann rein formal sofort das Gleichungssystem angeben:

$$\begin{array}{cc|c} U_1(p) & U_2(p) & = \\ \hline -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{pL}\right) & +\frac{1}{pL} & -I_1(p) \\ +\frac{1}{pL} & -\left(pC + \frac{1}{pL}\right) & 0 \end{array} \quad ; \tag{4.74}$$

Für die Spannungen $U_1(p)$ und $U_2(p)$ und deren Quotienten, d. h. die Systemübertragungsfunktion folgt:

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{I_1(p) \cdot \frac{1}{pL}}{D(p)} \cdot \frac{D(p)}{I_1(p) \cdot \left(pC + \frac{1}{pL}\right)} = \frac{1}{pL} \cdot \frac{1}{pC + \frac{1}{pL}} = \frac{1}{1 + p^2 LC} \quad . \tag{4.75}$$

Auf dieselbe Beziehung kommt man auch durch Ansatz eines LC-Spannungsteilers

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)}=\frac{\dfrac{1}{pC}}{pL+\dfrac{1}{pC}}=\frac{1}{1+p^2LC} \quad . \tag{4.76}$$

Der ohmsche Widerstand *R* spielt für das Spannungsverhältnis $U_2(p)/U_1(p)$ keine Rolle, da er parallel zur Spannungsquelle $U_1(p)$ geschaltet ist und den Ausgang nicht beeinflusst.

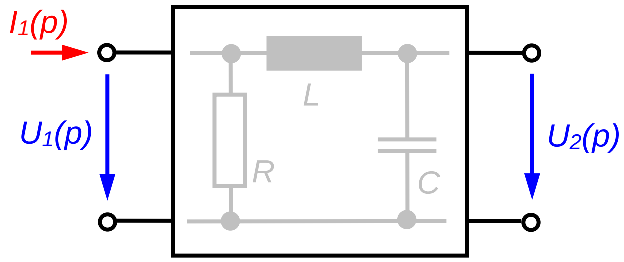


Bild 3.13 RLC-π-Schaltung zur Demonstration der Berechnung der Systemübertragungsfunktion $U_2(p)/U_1(p)$ durch die Knotenpotentialanalyse

3.3.4 Beispiele

3.3.4.1 Transistorverstärker in Emitterschaltung

Zur Veranschaulichung des Knotenpotenialverfahrens wird das Beispiel gemäß ***Bild 3.9a*** noch einmal aufgegriffen. Die Stromquelle kann hier belassen werden, der Leitwert h_{22} wird hier bereits im Ansatz weggelassen ($h_{22} = 0$). Damit kommt man zu der in ***Bild 3.14*** gezeigten Ersatzschaltung des Bipolar-Transistorverstärkers in Emitterschaltung. Die Stromquelle wird dabei als ein in Knoten 3 zufließender Strom und aus dem Knoten 4 abfließender Strom angesehen. Zwischen den Elementen R_1 und C_1 könnte ein weiterer Knoten eingeführt werden, verzichtet man darauf, so müssen beide Elemente als ein Leitwert beschrieben werden:

$$Y_{12}=\frac{pC_1}{1+pR_1C_1} \quad . \tag{4.77}$$

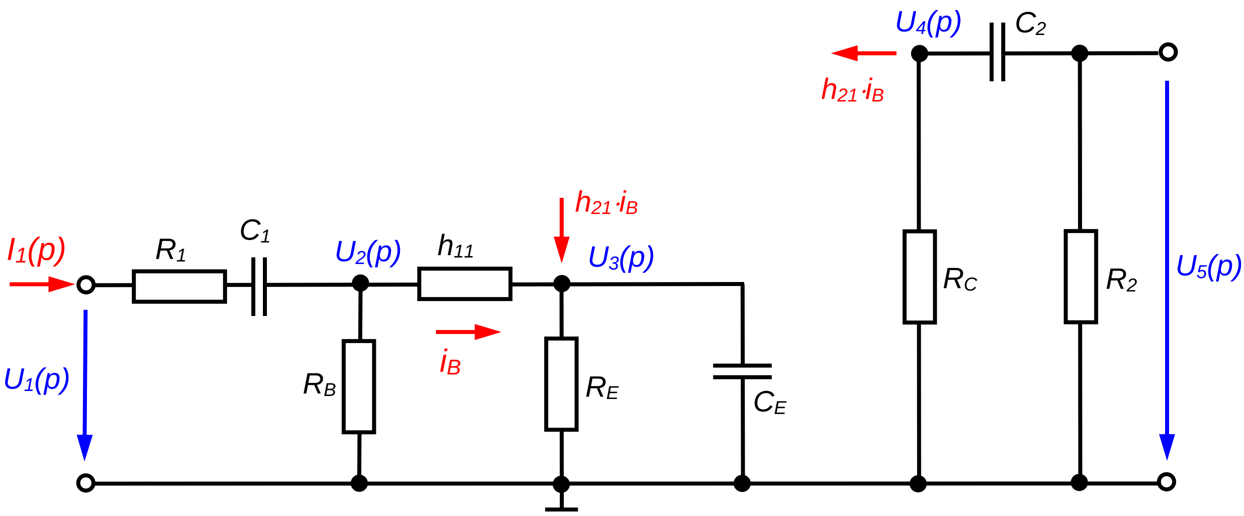


Bild 3.14 Schaltungsberechnung mit dem Verfahren der Knotenpotentialanalyse, Ersatzschaltung des Transistorverstärkers in Emitterschaltung

Durch Anwendung des Bildungsgesetzes der KAM erhält man direkt

$U_1(p)$	$U_2(p)$	$U_3(p)$	$U_4(p)$	$U_5(p)$	=
$-\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}$	$\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}$	0	0	0	$-I_1(p)$
$\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}$	$-\left(\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{h_{11}}\right)$	$\frac{1}{h_{11}}$	0	0	0
0	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\left(\frac{1}{h_{11}}+pC_E+\frac{1}{R_E}\right)$	0	0	$-h_{21}\cdot I_B(p)$
0	0	0	$-\left(pC_2+\frac{1}{R_C}\right)$	pC_2	$+h_{21}\cdot I_B(p)$
0	0	0	pC_2	$-\left(pC_2+\frac{1}{R_2}\right)$	0

. (4.78)

Der Strom $I_B(p)$ lässt sich aus den Knotenspannungen durch

$$I_B(p)=\frac{1}{h_{11}}\cdot\left[U_2(p)-U_3(p)\right] \quad . \tag{4.79}$$

bestimmen. Dadurch kann das obige Gleichungssystem modifiziert werden:

$U_1(p)$	$U_2(p)$	$U_3(p)$	$U_4(p)$	$U_5(p)$	=
$-\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}$	$\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}$	0	0	0	$-I_1(p)$
$\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}$	$-\left(\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{h_{11}}\right)$	$\frac{1}{h_{11}}$	0	0	0
0	$\frac{h_{21}+1}{h_{11}}$	$-\left(\frac{h_{21}+1}{h_{11}}+pC_E+\frac{1}{R_E}\right)$	0	0	0
0	$-\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$-\left(pC_2+\frac{1}{R_C}\right)$	pC_2	0
0	0	0	pC_2	$-\left(pC_2+\frac{1}{R_2}\right)$	0

. (4.80)

Der Rechenaufwand fällt hier deutlich geringer aus, weil 2 mal eine 4x4-Determinante zu berechnen ist, anstatt eine 4x4- und eine 5x5-Determinante wie bei der Maschenstromanalyse.

Für die Unterdeterminante der Spannung $U_5(p)$ erhält man:

$$D_{U_5}(p)=-I_1(p)\cdot\det\begin{Bmatrix} \frac{pC_1}{1+pR_1C_1} & -\left(\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{h_{11}}\right) & \frac{1}{h_{11}} & 0 \\ 0 & \frac{h_{21}+1}{h_{11}} & -\left(\frac{h_{21}+1}{h_{11}}+pC_E+\frac{1}{R_E}\right) & 0 \\ 0 & -\frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{h_{21}}{h_{11}} & -\left(pC_2+\frac{1}{R_C}\right) \\ 0 & 0 & 0 & pC_2 \end{Bmatrix} \quad . \tag{4.81}$$

$$=I_1(p)\cdot\frac{pC_1\cdot pC_2}{1+pR_1C_1}\cdot\frac{h_{21}}{h_{11}}\left[pC_E+\frac{1}{R_E}\right]$$

$$D_{U_1}(p) = -I_1(p)\cdot \det\left\{\begin{array}{cccc} -\left(\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{h_{11}}\right) & \frac{1}{h_{11}} & 0 & 0 \\ \frac{h_{21}+1}{h_{11}} & -\left(\frac{h_{21}+1}{h_{11}}+pC_E+\frac{1}{R_E}\right) & 0 & 0 \\ -\frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{h_{21}}{h_{11}} & -\left(pC_2+\frac{1}{R_C}\right) & pC_2 \\ 0 & 0 & pC_2 & -\left(pC_2+\frac{1}{R_2}\right) \end{array}\right\} \quad . \tag{4.82}$$

$$= -I_1(p)\cdot\left[pC_2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_C}\right)+\frac{1}{R_2\cdot R_C}\right]\cdot\left[\left(pC_E+\frac{1}{R_E}\right)\left(\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{h_{11}}\right)+\frac{h_{21}+1}{h_{11}}\cdot\left(\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}+\frac{1}{R_B}\right)\right]$$

Das daraus folgende Spannungs-Übertragungsverhältnis

$$\frac{U_5(p)}{U_1(p)} = \frac{D_{U_5}(p)}{D_{U_1}(p)}$$

$$= -\frac{\frac{pC_1\cdot pC_2}{1+pR_1C_1}\cdot\frac{h_{21}}{h_{11}}\left[\frac{1}{R_E}+pC_E\right]}{\left[pC_2\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_C}\right)+\frac{1}{R_2\cdot R_C}\right]\cdot\left[\left(pC_E+\frac{1}{R_E}\right)\left(\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}+\frac{1}{R_B}+\frac{1}{h_{11}}\right)+\frac{h_{21}+1}{h_{11}}\cdot\left(\frac{pC_1}{1+pR_1C_1}+\frac{1}{R_B}\right)\right]} \tag{4.83}$$

führt bei weiterer Umformung genau auf die bereits bekannte Beziehung gemäß Gleichung (4.56).

3.3.4.2 Verstärkerschaltung mit einem idealen Transformator

Als zweites Beispiel soll auch hier wieder der Transistorverstärker mit einem idealen Übertrager aufgegriffen werden. Der ideale Übertrager wird aus der Schaltung herausgelöst und durch seine Spannungen und Ströme ersetzt. Die Stromquelle des Transistors fließt aus dem Knoten 4 heraus und in die Masse hinein.

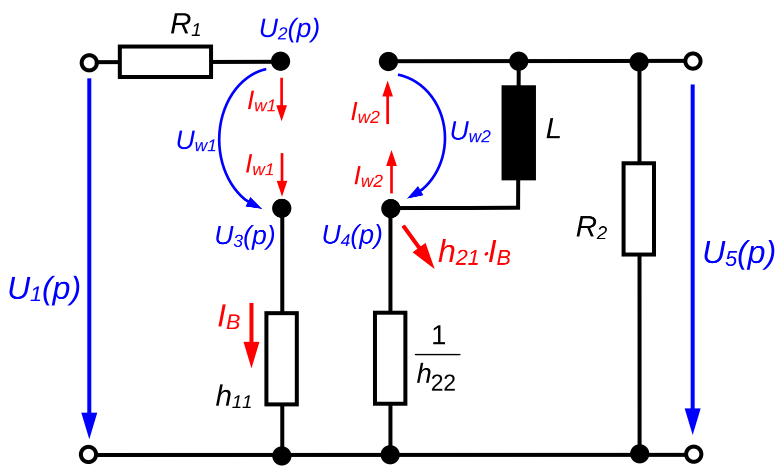


Bild 3.15 Schaltungsberechnung mit dem Verfahren der Knotenpotentialanalyse, Ersatzschaltung des Transistorverstärkers in Emitterschaltung

Durch Anwendung des Bildungsgesetzes der KAM erhält man direkt

$$
\begin{array}{ccccc|c}
U_1(p) & U_2(p) & U_3(p) & U_4(p) & U_5(p) & = \\
\hline
-\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & -I_1(p) \\
\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & +I_{w1} \\
0 & 0 & -\frac{1}{h_{11}} & 0 & 0 & -I_{w1} \\
0 & 0 & 0 & -\left(h_{22}+\frac{1}{pL}\right) & \frac{1}{pL} & +h_{21}\cdot I_B+I_{w2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{pL} & -\left(\frac{1}{pL}+\frac{1}{R_2}\right) & -I_{w2}
\end{array}
\quad . \tag{4.84}
$$

Zur weiteren Analyse der Schaltung müssen die Gleichungen des idealen Transformators aufgestellt werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{U_{w1}}{U_{w2}} &= \frac{w_1}{w_2} \quad \text{oder} \quad U_{w1}-\frac{w_1}{w_2}\cdot U_{w2}=0 \\
\frac{I_{w1}}{I_{w2}} &= \frac{w_2}{w_1} \quad \text{oder} \quad I_{w1}-I_{w2}\cdot\frac{w_2}{w_1}=0
\end{aligned}
\quad ; \tag{4.85}
$$

Die Spannungen U_{w1} und U_{w2} lassen sich durch die Knotenspannungen ausdrücken. Der Strom I_{w1} entspricht dem Strom I_B, außerdem lässt sich auch der Strom I_{w1} auf einfache Weise durch die Knotenspannungen ausdrücken. Man erhält:

$$
\begin{aligned}
&U_2(p)-U_3(p)+\frac{w_1}{w_2}\cdot U_4(p)-\frac{w_1}{w_2}\cdot U_5(p)=0 \\
&I_{w1}(p)=\frac{1}{h_{11}}\cdot U_3(p) \qquad I_{w2}(p)=\frac{w_1}{w_2}\cdot\frac{1}{h_{11}}\cdot U_3(p) \quad ; \\
&I_B(p)=I_{w1}(p)=\frac{1}{h_{11}}\cdot U_3(p)
\end{aligned}
\tag{4.86}
$$

Diese Gleichungen lassen sich in das Gleichungssystem einarbeiten und man erhält:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
U_1(p) & U_2(p) & U_3(p) & U_4(p) & U_5(p) & = \\
\hline
-\frac{1}{R_1} & \frac{1}{R_1} & 0 & 0 & 0 & -I_1(p) \\
\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{h_{11}} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1 & ü & -ü & 0 \\
0 & 0 & -\left(\frac{h_{22}+ü}{h_{11}}\right) & -\left(h_{22}+\frac{1}{pL}\right) & \frac{1}{pL} & 0 \\
0 & 0 & \frac{ü}{h_{11}} & \frac{1}{pL} & -\left(\frac{1}{pL}+\frac{1}{R_2}\right) & 0
\end{array}
\quad . \tag{4.87}
$$

Für die Unterdeterminanten der Spannungen $U_1(p)$ und $U_5(p)$ erhält man:

$$D_{U_1}(p) = -I_1(p) \cdot \det \begin{Bmatrix} -\dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{1}{h_{11}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & ü & 0 \\ 0 & -\left(\dfrac{h_{22}+ü}{h_{11}}\right) & -\left(h_{22}+\dfrac{1}{pL}\right) & \dfrac{1}{pL} \\ 0 & \dfrac{ü}{h_{11}} & \dfrac{1}{pL} & -\left(\dfrac{1}{pL}+\dfrac{1}{R_2}\right) \end{Bmatrix} \tag{4.88}$$

$$= I_1(p) \cdot \left\{ \left(-\frac{1}{h_{11}} - \frac{1}{R_1} \right) \left[\frac{h_{22}}{R_2} + \frac{h_{22}}{pL} + \frac{1}{pLR_2} \right] - \frac{1}{h_{11} \cdot R_1} \left[\frac{ü}{R_2}(h_{21}+ü) + h_{22} \cdot ü^2 \right] \right\}$$

und

$$D_{U_1}(p) = -I_1(p) \cdot \det \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{R_1} & -\dfrac{1}{h_{11}} & -\dfrac{1}{h_{11}} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & ü \\ 0 & 0 & -\left(\dfrac{h_{22}+ü}{h_{11}}\right) & -\left(h_{22}+\dfrac{1}{pL}\right) \\ 0 & 0 & \dfrac{ü}{h_{11}} & \dfrac{1}{pL} \end{Bmatrix} . \tag{4.89}$$

$$= -I_1(p) \cdot \frac{1}{R_1} \cdot \left[-\left(\frac{h_{22}+ü}{h_{11}} \right) \cdot \frac{1}{pL} + \left(h_{22} + \frac{1}{pL} \right) \cdot \frac{ü}{h_{11}} \right]$$

Das daraus folgende Spannungs-Übertragungsverhältnis

$$\frac{U_5(p)}{U_1(p)} = \frac{D_{U_5}(p)}{D_{U_1}(p)} = -\frac{\dfrac{1}{R_1} \cdot \left[-\left(\dfrac{h_{22}+ü}{h_{11}} \right) \cdot \dfrac{1}{pL} + \left(h_{22} + \dfrac{1}{pL} \right) \cdot \dfrac{ü}{h_{11}} \right]}{\left(-\dfrac{1}{h_{11}} - \dfrac{1}{R_1} \right) \left[\dfrac{h_{22}}{R_2} + \dfrac{h_{22}}{pL} + \dfrac{1}{pLR_2} \right] - \dfrac{1}{h_{11} \cdot R_1} \left[\dfrac{ü}{R_2}(h_{21}+ü) + h_{22} \cdot ü^2 \right]} \tag{4.90}$$

führt bei weiterer Umformung genau auf die bereits bekannte Beziehung gemäß Gleichung (4.63).

3.4 Überlagerungssatz (Hermann von Helmholtz, 1821 - 1894)

Bei linearen und zeitinvarianten Netzwerken gilt der Überlagerungssatz:

Die Wirkung aller Ursachen auf ein System ergibt sich als Summe der Wirkungen der einzelnen Ursachen.

Konkret bedeutet dies, dass die Spannungen und Ströme in einem Netzwerk mit mehreren Strom- und Spannungsquellen durch Überlagerung (Addition) der Wirkungen der einzelnen Strom- und Spannungsquellen berechnet werden können.

Betrachtet man die Wirkung einer Quelle (Spannungs- oder Stromquelle), so müssen die anderen Quellen unwirksam gemacht werden. Dazu werden die anderen Spannungsquellen kurzgeschlossen, Stromquellen werden aufgetrennt.

Das folgende in ***Bild 3.16*a** dargestellte Beispiel verdeutlicht die Vorgehensweise. ***Bild 3.16*b** zeigt die einzelnen Teilschaltungen, nachdem alle Quelle bis auf eine einzige unwirksam gemacht wurden.

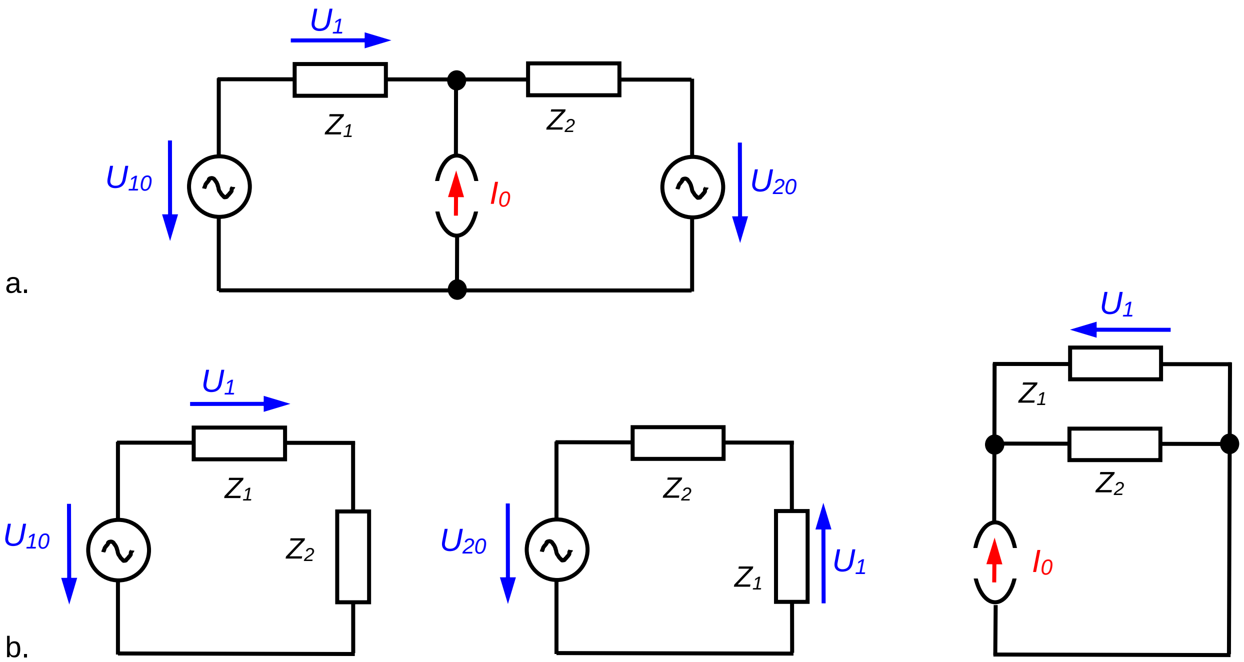


Bild 3.16 Zerlegung einer Schaltung mit 3 Quellen in 3 einzelne Schaltungen zur Berechnung der einzelnen Wirkungen auf die jeweilige Anregung
a. Schaltung mit 2 Spannungsquellen und einer Stromquelle
b. Einzelschaltungen zur Berechnung der Wirkungen der einzelnen Anregungen durch Unwirksam-machen der jeweils anderen Quellen

Im Einzenen erhält man:

- Wirkung der Spannung $U_{10}(p)$

$$U_1(p) = U_{10}(p) \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad . \tag{4.91}$$

- Wirkung der Spannung $U_{20}(p)$

$$U_1(p) = -U_{20}(p) \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad . \tag{4.92}$$

- Wirkung des Stromes $I_0(p)$

$$U_1(p) = -I_0(p) \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad . \tag{4.93}$$

Das Gesamtergebnis ergibt sich aus der additiven Überlagerung aller drei Teilergebnisse:

$$U_1(p) = U_{10} \cdot \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} - U_{20} \cdot \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} - I_0 \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1+Z_2} = \left[U_{10}(p) - U_{20}(p) - I_0(p) \cdot Z_2\right] \cdot \frac{Z_1}{Z_1+Z_2} \quad . \tag{4.94}$$

In dem Beispiel wurden beliebige Impedanzen *Z(p)* betrachtet. Dabei wurde angenommen, dass eventuelle Energiespeicher (Induktivitäten oder Kapazitäten) zu Beginn der Betrachtung ungeladen sind.

Der Überlagerungssatz kann bei zeitlich beliebig variierenden Quellen direkt angewandt werden, wenn die Energiespeicher zu Beginn der Betrachtung entladen sind (Induktivitäten stromlos und Kapazitäten ladungslos).

Falls dies nicht der Fall ist, so muss eine Kapazität *C* mit der Anfangsspannung U_{C0} wegen

$$U_C(p)=\frac{1}{pC}\cdot I_C(p)+\frac{U_{C0}}{p} \qquad \Leftrightarrow \qquad I_C(p)=C\cdot\left[pU_C(p)-U_{C0}\right] \quad . \tag{4.95}$$

durch eine Reihenschaltung aus einer ungeladenen Kapazität *C* und einer zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschalteten Gleichspannungsquelle $s(t)\cdot U_{C0}$ ersetzt werden. Ebenso muss eine Induktivität *L*, in der zu Beginn der Betrachtung bei $t = 0$ ein Strom I_{L0} fließt, wegen

$$I_L(p)=\frac{1}{pL}\cdot U_L(p)+\frac{I_{L0}}{p} \qquad \Leftrightarrow \qquad U_L(p)=L\cdot\left[pI_L(p)-I_{L0}\right] \quad . \tag{4.96}$$

durch eine Parallelschaltung aus einer stromlosen Induktivität *L* und einer zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschalteten Gleichstromquelle $s(t)\cdot I_{L0}$ ersetzt werden.

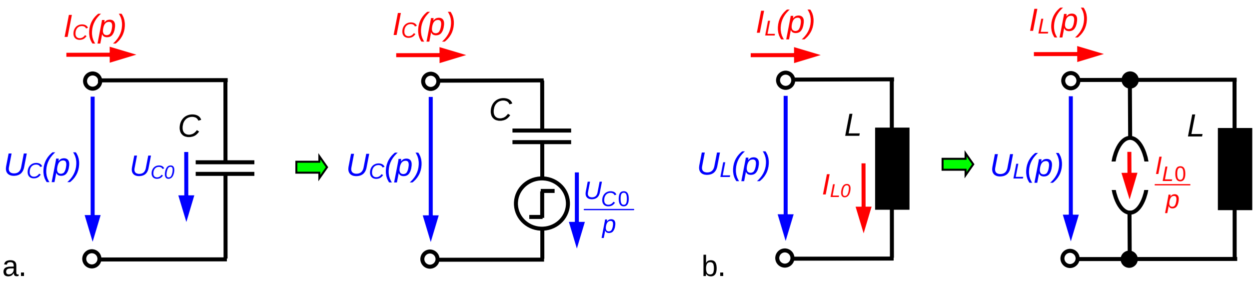


Bild 3.17 Umwandlung von geladenen Energiespeichern zur Anwendung des Überlagerungssatzes
a. Umwandlung einer Kapazität mit Anfangsladung in eine ungeladene Kapazität in Serie zu einer eingeschalteten Gleichspannungsquelle
b. Umwandlung einer Induktivität mit Anfangsstrom in eine stromlose Induktivität parallel zu einer eingeschalteten Gleichstromquelle

3.5 Sätze von den Ersatzquellen

Die Ersatzquellensätze gelten unter der Voraussetzung des stationären Wechselstrombetriebes sowie für Gleichstromkreise.

3.5.1 Ersatzspannungsquelle (Théveninsches Theorem)

Bild 3.18a zeigt einen Zweipol, der in seinem Inneren aus den Elementen R, L, C und idealen Transformatoren (ü) sowie gesteuerten Quellen aufgebaut ist. Diese gesteuerten Quellen sind allerdings nur von einer elektrischen Größe im Netzwerk abhängig. Der Zweipol kann außerdem eine Anzahl *N* unabhängiger harmonischer Strom- und/oder Spannungsquellen $\underline{X}_k$ enthalten.

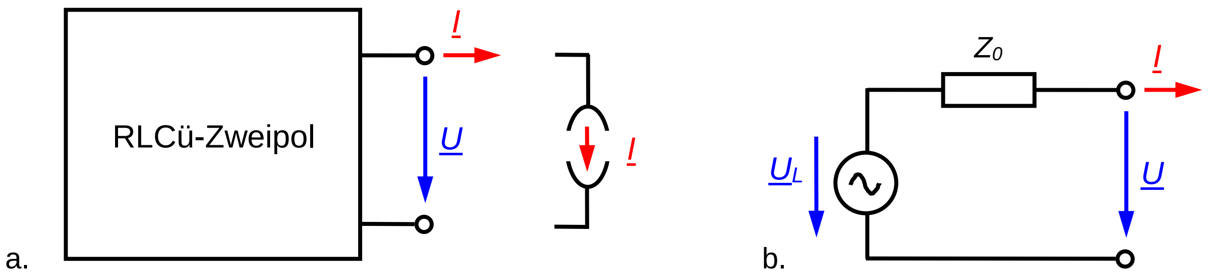


Bild 3.18 Prinzip der Ersatzspannungsquelle
a. RLCü-Zweipol
b. Ersatzschaltbild aus Innenimpedanz Z_0 und Leerlaufspannung $\underline{U}_L$

Gesucht wird ein Zusammenhang zwischen der Spannung $\underline{U}$ und dem Strom $\underline{I}$ an dem Klemmen des Zweipols.

Zunächst wird eine Stromquelle zur Erzeugung des Klemmenstromes $\underline{I}$ eingeführt. Gemäß dem Überlagerungssatz ergibt sich die Klemmenspannung $\underline{U}$ dann aufgrund der Wirkungen der Einzelursachen:

$$\underline{U} = K_1 \cdot \underline{X}_1 + K_2 \cdot \underline{X}_2 + K_3 \cdot \underline{X}_3 + \ldots + K_N \cdot \underline{X}_N + \left(-\underline{Z}_0\right) \cdot \underline{I} \quad . \tag{4.97}$$

1. Sonderfall: Leerlauf mit $\underline{I} = 0$.
Man erhält für die so genannte Leerlaufspannung:

$$\underline{U}_L = K_1 \cdot \underline{X}_1 + K_2 \cdot \underline{X}_2 + K_3 \cdot \underline{X}_3 + \ldots + K_N \cdot \underline{X}_N \quad . \tag{4.98}$$

2. Sonderfall: Kurzschluss mit $\underline{U} = 0$.
Man daraus einen Zusammenhang zwischen der Leerlaufspannung $\underline{U}_L$ und dem Kurzschlussstrom $\underline{I}_k$, der genau dem Faktor Z_0 entspricht:

$$\underline{U} = \underbrace{K_1 \cdot \underline{X}_1 + K_2 \cdot \underline{X}_2 + K_3 \cdot \underline{X}_3 + \ldots + K_N \cdot \underline{X}_N}_{\underline{U}_L} + \left(-\underline{Z}_0\right) \cdot \underline{I}_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_0 = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_k} \quad . \tag{4.99}$$

3. Sonderfall: Alle internen Quellen werden unwirksam gemacht, d. h. Stromquellen werden aufgetrennt und Spannungsquellen werden kurzgeschlossen.
Daraus ergibt sich:

$$\underline{U} = \underbrace{K_1 \cdot \underline{X}_1 + K_2 \cdot \underline{X}_2 + K_3 \cdot \underline{X}_3 + \ldots + K_N \cdot \underline{X}_N}_{0} + \left(-\underline{Z}_0\right) \cdot \underline{I} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}_0 = -\frac{\underline{U}}{\underline{I}}\bigg|_{\underline{X}_k = 0,\; k = 0,1,\ldots,N} \quad . \tag{4.100}$$

Aus den Gleichungen (4.97) und (4.98) folgt:

$$\underline{U} = \underbrace{K_1 \cdot \underline{X}_1 + K_2 \cdot \underline{X}_2 + K_3 \cdot \underline{X}_3 + \ldots + K_N \cdot \underline{X}_N}_{\underline{U}_L} + \left(-\underline{Z}_0\right) \cdot \underline{I} = \underline{U}_L - \underline{Z}_0 \cdot \underline{I} = \underline{U} \quad . \tag{4.101}$$

Diese Gleichung lässt sich als eine sehr einfache Ersatzschaltung interpretieren (***Bild 3.18*****b**). Die Leerlaufspannung erhält man, wenn nur die inneren Quellen wirksam sind. Die Impedanz Z_0 kann dadurch bestimmt werden, dass man in dem Netzwerk alle Quellen unwirksam macht, und dann die Ersatzimpedanz des Netzwerkes bestimmt. Ein andere Möglichkeit besteht in der Bestimmung des Kurzschlussstromes $\underline{I}_k$ und Berechnung von Z_0 durch (4.99).

Das Thévenin-Theorem wurde zuerst von dem deutschen Physiker *Hermann von Helmholtz* (1821-1894) im Jahr 1853 entdeckt. Es wurde dann 1883 von dem französischen Ingenieur *Léon Charles Thévenin* (1857-1926) wiederentdeckt.

3.5.2 Ersatzstromquelle (Nortonsches Theorem)

Geht man von Gleichung (4.101) aus und setzt das Ergebnis für die Innenimpedanz Z_0 aus (4.99) ein, so erhält man:

$$\underline{U} = \underline{U}_L - Z_0 \cdot \underline{I} = Z_0 \cdot \underline{I}_k - Z_0 \cdot \underline{I} = Z_0 \cdot \left(\underline{I}_k - \underline{I}\right) \quad . \tag{4.102}$$

Etwas umgestellt folgt daraus:

$$\underline{I} = \underline{I}_k - Y_0 \cdot \underline{U} \quad . \tag{4.103}$$

Auch diese Gleichung kann als Ersatzschaltung interpretiert werden (***Bild 3.19*b**). Y_0 ist der Kehrwert von Z_0, also der komplexe Leitwert, der sich nach dem Unwirksamschalten aller unabhängigen Quellen ergibt.

Das Satz von der Ersatzstromquelle wurde 1926 gleichzeitig und unabhängig durch *Hans Ferdinand Mayer* (1895-1980), Siemens & Halske, und *Edward Lawry Norton* (1898-1983), Bell Labs, entdeckt.

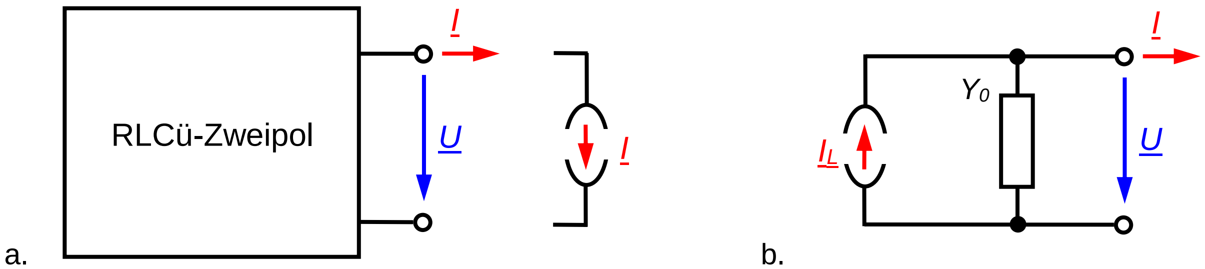


Bild 3.19 Prinzip der Ersatzstromquelle
a. RLCü-Zweipol
b. Ersatzschaltbild aus Innenadmittanz Y_0 und Kurzschlussstrom $\underline{I}_k$

3.6 Tellegen-Theorem und Reziprozitätstheorem (Umkehrungssatz)

Betrachtet wird ein Netzwerk, das aus Zweipolen aufgebaut ist, die aus den Elementen R, L, C und ü bestehen. Entsprechend ***Bild 3.20*a** können sämtliche Spannungen zwischen den Netzwerkknoten durch Spannungen gegen einen Bezugspunkt angegeben werden:

$$u_{nk} = u_n - u_k \quad . \tag{4.104}$$

Bildet man nun das Produkt aus der Spannung zwischen den Knoten n und k und dem Strom von n nach k, so erhält man

$$u_{nk} \cdot i_{nk} = \left(u_n - u_k\right) \cdot i_{nk} = u_n \cdot i_{nk} + u_k \cdot i_{kn} \quad . \tag{4.105}$$

Dieses Produkt kann nun für jeden Knoten bestimmt und aus den einzelnen Produkten die Summe gebildet werden. Für das Beispiel in ***Bild 3.20*b** erhält man entsprechend dem Schema der Gleichung (4.105):

$$\begin{aligned}
&\sum_{alle\ ZP} u_{nk} \cdot i_{nk} \\
&= u_{12} \cdot i_{12} + u_{13} \cdot i_{13} + u_{14} \cdot i_{14} + u_{23} \cdot i_{23} + u_{35} \cdot i_{35} + u_{45} \cdot i_{45} \\
&= \left(u_1 \cdot i_{12} + u_2 \cdot i_{21}\right) + \left(u_1 \cdot i_{13} + u_3 \cdot i_{31}\right) + \left(u_1 \cdot i_{14} + u_4 \cdot i_{41}\right) \\
&\quad + \left(u_2 \cdot i_{23} + u_3 \cdot i_{32}\right) + \left(u_3 \cdot i_{35} + u_5 \cdot i_{53}\right) + \left(u_4 \cdot i_{45} + u_5 \cdot i_{54}\right) \\
&= u_1 \cdot \underbrace{\left(i_{12} + i_{13} + i_{14}\right)}_{0} + u_2 \cdot \underbrace{\left(i_{21} + i_{23}\right)}_{0} + u_3 \cdot \underbrace{\left(i_{31} + i_{32} + i_{35}\right)}_{0} + u_4 \cdot \underbrace{\left(i_{41} + i_{45}\right)}_{0} + u_5 \cdot \underbrace{\left(i_{53} + i_{54}\right)}_{0} = 0
\end{aligned} \quad . \tag{4.106}$$

Aufgrund der Knotenregel, die erfüllt sein muss, ist die Summe der Produkte $u_{nk} \cdot i_{nk}$ über alle Zweipole $\equiv 0$, d. h.

$$\sum_{alle\ ZP} u_{nk} \cdot i_{nk} = 0 \quad . \tag{4.107}$$

Dies ist das *Theorem von Tellegen*, benannt nach Bernard Tellegen (1900-1990, niederländischer Elektrotechniker).

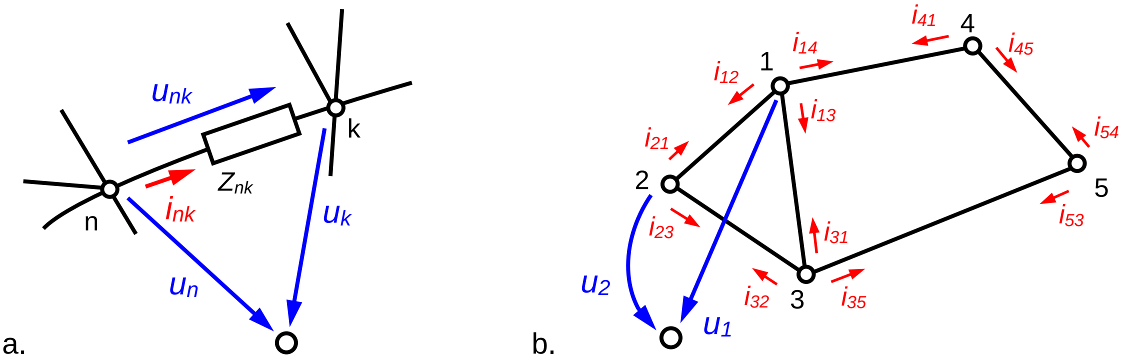


Bild 3.20 Herleitung des Tellegen-Theorems
a. Allgemeines Netzwerk
b. Beispielnetzwerk mit 5 Knoten

Das Tellegen-Theorem kann als Leistungsbilanz für ein in sich abgeschlossenes Netzwerk aufgefasst werden. Gleichung (4.107) kann allerdings noch weiter gehend interpretiert werden.

Zur Herleitung des Tellegen-Theorems wurden lediglich die Maschenregel und – unabhängig davon - die Knotenregel angesetzt. Man kann daher die Spannungen von einem Betriebszustand, die Ströme hingegen von einem anderen Betriebszustand verwenden. Spannungen und Ströme müssen lediglich die Maschen- und die Knotenregel erfüllen.

Das Tellegen-Theorem lässt sich sogar auf unterschiedliche Schaltungen mit derselben Topologie erweitern. Man kann dann schreiben

$$\sum_{alle\ ZP} u_{nk,1} \cdot i_{nk,2} = 0 = \sum_{alle\ ZP} u_{nk,2} \cdot i_{nk,1} \quad . \tag{4.108}$$

Man kann also von dem Netzwerk 1 die Spannungen und vom Netzwerk 2 die Ströme verwenden oder umgekehrt. Die Topologie der beiden Netzwerke muss identisch sein, nicht aber die Zweigelemente.

Betrachtet man nun einen Vierpol **Bild 3.21**, so folgt aus dem Tellegen-Theorem für den stationären Betrieb (stationärer Wechselstrom- und Gleichstrombetrieb)

$$\sum_{\substack{\text{alle ZP}\\ \text{im VP}}} \underline{U}_{nk} \cdot \underline{I}_{nk} + \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2 = 0 \quad . \tag{4.109}$$

Liegen zwei Betriebszustände „1“ und „2“ vor, so lassen sich daraus – wie bereits beschrieben – zwei Beziehungen ableiten:

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\text{alle ZP}\\ \text{im VP}}} \underline{U}_{nk,1} \cdot \underline{I}_{nk,2} + \underline{U}_{1,1} \cdot \underline{I}_{1,2} + \underline{U}_{2,1} \cdot \underline{I}_{2,2} = 0 \\ &\sum_{\substack{\text{alle ZP}\\ \text{im VP}}} \underline{U}_{nk,2} \cdot \underline{I}_{nk,1} + \underline{U}_{1,2} \cdot \underline{I}_{1,1} + \underline{U}_{2,2} \cdot \underline{I}_{2,1} = 0 \end{aligned} \quad . \tag{4.110}$$

Wegen des stationären Betriebs kann geschrieben werden:

$$\sum_{\substack{\text{alle ZP}\\ \text{im VP}}} \underline{U}_{nk,1} \cdot \underline{I}_{nk,2} = \sum_{\substack{\text{alle ZP}\\ \text{im VP}}} \left(\underline{Z}_{nk} \cdot \underline{I}_{nk,1}\right) \cdot \underline{I}_{nk,2} = \sum_{\substack{\text{alle ZP}\\ \text{im VP}}} \left(\underline{Z}_{nk} \cdot \underline{I}_{nk,2}\right) \cdot \underline{I}_{nk,1} = \sum_{\substack{\text{alle ZP}\\ \text{im VP}}} \underline{U}_{nk,2} \cdot \underline{I}_{nk,1} \quad . \tag{4.111}$$

Wenn aber die beiden Summen identisch sind, so muss auch gelten

$$\underline{U}_{1,1} \cdot \underline{I}_{1,2} + \underline{U}_{2,1} \cdot \underline{I}_{2,2} = \underline{U}_{1,2} \cdot \underline{I}_{1,1} + \underline{U}_{2,2} \cdot \underline{I}_{2,1} \quad . \tag{4.112}$$

Die ist die allgemeine Form des Reziprozitätstheorems (Umkehrungssatzes). Er gilt für Netzwerke mit R, L, C und ü als Zweigelemente, nicht jedoch für Systeme mit gesteuerten Quellen.

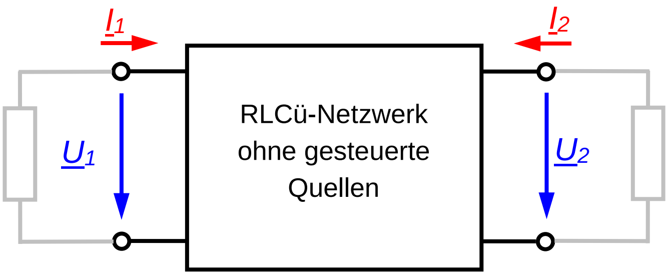


Bild 3.21 Vierpol mit Klemmengrößen zur Herleitung des Reziprozitätstheorems

Das Reziprozitätstheorem erlaubt es, für Vierpole einige interessante Eigenschaften anzugeben. Betrachtet man als Betriebszustand „1“ den sekundären Leerlauf ($\underline{I}_{2,1} = 0$) und als Betriebszustand „2“ den primären Leerlauf ($\underline{I}_{1,2} = 0$), so folgt aus (4.112) direkt

$$\underline{U}_{2,1} \cdot \underline{I}_{2,2} = \underline{U}_{1,2} \cdot \underline{I}_{1,1} \quad \text{oder} \quad \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{I}_2 = 0} = \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{I}_1 = 0} \quad . \tag{4.113}$$

Wählt man nun noch denselben Strom $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \underline{I}$ als anregende Quelle, so besagt der Umkehrungssatz, dass ein auf der Primär- oder Sekundärseite eines reziproken Vierpols eingespeister Strom $\underline{I}$ auf der jeweils anderen Seite dieselbe Leerlaufspannung $\underline{U}$ erzeugt (**Bild 3.22**a).

Betrachtet man als Betriebszustand „1“ den sekundären Kurzschluss ($\underline{U}_{2,1} = 0$) und als Betriebszustand „2“ den primären Kurzschluss ($\underline{U}_{1,2} = 0$), so erhält man

$$\underline{U}_{1,1} \cdot \underline{I}_{1,2} = \underline{U}_{2,2} \cdot \underline{I}_{2,1} \quad \text{oder} \quad \left.\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right|_{\underline{U}_2=0} = \left.\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right|_{\underline{U}_1=0} . \tag{4.114}$$

Wählt man auf beiden Seiten dieselbe anregende Spannung $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}$, so fließt bei einem reziproken Vierpol auf der jeweils anderen Seite derselbe Strom $\underline{I}$.

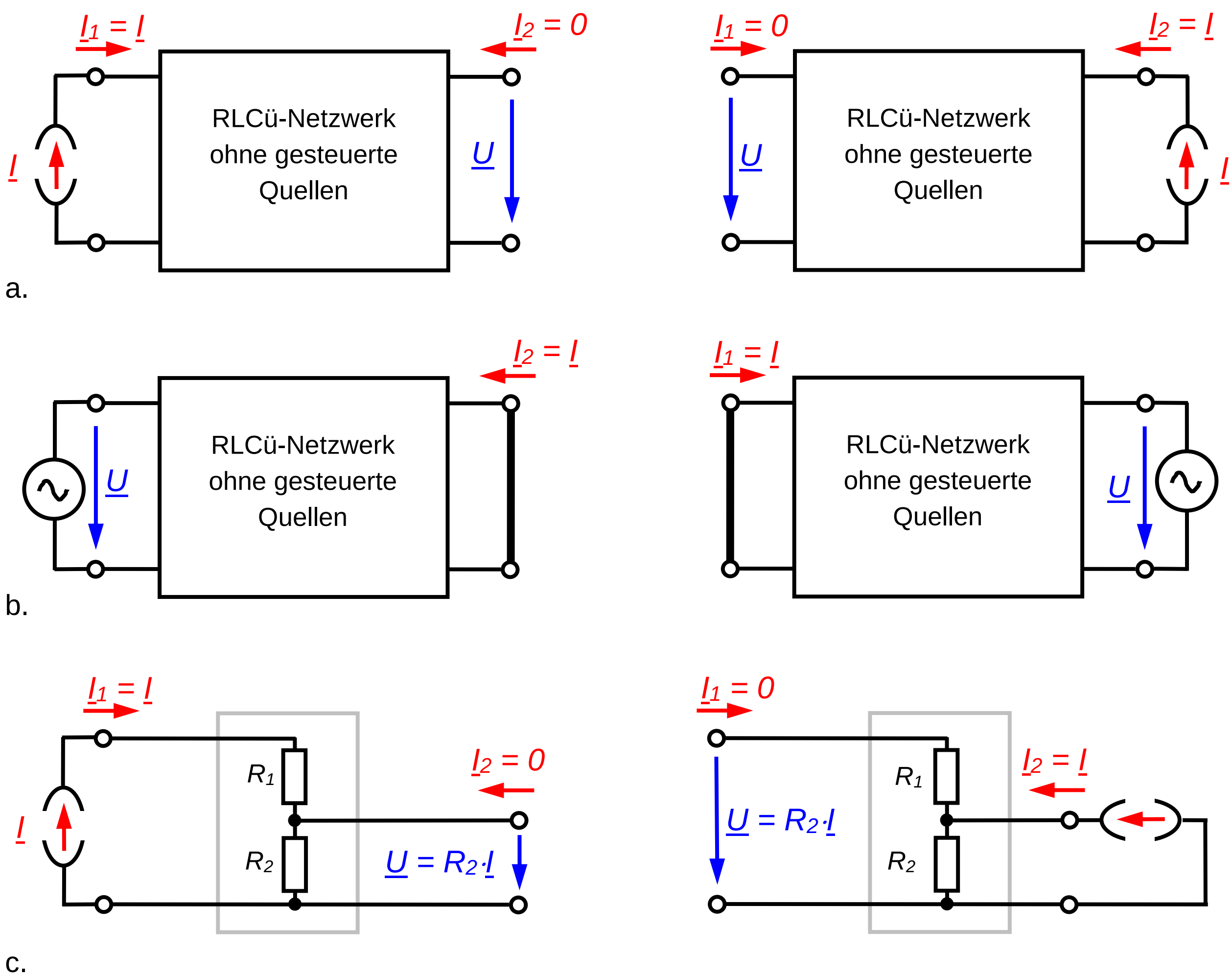


Bild 3.22 Anwendung des Reziprozitätstheorems am Beispiel von Vierpolen

a. dieselbe Leerlaufspannung $\underline{U}$ durch einen auf der Primär- oder Sekundärseite eines reziproken Vierpols eingespeisten Strom $\underline{I}$

b. denselben Kurzschlußstrom $\underline{I}$ durch eine auf der Primär- oder Sekundärseite eines reziproken Vierpols eingespeiste Spannung $\underline{U}$

c. Beispiel

4 Betriebsmittel des elektrischen Energienetzes

4.1 Elektromagnetische Grundlagen

4.1.1 Magnetischer Kreis mit Luftspalt

Die magnetische Feldstärke ***H*** ergibt sich aus der 1. Maxwell'schen Gleichung, dem Durchflutungsgesetz,

$$\oint_C \boldsymbol{H}(t)\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A_W} (\boldsymbol{J}(t) + \frac{d\boldsymbol{D}(t)}{dt})\cdot d\boldsymbol{A} \tag{5.1}$$

mit ***H***: magnetische Feldstärke; ***J***: Stromdichte
D: dielektrische Verschiebung; *d**A***: Flächenelement
*d**s***: Wegelement, rechtswendig der Flächennormalen der Fläche A_w zugeordnet
A_W: Fläche, die durch die Randkurve C begrenzt wird.

Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke H ist es oft sinnvoll:

- die Fläche A_w so zu wählen, dass die Ströme senkrecht hindurch treten, d. h.
  $\int_{A_w} \boldsymbol{J}(t)\cdot d\boldsymbol{A} = \int_{A_w} J(t)\cdot dA$
- den Integrationsweg C so zu wählen, dass C eine Feldlinie darstellt. In diesem Fall sind die Vektoren ***H****(t)* und das Wegelement *d**s*** parallel orientiert, d.h. $\oint_C \boldsymbol{H}(t)\cdot d\boldsymbol{s} = \oint_C H(t)\cdot ds$

Bei den in der Energietechnik wichtigen Induktionsvorgängen ist die Verschiebungsstromdichte $\partial D/\partial t$ gegenüber der Leitungsstromdichte $J(t)$ aufgrund der moderaten Frequenzen in aller Regel vernachlässigbar.
Magnetische Kreise spielen in der angewandten Elektrotechnik nach wie vor eine große Rolle, weswegen sie hier behandelt werden sollen. ***Bild 4.1*** zeigt beispielhaft einen Eisenkreis mit einem im Vergleich zur Eisenweglänge kleinen Luftspalt δ, der mit einer stromdurchflossenen Wicklung versehen ist, die den magnetischen Fluss ϕ_H erzeugt.

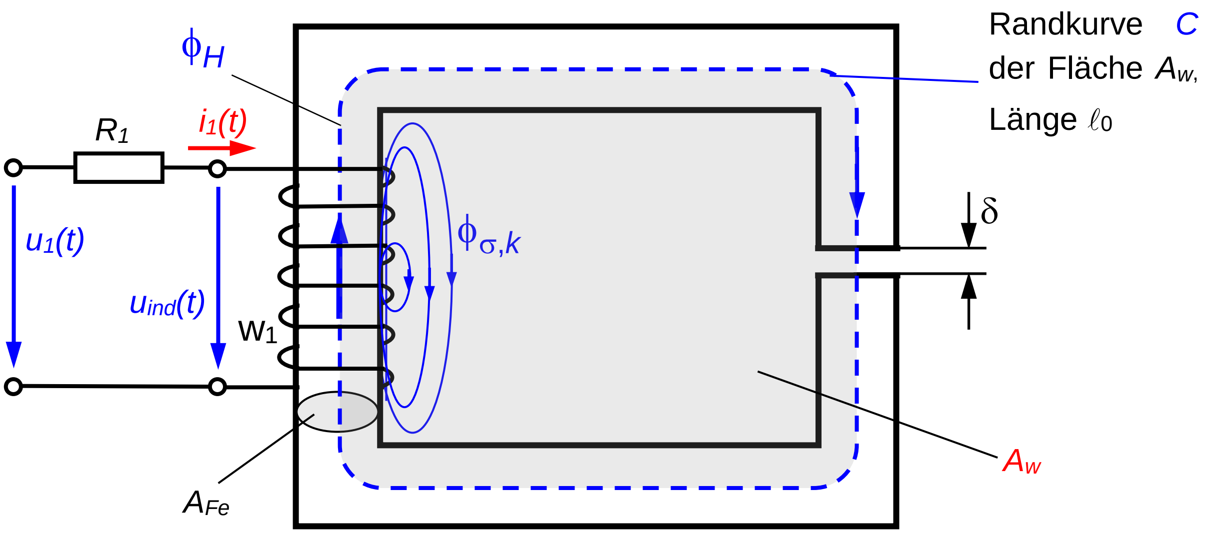


Bild 4.1 Wicklung auf einem Eisenkern mit Luftspalt als Beispiel für einen magnetischen Kreis

Das **B**-Feld ist quellenfrei (div **B** = 0). Bei kleinem Luftspalt δ kann das Magnetfeld im Luftspalt als homogen angesehen werden, daher sind die magnetische Induktion *B(t)* im Eisenkern und im Luftspalt identisch, d. h.

$$\mu_0 \cdot \mu_r \cdot H_{Fe} = B_{Fe} = B_{Luft} = \mu_0 \cdot H_{Luft} \quad . \tag{5.2}$$

Aus dem Durchflutungsgesetz erhält man

$$\oint_C \boldsymbol{H}(t) \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A_W} \boldsymbol{J}(t) \cdot d\boldsymbol{A} = \Theta = w \cdot i_1(t) = H_{Fe} \cdot (\ell_0 - \delta) + H_{Luft} \cdot \delta = B \cdot \left(\frac{\ell_0 - \delta}{\mu_0 \cdot \mu_r} + \frac{\delta}{\mu_0} \right) \; ; \tag{5.3}$$

Θ bezeichnet darin die Durchflutung, d. h. die Summe der Ströme. Technische Eisenkerne sind aus einzelnen hochpermeablen Elektroblechen gefertigt; d. h. die relative Permeabilität ist

$$\mu_r \gg 1 \quad (> 10^4) \quad , \tag{5.4}$$

und damit

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{w \cdot i_1(t)}{\left(\dfrac{\ell_0 - \delta}{\mu_0 \cdot \mu_r} + \dfrac{\delta}{\mu_0} \right)} \approx \mu_0 \cdot \dfrac{w \cdot i_1(t)}{\delta} & \text{für} \quad \delta \neq 0 \\[2ex] \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \dfrac{w \cdot i_1(t)}{\ell_0} & \text{für} \quad \delta = 0 \end{cases} \quad . \tag{5.5}$$

Wichtig ist noch die Definition des magnetischen Flusses, der sich aus dem Integral über die Fläche **A** ergibt, die von einer magnetischen Induktion **B** durchsetzt wird:

$$\phi(t) = \int_A \boldsymbol{B}(t) \cdot d\boldsymbol{A} = \int_A B_\perp(t) \cdot dA \quad . \tag{5.6}$$

Allgemein kann Gleichung (5.3) noch anders interpretiert werden:

$$\begin{aligned} \Theta = w \cdot i_1(t) &= \sum_i H_i \cdot \ell_i = \sum_i \frac{B_i}{\mu_0 \cdot \mu_{r,i}} \cdot \ell_i = \sum_i \frac{\phi_H(t)}{\mu_0 \cdot \mu_{r,i} \cdot A_i} \cdot \ell_i \\ &= \phi_H(t) \cdot \sum_i \frac{\ell_i}{\mu_0 \cdot \mu_{r,i} \cdot A_i} = \phi_H(t) \cdot \sum_i R_{m,i} \end{aligned} \quad . \tag{5.7}$$

Gemäß dieser Beziehung (Hopkinsonsches Gesetz) kann der magnetische Kreis in Analogie zu einem elektrischen Stromkreis interpretiert werden. Bei einer Querschnittsänderung z. B. eines Eisenkreises bleibt der magnetische Fluss konstant. Die Durchflutung Θ entspricht dann einer „magnetischen Spannung“ und der magnetische Fluß ϕ dem „magnetischen Strom“. Man kann also - ganz analog zu einem elektrischen Widerstand - einen „magnetischen Widerstand“ R_m definieren. Der magnetische Widerstand des Eisens ist sehr viel kleiner, als jener der Luft. Um einen bestimmten magnetischen Fluss in einem Eisenkreis mit Luftspalt zu erreichen, bedarf es wegen des höheren magnetischen Widerstandes einer sehr viel höheren Durchflutung (magnetische Spannung) als in einem Eisenkreis ohne Luftspalt.

Wegen des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen der magnetischen Induktion *B* und der magnetischen Feldstärke *H* bei ferromagnetischen Werkstoffen ist die Beschreibung der Werkstoffeigenschaften durch eine Permeabilitätszahl μ_r mit

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \tag{5.8}$$

nur sehr eingeschränkt möglich. Anders ausgedrückt: eine bestimmte Permeabilitätszahl gilt nur für einen eng begrenzten Wertebereich der magnetischen Feldstärke H.
Man kann die relative Anfangspermeabilität

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left.\frac{dB}{dH}\right|_{H=0} \tag{5.9}$$

definieren, die ein Maß für die Steigung der Neukurve im unmagnetischen Zustand des Werkstoffs darstellt.
Bei geringer Feldstärkeänderung um einen Arbeitspunkt AP lässt sich die Magnetisierungskennlinie um den Arbeitspunkt linearisieren:

$$\mu_r = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left.\frac{\Delta B}{\Delta H}\right|_{AP} \tag{5.10}$$

Beide Definitionen beschreiben die Magnetisierungskennlinie in einem lokalen Bereich für begrenzte Werte der magnetischen Feldstärke H. Eine globale Modellierung muss einerseits die Nichtlinearität und zum anderen den Hystereseeffekt beschreiben. Hierfür existieren zwar Modellansätze (Jiles-Atherton-Modell), im konkreten Fall können aber erhebliche Abweichungen zwischen Modell und Messung auftreten, insbesondere wenn man die Magnetisierungskennlinie für verschiedene Aussteuerungen beschreiben möchte. In ***Bild 4.2*** ist ein Beispiel für die Kennlinie eines Elektroblechs dargestellt.

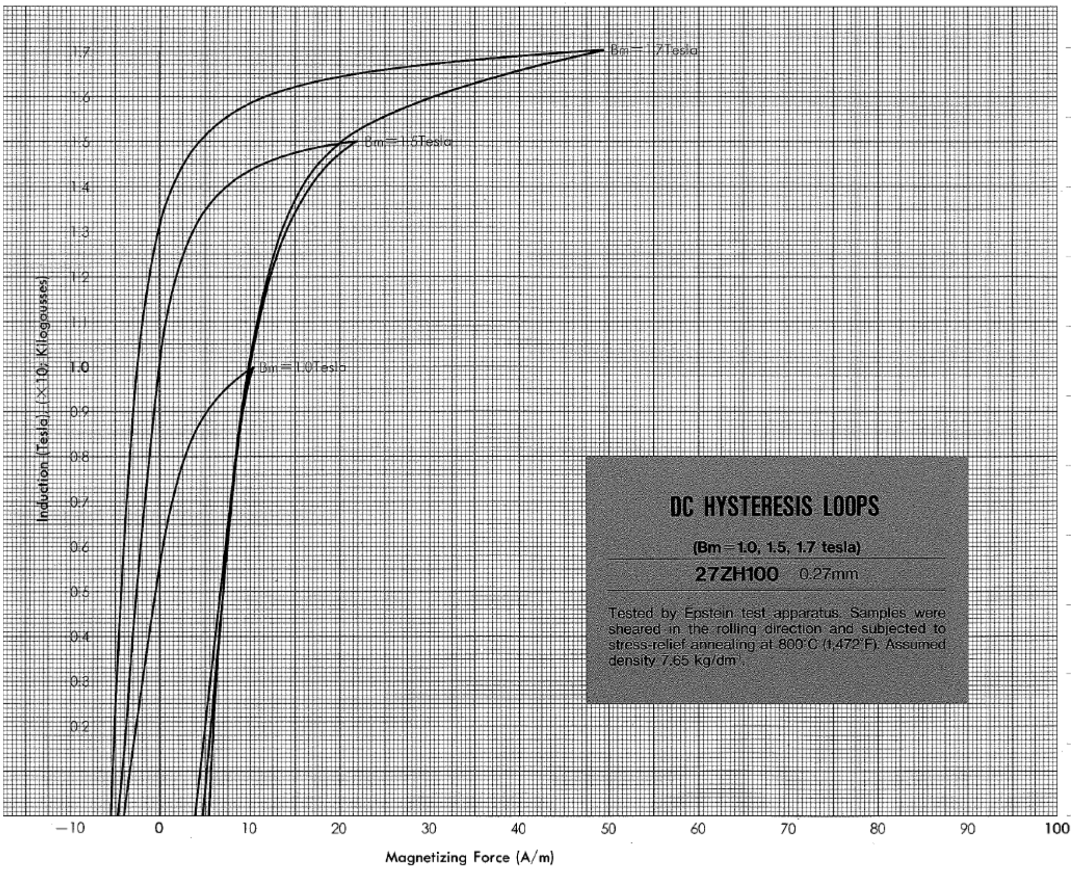


Bild 4.2 Magnetisierungskennlinie des Materials 27ZH100 von Nippon Steel für verschiedene Aussteuerungen

4.1.2 Hauptfluß und Streufluß

Ausgangspunkt der Betrachtung ist ***Bild 4.1***. Ziel ist es, in dem Eisenkern einen bestimmten magnetischen Fluß zu erzeugen. Dieser „gewünschte" Fluß wird als *Hauptfluß* ϕ_H bezeichnet. Man wird allerdings feststellen, dass sich auch bei großem konstruktiven Aufwand der Wicklung ein Teil der Feldlinien in der Luft schließt, d. h. nicht oder nicht vollständig im Eisen verläuft. Jener Teil des gesamten magnetischen Flusses ϕ, der nicht den gewünschten Weg nimmt und damit zum Hauptfluß ϕ_H gehört, wird als *Streufluß* ϕ_σ bezeichnet.

Für den magnetischen Kreis gemäß ***Bild 4.1*** erhält man zusammen mit Gleichung (5.5) für den magnetischen Hauptfluß ϕ_H

$$\phi_H(t) = \int_{A_{Fe}} \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{A} \overset{\substack{B(t)=const \\ \text{über } A_{Fe}}}{=} B(t)\cdot A_{Fe} = c_H \cdot w \cdot i_1(t) \quad . \tag{5.11}$$

Der Hauptfluß ist damit proportional zur gesamten Durchflutung ($w\cdot i_1(t)$) mit der Proportionalitätskonstanten c_H. Man kann einzelne Streuflüsse definieren, die mit einer unterschiedlichen Anzahl von Windungen gekoppelt sind. Auch diese Streuflüsse sind proportional zur gesamten Durchflutung. Die Konstante $c_{\sigma,k}$ beschreibt, mit welcher Anzahl von Windungen der jeweilige Streufluß gekoppelt ist; so ist $\phi_{\sigma,3}$ mit 3 Windungen gekoppelt:

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma,1}(t) &= c_{\sigma 1}\cdot w\cdot i_1(t) \\ \phi_{\sigma,2}(t) &= c_{\sigma 2}\cdot w\cdot i_1(t) \\ &\vdots \\ \phi_{\sigma,N}(t) &= c_{\sigma N}\cdot w\cdot i_1(t) \end{aligned} \quad . \tag{5.12}$$

Der gesamte magnetische Fluß ergibt sich aus der Summe von Haupt- und Streufluß:

$$\phi(t) = \phi_H(t) + \phi_\sigma(t) = c_H \cdot w \cdot i_1(t) + \sum_{k=1}^{w} c_{\sigma,k}\cdot w \cdot i_1(t) \quad . \tag{5.13}$$

4.1.3 Induktionsgesetz

4.1.3.1 Zeitveränderliches Magnetfeld

Bekanntlich kann an den Klemmen einer ruhenden Leiterschleife eine Spannung u_{ind} gemessen werden, wenn diese von einem *zeitveränderlichen* magnetischen Fluss ϕ_H durchsetzt wird. Diese Spannung ist proportional zur Windungszahl w der Leiterschleife und zur zeitlichen Ableitung des magnetischen Flusses ϕ_H. Aus der 2. Maxwell'schen Gleichung, dem Induktionsgesetz in seiner integralen Form

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}\int_A \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} \tag{5.14}$$

mit
- $\boldsymbol{E}$: elektrische Feldstärke
- $\boldsymbol{B}$: magnetische Induktion
- $d\boldsymbol{s}$: Wegelement, rechtswendig der Flächennormalen der Fläche A zugeordnet
- $d\boldsymbol{A}$: Flächenelement
- A: zeitinvariante Fläche, die durch die Randkurve C begrenzt wird

folgt bei einer *rechtswendigen Zuordnung* von magnetischem Fluss ϕ_H und der induzierten Spannung u_{12}

$$u_{12}(t) = \underbrace{\oint_C \boldsymbol{E}(t)\cdot d\boldsymbol{s} = \int_A \mathrm{rot}\left[\boldsymbol{E}(t)\right]\cdot d\boldsymbol{A}} = \int_A -\frac{\partial \boldsymbol{B}(t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{A} = -\frac{d}{dt}\int_A \boldsymbol{B}(t)\cdot d\boldsymbol{A} = -\frac{d}{dt}\phi_H(t) \quad . \qquad (5.15)$$

Stokes'scher Integralsatz:
ds und *d**A*** bilden eine Rechtsschraube, d. h. die Integration erfolgt auf dem Weg von „2“ nach „1“

Bild 4.3 verdeutlicht das Induktionsgesetz mit der rechtswendigen Zuordnung von magnetischem Fluß und induzierter Spannung (*Rechte-Hand-Regel*):

$$u_{12}(t) = -w\cdot\frac{d\phi_H(t)}{dt} = i(t)\cdot R \quad . \qquad (5.16)$$

Rechte-Hand-Regel: Daumen der *<u>rechten Hand</u>* in Richtung des magnetischen Flusses ϕ_H; zeigen nun die Finger in Richtung des Spannungspfeils, so ist eine rechtswendige Zuordnung gegeben und es gilt das „-“-Zeichen. Sind die Finger entgegen der Pfeilung der Spannung orientiert, so gilt das „+“-Zeichen als Vorzeichen vor dem Term $w\cdot d\phi_H/dt$.

Die rechtswendige Zuordnung zwischen induzierter Spannung und magnetischem Fluß rührt vom Stokes'schen Integralsatz in Verbindung dem „-“-Zeichen des Induktionsgesetzes her.

Lenz'sche Regel: Induzierte Ströme sind stets so gerichtet, dass sie dem Vorgang, durch den sie erzeugt werden, entgegenwirken.

Aus der Lenz'schen Regel läßt sich die Richtung des Stromes i und damit auch die Polarität der Spannung u_{12} direkt bestimmen. Geht man in ***Bild 4.3*** von einem Anstieg des magnetischen Flusses ϕ_H in der gezeigten Richtung aus, so muss der induzierte Strom entgegen der Pfeilung in ***Bild 4.3*** fließen, um ein entgegen gerichtetes Magnetfeld zu erzeugen. Folglich ist auch die (positive) Spannung u_{12} der in ***Bild 4.3*** eingetragenen Pfeilung entgegengerichtet. Dasselbe Ergebnis erhält man bei Auswertung von Gleichung (5.16).

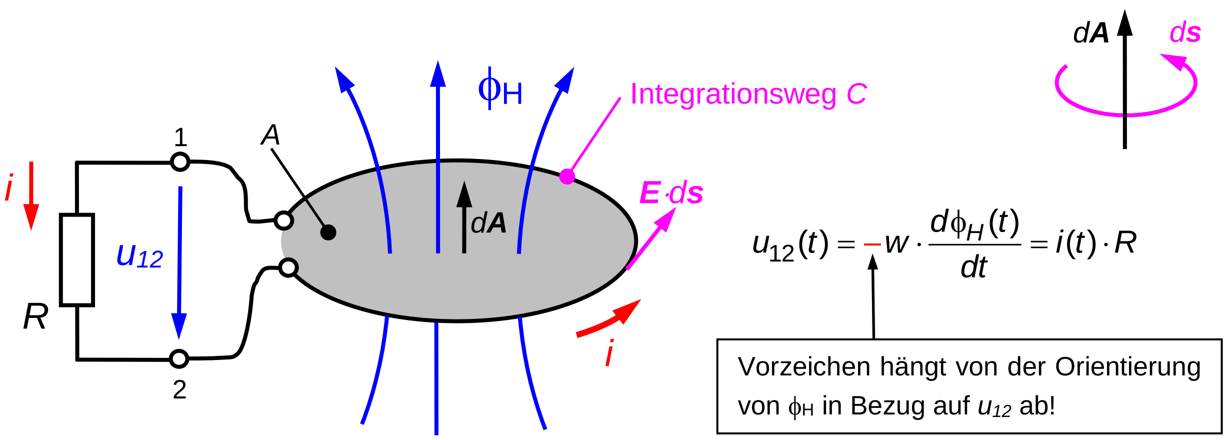


Bild 4.3 Induktion einer Spannung in einer Leiterschleife, die vom einem veränderlichen magnetischen Fluss $\phi_H = \int B_\perp\cdot dA$ durchsetzt wird

In der elektrischen Energieübertragung ist sehr oft der *“stationäre Wechselstrombetrieb”* von Bedeutung. Mathematisch kann dieser Fall durch die *komplexe Rechnung* und die *Fourier-Transformation* behandet werden. Aus Gleichung (5.16) ergibt sich dann:

$$U_{12}(j\omega) = \underline{U}_{12} = -w \cdot j\omega\phi_H(j\omega) = -w \cdot j\omega\underline{\phi}_H = \underline{I}(j\omega) \cdot \underline{Z}(j\omega) \quad . \qquad (5.17)$$

Bei einer geschlossenen oder mit der Impedanz $\underline{Z}$ abgeschlossenen Leiterschleife fließt ein Strom $\underline{I}$.

4.1.3.2 Bewegter Leiter in einem zeitlich konstanten Magnetfeld

In einem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ wirkt auf ein Teilchen mit der Ladung dQ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ eine Kraft (Lorentzkraft) $d\boldsymbol{F}$ gemäß

$$d\boldsymbol{F} = dQ \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \quad . \qquad (5.18)$$

$\boldsymbol{v}$ ist dabei der Vektor der Geschwindingkeit und $\boldsymbol{B}$ der Vektor der magnetischen Induktion. Diese Kraft bewirkt eine Verschiebung der Elektronen im Leiter in der in ***Bild 4.4*** dargestellten Richtung. Die Lorentzkraft bewirkt eine Ladungstrennung auf dem bewegten Leiterstück. Auf diese Weise entsteht ein elektrisches Feld

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \quad . \qquad (5.19)$$

Aus der 2. Maxwell’schen Gleichung folgt

$$\begin{aligned} u_{12} &= \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_1^2 (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{s} = -\int_1^2 v \cdot B \cdot ds = -B \cdot L \cdot v \\ u_{12} &= -\boldsymbol{B} \cdot \frac{d}{dt} \int_A d\boldsymbol{A} = -B \cdot L \frac{d}{dt} \int_t v(t) \cdot dt = -B \cdot L \cdot v \end{aligned} \qquad (5.20)$$

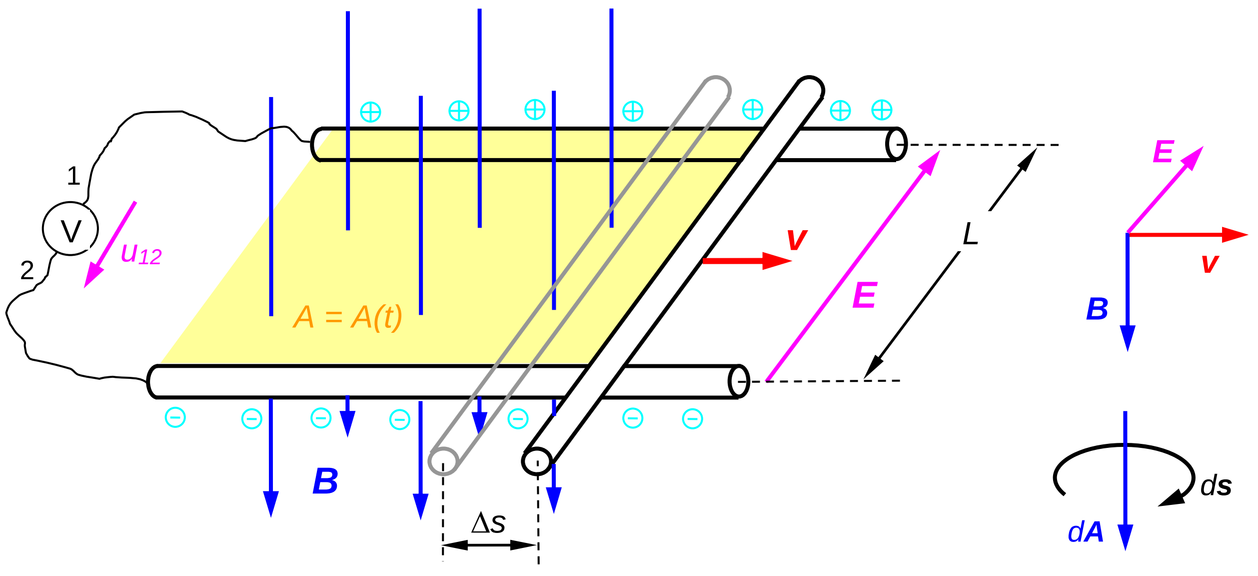


Bild 4.4 Induzierte Spannung u_{12} in einer Leiterschleife mit einem bewegten Leiter in einem zeitlich konstanten Magnetfeld

Zu Gleichung (5.20) ist zu beachten:

- Das Flächenelement (Flächennormale) $d\boldsymbol{A}$ und das Wegelement $d\boldsymbol{s}$ sind einander rechtwendig zugeordnet.
- Der Vektor $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ und das Wegelement $d\boldsymbol{s}$ sind in dem bewegten Leiterstück entgegengesetzt gerichtet, daher ist $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -v \cdot B \cdot ds$.
- Die Vektoren $\boldsymbol{B}$ und $d\boldsymbol{A}$ sind gleich gerichtet, d. h. es ist $\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = +B \cdot dA = B \cdot L \cdot v \cdot dt$.

Bild 4.5 zeigt 2 Anwendungen des Induktionsgesetzes. In ***Bild 4.5*a** bewegt sich die gesamte Leiterschleife in einem zeitlich konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B}$. Somit wird in den quer zum Magnetfeld bewegten Leiterstücken die Feldstärke $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ induziert. Allerdings heben sich die in gleicher Richtung induzierten Feldstärken bei Bildung der Summe in der Leiterschleife gegenseitig auf und man erhält insgesamt keine induzierte Spannung:

$$u_{12} = \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_1^2 (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{s} - \int_3^4 (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{s} = 0 \quad . \tag{5.21}$$

In ***Bild 4.5*b** ist das Grundprinzip eines elektrischen Generators dargestellt. Eine Leiterschleife mit w Windungen rotiert in einem zeitlich konstanten Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ mit der mechanischen Kreis frequenz Ω. Die induzierte Spannung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} u_{12} &= \oint_C \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = w \cdot \left[\int_1^2 (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{s} + \int_3^4 (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{s} \right] = 2 \cdot w \cdot B \cdot L \cdot v \cdot \sin(\varphi) \\ &= 2 \cdot w \cdot B \cdot L \cdot \frac{D}{2} \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t) = w \cdot B \cdot L \cdot D \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t) \end{aligned} \quad , \tag{5.22}$$

d. h. man erhält eine sinusförmige Wechselspannung.

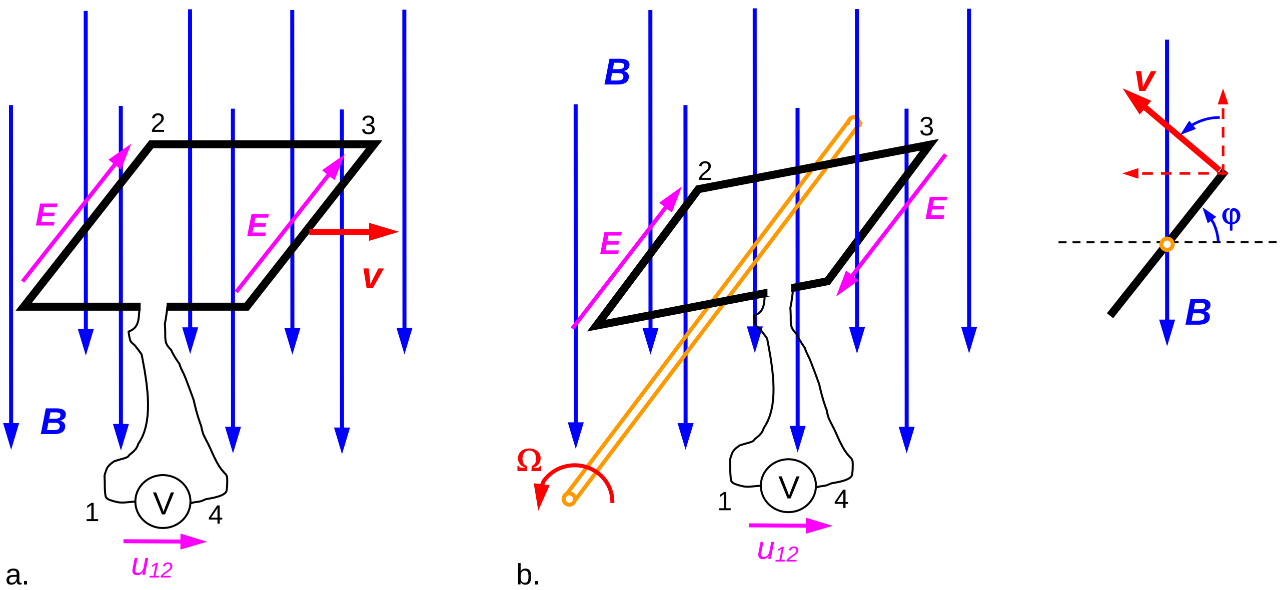


Bild 4.5 Anwendungen des Induktionsgesetzes
a. Bewegte Leiterschleife in einem zeitlich konstanten Magnetfeld
b. Rotierende Leiterschleife in einem zeitlich konstanten Magnetfeld

4.1.4 Selbstinduktion, Haupt- und Streuinduktivität

Bei der Anwendung des Induktionsgesetzes geht man üblicherweise zunächst von einem äußeren Magnetfeld aus, das eine Leiterschleife durchsetzt. Ein Induktionsvorgang tritt aber auch dann auf, wenn an eine Leiterschleife eine Spannung angelegt wird, durch die ein Stromfluß erzeugt wird und dadurch ein Magnetfeld entsteht. Auch dieses Magnetfeld induziert in der Leiterschleife eine Spannung. Den Vorgang der *Spannungsinduktion* in einer Leiterschleife durch ihren *eigenen Strom* bezeichnet man als *Selbstinduktion*.

Betrachtet wird der Stromkreis gemäß ***Bild 4.1***, der eine Induktivität mit Eisenkern mit oder ohne Luftspalt darstellt. Aus der Maschengleichung erhält man

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + u_{ind}(t) \quad . \tag{5.23}$$

Aus dem Induktionsgesetz folgt

$$u_{ind}(t) = +w \cdot \frac{d\phi(t)}{dt} = +\frac{d\Psi(t)}{dt} = w \cdot \frac{d\left(B(t) \cdot A\right)}{dt} = L\,\frac{di(t)}{dt} \tag{5.24}$$

mit

$$L = \begin{cases} \dfrac{A \cdot w^2}{\left(\dfrac{\ell_0 - \delta}{\mu_0 \cdot \mu_r} + \dfrac{\delta}{\mu_0}\right)} \approx \mu_0 \cdot \dfrac{A \cdot w^2}{\delta} & \text{für } \delta \neq 0 \\ \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \dfrac{A \cdot w^2}{\ell_0} & \text{für } \delta = 0 \end{cases} \quad . \tag{5.25}$$

Darin sind Ψ der *verkettete Fluß* mit $\Psi = w \cdot \phi$, A ist die Querschnittsfläche des Spuleninneren und L wird als *Selbstinduktivitätskoeffizient* oder *Induktivität der Spule* bezeichnet.
Für $\delta = 0$ erhält man aus Gleichung (5.25) die Induktivität einer „langen Spule“ mit der Länge ℓ_0 und der Querschnittsfläche $A = \pi \cdot r^2$, mit $\ell_0 >> r$.

Aus den Beziehungen (5.25) und (5.7) erhält man den folgenden Zusammenhang zwischen dem magnetischen Widerstand R_m und der Induktivität L einer Spulenanordnung:

$$L = \frac{w^2}{R_m} \quad . \tag{5.26}$$

Die Definition des *verketteten Flusses* Ψ erlaubt eine wichtige Interpretation der Induktivität L. Aus Gleichung (5.24) geht hervor, dass die Induktivität eine Verknüpfung zwischen den Feldgrößen (Ψ oder ϕ) und der Netzwerkgröße Strom (i) darstellt:

$$\Psi = L \cdot i = w \cdot \phi \quad . \tag{5.27}$$

Induktivitäten sind also nicht anderes als die Netzwerkdarstellung eines magnetischen Feldes. Oder anders ausgedrückt: jedes Magnetfeld in einem System oder einer Anlage führt in der Netzwerkdarstellung auf eine Induktivität.
Analog dazu beschreibt eine Kapazität in einer Ersatzschaltung stets ein elektrisches Feld in einem System oder einem Kondensator.

Die Maschengleichung (5.23) kann auch noch anders interpretiert werden. Mit dem Ansatz des Streuflusses gemäß Gleichung (5.12) und durch Anwendung des Induktionsgesetzes (Gleichung (5.16)) erhält man

$$u(t) = R_1 \cdot i_1(t) + u_{w1}(t) = R_1 \cdot i_1(t) + \left(w \cdot \frac{d\phi_H(t)}{dt} + (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + \ldots + c_w \cdot w) \cdot w \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \right)$$

$$= R_1 \cdot i_1(t) + \underbrace{c_H \cdot w^2}_{L_H} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + \underbrace{(c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 2 + \ldots + c_w \cdot w) \cdot w}_{L_{\sigma 1}} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \qquad .(5.28)$$

$$= R_1 \cdot i_1(t) + L_H \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_{\sigma 1} \cdot \frac{di_1(t)}{dt}$$

Diese Beziehung stellt die Verbindung zwischen den Feldgrößen Hauptfluß ϕ_H und Streufluß ϕ_σ des magnetischen Kreises sowie der Netzwerkgrößen Spannungen und Strom dar. L_H und $L_{\sigma 1}$ werden als *Hauptinduktivität* und *Streuinduktivität* bezeichnet. Aus Gleichung (5.28) lässt sich direkt die Ersatzschaltung gemäß ***Bild 4.6*** ableiten.

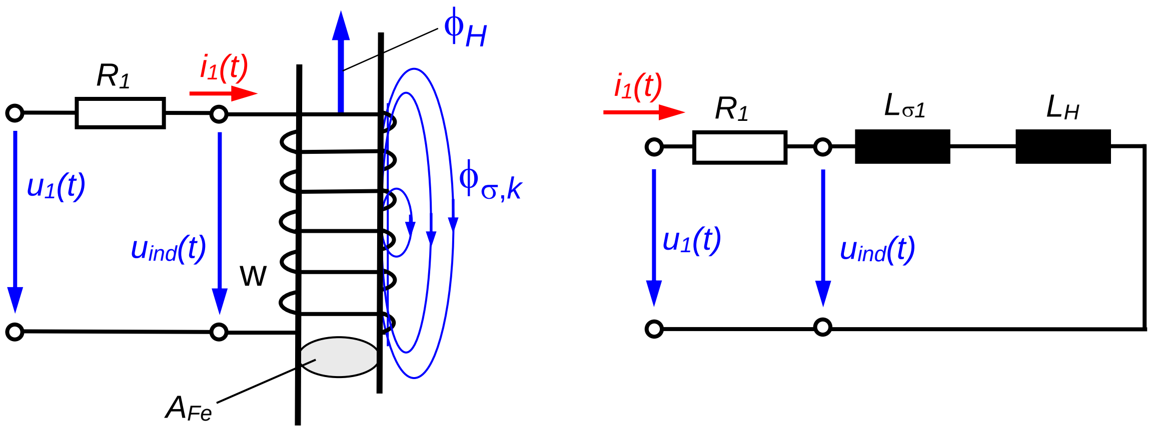


Bild 4.6 Magnetischer Kreis (Eisenkern mit einer Wicklung) und seine elektrische Netzwerk-Ersatzschaltung

4.1.5 Berechnung verzweigter magnetischer Kreise

Genau wie bei elektrischen Netzwerken können auch magnetische Netzwerke unverzweigt oder mit Verzweigungen aufgebaut werden. Bei einer Verzweigung tritt ein Knotenpunkt auf, in den magnetische Flüsse zu- und abgeführt werden. Auf einen Knotenpunkt angewandt ergibt sich analog zur Knotenregel bei elektrischen Netzwerken (1. Kirchhoff'scher Satz)

$$\sum_k \phi_k = 0 \quad . \qquad (5.29)$$

Analog zu einem elektrischen Netzwerk lassen sich auch bei magnetischen Netzwerken „Maschen" definieren. Entlang eines geschlossenen Weges gilt analog zur Maschenregel (2. Kirchhoff'scher Satz)

$$\sum_k \theta_k = \sum_n H_n \cdot l_n = \sum_n \phi_n \cdot \frac{l_n}{\mu_0 \cdot \mu_{r,n} \cdot A_n} \quad . \qquad (5.30)$$

In **Bild 4.7** ist ein magnetischer Kreis mit Verzweigungen dargestellt, für dessen Berechnung die Anwendung der Analogiebeziehungen äußerst hilfreich ist.

Für den magnetischen Kreis werden die in **Bild 4.7** angegebenen mittleren Eisenweglängen und Eisenquerschnitte angesetzt, die relative Permeabilität der Eisens ist μ_{r1}, die der Luftspalte sei μ_{r2}. Aus der „magnetischen Knotenregel“ und der „magnetischen Maschenregel“ lassen sich die folgenden Beziehungen ableiten:

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$$

$$w_1 \cdot i_1 = \phi_1 \cdot \frac{l_1}{\mu_0 \cdot \mu_{r,1} \cdot A_1} + \phi_2 \cdot \left(\frac{l_2}{\mu_0 \cdot \mu_{r,1} \cdot A_2} + \frac{l_3}{\mu_0 \cdot \mu_{r,1} \cdot A_2} + \frac{\delta_2}{\mu_0 \cdot \mu_{r,2} \cdot A_2} \right) \quad . \qquad (5.31)$$

$$w_1 \cdot i_1 = \phi_1 \cdot \frac{l_1}{\mu_0 \cdot \mu_{r,1} \cdot A_1} + \phi_3 \cdot \left(\frac{l_4}{\mu_0 \cdot \mu_{r,1} \cdot A_3} + \frac{l_5}{\mu_0 \cdot \mu_{r,1} \cdot A_3} + \frac{\delta_3}{\mu_0 \cdot \mu_{r,2} \cdot A_3} \right)$$

Falls die jeweiligen Werkstoffe nur in ihrem linearen Bereich ausgesteuert werden, bleibt die Permeabilität konstant. Dann handelt es sich bei Gleichung (5.31) um ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus 3 Gleichungen und 3 Unbekannten. Es hat somit eine eindeutige Lösung. Für den Spezialfall identischer Abzweigungen ($l_2 + l_3 = l_4 + l_5 = l_q$, $A_1 = A_2 = A_3 = A_q$, $\delta_2 = \delta_3 = \delta_q$) erhält man identische Flüsse ϕ_2 und ϕ_3 in den beiden Parallelzweigen, d. h. der Fluss ϕ_1 teilt sich exakt hälftig auf die beiden Schenkel mit den Luftspalten auf:

$$\phi_1 = \frac{w_1 \cdot i_1}{\dfrac{l_1}{\mu_0 \cdot \mu_{r,1} \cdot A_q}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 l_1} \left(l_q + \delta_q \dfrac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} \right)}$$

$$\phi_2 = \phi_3 = \frac{w_1 \cdot i_1}{\dfrac{l_1}{\mu_0 \cdot \mu_{r,1} \cdot A_q}} \cdot \frac{\dfrac{1}{2}}{1 + \dfrac{1}{2 l_1} \left(l_q + \delta_q \dfrac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}} \right)} \quad . \qquad (5.32)$$

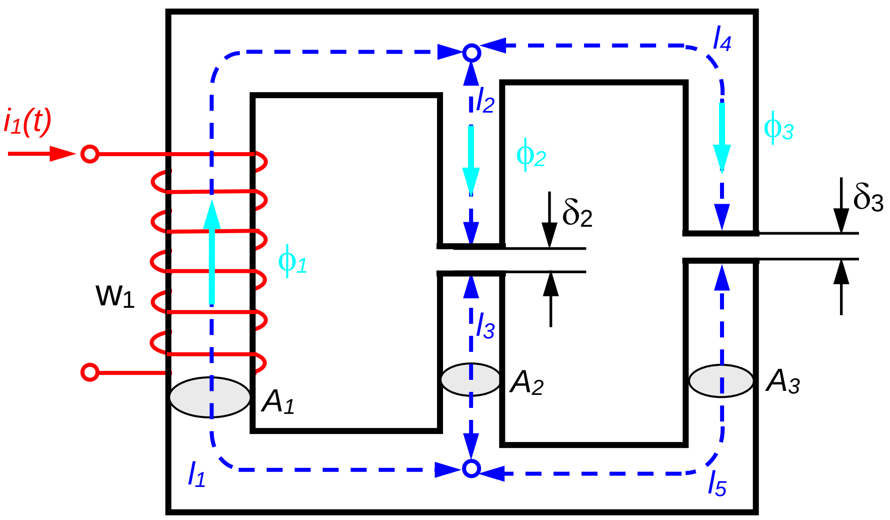


Bild 4.7 Magnetischer Kreis mit Verzweigungen

4.2 Synchrongeneratoren

Die großtechnische Umwandlung der von den Turbinen bereitgestellten mechanischen Energie in elektrische Energie erfolgt weltweit nahezu ausschließlich durch Drehstrom-Synchrongeneratoren. In geringem Umfang werden z. B. in Windkraftanlagen auch Drehstromasynchrongeneratoren (DASM) oder einphasige Bahnstromgeneratoren (16,7 Hz) eingesetzt.

4.2.1 Elektrisches Ersatzschaltbild von Synchrongeneratoren

4.2.1.1 Konstruktiver Aufbau von Schenkelpol- und Turbogeneratoren

Große Synchrongeneratoren zur Energieerzeugung in Kraftwerken werden stets als Innenpolmaschinen gebaut. Die hohe elektrische Leistung kann dann ohne Schleifringe über feste Verbindungen aus der außenliegenden Stator-(Ständer-)wicklung abgeführt werden.

Die Statorwicklung besteht aus 3 Spulengruppen, die um 120° gegeneinander versetzt sind. Der Stator ist aus einzelnen Stahlblechen aufgebaut, die quer zur Längsachse angeordnet sind. Der Läufer trägt eine Erregerwicklung, die von einem Gleichstrom durchflossen wird. Dieser Gleichstrom erzeugt im Läufer, im Stator und im Luftspalt zwischen Stator und Läufer ein mit dem Läufer rotierendes Magnetfeld. Dieses rotierende Magnetfeld induziert in der Statorwicklung aufgrund der um 120° versetzten Einzelspulen ein Drehspannungssystem und erzeugt damit elektrische Energie.

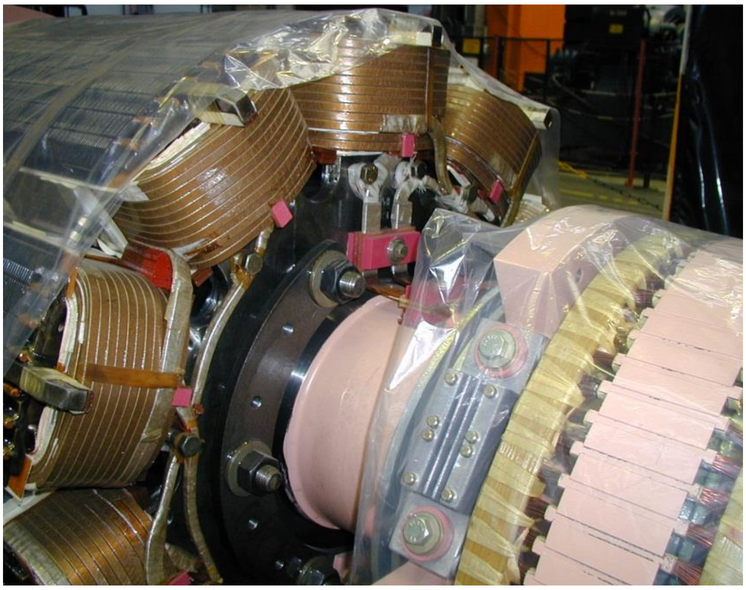
Abhängig von der Drehzahl werden zwei Bauformen für den Läufer bevorzugt. Man unterscheidet demnach zwei Typen von Synchronmaschinen (***Bild 4.8***).

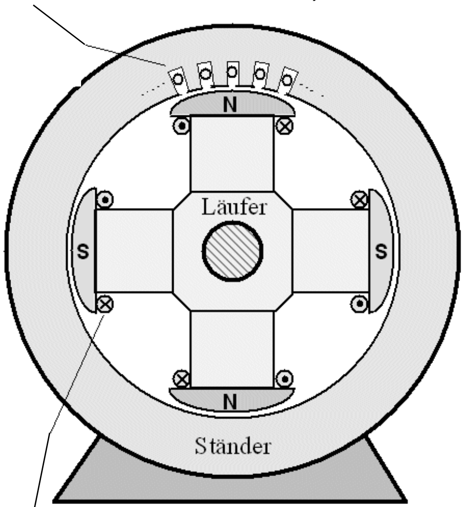
1) *Schenkelpolgeneratoren*

   Wasserturbinen arbeiten bei vergleichsweise niedrigen Drehzahlen von einigen 100 U/min. Deshalb ist eine hohe Polpaarzahl zur Erzeugung einer Frequenz von 50 Hz (60 Hz) erforderlich. Wenn viele Pole auf dem Umfang des Läufers untergebracht werden müssen, ist eine Ausführung als **Schenkelpolläufer** mit **ausgeprägten Polen** und **konzentrierten Erregerwicklungen** günstig. Der Läufer ist ähnlich wie der Stator quer zur Achse geblecht ausgeführt.

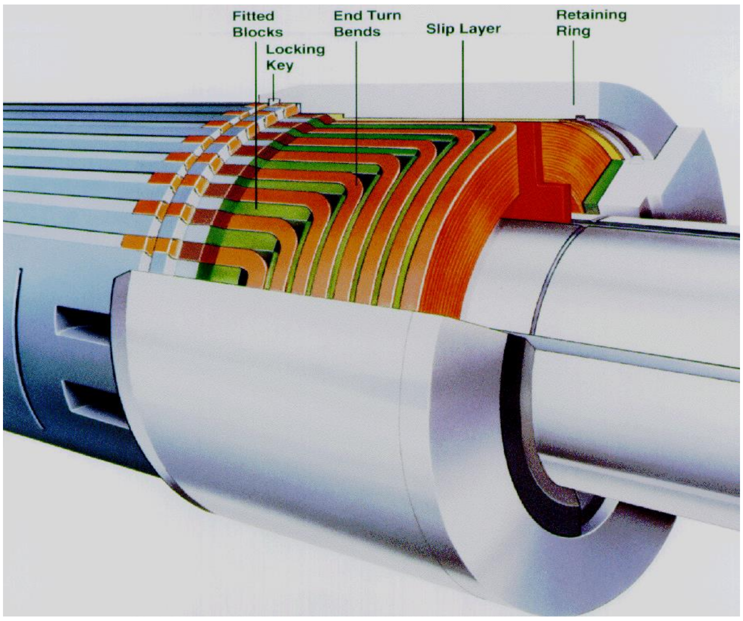
2) *Turbogeneratoren (Vollpolgeneratoren)*

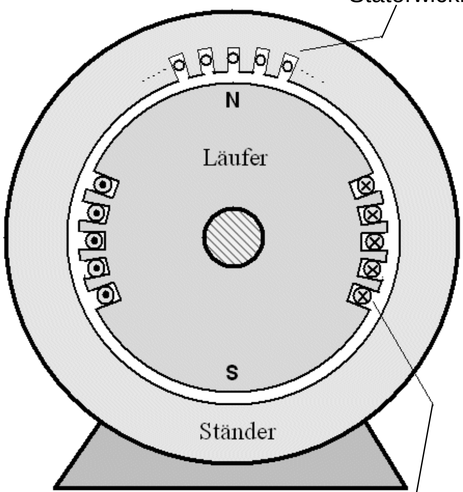
   Bei Dampf- und Gasturbinen ist der Wirkungsgrad bei hohen Drehzahlen am größten. Hierfür eignet sich der Vollpolläufer mit nur einem Polpaar (p = 1, 3000 U/min bei Netzfrequenz 50 Hz) oder für höhere Leistungen auch mit zwei Polpaaren (p = 2, 1500 U/min bei 50 Hz). Der Läufer ist als Vollpolläufer aus hochpermeablem Material (Stahl, $\mu_r >> 1$) ausgeführt.





a.





b.

Bild 4.8 Ausführungsformen von Synchrongeneratoren

a. Schenkelpolgenerator, Beispiel in der Prinzipskizze: 4-poliger Läufer, Polpaarzahl p = 2)
b. Turbogenerator (Vollpolgenerator)

4.2.1.2 Magnetfeld des Läufers

Der Läufer rotiert mit der mechanischen Winkelgeschwindigkeit Ω. Aus ***Bild 4.9*** folgt sofort

$$\theta = \Omega \cdot t + \theta_L \tag{5.33}$$

Die Anwendung des Durchflutungsgesetzes entlang der Feldlinien (Weg C) ergibt:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{C_{Luft}} \vec{H}_{Luft} \cdot d\vec{s} + \int_{C_{Eisen}} \vec{H}_{Eisen} \cdot d\vec{s} = \Theta(\theta_L) \tag{5.34}$$

Aufgrund der Quellenfreiheit der magnetischen Induktion ***B*** ist diese und der magnetische Fluß im Eisen und in der Luft identisch und es gilt

$$B_{Eisen} = B_{Luft} = \mu_0 \cdot \mu_{r,Eisen} \cdot H_{Eisen} = \mu_0 \cdot \mu_{r,Luft} \cdot H_{Luft} \quad . \tag{5.35}$$

Die magnetische Feldstärke im Eisen H_{Eisen} ist wegen

$$\mu_{r,Eisen} >> \mu_{r,Luft} \tag{5.36}$$

wesentlich kleiner als die Feldstärke H_{Luft} im Luftspalt. Der Integrationsweg C_{Luft} ist das doppelte des Luftspaltes δ. Daraus folgt für das Durchflutungsgesetz

$$B_L(\theta_L) = +\frac{\mu_0}{2\delta} \cdot I_e \cdot N(\theta_L) \qquad \text{mit} \qquad 0 \le \theta_L \le \frac{\pi}{2} \quad . \tag{5.37}$$

Die positive Pfeilung der Induktion sei hier vom Stator zum Läufer hin gerichtet. Dadurch ergibt sich das positive Vorzeichen für die Induktion.

<u>Beispiel:</u> Läufer gemäß ***Bild 4.9***, N_L = 18 Windungen

Gemäß ***Bild 4.9*** ist die (azimutale) Schrittweite an den Positionen der einzelnen Windungen 10°. Die Integration erfolgt entlang der Feldlininen, die zu betrachtenden Integrationswege treten zwischen den einzelnen Windungen an den Positionen

$$\begin{aligned} \theta_L &= \left(\frac{2k-1}{2}\right) \cdot 10^o = (2k-1) \cdot 5^o \qquad \text{mit} \qquad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\ &= 5^o, 15^o, 25^o, 35^o, 45^o, 55^o, 65^o \end{aligned} \tag{5.38}$$

hindurch. $N(\theta_L)$ kann daher nur für diskrete Werte von θ_L gemäß (5.38) im Bereich $0 \le \theta_L \le \pi/2$ ausgewertet werden. Im Winkelbereich $\pi/2 \le \theta_L \le \pi$ nimmt die "effektive" Windungszahl $N(\theta_L)$ wieder ab, da hier Ströme in Gegenrichtung in die Gesamtdurchflutung eingehen. Das Magnetfeld im Bereich $\pi \le \theta_L \le 2\pi$ ist entgegen dem Magnetfeld im Bereich $0 \le \theta_L \le \pi$ gerichtet. Damit hat man die magnetische Induktion $B_L(\theta_L)$ über den gesamten Winkelbereich $0 \le \theta_L \le 2\pi$, wie in ***Bild 4.10*** für diskrete Werte für θ_L dargestellt.

Eine Fourier-Analyse von $B_L(\theta_L)$ zeigt, daß der Verlauf der Induktion $B_L(\theta_L)$ mit guter Näherung durch eine Sinusschwingung dargestellt werden kann (***Bild 4.10*****c**). Die Amplituden $A_{i,L}$ höherer Frequenzen sind gegenüber A_1 vernachlässigbar gering und damit ist

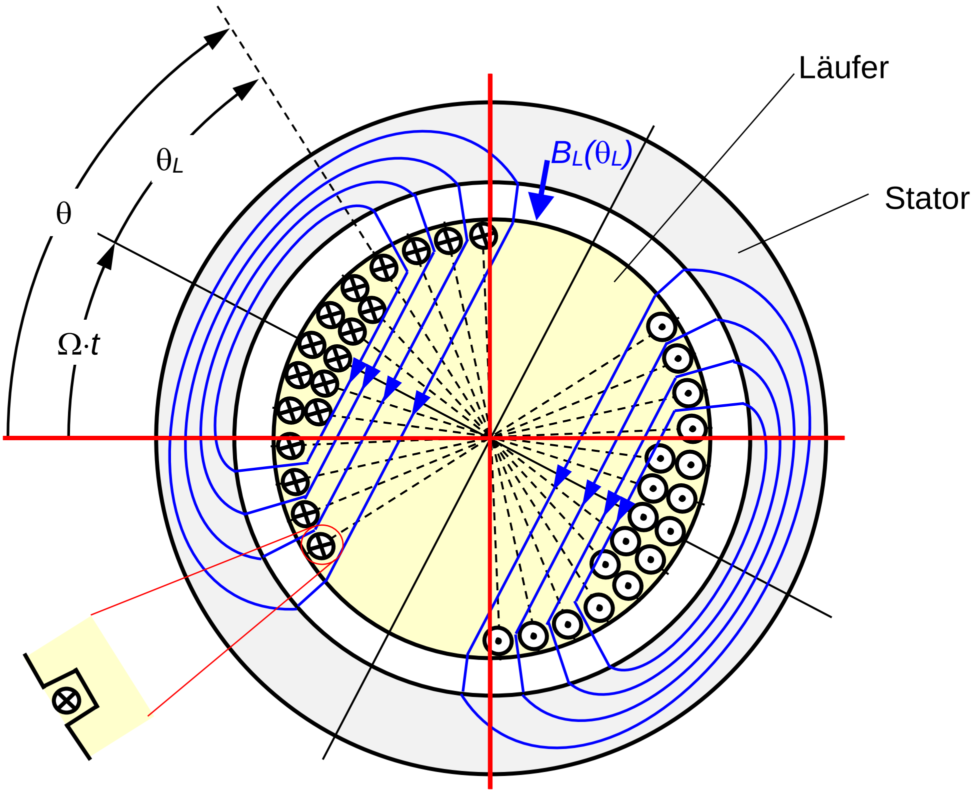
$$B_L(\theta_L) = \frac{\mu_0}{2\delta} \cdot I_e \cdot N_L \cdot \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,L} \cdot \sin(k\,\theta_L) \approx \frac{\mu_0 N_L A_{1,L}}{2} \cdot \frac{I_e}{\delta} \cdot \sin(\theta_L) \quad . \tag{5.39}$$

Dies läßt sich noch weiter vereinfachen und verallgemeinern:

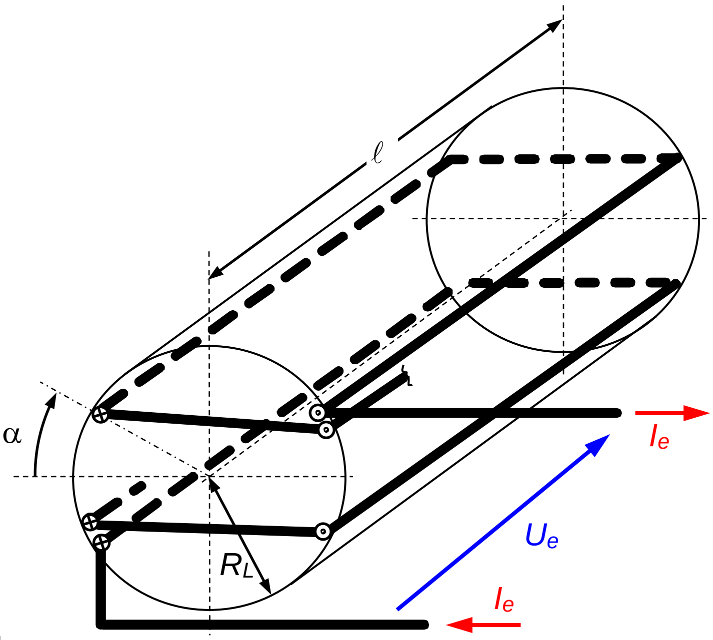
$$B_L(\theta_L) = C \cdot \frac{I_e}{\delta} \cdot \sin(\theta_L) = C \cdot \frac{I_e}{\delta} \cdot \sin(\theta - \Omega \cdot t) = \hat{B}_L \cdot \sin(\theta - \frac{\omega}{p} t) = B_L(\theta) \quad . \tag{5.40}$$

Dieses Magnetfeld stellt ein <u>Drehfeld</u> dar, da es sich mit dem Läufer dreht. Für p = 1 und t = 0 ist direkt einsichtig, dass das Magnetfeld über dem Umfang sinusförmig verläuft (***Bild 4.10***).

*$B_L(\theta_L)$ ist ein **magnetisches Drehfeld**. Erzeugt wurde es durch ein festes Magnetfeld, hervorgerufen durch einen Gleichstrom, auf einem rotierenden Läufer.*



a.



b.

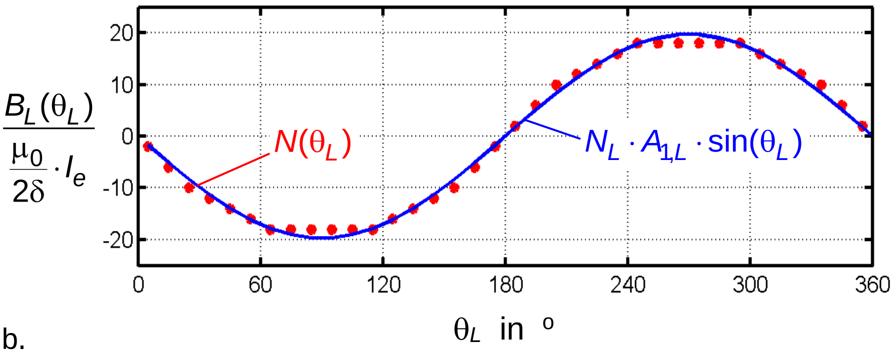
Bild 4.9 Magnetisches Feld des stromdurchflossenen Läufers

a. Prinzipielle Anordnung des stromdurchflossenen Läufers für $p = 1$

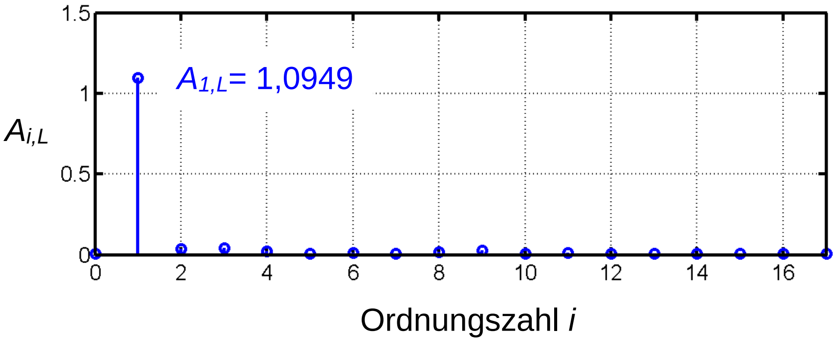
b. Anordnung der Leiter für $p = 1$

k	θ_L	$N(\theta_L)$
1	5	2
2	15	6
3	25	10
4	35	12
5	45	14
6	55	16
7	65	18
8	75	18
9	85	18

a.



b.



c.

Bild 4.10 Beispielhafter Verlauf des Magnetfeldes im Luftspalt zwischen Stator und Läufer gemäß der Anordnung in ***Bild 4.9*** (für p = 1)

a. Wertetabelle für $N(\theta_L)$ mit $N_L = 18$

b. Verlauf von $N(\theta_L)$ mit $N_L = 18$ und zugehörige Grundschwingung

c. Ergebnis der Fourieranalyse von $N(\theta_L)$

4.2.1.3 Mehrpolige Maschinen

Bei mehrpoligen Maschinen mit einer Polpaarzahl $p \geq 2$ führt eine Umdrehung des Läufers, d. h. ein Winkelbereich für den mechanischen Drehwinkel θ_m von $0 \leq \theta_m \leq 2\pi$ zu einem sinusförmigen Magnetfeld mit der Periode $2 \cdot 2\pi$ für $p = 2$ (***Bild 4.11***) oder allgemein zu der Periode $p \cdot 2\pi$. Daraus lässt sich der folgende Zusammenhang zwischen dem mechanischen Drehwinkel θ_m und dem elektrischen Drehwinkel θ_{el} des Läufers ableiten:

$$\theta_{el} = p \cdot \theta_m \quad . \tag{5.41}$$

Für die mechanische Winkelgeschwindigkeit Ω und die elektrische Winkelgeschwindigkeit ω_r des Läufers erhält man daraus

$$\frac{d\theta_{el}}{dt} = \omega_r = p \cdot \frac{d\theta_m}{dt} = p \cdot \Omega \quad . \tag{5.42}$$

Im stationären Zustand ist die elektrische Winkelgeschwindigkeit $\omega_r = \omega_{r,0}$ des Läufers identisch mit der Kreisfrequenz ω_S des in der Statorwicklung induzierten Spannungssystems und identisch mit der synchronen elektrischen Winkelgeschwindigkeit ω_0, d. h. man erhält insgesamt

$$\omega_0 = \omega_{r,0} = \omega_S = p \cdot \Omega_0 = 2 \cdot \pi \cdot f_N \tag{5.43}$$

oder

$$n = \frac{60 \cdot f_N}{p} \quad . \tag{5.44}$$

Darin sind n die Läuferdrehzahl in 1/min, f_N die Netzfrequenz in Hz und p die Polpaarzahl.

Bild 4.11 zeigt den Verlauf des Magnetfeldes B_L im Luftspalt für eine 4-polige Maschine (p = 2) über dem elektrischen Drehwinkel θ_{el} und dem mechanischen Drehwinkel θ_m.

Bei fester Netzfrequenz f_N ist eine Maschine mit der Polpaarzahl p = 1 und der mechanischen Drehzahl Ω_0 hinsichtlich des Magnetfeldes im Luftspalt äquivalent zu einer mehrpoligen Maschine mit der Polpaarzahl p und der mechanischen Drehzahl des Läufers Ω_0/p. Für die mathematische Analyse einer beliebigen Synchronmaschine genügt es daher, bei gegebener Netzfrequenz f_N, den Bereich 0…2π des elektrischen Drehwinkels θ_{el} des Läufers zu betrachten, da das Magnetfeld im Luftspalt in diesem Winkelbereich ein ganze Periode durchläuft.

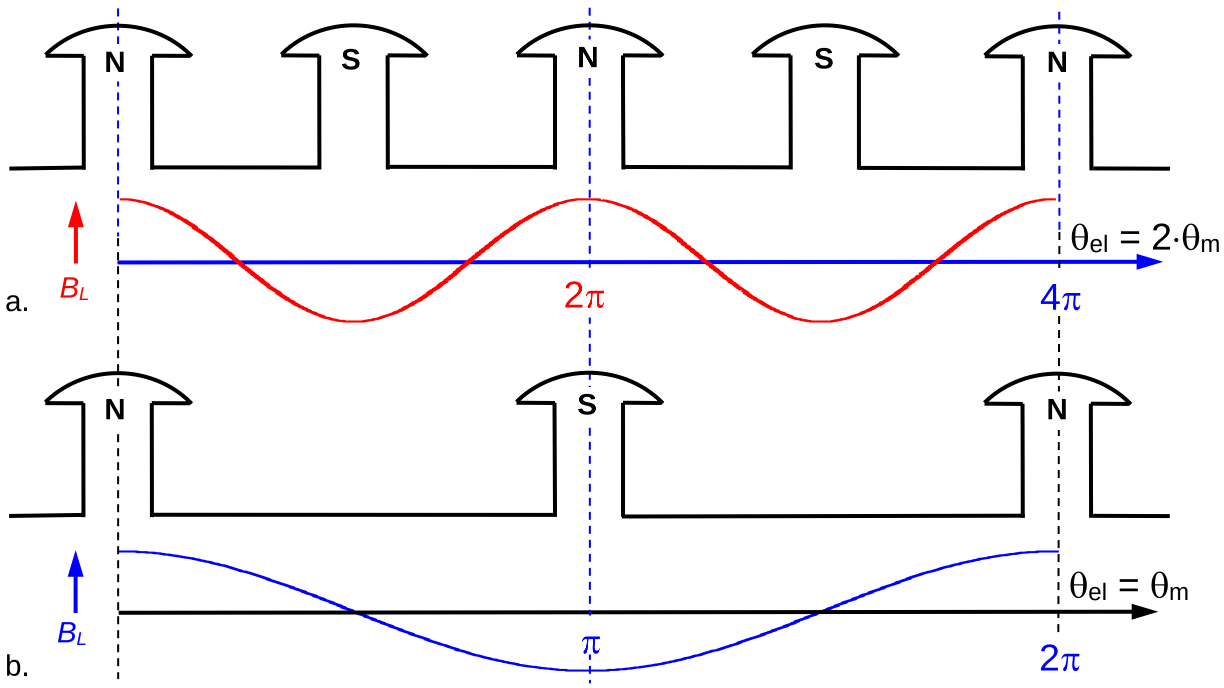


Bild 4.11 Magnetfeld B_L im Luftspalt als Funktion des elektrischen Drehwinkels θ_{el} und des mechanischen Drehwinkels θ_m des Läufers einer
a. 4-poligen Maschine (p = 2)
b. 2-poligen Maschine (p = 1)

4.2.1.4 Induzierte Spannung in der Statorwicklung

Das Magnetfeld des Läufers induziert in den Spulen des Stators eine Spannung, da dieses Magnetfeld bei sich drehendem Läufer über die feststehenden Statorwicklungen hinwegstreicht. Dadurch entsteht für die Statorspulen ein zeitveränderlicher magnetischer Fluss $\phi(t)$.

Die 3 Statorspulen A, B und C sind um jeweils 120° räumlich gegeneinander versetzt. Zur Berechnung der in der Statorwicklung induzierten Spannung wird zunächst eine Spulengruppe betrachtet (***Bild 4.12a***), z. B. die Spulengruppe A, und die Spannung u_q berechnet, die in einer einzigen Windung induziert wird. Die betrachtete Windung steht von der Mittellinie aus betrachtet unter dem Winkel θ_q. Der magnetische Fluss, welcher durch die von der Windung aufgespannten Ebene tritt, tritt auch durch die Mantelfläche (***Bild 4.12b***). Auf der Mantelfläche stehen die magnetischen Feldlinien senkrecht. Diese beiden Eigenschaften des Magnetfeldes vereinfachen die Berechnung deutlich. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird - der besseren Übersicht wegen - die Berechnung für $p = 1$ durchgeführt.

Für den magnetischen Fluss durch die Mantelfläche gilt

$$\begin{aligned}\phi_{q,L} &= \int_A B_L(\theta)\cdot dA = \int_{\theta_q}^{\pi-\theta_q} R\cdot\ell\cdot\hat{B}_L\cdot\sin(\theta-\omega t)\,d\theta = -R\cdot\ell\cdot\hat{B}_L\cdot\cos(\theta-\omega t)\Big|_{\theta_q}^{\pi-\theta_q}\\ &= -R\cdot\ell\cdot\hat{B}_L\cdot\left(\cos(\pi-\theta_q-\omega t)-\cos(\theta_q-\omega t)\right)\\ &= R\cdot\ell\cdot\hat{B}_L\cdot\left(2\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\omega t)\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\theta_q)\right) \;=\; 2\cdot R\cdot\ell\cdot\hat{B}_L\cdot\cos(\theta_q)\cdot\cos(\omega t)\end{aligned} \quad . \tag{5.45}$$

Bei der gegebenen Pfeilung der induzierten Spannung u_q und des magnetischen Flusses $\phi_{q,L}$ (***Bild 4.12c***) gilt für die in einer Windung unter dem Winkel α_q von der Horizontalen induzierten Spannung u_q:

$$u_q = -\frac{d\phi_{q,L}}{dt} = +\left(2\cdot R\cdot\ell\cdot\omega\cdot\hat{B}_L\cdot\cos(\theta_q)\right)\cdot\sin(\omega t) \qquad \text{mit} \quad \hat{B}_L \approx \frac{\mu_0 N_L A_{1,L}}{2}\cdot\frac{I_e}{\delta} \quad . \tag{5.46}$$

Nun kann man die in jeder Windung induzierte Spannung zur Gesamtspannung der Spule aufsummieren. Mit den Bezeichnungen in ***Bild 4.12d*** und der beispielhaft angenommenen ungeradzahligen Windungszahl N_S jeder Spulengruppe der Statorwicklung erhält man:

$$\begin{aligned}u_{A,L} &= +2\cdot R\cdot\ell\cdot\omega\cdot\hat{B}_L\cdot(1+2\cdot\sum_{q=1}^{\frac{N_S-1}{2}}\cos(q\cdot\varepsilon))\cdot\sin(\omega t)\\ &= \left[R\cdot\ell\cdot\omega\cdot\mu_0 N_L A_{1,L}\cdot\frac{I_e}{\delta}\cdot(1+2\cdot\sum_{q=1}^{\frac{N_S-1}{2}}\cos(q\cdot\varepsilon))\right]\cdot\sin(\omega t) \;=\; \hat{U}_L\cdot\sin(\omega t)\end{aligned} \quad . \tag{5.47}$$

Gemäß Gleichung (5.47) wird also in den einzelnen um 120° versetzten Spulengruppen A, B und C der Statorwicklung insgesamt das symmetrische Drehspannungssystem

$$u_{A,L} = \hat{U}_L\cdot\sin(\omega t) \qquad u_{B,L} = \hat{U}_L\cdot\sin(\omega t-\frac{2\pi}{3}) \qquad u_{C,L} = \hat{U}_L\cdot\sin(\omega t-\frac{4\pi}{3}) \quad . \tag{5.48}$$

induziert. Aufgrund der Symmetrie lässt sich ein einpoliges Ersatzschaltbild angeben (***Bild 4.13***).

In der Statorwicklung wird eine Spannung induziert, die von Geometrieparametern und vom Erregerstrom I_e abhängt. Ist keine Last an den Statorklemmen angeschlossen ($\underline{I}_1 = 0$), so steht an den Klemmen der Statorwicklung die Polradspannung $\underline{U}_P$ an.

Im Läufer wird durch das Magnetfeld des Läufers keine Spannung induziert. Das Magnetfeld des Läufers rotiert mit derselben Winkelgeschwindigkeit wie der Läufer selbst und bewegt sich daher bezüglich des Läufers nicht. Demnach ist

$$u_{Läufer}(B_L) = 0 \quad . \tag{5.49}$$

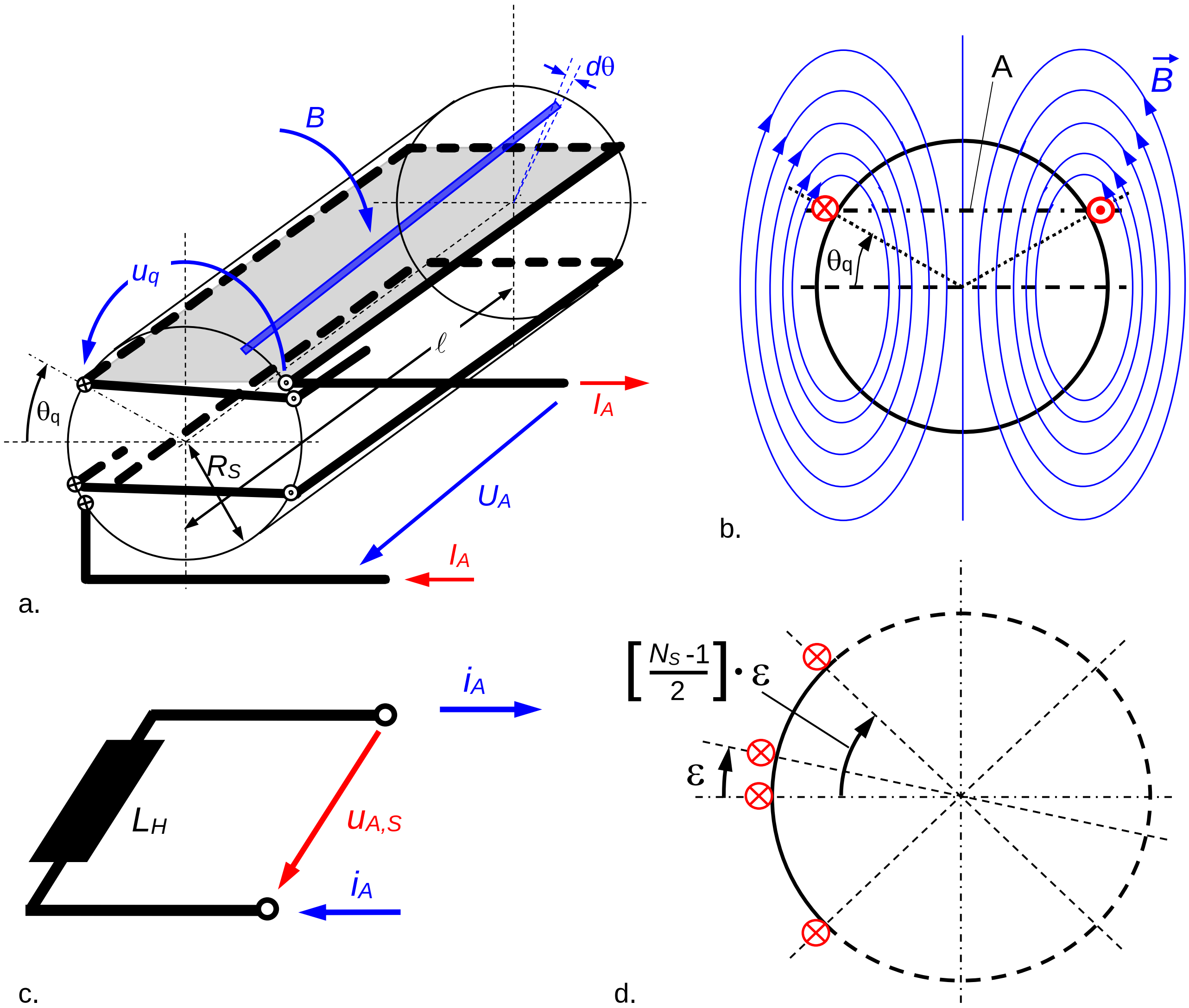


Bild 4.12 Berechnung der induzierten Spannung in der Statorwicklung durch das Magnetfeld $B_L(\theta)$ des Läufers

a. Statorwicklung: eine Spulengruppe
b. Ansicht des Stators von vorn, Betrachtung einer Stromschleife unter dem Winkel θ_q und dem Magnetfeld $B_L(\theta)$
c. Hauptinduktivität der betrachteten Spulengruppe A, sowie induzierte Spannung und Strom $i_A = i_A(t)$
d. Lage der Windungen bei ungeradzahliger Windungszahl

4.2.1.5 Berechnung der Hauptinduktivität L_H der Statorwicklung

Bei der folgenden Betrachtung wird davon ausgegangen, dass die magnetische Kopplung zwischen Stator und Läufer stets konstant ist und nicht von der Stellung der Läuferbezugsachse zur Statorbezugsachse abhängt. Diese Voraussetzung ist für Vollpolgeneratoren (Turbogeneratoren) ausreichend gut gegeben, nicht jedoch für Schenkelpolgeneratoren.

Ist an den Klemmen der 3-phasigen Statorwicklung der Synchronmaschine eine Last angeschlossen, so fließt in der Statorwicklung ein Strom – sowohl im Motor- als auch im Generatorbetrieb der Maschine. Da insgesamt symmetrische Verhältnisse vorliegen, handelt es sich um ein symmetrisches Drehstromsystem:

$$\begin{aligned} i_A &= \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \gamma) \\ i_B &= \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}) \quad . \\ i_C &= \hat{I} \cdot \sin(\omega t + \gamma - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned} \tag{5.50}$$

Betrachtet wird nun wieder stellvertretend für das symmetrische 3-phasige System die Spulengruppe A. Für die Spannung, die an der Hauptinduktivität L_H der Spulengruppe A infolge des Stromes $i_A = i_A(t)$ abfällt, gilt:

$$u_{A,S} = L_H \cdot \frac{di_A}{dt} = L_H \cdot \frac{d(\hat{I} \cdot \sin(\omega t + \gamma))}{dt} = L_H \cdot \hat{I} \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \gamma) \quad . \tag{5.51}$$

Diese Spannung kann auch noch anders berechnet werden: man berechnet das Magnetfeld $B_S(\alpha)$ im Luftspalt aufgrund des 3-phasigen Drehstromsystems gemäß Gleichung (5.50) und berechnet dann die durch dieses Magnetfeld in der Spulengruppe A induzierte Spannung. Das Vorgehen zur Berechnung der induzierten Spannung ist dabei analog zu dem Verfahren bei der Berechung der Polradspannung, d. h. Berechnung des magnetischen Flusses in einer Leiterscheife der Spulengruppe A und Aufsummieren der induzierten Spannungen zur Gesamtspannung.

<u>1. Schritt: Berechnung des Magnetfeldes $B_S(\alpha)$ infolge der Statorströme</u>

Betrachtet wird zunächst wieder eine Spulengruppe gemäß ***Bild 4.12*a**. Die Anordnung prinzipiell dieselbe wie beim Läufer (***Bild 4.9***); lediglich die stromdurchflossenen Leiter liegen auf der anderen Seite des Luftspaltes und der speisende Strom ist ein Wechselstrom. Bezugsachse der Spulengruppe A sei die Horizontale. Entsprechend der Pfeilung des Stromes $i_A(t)$ in ***Bild 4.12*a** erhält man

$$B_{S,SpuleA}(\alpha,t) = \frac{\mu_0}{2\delta} \cdot i_A(t) \cdot N_S \cdot \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,S} \cdot \sin(k\alpha) \approx \underbrace{\frac{\mu_0 N_S A_{1,S}}{2}}_{K} \cdot \frac{i_A(t)}{\delta} \cdot \sin(\alpha) \tag{5.52}$$

Entsprechend gilt für die räumlich um 120° und 240° versetzten Spulengruppen B und C:

$$\begin{aligned} B_{S,SpuleB}(\alpha,t) &= K \cdot \frac{i_B(t)}{\delta} \cdot \sin(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \\ B_{S,SpuleC}(\alpha,t) &= K \cdot \frac{i_C(t)}{\delta} \cdot \sin(\alpha - \frac{4\pi}{3}) \end{aligned} \quad . \tag{5.53}$$

Lineare Verhältnisse vorausgesetzt, kann der Überlagerungssatz angewandt werden und man erhält für die magnetische Induktion im Luftspalt aufgrund der Ströme in der Statorwicklung:

$$B_{S,SpuleB}(\alpha,t) = \frac{K}{\delta} \cdot \left[i_A(t) \cdot \sin(\alpha) + i_B(t) \cdot \sin(\alpha - \frac{2\pi}{3}) + i_C(t) \cdot \sin(\alpha - \frac{4\pi}{3}) \right] \quad . \tag{5.54}$$

Die Ständerwicklung soll mit einem symmetrischen Drehstromsystem gemäß (5.50) gespeist werden. Damit ergibt sich für das vom Stator erzeugte Magnetfeld im Luftspalt

$$
\begin{aligned}
B_S(\alpha,t) &= \frac{\hat{I}\cdot K}{\delta}\cdot\left[\sin(\omega t+\gamma)\cdot\sin(\alpha)+\sin(\omega t+\gamma-\frac{2\pi}{3})\cdot\sin(\alpha-\frac{2\pi}{3})+\sin(\omega t+\gamma-\frac{4\pi}{3})\cdot\sin(\alpha-\frac{4\pi}{3})\right]\\
&= \frac{\hat{I}\cdot K}{2\delta}\cdot\Big[\cos(\omega t-\gamma-\alpha)-\cos(\omega t+\gamma+\alpha)+\cos(\omega t-\gamma-\alpha)-\cos(\omega t+\gamma+\alpha-\frac{4\pi}{3})\\
&\qquad +\cos(\omega t-\gamma-\alpha)-\cos(\omega t+\gamma+\alpha-\frac{8\pi}{3})\Big] \qquad\qquad . \quad (5.55)\\
&= \frac{\hat{I}\cdot K}{2\delta}\cdot\Big[3\cos(\omega t-\gamma-\alpha)\ \cancel{-\cos(\omega t+\gamma+\alpha)-\cos(\omega t+\gamma+\alpha-\frac{4\pi}{3})-\cos(\omega t+\gamma+\alpha-\frac{8\pi}{3})}\Big]\\
&= \frac{3}{2}\frac{\hat{I}\cdot K}{\delta}\cdot\cos(\omega t-\gamma-\alpha) = \left(\frac{\mu_0 N_S A_{1,S}}{2}\cdot\frac{3}{2\delta}\cdot\hat{I}\right)\cdot\cos(\alpha-\omega t-\gamma) = \hat{B}_S\cdot\cos(\alpha-\omega t-\gamma)
\end{aligned}
$$

Die 2. Art, ein ***magnetisches Drehfeld*** *zu erzeugen ist die Speisung von drei, räumlich um 120° versetzten Spulengruppen mit einem symmetrischen Drehstromsystem, dessen Ströme ihrerseits um 120° elektrisch gegeneinander versetzt sind.*

2. Schritt: Berechnung des magnetischen Flusses und der induzierten Spannung

Analog zu der Berechnung des magnetischen Flusses aufgrund des Magnetfeldes $B_L(\alpha)$ erhält man für den magnetischen Fluß in der Statorwicklung A aufgrund des Magnetfeldes $B_S(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\phi_{q,S} &= \int_A B_S(\alpha)\cdot dA = \int_{\alpha_q}^{\pi-\alpha_q} R\cdot\ell\cdot\hat{B}_S\cdot\cos(\alpha-\omega t-\gamma)d\alpha = R\cdot\ell\cdot\hat{B}_S\cdot\sin(\alpha-\omega t-\gamma)\Big|_{\alpha_q}^{\pi-\alpha_q}\\
&= R\cdot\ell\cdot\hat{B}_S\cdot\left(\sin(\pi-\alpha_q-\omega t-\gamma)-\sin(\alpha_q-\omega t-\gamma)\right) \qquad\qquad . \quad (5.56)\\
&= R\cdot\ell\cdot\hat{B}_S\cdot\left(2\cdot\cos(\frac{\pi}{2}-\omega t-\gamma)\cdot\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha_q)\right) = 2\cdot R\cdot\ell\cdot\hat{B}_S\cdot\cos(\alpha_q)\cdot\sin(\omega t+\gamma)
\end{aligned}
$$

Die in der Windung q induzierte Spannung ist dann

$$
u_{q,S} = -\frac{d\phi_{q,S}}{dt} = -\left(2\cdot R\cdot\ell\cdot\omega\cdot\hat{B}_S\cdot\cos(\alpha_q)\right)\cdot\cos(\omega t+\gamma) \quad . \qquad (5.57)
$$

Aufsummiert erhält man die in der Spulengruppe A induzierte Spannung aufgrund des Statorfeldes $B_S(\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
u_{A,S} &= -2\cdot R\cdot\ell\cdot\omega\cdot\hat{B}_S\cdot(1+2\cdot\sum_{q=1}^{\frac{N_S-1}{2}}\cos(q\cdot\varepsilon))\cdot\cos(\omega t+\gamma)\\
&= \left[-2\cdot R\cdot\ell\cdot\omega\cdot\frac{3K}{2}\cdot\frac{\hat{I}}{\delta}\cdot(1+2\cdot\sum_{q=1}^{\frac{N_S-1}{2}}\cos(q\cdot\varepsilon))\right]\cdot\cos(\omega t+\gamma) = \hat{U}_S\cdot\cos(\omega t+\gamma) \qquad . \quad (5.58)
\end{aligned}
$$

Die Spulengruppen B und C sind gegenüber der Spulengruppe A räumlich um 120° und 240° versetzt. In den Spulengruppen A, B und C wird daher das folgende Drehspannungssystem induziert:

$$\begin{aligned} u_{A,S} &= \hat{U}_S \cdot \cos(\omega t + \gamma) \\ u_{B,S} &= \hat{U}_S \cdot \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3} + \gamma) \\ u_{C,S} &= \hat{U}_S \cdot \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3} + \gamma) \end{aligned} \quad . \tag{5.59}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich der Gleichungen ergibt sich für die Hauptinduktivität L_H

$$\begin{aligned} L_H &= 2 \cdot R \cdot \ell \cdot \frac{3K}{2} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot (1 + 2 \cdot \sum_{q=1}^{\frac{N_S - 1}{2}} \cos(q \cdot \varepsilon)) = \mu_0 \cdot N_S \cdot A_{1,S} \cdot R \cdot \ell \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot (1 + 2 \cdot \sum_{q=1}^{\frac{N_S - 1}{2}} \cos(q \cdot \varepsilon)) \\ &\overset{A_{1,S} \approx 1}{\approx} \mu_0 \cdot N_S \cdot R \cdot \ell \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot (1 + 2 \cdot \sum_{q=1}^{\frac{N_S - 1}{2}} \cos(q \cdot \varepsilon)) \end{aligned} \quad . \tag{5.60}$$

Im Läufer wird durch das Magnetfeld der Statorwicklungen $B_S(\alpha)$ *keine Spannung* induziert, da dieses Feld mit derselben Geschwindigkeit umläuft, wie der Läufer selbst. Für $p = 1$ ist dies unmittelbar einsehbar. Deshalb ist

$$u_{Läufer}(B_S) = 0 \quad . \tag{5.61}$$

Das Magnetfeld des rotierenden Läufers und das Magnetfeld des Ständers überlagern sich zu einem resultierenden Magnetfeld im Luftspalt. Meßtechnisch erfasst werden kann nur das resultierende Magnetfeld.

4.2.1.6 Ersatzschaltung

Das vom Läuferstrom erzeugte Magnetfeld induziert in den räumlich um 120° gegeneinander versetzten Statorspulen ein symmetrisches Drehspannungssystem. Bei stehendem Läufer wird keine Spannung in der Statorwicklung induziert ($\underline{U}_P = 0$).

Bei symmetrischer Belastung des Generators fließt in den 3 Statorspulen ein symmetrisches Drehstromsystem, das ein Magnetfeld erzeugt. Ein Teil dieses Magnetfeldes durchsetzt sowohl die Statorspule, den Luftspalt und den Läufer und ergänzt sich zu einem Drehfeld. Bei der Berechnung des Magnetfeldes $B_S(\alpha)$ wurde vorausgesetzt, dass sich das gesamte aufgrund des Drehstromsystems entstehende Magnetfeld der 3 Statorspulen zu einem Drehfeld ergänzt. Tatsächlich ist dies nicht der Fall. Einige Feldlinien der in den einzelnen Statorspulen erzeugten Magnetfelder schließen sich im Bereich der Statorwicklung und treten nicht in den Luftspalt oder den Läufer ein. Dieser Anteil des gesamten Magnetfeldes, das so genannte Streufeld wird durch die Streuinduktivität $L_{\sigma 1}$ nachgebildet. Jener Anteil des Magnetfeldes, der sich zu einem Drehfeld ergänzt wird durch die Hauptinduktivität L_H im Ersatzschaltbild modelliert. Beide Induktivitäten liegen in Serie und beschreiben das gesamte von dem symmetrischen Drehstromsystem in den Statorwicklungen erzeugte Magnetfeld.

Aus der Überlagerung der beiden Magnetfelder und ihrer Wirkungen kommt man zu dem in ***Bild 4.13*** dargestellten statorseitigen Ersatzschaltbild, das noch durch den Wicklungswiderstand R_1 der Statorwicklungen ergänzt werden muss. Im Läufer wird bei synchronem Betrieb – und nur dieser wird hier betrachtet – keine Spannung induziert. Das Ersatzschaltbild des Läufers besteht daher nur aus der Streuinduktivität $L_{\sigma e}$ der Läuferwicklung (Erregerwicklung) und deren

Widerstand R_e. Aufgrund der im stationären Zustand betrachteten konstanten Erregung (I_e = const.) kann $L_{\sigma e}$ eigentlich entfallen.

Zusammenfassend kann das Ersatzschaltbild gemäß ***Bild 4.13*** folgendermaßen interpretiert werden:

- Das vom rotierenden Läufer erzeugte Magnetfeld $B_L(\theta)$ induziert in der Statorwicklung die Polradspannung $\underline{U}_P$.
- Das bei Belastung fließende symmetrische Drehstromsystem erzeugt in den Statorwicklungen ein Magnetfeld, das durch die beiden Induktivitäten L_H und $L_{\sigma 1}$ beschrieben wird.
- Die an der Hauptinduktivität L_H der Statorwicklung bei fließendem Statorstrom abfallende Spannung $\underline{U}_A$ wird als „Ankerrückwirkung" bezeichnet. Man kann die Spannung $\underline{U}_A$ auch als „Selbstinduktionsspannung" betrachten.
- Die Synchronmaschine kann als Wechselspannungsquelle interpretiert werden, die über einen Gleichstromkreis gesteuert wird.

Wenn – wie in der elektrischen Energieversorgung meist der Fall – die Synchronmaschine als Generator arbeitet, ist es sinnvoll, den Strom, der aus der Statorwicklung heraus fließt, positiv zu zählen. Man wendet hier das Erzeugerzählpfeilsystem an.

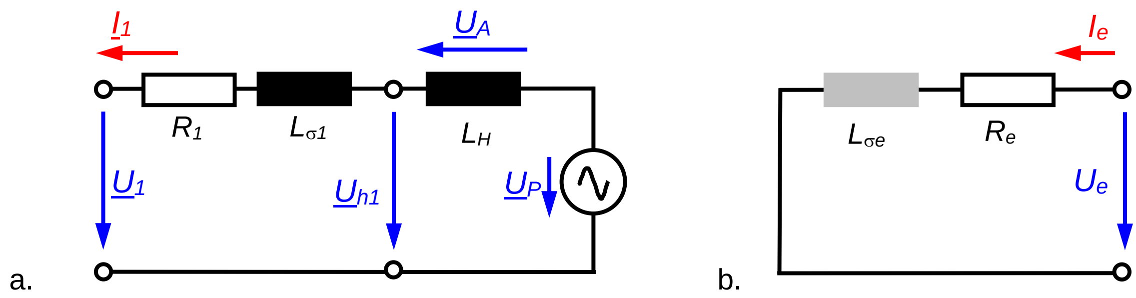


Bild 4.13 Ersatzschaltbild eines Synchrongenerators (Vollpol- oder Turbogenerator) im stationären Zustand
a. statorseitiges Ersatzschaltbild
b. läuferseitiges Ersatzschaltbild

4.2.2 Zeigerdiagramm und Stromortskurve des Vollpolgenerators

Aus der Ersatzschaltung gemäß ***Bild 4.13*** gilt für den Motor- als auch für den Generatorbetrieb einer Synchronmaschine:

$$\underline{U}_P = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega \cdot L_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1 + j\omega \cdot L_H \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_1 \quad . \tag{5.62}$$

Gegeben seien die Spannung $\underline{U}_1$, der Strom $\underline{I}_1$ und der Winkel φ zwischen $\underline{U}_1$ und $\underline{I}_1$. (Der Winkel φ ist stets vom Strom zur Spannung hin gerichtet.) Der Synchrongenerator sei induktiv belastet. Er gibt dann induktive Blindleistung an die Last ab. Der aus dem Generator fließende Strom $\underline{I}_1$ eilt also der Spannung $\underline{U}_1$ um den Winkel φ nach. Bei belastetem Generator nimmt der Polradwinkel ϑ zwischen $\underline{U}_P$ und $\underline{U}_1$ einen Wert $\vartheta \neq 0$ an. Im Generatorbetrieb ist der Polradwinkel stets $\vartheta > 0$, die Polradspannung $\underline{U}_P$ eilt also der Spannung $\underline{U}_1$ und der Spannung $\underline{U}_{h1}$ voraus.

Konstruktion des Zeigerdiagramms:

① Die Spannung $\underline{U}_1$ wird in die positiv reelle Achse gelegt. $\underline{I}_1$ ist gegenüber $\underline{U}_1$ um den Winkel φ nacheilend (siehe Pfeilung bei Generatorbetrieb).

② An der Spitze von $\underline{U}_1$ setzt der Spannungsabfall $R_1 \cdot \underline{I}_1$ an, gepfeilt in Richtung von $\underline{I}_1$.

③ Der Spannungsabfall an $L_{\sigma 1}$ ($j\omega \cdot L_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1$) ist gegenüber dem Strom $\underline{I}_1$ um 90° voreilend, d. h. gegenüber dem Strom $\underline{I}_1$ um 90° in die mathematisch positive Richtung gedreht.

④ Damit kann die Spannung $\underline{U}_{h1}$ vom Ursprung bis zum Ende des Pfeiles $j\omega \cdot L_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1$ eingetragen werden.

⑤ Die Ankerrückwirkung $\underline{U}_A$ hat dieselbe Richtung wie der Spannungsabfall an $L_{\sigma 1}$ ($j\omega \cdot L_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1$).

⑥ Die Polradspannung $\underline{U}_P$ geht vom Ursprung zum Ende des Pfeiles $\underline{U}_A$.

⑦ Der Winkel ϑ zwischen $\underline{U}_P$ und $\underline{U}_1$ ist der Polradwinkel.

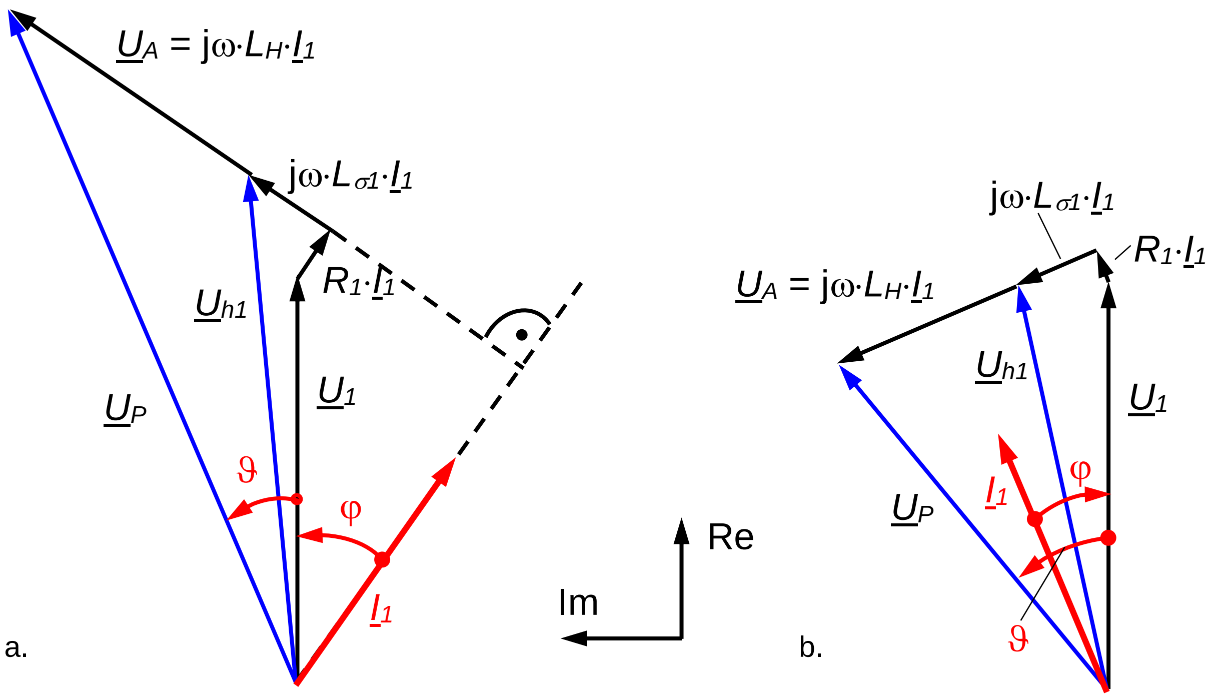


Bild 4.14 Zeigerdiagramm eines Synchrongenerators; übererregter Betrieb, Abgabe induktiver Blindleistung (a.); untererregter Betrieb, Abgabe kapazitiver Blindleistung (b.)

Bei induktiver Belastung des Generators sinkt die Klemmenspannung U_1 bei steigender Belastung aufgrund des Spannungsabfalls an (L_H+$L_{\sigma 1}$) ab. Um U_1 konstant zu halten, muss U_P erhöht werden; der Erregerstrom I_e muss also erhöht werden. Man bezeichnet diesen Betriebszustand deshalb als *„Übererregung"*. Induktive Belastung bedeutet, dass der Generator induktive Blindleistung abgibt. Dies entspricht der Aufnahme kapazitiver Blindleistung durch den Generator. Der Generator wirkt also am Netz wie eine Kapazität.

Das Ersatzschaltbild des Synchrongenerators mit kapazitiver Last ist ein LC-Serienschwingkreis. Die Spannung an der Kapazität eines LC-Serienschwingkreises (= Klemmenspannung U_1 des Generators) kann aufgrund der Resonanz höher werden, als die anregende Polradspannung U_P. Um die Klemmenspannung U_1 konstant zu halten, muss U_P verringert werden. Dazu muss der Erregerstrom I_e verringert werden. Dies wird als *„Untererregung"* bezeichnet.

Bei kapazitiver Belastung gibt der Synchrongenerator kapazitive Blindleistung ab, was der Aufnahme induktiver Blindleistung entspricht. Vom Netz aus gesehen verhält sich der Generator also wie eine Drossel.

Zusammenfassend ist also:

Induktive Belastung: Abgabe induktiver Blindleistung ≡ Aufnahme kapazitiver Blindleistung: **„Übererregung“**
Kapazitive Belastung: Abgabe kapazitiver Blindleistung ≡ Aufnahme induktiver Blindleistung: **„Untererregung“**

Im *Phasenschieberbetrieb* läuft die Synchronmaschine als *mechanisch unbelasteter Motor* am Netz mit. Bei rein induktiver Belastung der Maschine eilt der Statorstrom $\underline{I}_1$ der Spannung $\underline{U}_1$ um 90° nach, d. h. der Strom -$\underline{I}_1$ eilt der Spannung $\underline{U}_1$ um 90° voraus (***Bild 4.15*a**). Aufgrund der Ankerrückwirkung verringert sich das Polradfeld, d. h. das Magnetfeld des rotierenden Läufers. Demnach muß die Erregung erhöht werden, um ein Absinken von $\underline{U}_1$ zu verhindern. In diesem Betriebszustand gibt die Maschine induktive Blindleistung an das Netz ab. Der Strom $\underline{I}_1$, der von der Maschine aufgenommen wird, eilt der Spannung um 90° vor, dies entspricht der Aufnahme kapazitiver Blindleistung. Die Synchronmaschine wirkt also wie eine ans Netz geschaltete Kapazität. Damit verringert sich der Betrag der induktiven Blindleistung des Systems Netz-Synchronmaschine.

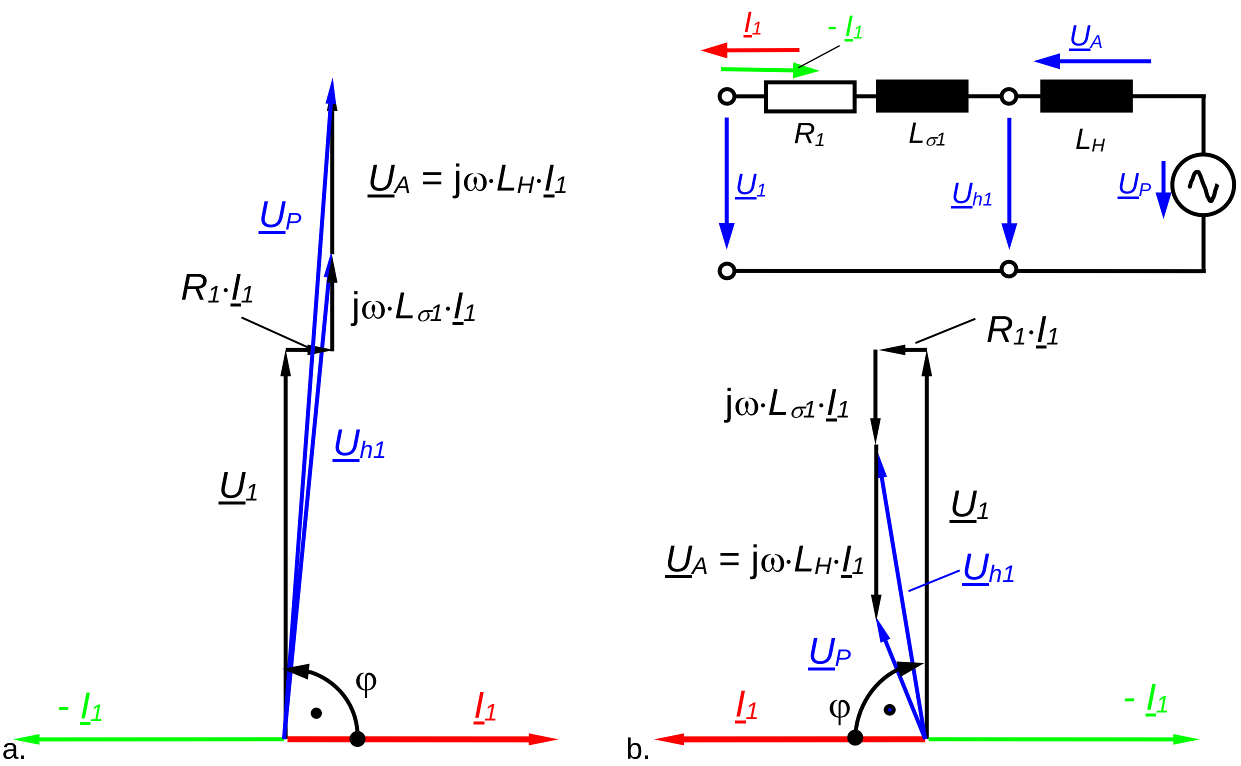


Bild 4.15 Phasenschieberbetrieb der Synchronmaschine, Betriebsverhalten der mechanisch unbelasteten (leer laufenden) Synchronmaschine am Netz
a. Induktive Belastung der Synchronmaschine, entspricht kapazitivem Verhalten
b. Kapazitive Belastung der Synchronmaschine, entspricht induktivem Verhalten

Bei rein kapazitiver Belastung der Maschine (Abgabe kapazitiver Blindleistung) eilt der Statorstrom $\underline{I}_1$ der Spannung $\underline{U}_1$ um 90° voraus, d. h. der Strom -$\underline{I}_1$ eilt der Spannung $\underline{U}_1$ um 90° nach (***Bild 4.15*b**). Die Ankerrückwirkung vergrößert die Polradspannung. Um eine Erhöhung der Klemmenspannung $\underline{U}_1$ zu verhindern, muß die Erregung gegenüber dem Leerlauf verringert werden. In diesem Betriebszustand gibt die Maschine kapazitive Blindleistung ab, d. h. sie nimmt induktive Blindleistung auf. Damit wirkt sie wie eine ans Netz geschaltete Induktivität (Drossel). Sie verringert damit den kapazitiven Charakter des Netzes etwas.

4.2.3 Besonderheiten des Schenkelpolgenerators gegenüber dem Vollpolgenerator

Im Gegensatz zu dem magnetisch nahezu rotationssymmetrisch aufgebauten Läufer des Vollpolgenerators besitzt ein Schenkelpolgenerator stark unterschiedliche Reaktanzen in Pollücke und Polachse längs des Umfangs ***Bild 4.16*a**).

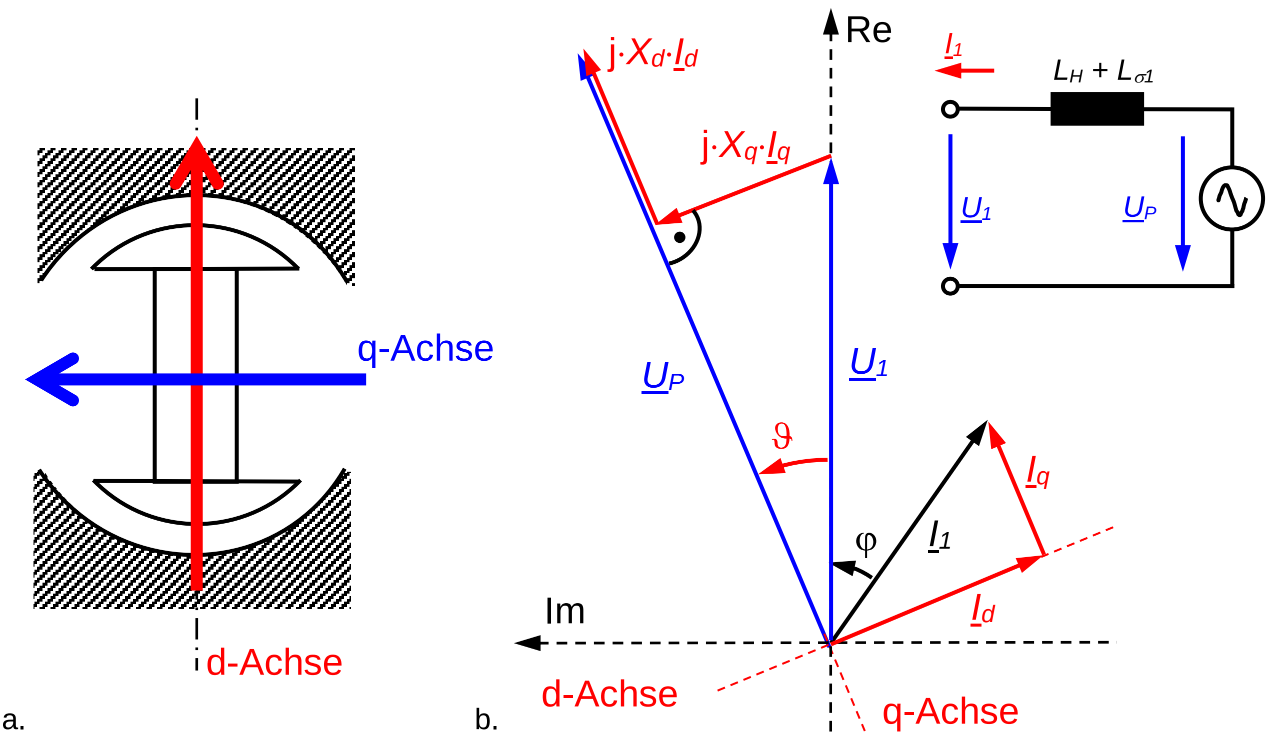


Bild 4.16 Besonderheiten der Schenkelpolmaschine
a. Lage der q-Achse und d-Achse
b. Zeigerdiagramm der Schenkelpolmaschine

Die Hauptinduktivität L_H ist umgekehrt proportional zum Luftspalt δ. Daher ist bei geringstem Luftspalt δ die synchrone Reaktanz am größten. Sie wird mit X_d bezeichnet. Entsprechend ist in der Pollücke der Luftspalt am größten und damit die zugehörige Reaktanz X_q am kleinsten. X_d wird als *synchrone Längsreaktanz*, X_q als *synchrone Querreaktanz* bezeichnet. Die sogenannte *d-Achse* weist in Richtung der Pole während die *q-Achse* ist in Richtung der Pollücke orientiert ist und damit senkrecht auf der d-Achse steht.

Es gelten folgende Größenverhältnisse für die Längs- und Querreaktanz:

$$X_q < X_d \quad \text{und} \quad X_q = \begin{cases} 0{,}9 \cdot X_d & \text{für Vollpolgeneratoren} \\ 0{,}5...0{,}7 \cdot X_d & \text{für Schenkelpolgeneratoren} \end{cases} \quad . \tag{5.63}$$

Für einen bestimmten Statorstrom hängt die Ausbildung des Statordrehfeldes von seiner Lage des Polrades zum Stator ab. Man zerlegt deshalb das Drehfeld des Stators, also die Ankerrückwirkung, in eine Längskomponente in Richtung der Polachse (d-Achse) und eine Querkomponente in Richtung der Pollücke (q-Achse).

$$\underline{B}_S(\alpha) = \underline{B}_{S,d} + j \cdot \underline{B}_{S,q} \quad . \tag{5.64}$$

Genauso kann man auch den Statorstrom in eine Komponente in Richtung der d-Achse und in eine Komponente in Richtung der q-Achse zerlegen (***Bild 4.16b***). Damit läßt sich die Ankerrückwirkung für die d-Achse und die q-Achse getrennt bestimmen. Speziell die Schenkelpolmaschine läßt sich mit der sogenannten *Zweiachsentheorie* durch Anwendung der *Park-Transformation oder d-q-0-Transformation* noch genauer modellieren. An dieser Stelle sei hierzu auf die einschlägige Literatur und entsprechende Vorlesungen über elektrische Maschinen verwiesen.

4.2.4 Drehmoment und Leistung des Synchrongenerators

Dem ***Bild 4.16b*** können aus geometrischen Betrachtungen die folgenden Beziehungen entnommen werden:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 \cdot \cos\vartheta \cdot e^{j\vartheta} &= \underline{U}_P - j \cdot X_d \cdot \underline{I}_d \\ j \cdot \underline{U}_1 \cdot \sin\vartheta \cdot e^{j\vartheta} &= j \cdot X_q \cdot \underline{I}_q \end{aligned} \quad . \tag{5.65}$$

Diese Gleichungen werden nach $\underline{I}_d$ und $\underline{I}_q$ aufgelöst. Für den Strom $\underline{I}_1$ erhält man mit

$$e^{j\vartheta} = \cos\vartheta + j \cdot \sin\vartheta \tag{5.66}$$

den folgenden Ausdruck:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_d + \underline{I}_q = \frac{\underline{U}_1}{2} \cdot \sin 2\vartheta \cdot \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) - j \left[\frac{\underline{U}_P - \underline{U}_1 \cdot \cos^2\vartheta}{X_d} - \frac{\underline{U}_1 \cdot \sin^2\vartheta}{X_q} \right] \quad . \tag{5.67}$$

Die Spannung $\underline{U}_1$ liege in der reellen Achse; die Spannung $\underline{U}_P$ ist gegenüber $\underline{U}_1$ um den Winkel ϑ in mathematisch positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) gedreht, d. h. es ist

$$\underline{U}_1 = U_1 \qquad \underline{U}_P = U_P \cdot e^{j\vartheta} = U_P \cdot (\cos\vartheta + j \sin\vartheta) \quad . \tag{5.68}$$

Damit folgt für den Strom $\underline{I}_1$ aus Gleichung (5.67):

$$\underline{I}_1 = \frac{U_1}{2} \cdot \sin 2\vartheta \cdot \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + \frac{U_P \cdot \sin\vartheta}{X_d} + j \left[\frac{U_1 \cdot \sin^2\vartheta}{X_q} - \frac{U_P \cdot \cos\vartheta - U_1 \cdot \cos^2\vartheta}{X_d} \right] . \tag{5.69}$$

Die statorseitig abgegebene Scheinleistung lässt sich aus dem Statorstrom $\underline{I}_1$ gemäß (5.69) und mit (5.68) durch folgende Beziehung berechnen (***Bild 4.17a***):

$$
\begin{aligned}
\underline{S}_1 &= P_1 + jQ_1 = 3 \cdot \underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* \\
&= 3 \cdot U_1 \left\{ \frac{U_1}{2} \cdot \sin 2\vartheta \cdot \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + \frac{U_P \cdot \sin\vartheta}{X_d} \right\} - j \cdot 3 \cdot U_1 \left[\frac{U_1 \cdot \sin^2\vartheta}{X_q} - \frac{U_P \cdot \cos\vartheta - U_1 \cdot \cos^2\vartheta}{X_d} \right] \\
&= 3 \cdot U_1 \left\{ \frac{U_1}{2} \cdot \sin 2\vartheta \cdot \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + \frac{U_P \cdot \sin\vartheta}{X_d} \right\} + j \cdot 3 \cdot U_1 \left[\frac{U_P \cdot \cos\vartheta - U_1 \cdot \cos^2\vartheta}{X_d} - \frac{U_1 \cdot \sin^2\vartheta}{X_q} \right]
\end{aligned}
\quad . \tag{5.70}
$$

Im Generatorbetrieb ist die an den Statorklemmen abgegebene elektrische Leistung P_1 gleich der zugeführten mechanischen Leistung P_{mech} abzüglich der Verluste P_V:

$$
P_1 = P_{mech} - P_V = (M \cdot \Omega) - P_V = \left(M \cdot \frac{\omega_S}{p} \right) - P_V \quad . \tag{5.71}
$$

Bei Vernachlässigung der Verluste ($P_V = 0$, d. h. insbesondere $R_1 = 0$) erhält man aus (5.71) mit (5.70) für die Wirkleistung P_1 und die Blindleistung Q_1:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= M \cdot \Omega = M \cdot \frac{\omega_S}{p} = 3 \cdot U_1 \cdot \left[\frac{U_1}{2} \cdot \sin 2\vartheta \cdot \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) + \frac{U_P \cdot \sin\vartheta}{X_d} \right] \\
Q_1 &= 3 \cdot U_1 \cdot \left[\frac{U_P \cdot \cos\vartheta - U_1 \cdot \cos^2\vartheta}{X_d} - \frac{U_1 \cdot \sin^2\vartheta}{X_q} \right]
\end{aligned}
\quad . \tag{5.72}
$$

Im Generatorbetrieb ist P_1 wegen der in dieser Vorlesung eingeführten Pfeilung des Stromes $\underline{I}_1$ und wegen $X_q < X_d$ positiv ($P_1 > 0$). Im Motorbetrieb ist P_1 dann negativ. Die Blindleistung Q_1 ist positiv ($Q_1 > 0$), falls der Generator induktive Blindleistung abgibt, d. h. kapazitive Blindleistung aufnimmt und damit im übererregten Zustand arbeitet. Umgekehrt wird im Falle einer kapazitiven Belastung des Synchrongenerators, d. h. im untererregten Betrieb, die Blindleistung Q_1 negativ ($Q_1 < 0$). Es ist zu beachten, dass in der Literatur die Blindleistung bisweilen auch mit umgekehrtem Vorzeichen wie in ***Bild 4.17a*** definiert wird.

Für das Drehmoment M erhält man

$$
\begin{aligned}
M &= \underbrace{\left(3 \cdot \frac{p}{\omega_S} \right) \cdot \frac{U_P \cdot U_1 \cdot \sin\vartheta}{X_d}}_{\text{Drehmoment des Vollpolgenerators}} + \underbrace{\left(3 \cdot \frac{p}{\omega_S} \right) \cdot \frac{U_1^2}{2} \cdot \sin 2\vartheta \cdot \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right)}_{\text{Reaktionsmoment des Schenkelpolgenerators}} \\
&= \underbrace{\left(3 \cdot \frac{p}{\omega_S} \right) \cdot \frac{U_P \cdot U_1}{X_d}}_{M_k} \cdot \left[\sin\vartheta + \frac{1}{2} \frac{U_1}{U_P} \left(\frac{X_d}{X_q} - 1 \right) \cdot \sin 2\vartheta \right]
\end{aligned}
\quad . \tag{5.73}
$$

M_k wird als „Kippmoment" bezeichnet (***Bild 4.17***). Die Synchronmaschine arbeitet nur bis zum maximalen Drehmoment (Kippmoment M_k) statisch stabil. Der Polradwinkel ϑ_k, bei dem das Kippmoment erreicht wird, ergibt sich aus

$$
\frac{\partial M}{\partial \vartheta} = M_k \cdot \left[\cos\vartheta_k + \frac{U_1}{U_P} \left(\frac{X_d}{X_q} - 1 \right) \cdot \cos 2\vartheta_k \right] \overset{!}{=} 0 \quad . \tag{5.74}
$$

Mit dieser Forderung erhält man nach einigen Umformungen ($\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$, $\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta$) für den Bereich der statischen Stabilität:

$$-\vartheta_k \le \vartheta \le +\vartheta_k \quad \text{mit} \quad \vartheta_k = \arccos\left(-\frac{1}{4\alpha} + \sqrt{\left(\frac{1}{4\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}}\right) \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{U_1}{U_P}\left(\frac{X_d}{X_q} - 1\right). \quad (5.75)$$

Man kann dem Generator eine maximale elektrische Leistung $P_{1,k}$ an den Klemmen abfordern, die dem „Kippmoment" M_k entspricht. Wird die Generatorbelastung weiter gesteigert, so wird der Läufer unter die synchrone Drehzahl ω_S/p abgebremst. Der Generator fällt dann „außer Tritt".

Für Vollpolgeneratoren gilt wegen $X_d \approx X_q$ für die Wirk- und die Blindleistung sowie für das an der Welle anstehende (Generatorbetrieb) bzw. abgegebene Drehmoment M (Motorbetrieb) sowie für den Bereich der statischen Stabilität

$$P_1 = 3\frac{U_1 U_P}{X_d}\sin\vartheta \qquad Q_1 = 3\left[\frac{U_1 U_P \cos\vartheta}{X_d} - \frac{U_1^2}{X_d}\right] \qquad M = \left(3\frac{p}{\omega_S}\right)\frac{U_P U_1}{X_d}\sin\vartheta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le +\frac{\pi}{2}\,. \quad (5.76)$$

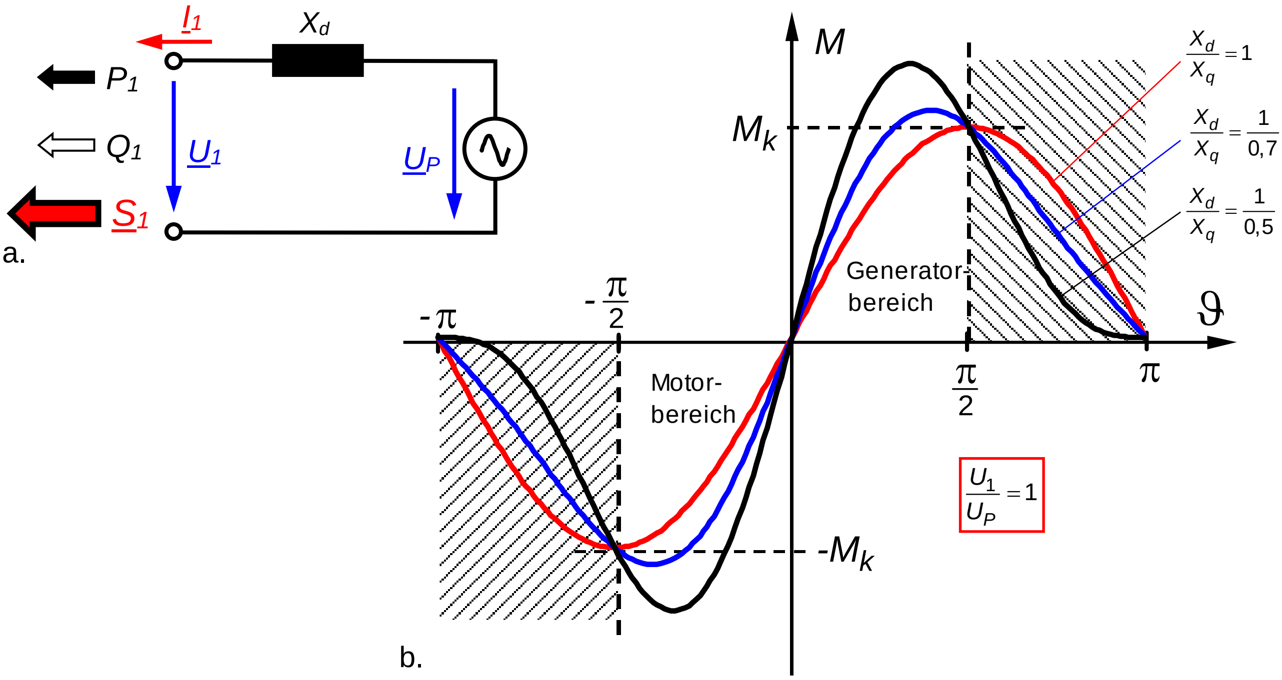


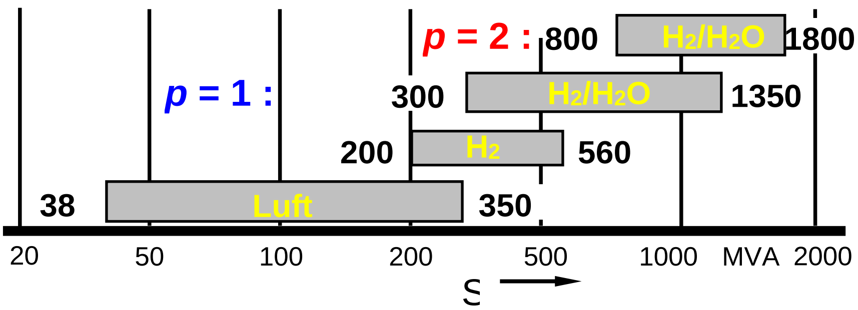
Bild 4.17 a. Ersatzschaltbild (vereinfacht, nur Hauptreaktanz X_d)
b. Kennlinie des Drehmomentes M einer Synchronmaschine für $U_1/U_P = 1$

Falls die Synchronmaschine am Beispiel des Motorbetriebs betrachtet wird, so wählt man häufig das umgekehrte Vorzeichen für den Strom $\underline{I}_1$, als das hier verwendete. Dann wäre für den Motorbetrieb die aufgenommene Wirkleistung positiv und auch das an der Motorwelle entstehende Drehmoment. Diese unterschiedliche Betrachtungsweise erklärt, warum man in der Literatur verschiedene Darstellungen findet. Es ist jedoch vorteilhaft, eine zu dem jeweiligen Anwendungsfall passende Darstellungsform zu wählen.

4.2.5 Technische Ausführung von Synchrongeneratoren

4.2.5.1 Baugrößen

In Abhängigkeit von der Nennscheinleistung S_N werden Synchrongeneratoren üblicherweise mit den in ***Bild 4.18*** zusammengestellten Nennspannungen ausgeführt. In ***Bild 4.18*** ist das Spektrum der lieferbaren Turbogeneratoren und der jeweiligen Kühlungsart von Läufer- und Statorwicklung eines großen Herstellers dargestellt. Bei Wasserkühlung der Stator- und der Läuferwicklung sind Einheitenleistungen bis über 2000 MVA möglich.



S_N in MVA bis ca.	U_N in kV
2	0,4
20	6,3
200	10,5
300	15,75
1000	21
> 1000	27

Bild 4.18 Produktspektrum (Leistungen, Spannungen, Kühlarten des Läufers/Stators eines Herstellers von 50-Hz-Turbogeneratoren

In ***Bild 4.19*** ist das Wickelschema der Statorwicklung gezeigt. Demnach entstehen an beiden Enden der Maschine so genannte Wickelköpfe und an einem Ende zusätzlich die Anschlüsse der Wicklung. ***Bild 4.20*****a** zeigt eine Ende eines 1500-MVA-Generators mit den Wickelköpfen. Zu sehen ist ferner die Lage der Statorstäbe in den Nuten des Statoreisens und die Verkeilung der Statorstäbe (***Bild 4.20*****b**). Gut zu erkennen ist ebenfalls die quer zur Statorachse ausgeführte Blechung des Statoreisens.

Synchrongeneratoren sollen eine möglichst geringe synchrone Reaktanz aufweisen. Deren größter Anteil ist die Hauptinduktivität L_H. Der Luftspalt δ ist umgekehrt proportional zur Hauptinduktivität L_H. Deshalb weisen Synchrongeneratoren Luftspalte im Bereich einiger cm auf. Bei großen Generatoren findet man Luftspalte im Bereich von 5...10 cm. Dies kommt auch der Endmontage der Generatoren zugute, bei der der Läufer in den Stator eingeführt werden muß.

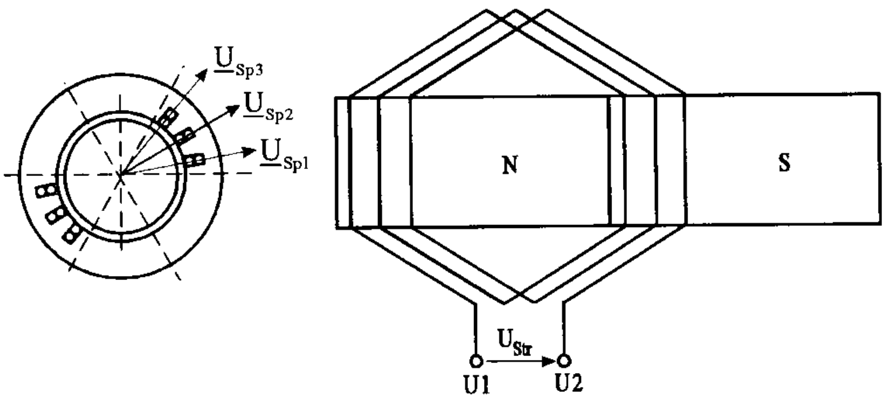
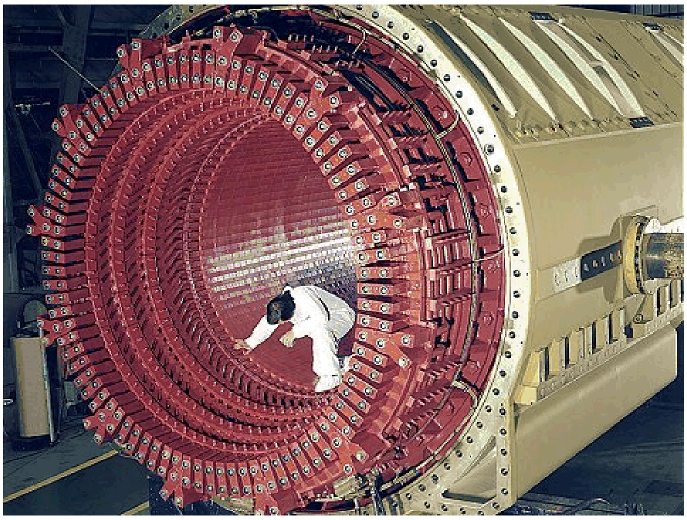


Bild 4.19 Wicklungsprinzip der Statorwicklung



a.

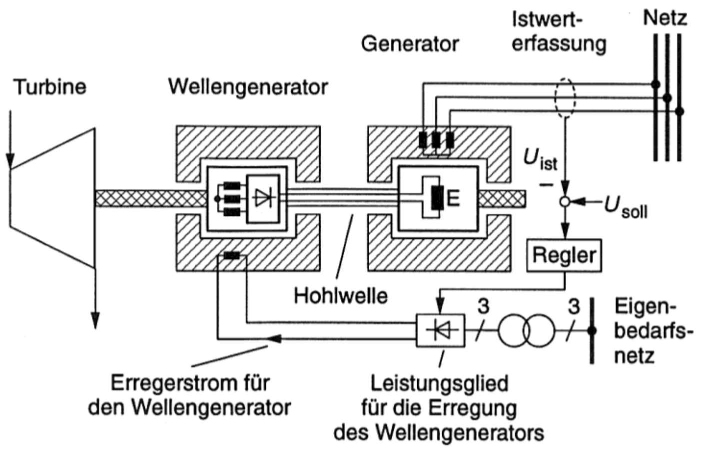
b.

Bild 4.20 a. Stator eines 1500-MVA-Generators, 4-polig
b. Lage der Statorstäbe in den Statorblechen mit einem Nutkeil verspannt

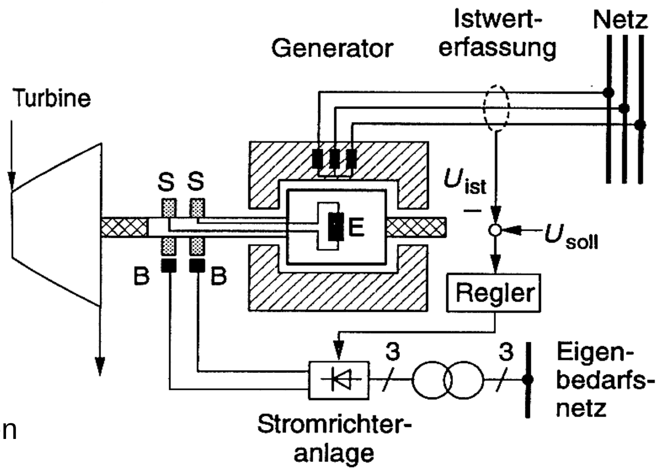
4.2.5.2 Erregung von Synchrongeneratoren

Grundsätzlich gibt es 3 Arten der Erregung von Synchronmaschinen (***Bild 4.21***):

- Erregung durch einen Permanentmagneten (Permanenterregung),
- Bürstenlose Erregung und
- Erregung über Schleifringe.



a.



b.

Bild 4.21 Erregung von Synchrongeneratoren
a. Bürstenlose Erregung
b. Erregung des Synchrongenerators über Stromrichter und Schleifringe

Die **Permanenterregung** hat den Nachteil, dass eine Regelung des Synchrongenerators nicht möglich wäre; sie kann für große Synchrongeneratoren deshalb nicht zur Anwendung kommen.

Bei der **bürstenlosen Erregung** ist auf derselben Welle die Erregermaschine angeordnet. Sie ist als hochpolige *Außenpolmaschine* ausgeführt, d. h. die Drehstromwicklung sitzt auf der sich drehenden Welle und die Erregerwicklung ist im Stator untergebracht. Die Drehstromwicklung liefert einen Drehstrom, der einen (rotierenden) Gleichrichter speist. Dieser liefert den Gleichstrom zur Erregung des Synchrongenerators. ***Bild 4.21*a** zeigt den Synchrongenerator und die zu seiner Erregung notwendige Außenpolmaschine sowie die zur Spannungsregelung notwendigen Baugruppen wie Stromrichter, Regler und Istwerterfassung der Netzspannung.

Bei der Erregung über Schleifringe speist ein Stromrichter, z. B. ein netzgeführter Thyristorstromrichter, einen Gleichstrom über Schleifringe in die Erregerwicklung des Synchrongenerators. Der Stromrichter wird meist aus einer Fremdquelle, d. h. einem separaten Eigenbedarfsnetz gespeist. ***Bild 4.21*b** zeigt den prinzipiellen Aufbau der Stromrichtererregung über Schleifringe.

4.3 Transformatoren

4.3.1 Magnetische Kopplung, Gegeninduktivität

In einem Stromkreis „1“ wird durch eine Spannungsquelle ein Stromfluß und damit der magnetische Fluss ϕ_1 in der Leiterschleife „1“ erzeugt. Ein bestimmter Anteil ϕ_{12} dieses magnetischen Flusses durchsetzt die Leiterschleife „2“ und induziert dort eine Spannung, die einen Strom durch den Widerstand R_2 treibt. Der Strom i_2 erzeugt – gemäß der Lenz’schen Regel – ein magnetisches Feld in der Leiterschleife „2“, das entgegen dem Feld der Leiterschleife „1“ gerichtet ist. Aber auch die Leiterschleife „1“ wird von einem Teil des Magnetfeldes der Leiterschleife „2“ durchsetzt und induziert dort eine Spannung. In diesem Sinn wirkt der Strom i_2 durch das magnetische Feld in der Leiterschleife „2“ auf die Leiterschleife „1“ zurück.

Zur Analyse dieses gekoppelten Vorgangs bietet sich die Anwendung des Überlagerungsprinzips an, da das System linear ist. Dazu wird zunächst (gedanklich) $i_2 = 0$ gesetzt (z. B. durch $R_a \to \infty$). Man definiert nun eine *Gegeninduktivität M_{12}* (oder *Koppelinduktivität*) gemäß

$$\Psi_{12} = M_{12} \cdot i_1 \quad , \tag{5.77}$$

worin Ψ_{12} den (verketteten) magnetischen Fluß bezeichnet, mit dem die Leiterschleife „2“ verkettet ist, wenn kein Strom i_2 fließt ($i_2 = 0$). Die in der Leiterschleife „2“ induzierte Spannung ist dann

$$u_{w2}(t) = +\frac{d\Psi_{12}(t)}{dt} = +M_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \quad . \tag{5.78}$$

Umgekehrt kann man (gedanklich) die Quelle entfernen, so dass $i_1 = 0$ wird. Speist man dann den Stromkreis „2“ mit einer Spannungsquelle, die einen Stromfluß i_2 in der selben Richtung erzeugt, wie der Induktionsvorgang selbst (also so wie in ***Bild 4.22*** eingetragen), so lässt sich ein verketteter magnetischer Fluß

$$\Psi_{21} = M_{21} \cdot i_2 \tag{5.79}$$

definieren, mit dem die Leiterschleife „1“ verkettet ist, wenn kein Strom i_1 fließt ($i_1 = 0$). Der Fluß Ψ_{21} ist dem Fluß Ψ_{12} entgegen gerichtet. In der Leiterschleife „1“ wird dann die Spannung

$$u_{w1}(t) = -\frac{d\Psi_{21}(t)}{dt} = -M_{21} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \tag{5.80}$$

induziert.

Nun kann der Überlagerungssatz angewandt werden; die in einer Leiterschleife induzierten Spannungen rühren einmal von der Selbstinduktion und zum anderen von der magnetischen Kopplung aus der jeweils anderen Leiterschleife her:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= R_1 \cdot i_1(t) + u_{w1}(t) &&= R_1 \cdot i_1(t) + L_{11} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - M_{21} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \\ u_2(t) &= -R_2 \cdot i_2(t) + u_{w2}(t) &&= -R_2 \cdot i_2(t) + M_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - L_{22} \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \end{aligned} \quad . \tag{5.81}$$

Mit dem Ansatz gemäß Gleichung (5.27) erhält man mit (5.77) und (5.79) für den Zusammenhang zwischen den magnetischen Flüssen und den Induktivitäten:

$$\begin{aligned} &\phi_1 = \frac{\Psi_1}{w_1} = \frac{L_{11} \cdot i_1}{w_1} && \phi_2 = \frac{\Psi_2}{w_2} = \frac{L_{22} \cdot i_2}{w_2} \\ \text{und} \quad &\phi_{12} = \frac{\Psi_{12}}{w_2} = \frac{M_{12} \cdot i_1}{w_2} && \phi_{21} = \frac{\Psi_{21}}{w_1} = \frac{M_{21} \cdot i_2}{w_1} \end{aligned} \quad . \tag{5.82}$$

Aus Symmetriegründen gilt:

$$M_{21} = M_{12} = M \quad . \tag{5.83}$$

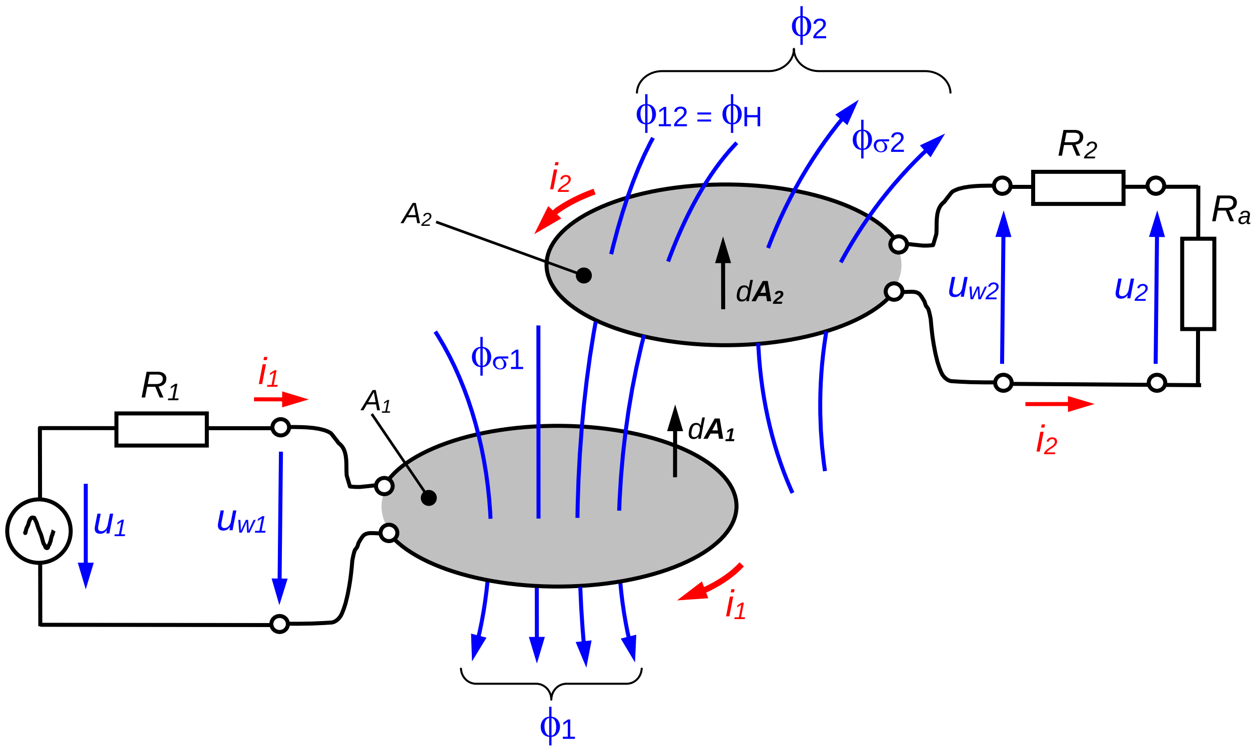


Bild 4.22 Zwei magnetisch gekoppelte Stromkreise, bestehend aus den Leiterschleifen „1“ und „2“, einer Einspeisung und einem Lastwiderstand R_a

Gemäß dem Ansatz beträgt der Fluß ϕ_{12} nur ein Bruchteil des Flusses ϕ_1. Wären die Leiterschleifen exakt identisch und gäbe es auch sonst keine Streuung, so wären auch die magnteischen Widerstände der beiden Leiterschleifen identisch, d. h.

$$L_{11} = \frac{w_1^2}{R_m} \qquad \text{und} \qquad L_{22} = \frac{w_2^2}{R_m} \qquad \text{oder} \qquad \frac{L_{11}}{L_{22}} = \frac{w_1^2}{w_2^2} \quad . \tag{5.84}$$

Aus **Bild 4.22** geht hervor, dass dann auch die magnetischen Flüsse ϕ_1 und ϕ_{12} identisch wären:

$$\frac{M_{12} \cdot i_1}{w_2} = \phi_{12} \overset{\text{keine Streuung}}{=} \phi_1 = \frac{L_{11} \cdot i_1}{w_1} \quad ; \tag{5.85}$$

für die *Koppelinduktivität oder Gegeninduktivität* würde man den folgenden Ausdruck erhalten:

$$M_{12} = M_{21} = M = \frac{w_2 \, L_{11}}{w_1} = \frac{L_{11}}{\sqrt{\dfrac{L_{11}}{L_{22}}}} = \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}} \quad . \tag{5.86}$$

Die vollständige magnetische Kopplung der beiden Leiterschleifen stellt den Idealfall dar, den es in der Praxis nicht gibt. Es werden immer einige Feldlinien, welche die Leiterschleife „1“ durchsetzen, einen Weg nehmen, der an der Leiterschleife „2“ vorbei führt. In der Energietechnik ist eine gewisse Streuung oft gewollt, oder sogar technisch absolut notwendig. Daher gilt immer

$$M_{12} = M_{21} = M = k \cdot \sqrt{L_{11} \cdot L_{22}} \qquad \text{mit} \qquad 0 \le k < 1 \quad . \tag{5.87}$$

Der Faktor k wird als Koppelfaktor bezeichnet.

Aus der Interpretation der Gleichung (5.81) lässt sich direkt eine Ersatzschaltung zweier magnetisch gekoppelter Stromkreise ableiten (***Bild 4.23a***). Eine weitere Ersatzschaltung erhält man mit dem Ansatz

$$\frac{u_1^{'}}{u_2} = \frac{w_1}{w_2} = \ddot{u} \qquad \text{und} \qquad \frac{i_1^{'}}{i_2} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{\ddot{u}} \quad . \tag{5.88}$$

Eingesetzt in die Gleichung (5.81) ergibt sich ein Gleichungssystem, das auch wieder durch ein Ersatzschaltbild dargestellt werden kann (***Bild 4.23b***):

$$u_1(t) = R_1 \cdot i_1(t) + L_{11} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - \ddot{u} \cdot M_{21} \cdot \frac{di_1^{'}(t)}{dt}$$

$$u_2(t) = -R_2 \cdot \ddot{u} \cdot i_1^{'}(t) + M_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - \ddot{u} \cdot L_{22} \cdot \frac{di_1^{'}(t)}{dt} = \frac{u_1^{'}(t)}{\ddot{u}} \quad . \tag{5.89}$$

und damit

$$u_1^{'}(t) = -R_2 \cdot \ddot{u}^2 \cdot i_1^{'}(t) + \ddot{u} \cdot M_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} - \ddot{u}^2 \cdot L_{22} \cdot \frac{di_1^{'}(t)}{dt}$$

Gleichung (5.88) beschreibt einen „*idealen Transformator*“, der lediglich eine Spannungs- und Stromübersetzung macht. In einem *idealen Transformator* erfolgt keine Energiespeicherung, Ausgangsleistung und Eingangsleistung sind identisch. Er stellt die einfachste Ersatzschaltung eines realen Transformators dar und ist deshalb sehr wichtig. Die in ***Bild 4.23a/b*** dargestellten Ersatzschaltungen gelten im Grunde auch für Transformatoren, in der Energietechnik werden diese Ersatzschaltung so jedoch meist nicht verwendet.

4.3.2 Ersatzschaltungen von Transformatoren

Bild 4.22 legt noch eine andere Interpretation der magnetischen Flüsse nahe. Der gesamte in der Leiterschleife „1“ wirksame magnetische Fluss ϕ_1 kann in einen Streufluß $\phi_{\sigma 1}$, der die Leiterschleife „2“ nicht durchsetzt, und in einen Hauptfluß ϕ_H, der beide Leiterschleifen durchsetzt, aufgeteilt werden:

$$\phi_1(t) = \phi_{\sigma 1}(t) + \phi_{12}(t) \qquad \text{und} \qquad \phi_{12}(t) = \phi_H(t) \quad . \tag{5.90}$$

Mit Gleichung (5.82) erhält man daraus für die Streuinduktivität $L_{\sigma 1}$ und die Hauptinduktivität L_H

$$\begin{aligned} L_{\sigma 1} &= \frac{\phi_{\sigma 1} \cdot w_1}{i_1} = \frac{(\phi_1 - \phi_{12}) \cdot w_1}{i_1} = \frac{L_{11} \cdot i_1}{w_1} \cdot \frac{w_1}{i_1} - \frac{M_{12} \cdot i_1}{w_2} \cdot \frac{w_1}{i_1} = L_{11} - \ddot{u} \cdot M_{12} \\ L_H &= \frac{\phi_H \cdot w_1}{i_1} = \frac{\phi_{12} \cdot w_1}{i_1} = \frac{w_1}{w_2} \cdot M_{12} = \ddot{u} \cdot M_{12} \end{aligned} \quad . \tag{5.91}$$

Für die Streuinduktivität $L_{\sigma 2}$ ergibt sich analog dazu

$$L_{\sigma 2} = \frac{\phi_{\sigma 2} \cdot w_2}{i_2} = \frac{(\phi_2 - \phi_{12}) \cdot w_2}{i_2} \overset{\phi_{12} = \phi_{21}}{=} L_{22} - \frac{\phi_{21} \cdot w_2}{i_2} = L_{22} - \frac{M_{21} \cdot w_2}{w_1} = L_{22} - \frac{1}{\ddot{u}} \cdot M_{21} \quad . \tag{5.92}$$

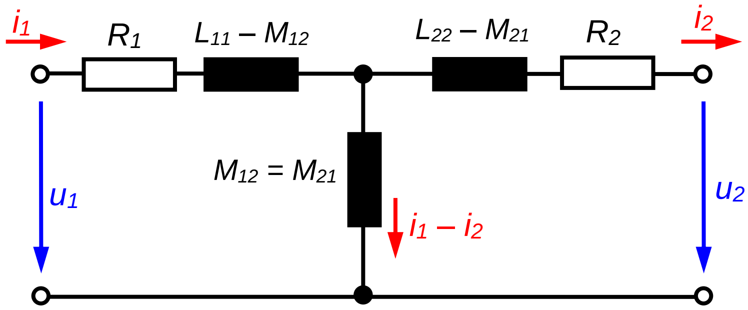
Multipliziert man die Streuinduktivität $L_{\sigma 2}$ mit $\ddot{u}^2$, so ergibt sich

$$\ddot{u}^2 \cdot L_{\sigma 2} = \ddot{u}^2 \cdot \left(L_{22} - \frac{1}{\ddot{u}} \cdot M_{21} \right) = \ddot{u}^2 \cdot L_{22} - \ddot{u} \cdot M_{21} \quad . \tag{5.93}$$

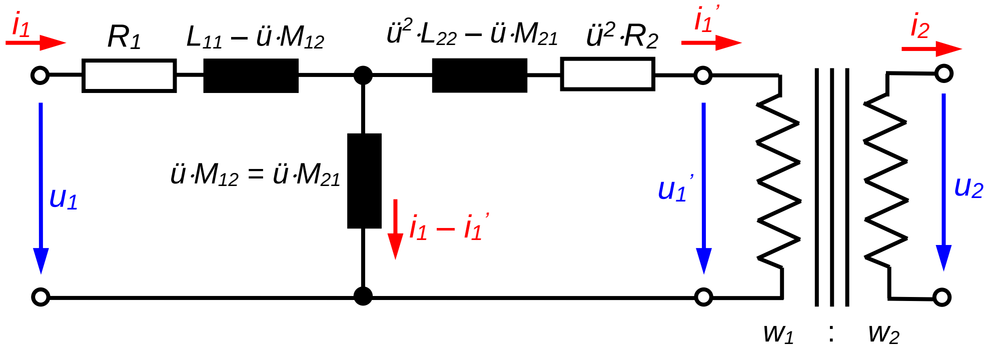
Die Ergebnisse der Gleichungen (5.91) und (5.93) sind genau die in ***Bild 4.23c*** eingetragenen Induktivitäten. Damit ist bereits das sehr häufig verwendete Ersatzschaltbild eines Transformators mit 2 Wicklungen abgeleitet worden. Aus ***Bild 4.23c*** können die folgenden Gleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= R_1 \cdot i_1(t) + L_{\sigma 1} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + L_H \cdot \frac{d\left(i_1(t) - i_1^{'}(t)\right)}{dt} \\ u_1^{'}(t) &= -\ddot{u}^2 \cdot R_2 \cdot i_1^{'}(t) - \ddot{u}^2 \cdot L_{\sigma 2} \cdot \frac{di_1^{'}(t)}{dt} + L_H \cdot \frac{d\left(i_1(t) - i_1^{'}(t)\right)}{dt} \end{aligned} \quad . \tag{5.94}$$

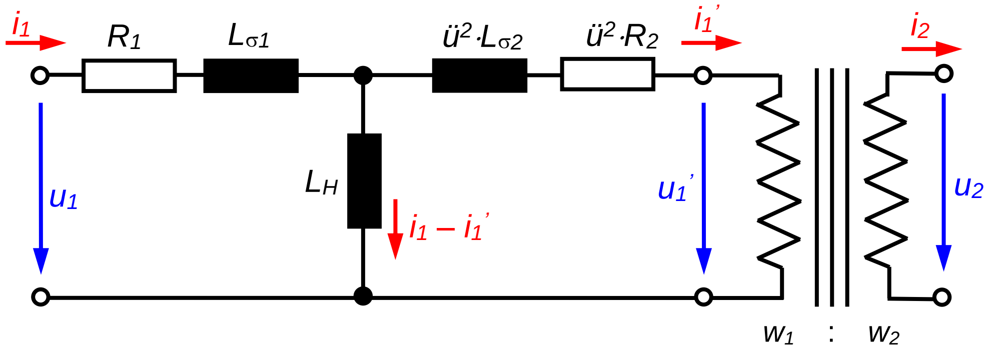
Der Ausdruck $i_1(t) - i_1'(t)$ wird später als Magnetisierungsstrom bezeichnet.



a.



b.



c.

Bild 4.23 Ersatzschaltungen zweier magnetisch gekoppelter Stromkreise

a. Ersatzschaltbild ohne idealen Transformator
b. Ersatzschaltbild mit auf die Primärseite übersetzten Schaltelementen und idealem Transformator
c. Klassisches Ersatzschaltbild eines Transformators mit 2 Wicklungen

4.3.3 Aufgaben von Transformatoren

Zur Übertragung elektrischer Energie von einem Stromkreis zu einem anderen werden zwei oder mehrere Stromkreise über ein magnetisches Feld miteinander gekoppelt Zur Verbesserung der Kopplung, d. h. zur Verringerung des so genannten Streufeldes, wird der magnetische Fluß in einem Eisenkern mit hoher Permeabilität geführt. Die Stromkreise können galvanisch gekoppelt oder getrennt sein, demnach kann zwischen Volltransformatoren und Spartransformatoren unterschieden werden.

Bei Volltransformatoren sind die Wicklungen nur magnetisch über den Eisenkern gekoppelt. Die Wicklung mit der höchsten Spannung wird als Oberspannungswicklung (OS), jene mit der niedrigsten Spannung als Unterspannungswicklung (US) bezeichnet. Bei Dreiwicklungstransformatoren kommt noch die Mittelspannungswicklung (MS) dazu.

Bei Spartransformatoren gibt es eine sowohl vom Primär- als auch vom Sekundärkreis genutzte gemeinsame Wicklung. Man bezeichnet sie als Parallelwicklung (PW). Die nur vom Primärkreis genutzte Wicklung wird als Reihenwicklung (RW) bezeichnet (***Bild 4.24***). Auch beim Spartransformator spricht man von einer Oberspannungs- und Unterspannungsseite.

Transformatoren dienen in der Energietechnik der Kopplung von Netzen und Anlagen mit unterschiedlichen Spannungsebenen.

Maschinentransformatoren	übersetzen die Klemmenspannung der Generatoren (z. B. 27 kV) auf das Höchstspannungsnetz (Energieübertragungsnetz, 380 kV oder 220 kV).
Netzkuppeltransformatoren	stellen das Bindeglied zwischen Netzen mit verschiedenen Spannungsebenen dar (z. B. 380 kV auf 110 kV oder 110 kV auf 20 kV).
Verteiltransformatoren	versorgen lokale Bereiche, z. B. Stadtteile, Dörfer, Industriebetriebe und transformieren die elektrische Energie von der Mittelspannungsebene (z. B. 20 kV) auf die 400-V-Ebene mit der dann einzelne Haushalte, Handwerks- und kleinere Industriebetriebe versorgt werden.

Oft liegen lange Strecke zwischen Energieerzeugern und Energieverbrauchern. Die ohmschen Leitungsverluste sind proportional zu I^2. Um den bei der Energieübertragung fließenden Strom – und damit auch die Verluste - niedrig halten zu können, muß die Übertragung elektrischer Energie mit hohen Spannungen erfolgen.

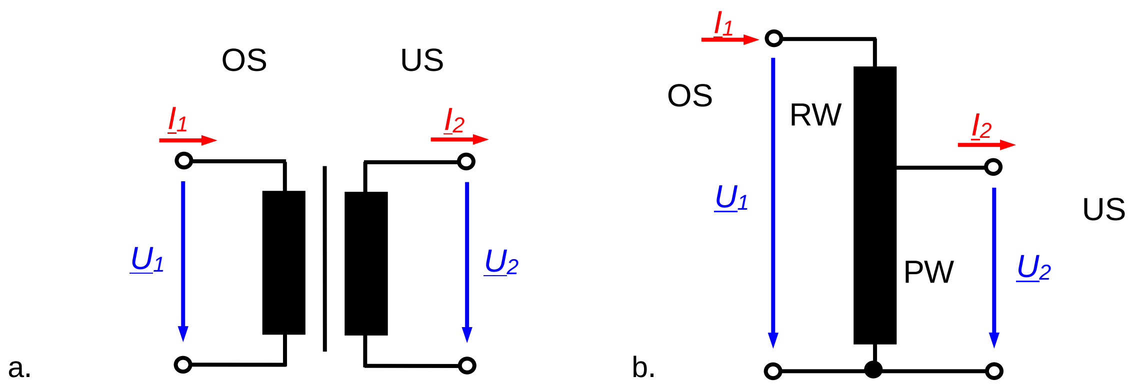


Bild 4.24 Volltransformator (a.) und Spartransformator (b.) in einphasiger Darstellung

4.3.4 Theoretische Grundlagen und Ersatzschaltungen

4.3.4.1 Mehrwicklungstransformator

Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen werden im Folgenden die Ersatzschaltungen von Transformatoren abgeleitet. Der allgemeinste Fall ist der Mehrwicklungstransformator. Für die Energieübertragung sind 3-phasige Zwei- und Dreiwicklungstransformatoren von praktischer Bedeutung. In ***Bild 4.25*** ist die Prinzipanordnung eines 1-phasigen Mehrwicklungstransformators dargestellt.

Bemerkungen zu ***Bild 4.25***:

- Bei realen Transformatoren befinden sich die Wicklungen (einer Phase bei Dreiphasentransformatoren) üblicherweise auf einem Kernschenkel.
- Bei Leistungstransformatoren der Energieübertragung ist der Wickelsinn der auf einem Kernschenkel befindlichen Wicklungen üblicherweise identisch (Rechtsschraube oder Linksschraube, meist Linksschraube). Dementsprechend wurde der Wickelsinn der in ***Bild 4.25*** gezeichneten Wicklungen identisch bezüglich eines Schenkels gewählt.
- Der Eisenkern hat überall denselben Querschnitt.
- Der Widerstand der Wicklungen sei in den Elementen R_k (k = 1,…,N) zusammengefaßt und herausgezogen. Die Leitfähigkeit der Windungen ist dann mit $\sigma \to \infty$ anzusetzen.

Die Wicklung 1 des Transformators wird von der sinusförmigen Spannung $\underline{U}_1$ gespeist; es fließt der ebenfalls sinusförmige Strom $\underline{I}_1$. An die Wicklungen 2…N seien Lasten, die Impedanzen $\underline{Z}_{a2}$ … $\underline{Z}_{aN}$ angeschlossen.

Entsprechend dem Induktionsgesetz (5.17) und der Erläuterung gemäß ***Bild 4.3*** zusammen mit den Orientierungen von magnetischem Fluß und induzierter Spannung gelten die in ***Bild 4.25b*** angegebenen Beziehungen für die induzierten Spannung u_{wk}.

Die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ ergibt sich aus der 1. Maxwell'schen Gleichung, dem Durchflutungsgesetz,

$$\oint_C \boldsymbol{H}(t) \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A_W} \left(\boldsymbol{J}(t) + \frac{d\boldsymbol{D}(t)}{dt}\right) \cdot d\boldsymbol{A} \tag{5.95}$$

mit

$\boldsymbol{H}$:	magnetische Feldstärke	$\boldsymbol{J}$:	Stromdichte
$\boldsymbol{D}$:	dielektrische Verschiebung	$d\boldsymbol{s}$:	Wegelement
$d\boldsymbol{A}$:	Flächenelement	A_W:	Fläche, die durch die Randkurve C begrenzt wird

Unter Verwendung der Materialbeziehung

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \boldsymbol{H} \tag{5.96}$$

und Annahme eines zunächst noch unbekannten Materialparameters μ_r und

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{D} << \boldsymbol{J} \tag{5.97}$$

für den hier betrachteten Frequenzbereich technischer Frequenzen bei der Energieübertragung (üblicherweise 50 Hz oder 60 Hz) erhält man daraus *bei sinusförmigen Größen*

$$\begin{aligned} &\oint_{C_1} \underline{\boldsymbol{H}} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A_1} \underline{\boldsymbol{J}} \cdot d\boldsymbol{A} = \underline{\Theta} \\ &= \underline{H}_S \cdot \ell_S + \frac{\underline{H}_S}{2} \cdot (\ell_0 - \ell_S) = w_1 \cdot \underline{I}_1 - w_2 \cdot \underline{I}_2 - \ldots - w_N \cdot \underline{I}_N = w_1 \cdot \underline{I}_1 - \sum_{k=2}^{N} w_k \cdot \underline{I}_k \end{aligned} \quad . \tag{5.98}$$

Auch hier bilden $d\boldsymbol{s}$ längs des Integrationswegs C und die Flächenormale $d\boldsymbol{A}$ gemäß des Stokes'schen Integralsatzes eine Rechtsschraube.

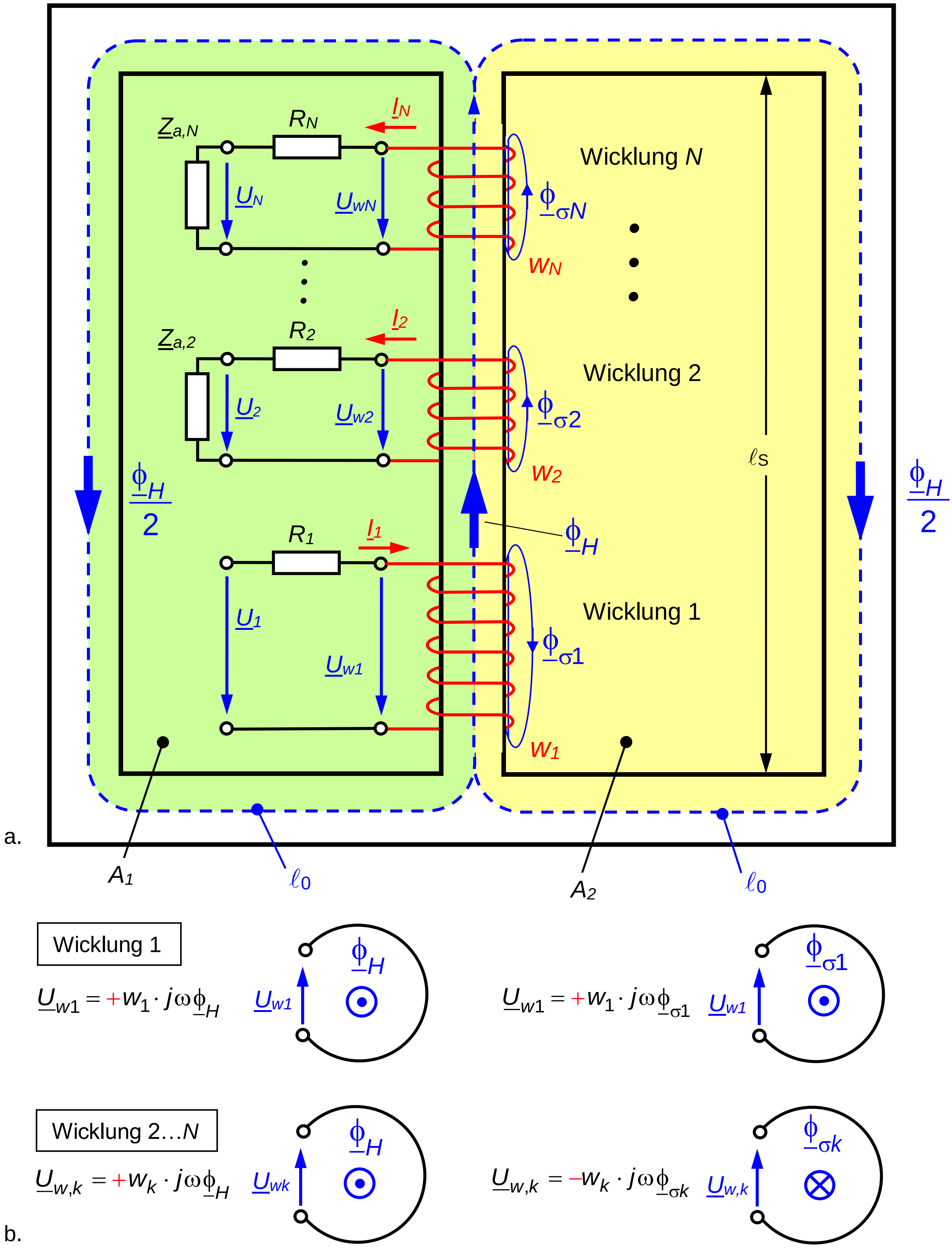


Bild 4.25 Herleitung der Transformator-Gleichungen am Beispiel des 1-phasigen Leistungstransformators

a. Prinzipieller Aufbau

b. Orientierung von magnetischem Fluss und den induzierten Spannungen an den Wicklungen 1 und 2…*N* (Ansicht von oben)

Aus dem Durchflutungsgesetz erhält man mit der „effektiven mittleren Eisenweglänge“ ℓ_{eff}

$$\oint_{C_i} \underline{\boldsymbol{H}} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A_i} \underline{\boldsymbol{J}} \cdot d\boldsymbol{A} = \underline{H}_S \cdot \left[\frac{\ell_0 + \ell_S}{2} \right] = \underline{H}_S \cdot \ell_{eff} = w_1 \cdot \underline{I}_1 - \sum_{k=2}^{N} w_k \cdot \underline{I}_k = \underline{\Theta} \quad ; \tag{5.99}$$

der Zusammenhang zwischen magnetischer Induktion und den Strömen in den Wicklungen sowie der Gesamtdurchflutung $\underline{\Theta}$ ergibt sich zu

$$\underline{B} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{\ell_{eff}} \cdot \left(w_1 \cdot \underline{I}_1 - \sum_{k=2}^{N} w_k \cdot \underline{I}_k \right) = c_1 \cdot \underline{\Theta} \quad . \tag{5.100}$$

Der magnetische Fluß im Eisenkern ergibt sich dann zu

$$\underline{\phi} = \int_{A_{Fe}} \underline{\boldsymbol{B}} \cdot d\boldsymbol{A} = c_1 \cdot \underline{\Theta} \cdot A_{Fe} = c \cdot \underline{\Theta} \tag{5.101}$$

Wegen $\mu_{r,Eisen} >> \mu_{r,Luft}$ (Faktor > 10^4) ist die magnetische Induktion $\underline{B}$ außerhalb des Eisenkerns vernachlässigbar gering. Damit wird nahezu der gesamte magnetische Fluß gemäß (5.101) im Eisen geführt. Der Eisenkern hat die Aufgabe, den magnetischen Fluss im Bereich der Wicklungen zu konzentrieren. Einige wenige Feldlinien umfassen die Leiter und schließen sich dann über die Luft. Diese Feldlinien tragen zum magnetischen Streufluß $\underline{\phi}_\sigma$ bei. $\underline{\phi}_\sigma$ ist üblicherweise deutlich kleiner als der magnetische Hauptfluß $\underline{\phi}_H$, der vollständig im Eisen geführt wird. Der gesamte magnetische Fluß $\underline{\phi}$ gemäß (5.101) setzt sich also aus dem Hauptfluß und den einzelnen Streuflüssen zusammen. Es wird vereinfachend angenommen, daß die einzelnen Streuflüsse nur mit dem in den jeweiligen Wicklungen fließenden Strom verknüpft seien:

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_H + \underline{\phi}_\sigma = \underline{\phi}_H + \left(\underline{\phi}_{\sigma 1} - \underline{\phi}_{\sigma 2} - \ldots - \underline{\phi}_{\sigma N} \right) = \underline{\phi}_H + \underline{\phi}_{\sigma 1} - \sum_{k=2}^{N} \underline{\phi}_{\sigma k}$$

$$\text{mit} \quad \underline{\phi}_H = c_H \cdot \left(w_1 \cdot \underline{I}_1 - \sum_{k=2}^{N} w_k \cdot \underline{I}_k \right) = c_H \cdot w_1 \cdot \left(\underline{I}_1 - \sum_{k=2}^{N} \frac{w_k}{w_1} \cdot \underline{I}_k \right) = c_H \cdot w_1 \cdot \underline{I}_{\mu 1} \quad . \tag{5.102}$$

$$\text{und} \quad \underline{\phi}_{\sigma k} = c_{\sigma k} \cdot w_k \cdot \underline{I}_k$$

Aus ***Bild 4.25a*** ergeben sich die folgenden Netzwerkgleichungen

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{w1} &&= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega w_1 \underline{\phi}_{\sigma 1} + j\omega\, w_1 \underline{\phi}_H \\
\underline{U}_2 &= -R_2 \cdot \underline{I}_2 + \underline{U}_{w2} &&= -R_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega\, w_2 \underline{\phi}_{\sigma 2} + j\omega w_2 \underline{\phi}_H \\
&\vdots && \vdots \\
\underline{U}_N &= -R_N \cdot \underline{I}_N + \underline{U}_{wN} &&= -R_N \cdot \underline{I}_N - j\omega\, w_N \underline{\phi}_{\sigma N} + j\omega w_N \underline{\phi}_H
\end{aligned} \quad . \tag{5.103}$$

Mit den magnetischen Flüssen gemäß Gleichung (5.102) folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega\, c_{\sigma 1} \cdot w_1^2 \cdot \underline{I}_1 + j\omega c_H \cdot w_1^2 \cdot \underline{I}_{\mu 1} \\
\underline{U}_2 &= -R_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega\, c_{\sigma 2} \cdot w_2^2 \cdot \underline{I}_2 + j\omega c_H \cdot w_1 w_2 \cdot \underline{I}_{\mu 1} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\underline{U}_N &= -R_N \cdot \underline{I}_N - j\omega\, c_{\sigma N} \cdot w_N^2 \cdot \underline{I}_N + j\omega c_H \cdot w_1 w_N \cdot \underline{I}_{\mu 1}
\end{aligned} \quad . \tag{5.104}$$

$\underline{I}_{\mu 1}$ wird als “primärseitiger Magnetisierungsstrom” bezeichnet:

$$\underline{I}_{\mu 1} = \underline{I}_1 - \sum_{k=2}^{N} \frac{w_k}{w_1} \cdot \underline{I}_k \quad . \tag{5.105}$$

Ausgehend von diesem Gleichungen können die “primärseitige Hauptinduktivität” L_H und die Koppelinduktivitäten M_k sowie die Streuinduktivitäten $L_{\sigma k}$ definiert werden:

$$\begin{aligned}
L_H &= M_{11} = c_H \cdot w_1^2 \\
M_{1k} &= c_H \cdot w_1 w_k \\
L_{\sigma k} &= c_{\sigma k} \cdot w_k^2 \qquad \text{mit} \quad k = 1, 2, \ldots, N
\end{aligned} \quad . \tag{5.106}$$

Damit erhält man insgesamt aus den Netzwerkgleichungen gemäß

$$\begin{aligned}
\underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega\, L_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_H \cdot \underline{I}_{\mu 1} &&= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega\, L_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{h1} \\
\underline{U}_2 &= -R_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega\, L_{\sigma 2} \cdot \underline{I}_2 + j\omega M_{12} \cdot \underline{I}_{\mu 1} &&= -R_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega\, L_{\sigma 2} \cdot \underline{I}_2 + \underline{U}_{h2} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots && \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\underline{U}_N &= -R_N \cdot \underline{I}_N - j\omega\, L_{\sigma N} \cdot \underline{I}_N + j\omega M_{1N} \cdot \underline{I}_{\mu 1} &&= -R_N \cdot \underline{I}_N - j\omega\, L_{\sigma N} \cdot \underline{I}_N + \underline{U}_{hN}
\end{aligned} \quad . \tag{5.107}$$

$$\text{und} \qquad \underline{U}_{h1} = j\omega L_H \cdot \underline{I}_{\mu 1} \qquad \underline{U}_{hk} = j\omega M_{1k} \cdot \underline{I}_{\mu 1} \qquad \text{mit} \quad k = 2, 3, \ldots, N$$

Sinnvoll ist noch die Einführung eines ***„idealen Transformators“*** mit:

$$\begin{aligned}
&\underline{I}_{\mu 1} = \underline{I}_1 - \sum_{k=2}^{N} \frac{w_k}{w_1} \cdot \underline{I}_k = \underline{I}_1 - \underline{I}_{1,i} \qquad \text{mit} \qquad w_1 \cdot \underline{I}_{1,i} = \sum_{k=2}^{N} w_k \cdot \underline{I}_k \\
&\text{und} \qquad \frac{\underline{U}_{h1}}{\underline{U}_{hk}} = \frac{L_H}{M_{1k}} = \frac{w_1}{w_k} \quad \text{für} \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m
\end{aligned} \quad . \tag{5.108}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich direkt das Ersatzschaltbild des Mehrwicklungstransformators ***Bild 4.26***.

In der Ersatzschaltung fehlt noch die Berücksichtigung der Eisenverluste des Kerns. Diese setzen sich aus den Verlusten durch Wirbelströme im Eisenkern und aus den Verlusten durch Ummagnetisierung des Kern zusammen.

Wirbelstromverluste:
Gemäß dem Induktionsgesetz (5.16) ruft eine Änderung der magnetischen Induktion im Eisenkern eine Spannungsinduktion und wegen der elektrischen Leitfähigkeit des Eisens “Wirbelströme” hervor. Die Richtung der Wirbelstrombahnen steht senkrecht zur Richtung der magnetischen Feldlinien im Eisenkern. Zur Verminderung dieses Effektes wird der Eisenkern von Transformatoren nicht massiv sondern parallel zur Feldrichtung geblecht ausgeführt. Die einzelnen Bleche sind durch eine dünne Lackschicht voneinander isoliert.

Die Wirbelströme sind proportional zur Änderung der Induktion im Kern

$$i_{Wirbel} = const. \cdot \frac{dB}{dt} = const. \cdot \frac{d\phi_H}{dt} \qquad \text{oder} \qquad \underline{I}_{Wirbel} = const. \cdot j\omega \underline{\phi}_H \quad . \tag{5.109}$$

Zusammen mit $j\omega \cdot \underline{\phi}_H \cdot w_1 = j\omega \cdot \underline{U}_{h1}$ ist dann

$$\underline{I}_{Wirbel} = const. \cdot \underline{U}_{h1} \quad . \tag{5.110}$$

Der Einfluß der Wirbelströme kann also durch einen (frequenzabhängigen) ohmschen Widerstand parallel zur Hauptinduktivität L_H berücksichtigt werden.

Hystereseverluste:
Im stationären Wechselstrombetrieb gilt:

$$U_{h1} = const. \cdot \phi_H \cdot f = const. \cdot \hat{B} \cdot f \quad . \tag{5.111}$$

Experimentell kann man feststellen, daß die Ummagnetisierungsverluste P_{Hy} proportional zur eingeschlossenen Fläche A der Hysteresekurve und zur Frequenz f sind. Für übliche Transformatorenbleche ist mit hinreichender Genauigkeit:

$$P_{Hy} = const. \cdot \hat{B}^2 \cdot f = const. \cdot \left(\hat{B} \cdot f\right)^2 \cdot \frac{1}{f} \quad = \quad const. \cdot U_{h1}^2 \cdot \frac{1}{f} \quad . \tag{5.112}$$

Somit können – unter der Voraussetzung sinusförmiger Größen – sowohl die Wirbelstromverluste, als auch die Hystereseverluste durch einen Widerstand R_{Fe} (frequenzabhängig) parallel zur Hauptinduktivität L_H berücksichtigt werden. Damit erhält man das vollständige, in ***Bild 4.26*** dargestellte Ersatzschaltbild für Transformatoren.

Ausgehend von ***Bild 4.26*** können nun die Impedanzen der Wicklungen 2…N auf die Seite der Wicklung 1 transformiert werden. Für die Impedanz $\underline{Z}_k$ der Wicklung k gilt

$$\underline{Z}_k = \frac{\underline{U}_{h,k}}{\underline{I}_k} \quad ; \tag{5.113}$$

von der Wicklung 1 aus betrachtet gilt für diese Impedanz:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_k' &= \frac{\underline{U}_{h,1}}{\underline{I}_{1,i}} = \frac{\underline{U}_{h,1}}{\underline{U}_{h,k}} \cdot \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{1,i}} \cdot \frac{\underline{U}_{h,k}}{\underline{I}_k} = \left(\frac{w_1}{w_k}\right) \cdot \left(\frac{w_1}{w_k}\right) \cdot \underline{Z}_k \qquad \text{mit} \qquad k = 2, \ldots, N \\ &= \left(\frac{w_1}{w_k}\right)^2 \cdot \underline{Z}_k \end{aligned} \quad . \tag{5.114}$$

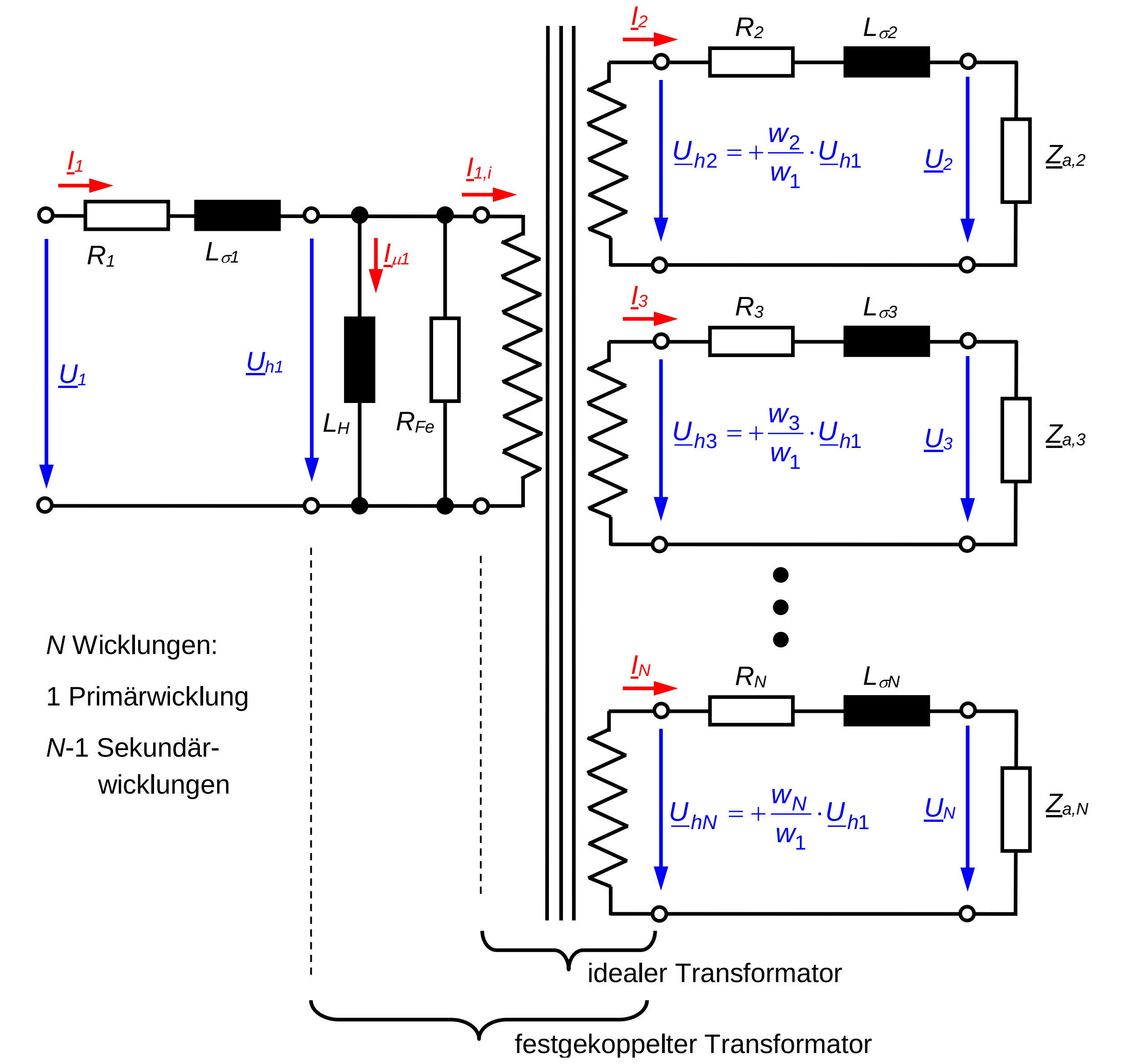


Bild 4.26 Vollständiges Ersatzschaltbild eines Mehrwicklungstransformators

Für die Ströme gilt ferner:

$$\underline{I}_{1,i} = \underline{I}_2' + \underline{I}_3' + \ldots + \underline{I}_N' = \sum_{k=2}^{N} \frac{w_k}{w_1} \cdot \underline{I}_k \qquad \text{mit} \qquad k = 2,3,\ldots,N \quad . \qquad (5.115)$$

Damit erhält man das Ersatzschaltbild für Mehrwicklungstransformatoren mit allen Impedanzen auf einer Seite (***Bild 4.27***).

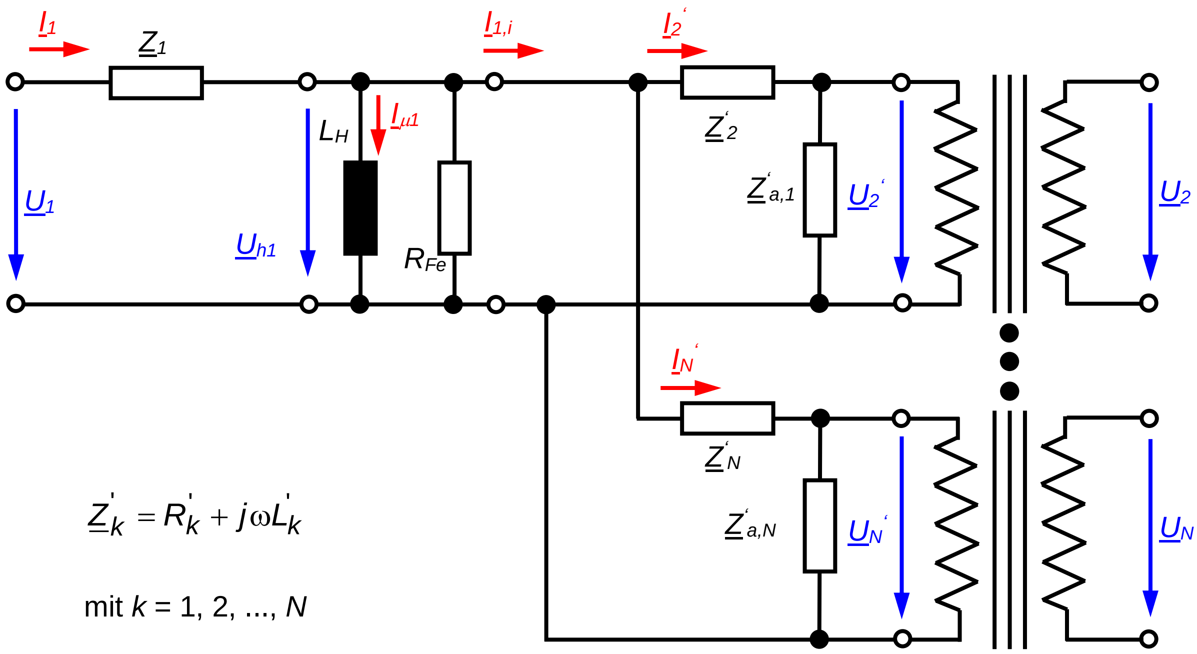


Bild 4.27 Ersatzschaltung für Mehrwicklungstransformatoren

4.3.4.2 Spartransformator

Die Herleitung des Ersatzschaltbildes für Spartransformatoren kann analog zu jener für Volltransformatoren erfolgen. Es wird ein Wicklungssinn entsprechend ***Bild 4.28*** zugrunde gelegt. Für den Hauptfluß ϕ_H gilt analog zu (5.102):

$$\underline{\phi}_H = c_H \cdot \left(w_1 \cdot \underline{I}_1 + w_2 \cdot (\underline{I}_1 - \underline{I}_2)\right) = c_H \cdot (w_1 + w_2) \cdot \left(\underline{I}_1 - \frac{w_2}{w_1 + w_2} \cdot \underline{I}_2\right) = c_H \cdot (w_1 + w_2) \cdot \underline{I}_{\mu 1} \; ; \quad (5.116)$$

die Streuflüsse ergeben sich zu

$$\underline{\phi}_{\sigma 1} = c_{\sigma 1} \cdot (w_1 + w_2) \cdot \underline{I}_1 \qquad \underline{\phi}_{\sigma 2} = c_{\sigma 2} \cdot w_2 \cdot \underline{I}_2 \qquad \text{mit} \quad \underline{I}_{\mu 1} = \underline{I}_1 - \underline{I}_{1i} = \underline{I}_1 - \frac{w_2}{w_1 + w_2} \cdot \underline{I}_2 \; . \quad (5.117)$$

Mit der Pfeilung der Spannungen und Ströme in ***Bild 4.28*** folgt unter Berücksichtigung des Induktionsgesetzes

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega(w_1 + w_2) \cdot \underline{\phi}_{\sigma 1} + j\omega(w_1 + w_2) \cdot \underline{\phi}_H \\ \underline{U}_2 &= -R_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega \cdot w_2 \cdot \underline{\phi}_{\sigma 2} + j\omega \cdot w_2 \cdot \underline{\phi}_H \end{aligned} \quad (5.118)$$

oder

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_H \cdot \underline{I}_{\mu 1} && = R_1 \cdot \underline{I}_1 + j\omega L_{\sigma 1} \cdot \underline{I}_1 + \underline{U}_{h1} \\ \underline{U}_2 &= -R_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega L_{\sigma 2} \cdot \underline{I}_2 + j\omega L_H \cdot \underline{I}_{\mu 1} && = -R_2 \cdot \underline{I}_2 - j\omega L_{\sigma 2} \cdot \underline{I}_2 + \underline{U}_{h2} \end{aligned} \quad (5.119)$$

Aus (5.119) ergibt sich die Ersatzschaltung gemäß ***Bild 4.28***, die allerdings eine galvanische Kopplung zwischen Primär- und Sekundärseite aufweist. Für den idealen Transformator gilt:

$$\frac{\underline{U}_{h1}}{\underline{U}_{h2}} = \frac{w_1 + w_2}{w_2} \qquad \frac{\underline{I}_{1i}}{\underline{I}_2} = \frac{w_2}{w_1 + w_2} \; . \quad (5.120)$$

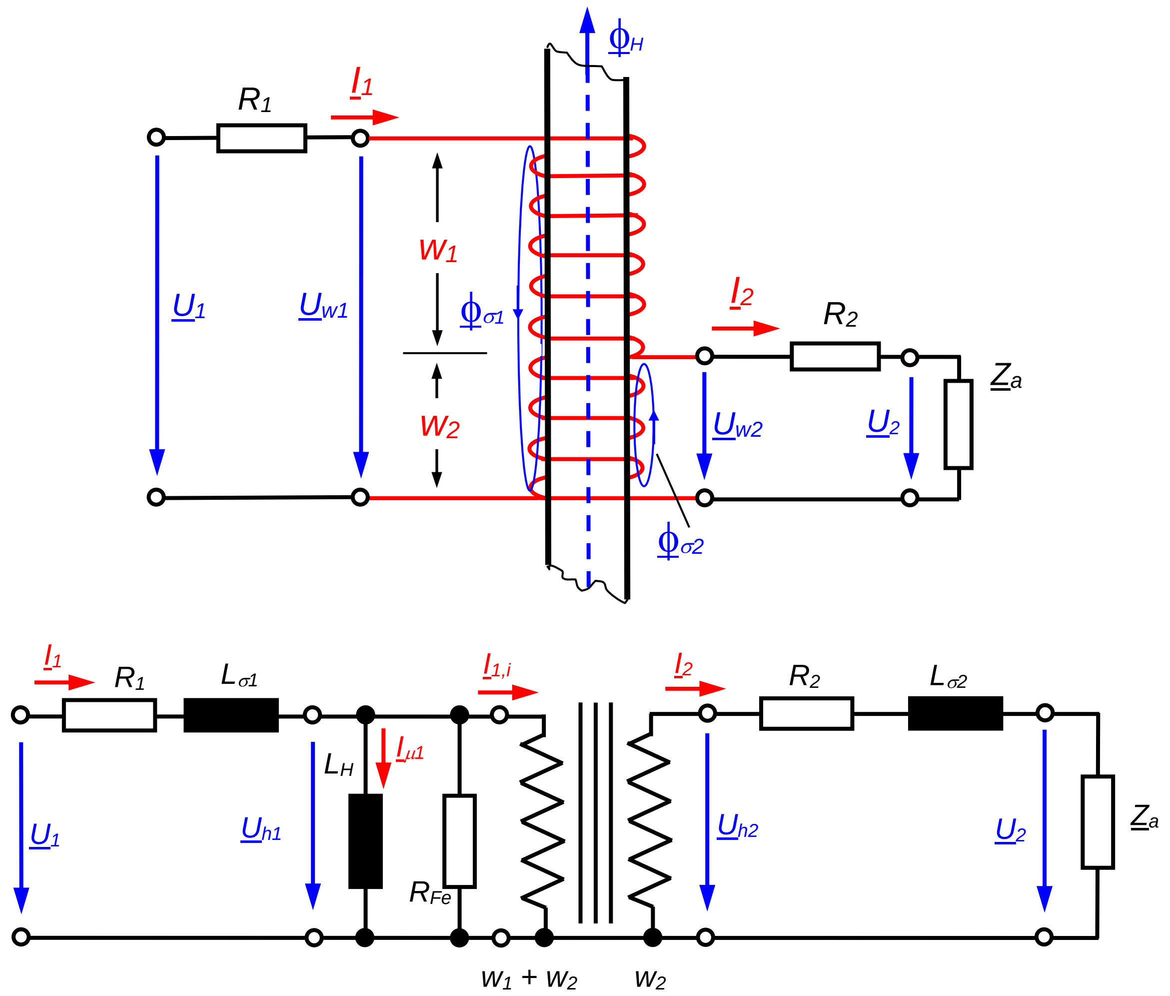


Bild 4.28 Prinzipielle Wicklungsanordnung und Ersatzschaltbild bei einem Spartransformator

4.3.5 Vereinfachte Ersatzschaltung von Transformatoren

Obwohl die Ersatzschaltungen gemäß ***Bild 4.26*** und ***Bild 4.27*** für 1-phasige Transformatoren abgeleitet wurden, sollen sie im Folgenden als einphasige Ersatzschaltungen von symmetrischen Dreiphasentransformatoren (Drehstromtransformatoren) verstanden werden. Dies ist zulässig, wenn die Transformatoren symmetrisch aufgebaut sind und symmetrisch betrieben werden, d. h. wenn sowohl die Speisung als auch die Last symmetrisch sind.

Bei Transformatoren der elektrischen Energieversorgung liegen folgende Größenverhältnisse vor (***Bild 4.26***):

$$L_H >> L_{\sigma,k} \quad , \qquad \omega \cdot L_H >> R_k \quad , \qquad k = 2,\dots,m \quad . \tag{5.121}$$

Deshalb ist

$$\underline{U}_1 \approx \underline{U}_{h1} \tag{5.122}$$

und

$$I_{\mu1} << I_1 \qquad \text{oder} \qquad \underline{I}_1 \approx \underline{I}_{1i} \quad . \tag{5.123}$$

Für die Durchflutung $\underline{\Theta}$ gilt dann mit der Näherung (5.123)

$$\underline{\Theta} = w_1 \cdot \underline{I}_1 - \sum_{k=2}^{N} w_k \cdot \underline{I}_k = w_1 \cdot \underline{I}_1 - w_1 \cdot \underline{I}_{1,i} = w_1 \cdot \left(\underline{I}_1 - \underline{I}_{1,i} \right) = w_1 \cdot \underline{I}_{\mu 1} \approx 0 \quad . \tag{5.124}$$

Die Gesamtdurchflutung ist – abgesehen von einer kleinen Magnetisierungsdurchflutung – gleich Null. Man spricht hier auch vom „Durchflutungsgleichgewicht", hervorgerufen durch den Primärstrom einerseits und die Sekundärströme andererseits. Die Magnetisierungsdurchflutung dient dem Aufbau des magnetischen Hauptfeldes im Eisenkern, sowie den Streuflüssen. Der Magnetisierungsstrom liegt in der Größenordnung von

$$I_{\mu 1,N} \approx (1\%....5\%) \cdot I_{1N} \quad . \tag{5.125}$$

$\Theta \approx 0$ ergibt sich übrigens auch schon aus

$$U_1 \approx U_{h1} = const. \cdot \phi_H = const. \cdot B_S \quad ;$$

eingesetzt in (5.99) erhält man für den Betrag Θ der Durchflutung

$$\Theta = H_S \cdot \ell_{eff} = \frac{B_S}{\mu_r \cdot \mu_0} \cdot \ell_{eff} = \left[const. \cdot \frac{\ell_{eff}}{\mu_0} \right] \cdot \frac{U_1}{\mu_r} \quad .$$

Die magnetische Induktion B_S im Eisenkern wird durch die Primärspannung U_1 bestimmt und nimmt wegen der Eisensättigung einen endlichen Wert an. Die Tatsache $\mu_{r,Eisen}$ = *sehr groß* führt auf $\Theta \approx 0$.

4.3.5.1 Zweiwicklungstransformatoren

Ausgehend von der Ersatzschaltung für Mehrwicklungstransformatoren gemäß ***Bild 4.27*** entfallen beim Zweiwicklungstransformator die Zweige 3…*N* und man erhält die Ersatzschaltung des Zweiwicklungstransformators gemäß ***Bild 4.29b***. Bei Transformatoren der elektrischen Energieversorgung sind die Beziehungen gemäß (5.121) für die Größenverhältnisse der Ersatzelemente mit sehr guter Näherung erfüllt. Man kann daher die Elemente L_H und R_{Fe} nach vorn „durchschieben". Dies führt auf die Ersatzdarstellung gemäß ***Bild 4.29*****c**.

L_H und R_{Fe} stellen eine Grundbelastung dar, die in der Energietechnik oft nicht von Bedeutung ist. Man kann sie vernachlässigen, womit sich schließlich das in der Energietechnik vielfach verwendete Ersatzschaltbild mit nur den Längsimpedanzen ergibt (**Bild 4.29d**). Dieses Ersatzschaltbild gilt sowohl für das Mit- als auch für das Gegensystem in symmetrischen Komponenten.

Die Größe

$$\underline{Z}_k = R_k + j\omega \cdot L_k$$
$$\text{mit} \quad R_k = R_1 + R_2' \quad \text{und} \quad L_k = L_{\sigma 1} + L_{\sigma 2}' \tag{5.126}$$

wird als Kurzschlußimpedanz bezeichnet, da sie bei sekundärseitigem Kurzschluß ($\underline{Z}_a$ = 0) alleine wirksam ist (***Bild 4.29*****e**). Eine wichtige Kenngröße eines Transformators ist seine „relative Kurzschlußspannung".

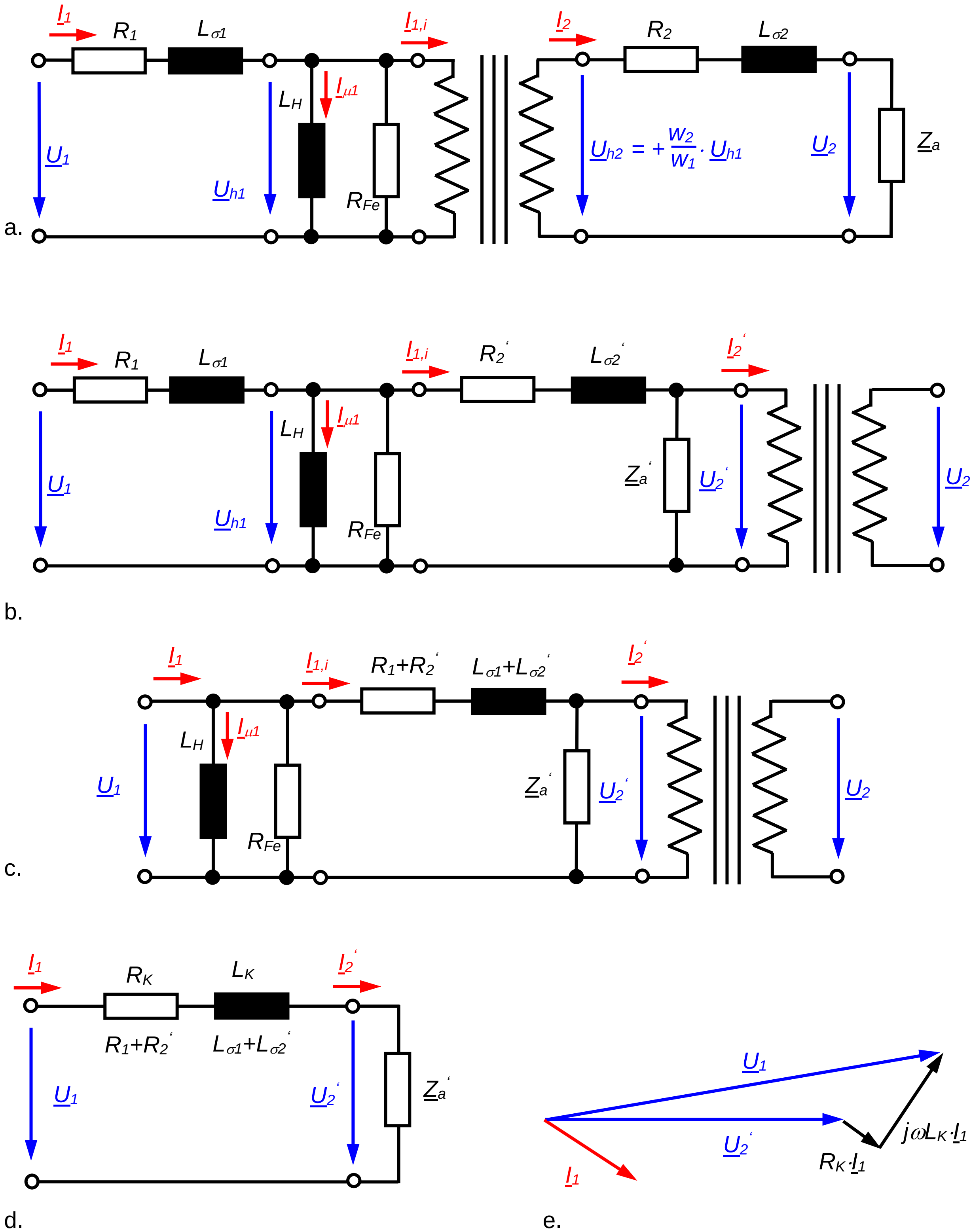


Bild 4.29 Ersatzschaltungen für Zweiwicklungstransformatoren

a. Vollständiges Ersatzschaltbild
b. „idealer Transformator“ zur Sekundärseite hin durchgeschoben
c. vereinfachtes Ersatzschaltbild 1. Art
d. vereinfachtes Ersatzschaltbild 2. Art
e. Zeigerdiagramm gemäß ***Bild 4.29*****d** bei ohmsch-induktiver Last $\underline{Z}_a$'

Der Transformator sei kurzgeschlossen, d. h. $\underline{Z}_a = 0$. Dann gilt

$$\underline{u}_k = \frac{\underline{U}_k}{U_{1N}} = \left[\frac{\underline{U}_k}{I_{1N}}\right] \cdot \left[\frac{I_{1N}}{U_{1N}}\right] = \underline{Z}_k \cdot \frac{1}{Z_N} = \underline{z}_k \quad . \tag{5.127}$$

U_{1N} ist die primärseitige Nennspannung und $\underline{U}_k$ ist jene Spannung, die an die Primärseite angelegt werden muß, damit primärseitig der Nennstrom fließt ($I_{1N} = I_N$). Aus (5.127) folgt direkt, daß *die relative Kurzschlußspannung* gleich der *relativen Kurzschlußimpedanz* $\underline{z}_k$ ist.

Die Kurzschlußimpedanz $\underline{Z}_k$ läßt sich aus den Hauptparametern eines Transformators:

- Scheinleistung S_N,
- Nennspannung U_N und
- relative Kurzschlußspannung $\underline{u}_k$

durch

$$\begin{aligned}\underline{Z}_k &= \underline{u}_k \cdot Z_N = \underline{u}_k \cdot \frac{U_{1N}}{I_{1N}} = \underline{u}_k \cdot \frac{U_{1N}}{I_{1N}} \cdot \frac{3 \cdot U_{1N}}{3 \cdot U_{1N}} = \underline{u}_k \cdot \frac{U_N \cdot U_N}{3 \cdot U_{1N} \cdot I_{1N}} = \underline{u}_k \cdot \frac{U_N^2}{S_N} \\ &= (u_r + j \cdot u_x) \cdot \frac{U_N^2}{S_N} = R_k + j\omega \cdot L_k\end{aligned} \tag{5.128}$$

berechnen. Meist kann u_r vernachlässigt werden und es gilt

$$\underline{u}_k = j \cdot u_x \qquad \text{und damit} \qquad \underline{Z}_k = jX_k = \underline{u}_k \cdot Z_N = j \cdot u_x \cdot \frac{U_N^2}{S_N} \quad . \tag{5.129}$$

In den beiden Gleichungen sind U_N die verkettete Nennspannung und U_{1N} die Nenn-Sternspannung des an den Transformator angelegten Drehspannungssystems

4.3.5.2 Dreiwicklungstransformatoren

Der *Dreiwicklungstransformator* ist in der Energieversorgung besonders wichtig. Sein Ersatzschaltbild ergibt sich direkt aus der Ersatzschaltung des Mehrwicklungstransformators gemäß ***Bild 4.27***, wenn man – wie bereits beschrieben – die Grundbelastung durch L_H und R_{Fe} „nach vorn durchschiebt“ und dann vernachlässigt.
Für die Berechnung der Impedanzen $\underline{Z}_{ij}$ sind die „Durchgangsleistungen“ maßgeblich. Gegeben seien z. B. die folgenden Parameter für jede Wicklung eines Transformators:

- Nennspannungen: U_{N1}, U_{N2}, U_{N3}
- Scheinleistungen (in Nennbetrieb): S_{N1}, S_{N2}, S_{N3}
- relative Kurzschlußspannungen: u_{k12}, u_{k13}, u_{k23} (rein imaginär oder komplex)

Eine Wicklung wird gespeist. Bei Kurzschluß einer der nicht gespeisten Wicklungen erhält man, wenn die jeweils andere Wicklung offen ist, für die Kurzschlußimpedanzen des Transformators, bezogenen auf die Oberspannungsseite (U_{N1}, Primärseite):

$$\underline{Z}_{12} = \underline{u}_{k12} \cdot \frac{U_{N1}^2}{S_{N12}} \qquad \text{meist ist} \qquad \underline{u}_{k\,xy} = j \cdot u_{k\,xy}$$

$$\underline{Z}_{31} = \underline{u}_{k31} \cdot \frac{U_{N1}^2}{S_{N31}} \qquad \text{d.h.} \qquad \underline{Z}_{xy} = j \cdot u_{kxy} \cdot \frac{U_{N1}^2}{S_{Nxy}} \quad . \qquad (5.130)$$

$$\underline{Z}_{23} = \underline{u}_{k23} \cdot \frac{U_{N1}^2}{S_{N23}}$$

mit

$$S_{N12} = S_{N2} \qquad S_{N31} = S_{N3} \qquad S_{N23} = S_{N3} \qquad \text{und} \qquad S_{N1} \geq S_{N2} \geq S_{N3}$$

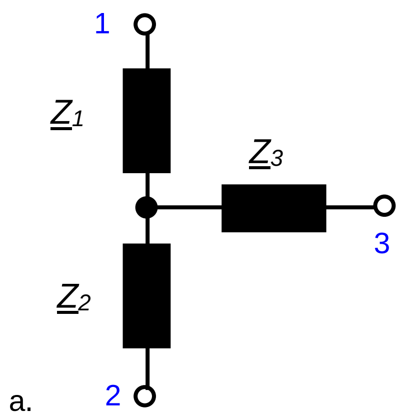
Die Kurzschlußimpedanzen ergeben sich aus der Ersatzschaltung gemäß ***Bild 4.30*b** durch:

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \qquad \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \qquad \underline{Z}_{13} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 \quad . \qquad (5.131)$$

Daraus lassen sich dann die Einzelimpedanzen gemäß

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{13} - \underline{Z}_{23}) \qquad \underline{Z}_2 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{12} - \underline{Z}_{13}) \qquad \underline{Z}_3 = \frac{1}{2} \cdot (\underline{Z}_{13} + \underline{Z}_{23} - \underline{Z}_{12}) \qquad (5.132)$$

bestimmen. Das in ***Bild 4.30*b** dargestellte Ersatzschaltbild für Dreiwicklungstransformatoren gilt im Mit- und Gegensystem und stellt damit das 1-phasige Ersatzschaltbild dar. Ist die Tertiärwicklung (System 3) unbeschaltet, so reduziert sich das Ersatzschaltbild auf die Längsimpedanz $\underline{Z}_{12}$.



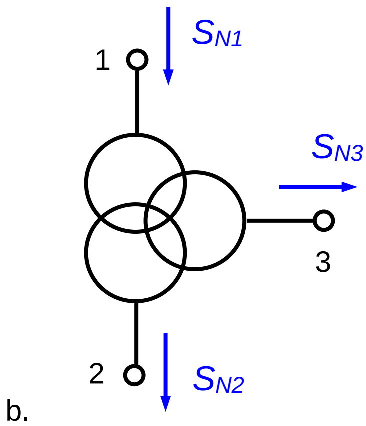


Bild 4.30 a. Ersatzschaltung für einen Drehstromtransformator (nur Längsimpedanzen)
b. Schaltzeichen und Leistungsdefinition zur Berechnung der Längsimpedanzen

4.3.6 Ausführungsformen von Transformatoren der Energietechnik

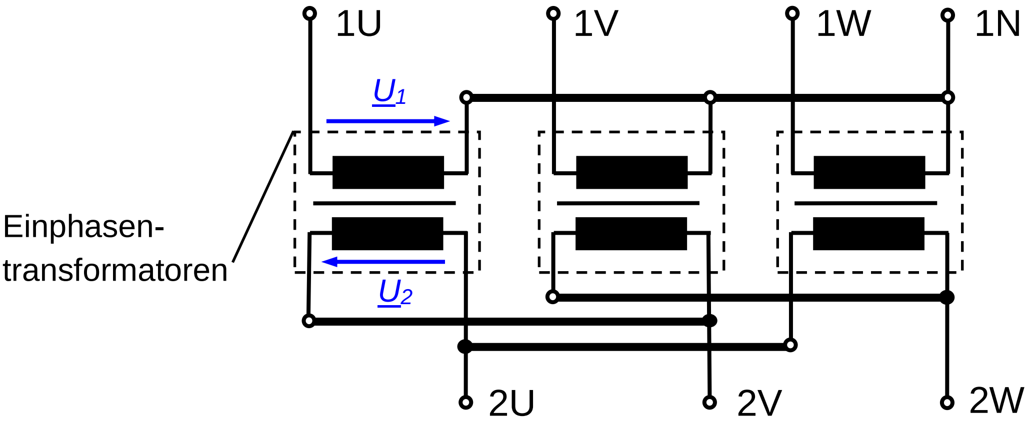
4.3.6.1 Einphasentransformatoren

Einphasige Zweiwicklungstransformatoren werden überwiegend in Bahnnetzen (f = 16,7 Hz) eingesetzt. Sie spielen auch eine Rolle bei der elektrischen Zusammenschaltung zu Dreiphasentransformatoren.

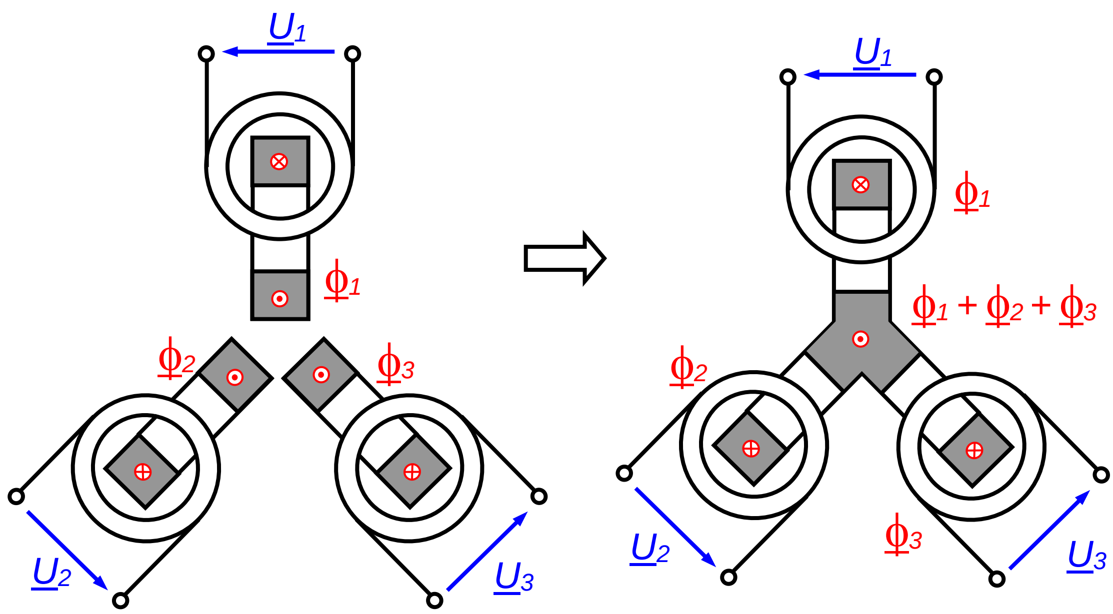
4.3.6.2 Dreiphasentransformatoren

Ein Dreiphasentransformator kann auf 2 Arten entstehen (***Bild 4.31***):

1) Drei identische Einphasentransformatoren können zu einer Drehstrombank elektrisch zusammengeschaltet werden (***Bild 4.31a***). In den USA findet sich dies sehr häufig, in Europa eher selten.
2) Die drei Einphasentransformatoren werden über einen gemeinsamen Eisenkern magnetisch gekoppelt (***Bild 4.31b***). Technisch realisiert gelangt man so zu den Dreiphasentransformatoren oder Drehstromtransformatoren.



a.



b.

Bild 4.31 Drehstromtransformatoren (Dreiphasentransformatoren)

a. Elektrische Zusammenschaltung von 3 baugleichen Einphasentransformatoren (System 1: OS, System 2: US, 1N: Sternpunkt, oberspannungsseitig)

b. Magnetische Zusammenschaltung aus 3 Einphasentransformatoren

In der Energieübertragung finden nahezu ausschließlich Drehstrom- oder Dreiphasentransformatoren Anwendung. Maschinentransformatoren, über welche die elektrische Energie der Kraftwerksgeneratoren ins Netz eingespeist wird, sind üblicherweise als Zweiwicklungstransformatoren (d. h. mit Ober- und Unterspannungsseite) ausgeführt. Netzkuppeltransformatoren besitzen meist eine dritte Wicklung.

Aus dem Induktionsgesetz folgt für Einphasentransformatoren:

$$\underline{U}_1 \approx \underline{U}_{h1} = c \cdot j\omega \cdot \underline{\phi}_H \quad . \tag{5.133}$$

Denkt man sich einen Drehstromtransformator aus 3 magnetisch gekoppelten Einphasentransformatoren zusammengesetzt, so ist bei symmetrischem Betrieb stets

$$\underline{\phi}_{H,U} + \underline{\phi}_{H,V} + \underline{\phi}_{H,W} = 0 \quad . \tag{5.134}$$

Der Kern eines Dreiphasentransformators kann deshalb ohne Rückschlußschenkel aufgebaut werden (***Bild 4.32*a**). Große Transformatoren werden meist mit 5-schenkligem Kern ausgeführt. Durch die Rückschlußschenkel können das obere und untere Joch mit kleinerem Querschnitt gebaut werden, wodurch sich die Bauhöhe etwas reduziert. Dadurch passen selbst größte Transformatoren in das von der Deutsche Bahn (DB) vorgegebene Bahnprofil, eine notwendige Bedingung für Bahntransporte der Transformatoren vom Hersteller zum Betriebsort.


a.

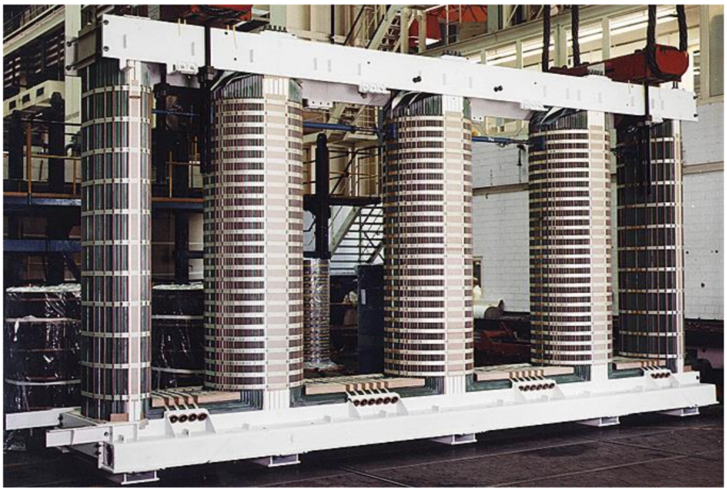

b.

Bild 4.32 Eisenkerne von Dreiphasentransformatoren

a. 3-schenklige Ausführung, 3 bewickelte Schenkel, keine Rückschlußschenkel
b. 5-schenklige Ausführung, 3 bewickelte Schenkel, 2 Rückschlußschenkel

Schaltungen und Schaltgruppe

Bei der elektrischen Zusammenschaltung der auf den 3 Schenkeln angeordneten Wicklungen gibt es die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Möglichkeiten (***Bild 4.33***).

Abhängig von der Dreiphasengrundschaltung der Ober- und Unterspannungswicklung kann das unterspannungsseitige Drehspannungssystem dem Drehspannungssystem der Oberspannungsseite nacheilen, und zwar um ganzzahlige Vielfache (K) von 30 °.

Die Schaltgruppenbezeichnung setzt sich zusammen aus:

- Kennbuchstabe für die Oberspannungsseite (OS)
- Kennbuchstabe für den ggf. herausgeführten Sternpunkt an der OS
- Kennbuchstaben für weitere Wicklungssysteme mit ggf. herausgeführten Sternpunkten
- Kennbuchstabe für die Unterspannungsseite (US)
- Kennbuchstabe für den ggf. herausgeführten Sternpunkt an der US
- Kennzahl K der Phasendrehung zwischen den Leiterspannungen von OS und den anderen Wicklungen (z. B. nur US bei einem Maschinentransformator)

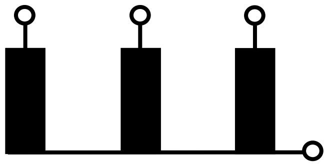
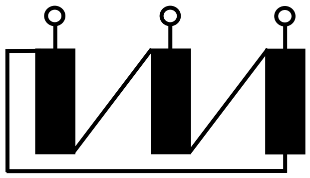
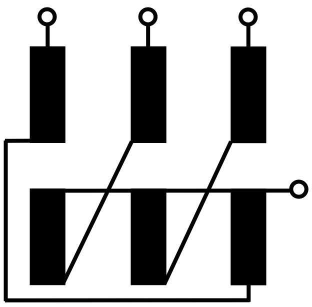
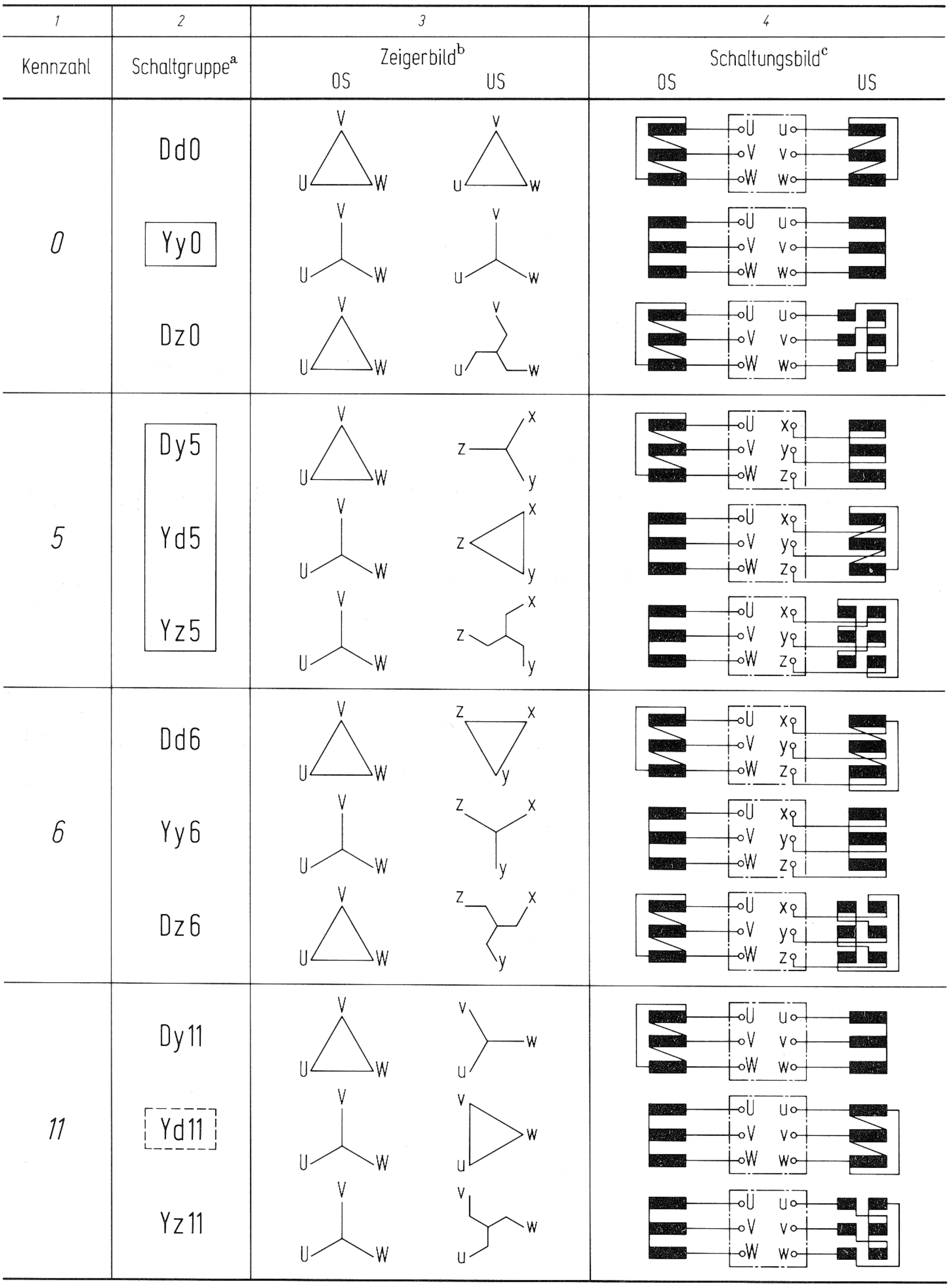
Schaltung	Bezeichnung	Kennbuchstabe	
		Oberspannung	Unterspannung
	Sternschaltung	Y	y
	Dreieckschaltung	D	d
	Zick-Zack-Schaltung	Z	z
Herausgeführter Sternpunkt, (möglich bei Stern- und Zick-Zack-Schaltung)		N	n

Bild 4.33 Grundschaltungen für Dreiphasentransformatoren

Bei der Stern-Stern-Schaltung ist sofort ersichtlich, daß die Phasendrehung entweder 0 ° oder 180 ° sein kann, die Schaltgruppenbezeichnung lautet dann Yy0 oder Yy6. Bei den anderen Schaltungen empfiehlt sich zur Bestimmung der Schaltgruppe die Konstruktion eines Zeigerdiagramms.



Hinweise:

Schaltgruppe: Bei herausgeführtem Sternpunkt ist hinter dem Schaltzeichen der Wicklung „N“ bzw. „n“ zu ergänzen.

Zeigerbild: In dieser Tabelle werden die Großbuchstaben U, V, W für die OS-Wicklungen benutzt, während für MS- und US-Wicklungen die kleinen Buchstaben u, v, w oder x, y, z verwendet werden

Schaltungsbild: Bei den Wicklungen ist gleicher Wickelsinn vorausgesetzt, d. h. räumlich gesehen sind in den Schaltbildern die Wicklungen nach unten geklappt zu denken.

Bild 4.34 Schaltungen von Dreiphasentransformatoren für verschiedene Schaltgruppen

***Bild 4.35*a** zeigt dies für den praktisch wichtigen Fall der Stern-Dreieck-Schaltung (YNd11). Die auf einem Schenkel des Kerns befindlichen Wicklungen haben (üblicherweise) den gleichen Wickelsinn, d. h. die Spannung $\underline{U}_{2U\text{-}2V}$ ist in Phase mit $\underline{U}_{1V}$. Nun muß eine zur Spannung $\underline{U}_{2U\text{-}2V}$ korrespondierende Spannung, d. h. die Spannung $\underline{U}_{1U\text{-}1V}$, konstruiert werden: als Pfeil von $\underline{U}_{1U}$ nach $\underline{U}_{1V}$. Die Spannung $\underline{U}_{2U\text{-}2V}$ eilt der Spannung $\underline{U}_{1U\text{-}1V}$ um 11·30° = 330° nach. Die Schaltgruppe ist demnach Yd11. Die Kennzahl der Phasendrehung ergibt sich also durch den Vergleich korrespondierender Leiter- oder Strangspannungen. Gemäß ***Bild 4.35*a** gilt:

$$\frac{U_{1V}}{U_{2U-2V}} = \frac{w_1}{w_2}, \qquad \text{d.h.} \qquad \frac{U_{1U-1V}}{U_{2U-2V}} = \sqrt{3}\cdot\frac{w_1}{w_2} \quad .$$

Gedanklich wird nun $\underline{U}_{1U\text{-}1V}$ in die reelle Achse gelegt. Daraus folgt dann:

$$\underline{U}_{1U-1V} = \sqrt{3}\,\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{U}_{2U-2V}\cdot e^{j330^\circ}\,, \qquad \text{also} \qquad \frac{\underline{U}_{1U-1V}}{\underline{U}_{2U-2V}} = \underline{\ddot{u}} = \sqrt{3}\cdot\frac{w_1}{w_2}\cdot e^{j330^\circ} \quad . \qquad (5.135)$$

Für die Ströme ergeben sich die in ***Bild 4.35*b** dargestellten Verhältnisse bezüglich der positiven Zählrichtungen der in der US induzierten Ströme $\underline{I}_X$, $\underline{I}_Y$ und $\underline{I}_Z$. Für diese Ströme gilt:

$$\frac{\underline{I}_X}{\underline{I}_{1U}} = \frac{w_1}{w_2} \qquad \frac{\underline{I}_Y}{\underline{I}_{1V}} = \frac{w_1}{w_2} \qquad \frac{\underline{I}_Z}{\underline{I}_{1W}} = \frac{w_1}{w_2} \quad .$$

Aus dem Schaltbild in ***Bild 4.35*b** kann man folgende Beziehungen ablesen:

$$\underline{I}_{2U} = \underline{I}_X - \underline{I}_Y = \frac{w_1}{w_2}\left(\underline{I}_{1U} - \underline{I}_{1V}\right)$$

Aus dem Zeigerdiagramm (***Bild 4.35*b**) ergibt sich für die Länge des Zeigers $\underline{I}_{1U}$ - $\underline{I}_{1V}$

$$\left|\underline{I}_{1U} - \underline{I}_{1V}\right| = 2\cdot I_{1U}\cdot\cos(30^o) = \sqrt{3}\cdot I_{1U}$$

also

$$I_{2U} = \frac{w_1}{w_2}\cdot\left|\underline{I}_{1U} - \underline{I}_{1V}\right| = \sqrt{3}\cdot\frac{w_1}{w_2}\cdot I_{1U}$$

Gedanklich wird nun $\underline{I}_{1U}$ in die reelle Achse gelegt. Daraus folgt dann:

$$\underline{I}_{2U} = \sqrt{3}\,\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{I}_{1U}\cdot e^{-j330^\circ}\,, \quad \text{also} \qquad \frac{\underline{I}_{1U}}{\underline{I}_{2U}} = \frac{1}{\sqrt{3}\,\frac{w_1}{w_2}\cdot e^{-j330^\circ}} = \frac{1}{\ddot{u}\cdot e^{-j330^\circ}} = \frac{1}{\underline{\ddot{u}}^*} \quad . \qquad (5.136)$$

Bei Drehstromtransformatoren gilt allgemein für die *Übersetzung der Spannungen*:

$$\frac{\underline{U}_{Strang,OS}}{\underline{U}_{Strang,US}} = \frac{\underline{U}_{Leiter,OS}}{\underline{U}_{Leiter,US}} = \underline{\ddot{u}} = \ddot{u}\cdot e^{j\varphi} \qquad \text{mit} \qquad \varphi = K\cdot 30^\circ \quad . \qquad (5.137)$$

Für die Übersetzung der Ströme gilt:

$$\frac{\underline{I}_{OS}}{\underline{I}_{US}} = \frac{1}{\ddot{u}}\cdot e^{j\varphi} = \frac{1}{\ddot{u}\cdot e^{-j\varphi}} = \frac{1}{\underline{\ddot{u}}^*} \qquad \text{mit} \qquad \varphi = K\cdot 30^\circ \quad . \qquad (5.138)$$

Der Betrag *ü* der Übersetzung ergibt sich für die einzelnen Schaltgruppen gemäß folgender Tabelle, wobei w_1 und w_2 die Windungszahlen von Ober- und Unterspannungssystem sind.

Schaltung	Yy	Yd	Yz	Dd	Dy	Dz
ü	$\frac{w_1}{w_2}$	$\sqrt{3} \cdot \frac{w_1}{w_2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{w_1}{w_2}$	$\frac{w_1}{w_2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{w_1}{w_2}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{w_1}{w_2}$

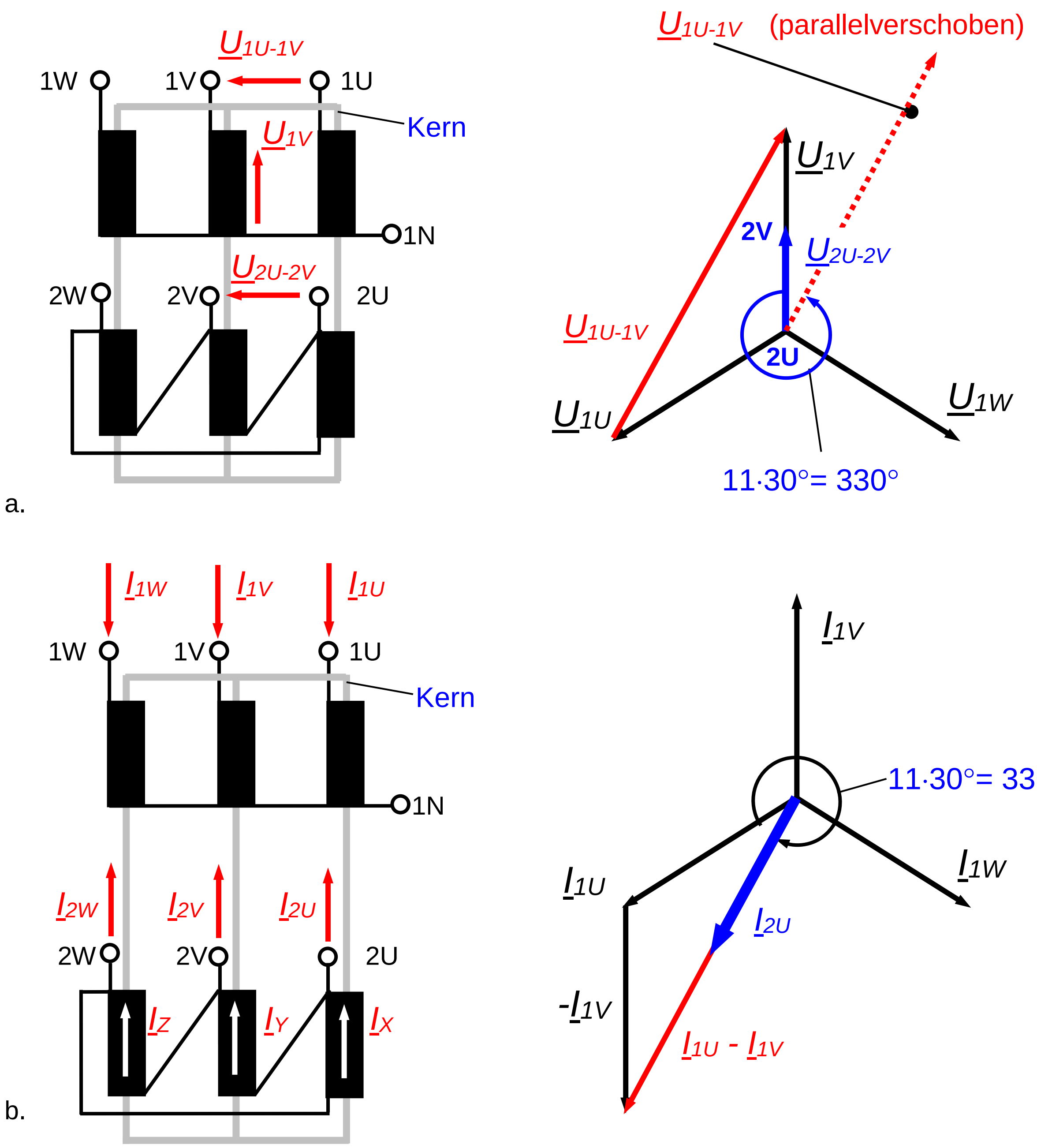


Bild 4.35 a. Bestimmung der Schaltgruppe (hier YNd11) aus dem Schaltbild des Transformators und durch Konstruktion eines Zeigerdiagramms für gleichphasige Spannungen
b. Bestimmung der Phasendrehung der Ströme

Bedeutung der Dreieckwicklung bei Drehstromtransformatoren

Drehstromtransformatoren sind stets mit einer Dreieckwicklung ausgeführt. Üblicherweise ist bei Maschinentransformatoren die OS-Wicklung im Stern und die US-Wicklung im Dreieck geschaltet, bei Netzkuppeltransformatoren sind die OS- und MS-Wicklung in Sternschaltung und die US- oder Tertiärwicklung in Dreieckschaltung ausgeführt.

Der Grund für die Wicklung in Dreieckschaltung ist das Auftreten eines in allen drei Schenkeln gleich orientierten magnetischen Zusatzflusses bei *einphasiger Belastung reiner Stern-Stern-Schaltungen*.

Der Sternpunkt der gespeisten Wicklung (z. B. die OS-Wicklung) sei nicht geerdet (***Bild 4.36***). Daher gilt:

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \quad . \tag{5.139}$$

Das Durchflutungsgesetz, angewandt auf die beiden Integrationswege C_1 und C_2 in ***Bild 4.36*****b**, unter Verwendung von (5.139) führt auf

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} H \cdot ds &= \int_{A_1} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A} = \Theta = w_1 \cdot \underline{I}_1 - w_2 \cdot \underline{I}_0 - w_1 \cdot \underline{I}_2 = 0 \\ \oint_{C_2} H \cdot ds &= \int_{A_2} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A} = \Theta = w_1 \cdot \underline{I}_2 - w_1 \cdot \underline{I}_3 = 0 \end{aligned} \quad . \tag{5.140}$$

Aufgrund des Durchflutungsgleichgewichts ist die Durchflutung in einem Transformator bis auf eine oft vernachlässigbar kleine Magnetisierungsdurchflutung = 0. Damit ergeben sich aus den obigen Gleichungen die folgenden Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ in Abhängigkeit des Laststromes $\underline{I}_0$:

$$\underline{I}_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot \underline{I}_0 \qquad \underline{I}_2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot \underline{I}_0 \qquad \underline{I}_3 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{w_2}{w_1} \cdot \underline{I}_0 \quad . \tag{5.141}$$

Für die Durchflutungen in den 3 Kernschenkeln gilt (Integrationsweg C_3 in ***Bild 4.36*****b**)

$$\begin{aligned} \underline{\Theta}_{S1} &= w_1 \cdot \underline{I}_1 - w_2 \cdot \underline{I}_0 &&= -\tfrac{1}{3} \cdot w_2 \cdot \underline{I}_0 \\ \underline{\Theta}_{S2} &= w_1 \cdot \underline{I}_2 &&= -\tfrac{1}{3} \cdot w_2 \cdot \underline{I}_0 \\ \underline{\Theta}_{S3} &= w_1 \cdot \underline{I}_3 &&= -\tfrac{1}{3} \cdot w_2 \cdot \underline{I}_0 \end{aligned} \quad . \tag{5.142}$$

In den drei Kernschenkeln entstehen somit 3 örtlich und zeitlich identische (gleich gerichtete) Durchflutungen und damit drei gleich orientierte magnetischen Wechselflüsse (5.101)

$$\underline{\phi}_z = \underline{\phi}_{z1} = \underline{\phi}_{z2} = \underline{\phi}_{z3} = c \cdot \Theta_S = -c \cdot \frac{1}{3} \cdot w_2 \cdot \underline{I}_0 \quad . \tag{5.143}$$

Der Ansatz

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_1 &= \underline{\phi}_{10} + \underline{\phi}_{z1} \\ \underline{\phi}_2 &= \underline{\phi}_{20} + \underline{\phi}_{z2} \\ \underline{\phi}_3 &= \underline{\phi}_{30} + \underline{\phi}_{z3} \end{aligned} \tag{5.144}$$

für die magnetischen Flüsse ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 in den 3 Kernschenkeln mit den um 120 phasenverschobenen Flüssen ϕ_{10}, ϕ_{20} und ϕ_{30} und den 3 gleich orientierten Zusatzflüssen ϕ_{z1}, ϕ_{z2} und ϕ_{z2} führt zusammen mit dem Induktionsgesetz auf

$$\begin{aligned} \underline{U}_{11} &= +j\omega\cdot w_1\cdot\underline{\phi}_1 = +j\omega\cdot w_1\cdot\left(\underline{\phi}_{10}+\underline{\phi}_z\right) \\ \underline{U}_{12} &= +j\omega\cdot w_1\cdot\underline{\phi}_2 = +j\omega\cdot w_1\cdot\left(\underline{\phi}_{20}+\underline{\phi}_z\right) \quad . \\ \underline{U}_{13} &= +j\omega\cdot w_1\cdot\underline{\phi}_3 = +j\omega\cdot w_1\cdot\left(\underline{\phi}_{30}+\underline{\phi}_z\right) \end{aligned} \tag{5.145}$$

Für die Sternspannungen der speisenden Drehspannungssystems gilt außerdem

$$\begin{gathered} \underline{U}_R = \underline{U}_{11}+\underline{U}_0 \qquad \underline{U}_S = \underline{U}_{12}+\underline{U}_0 \qquad \underline{U}_T = \underline{U}_{13}+\underline{U}_0 \\ \text{und} \qquad . \\ \underline{U}_R+\underline{U}_S+\underline{U}_T = 0 = \underline{U}_{11}+\underline{U}_{12}+\underline{U}_{13}+3\cdot\underline{U}_0 \end{gathered} \tag{5.146}$$

Mit obiger Gleichung erhält man daraus:

$$3\cdot\underline{U}_0 + j\omega\cdot w_1\cdot(\underbrace{\underline{\phi}_{10}+\underline{\phi}_{20}+\underline{\phi}_{30}}_{\substack{=0,\text{ da um }120^0\\ \text{phasenverschoben}}}+3\cdot\underline{\phi}_z) = 0 \qquad \text{d.h.} \quad \underline{U}_0 = -j\omega\cdot w_1\cdot\underline{\phi}_z \tag{5.147}$$

und mit Gleichung (5.143)

$$\underline{U}_0 = j\omega\cdot\left(c\cdot\frac{1}{3}\cdot w_1\cdot w_2\right)\cdot\underline{I}_0 = j\omega\cdot L_0\cdot\underline{I}_0 \quad . \tag{5.148}$$

Dem ***Bild 4.36b*** kann ferner entnommen werden:

$$\underline{U}_{21} = +j\omega\cdot w_2\cdot\underline{\phi}_1 \qquad \text{und damit} \qquad \frac{\underline{U}_{11}}{\underline{U}_{21}} = \frac{w_1}{w_2} \quad . \tag{5.149}$$

Der Strom $\underline{I}_0$ ergibt sich zu:

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_{21}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{11}}{\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_R-\underline{U}_0}{\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_R - j\omega\cdot L_0\cdot\underline{I}_0}{\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{Z}} \quad , \tag{5.150}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} &\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_R}{\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{Z}+j\omega\cdot L_0} \approx \frac{\underline{U}_R}{\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{Z}} \\ &\text{und} \quad \underline{U}_0 = \frac{j\omega\cdot L_0}{\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{Z}+j\omega\cdot L_0}\cdot\underline{U}_R \approx \frac{j\omega\cdot L_0}{\frac{w_1}{w_2}\cdot\underline{Z}}\cdot\underline{U}_R = \frac{\omega\cdot L_0}{\frac{w_1}{w_2}\cdot Z}\cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\cdot\underline{U}_R \end{aligned} \quad . \tag{5.151}$$

Bei 3-schenkligen Eisenkernen können sich die magnetischen Zusatzflüsse ϕ_{z1}, ϕ_{z2} und ϕ_{z3} aufgrund ihrer gleichen Orientierung nicht im Eisenkreis schließen und müssen daher aus dem Eisenkern austreten. Die magnetischen Feldlinien schließen sich über die (unmagnetischen) Ölstrecken und den Transformatorkessel (***Bild 4.36*c**). Aufgrund des langen Weges dieser magnetischen Flussröhren in Öl mit der Permeabilität $\mu_r = 1$ ist die zugehörige Induktivität L_0 sehr gering; somit ist, abhängig von der Impedanz $\underline{Z}$, die Näherung in Gleichung (5.151) gerechtfertigt.

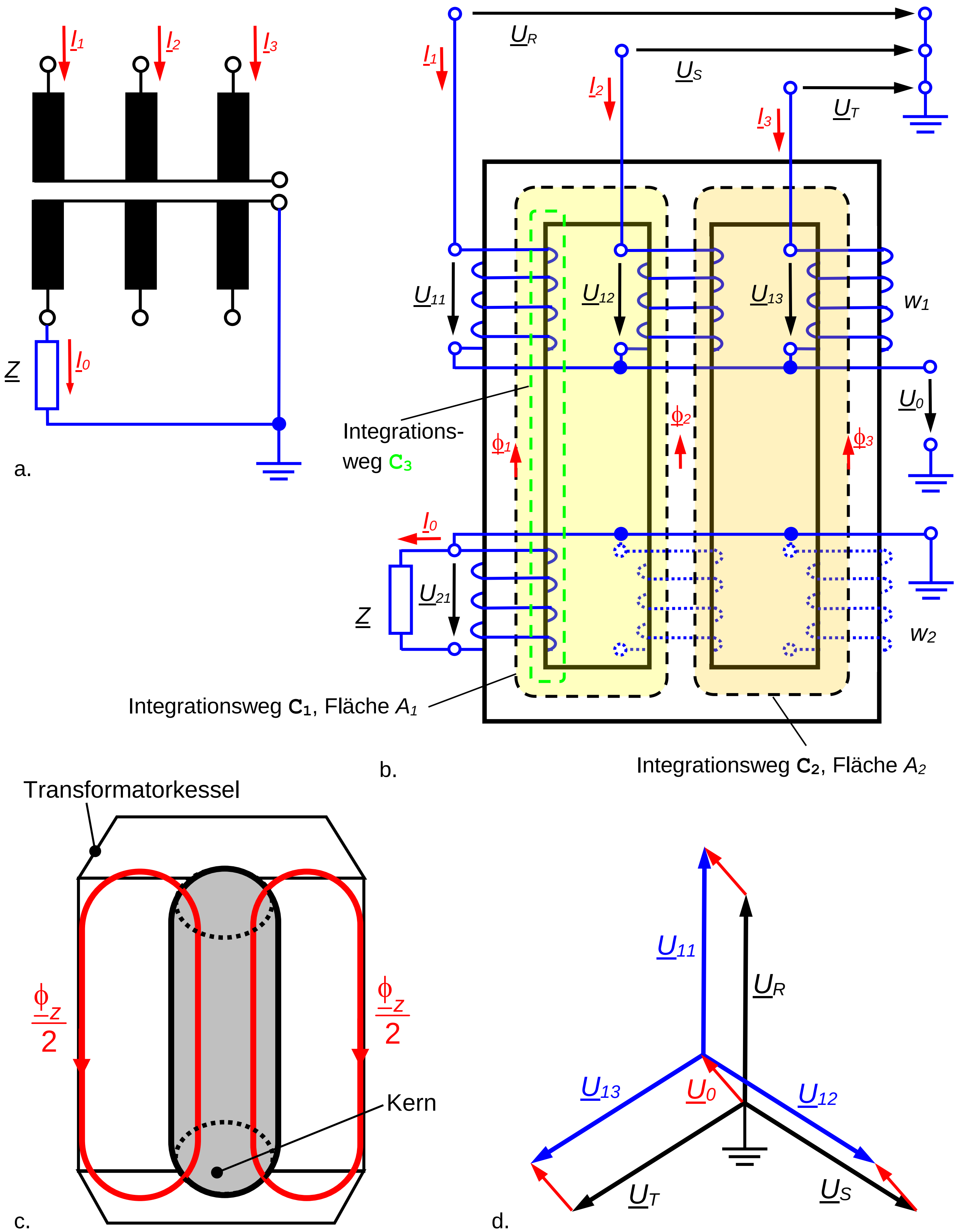


Bild 4.36 Einphasige Belastung von Transformatoren in Stern-Stern-Schaltung

a. Schaltbild

b. Wickelschema (gestrichelt gezeichnete Wicklungen sind ohne Einfluß)

c. Verlauf des gleich orientierten Flusses

d. Induktion einer Verlagerungsspannung $\underline{U}_0$

Insgesamt hat eine unsymmetrische Belastung eines Stern-Stern-Transformators die folgenden Konsequenzen:

- Durch die unsymmetrische Belastung entstehen in den Kernschenkeln 3 örtlich und zeitlich identische (gleich gerichtete) Durchflutungen. Diese Schenkeldurchflutungen haben 3 gleich gerichtete und betragsgleiche Zusatzflüsse $\underline{\phi}_{z1}$, $\underline{\phi}_{z2}$ und $\underline{\phi}_{z3}$ zur Folge.
- Die Zusatzflüsse $\underline{\phi}_{z1}$, $\underline{\phi}_{z2}$ und $\underline{\phi}_{z3}$ induzieren eine gleich orientierte Wechselspannung $\underline{U}_0$ in den Wicklungen (Verlagerungsspannung), um die sich der Sternpunkt des an den Wicklungen anliegenden Drehspannungssystems ($\underline{U}_{11}$, $\underline{U}_{12}$ und $\underline{U}_{13}$) gegenüber dem speisenden Drehspannungssystem ($\underline{U}_R$, $\underline{U}_S$ und $\underline{U}_T$) verschiebt (***Bild 4.36*d**). Dadurch kann es zu Fehlfunktionen von Schutzeinrichtungen (z. B. Erdschlußlöschung) des Energieübertragungsnetzes kommen.
- 3-schenklige Eisenkerne: Da die Zusatzflüsse $\underline{\phi}_{z1}$, $\underline{\phi}_{z2}$ und $\underline{\phi}_{z3}$ betragsgleich und in allen 3 Schenkeln gleich orientiert sind, können sie sich nicht im Eisenkern schließen. Sie müssen daher den Weg über Ölstrecken und die Kesselwand nehmen. Aufgrund des langen Weges über Ölstrecken sind die Induktivität L_0 und damit auch die Verlagerungsspannung $\underline{U}_0$ geringer als Transformatoren mit 5-schenkligen Eisenkernen.
- 5-schenklige Eisenkerne: Die Zusatzflüsse können sich ganz oder teilweise über die beiden äußeren Rückschlussjoche schließen. Da die Feldlinien mindestens teilweise in einem hochpermeablen Medium verlaufen, ist die wirksame Induktivität L_0 wesentlich größer als bei 3-schenkligen Eisenkernen. Somit hat gemäß (5.151) bei Transformatoren mit 5-schenkligen Eisenkernen schon eine relativ geringe unsymmetrische Belastung eine erhebliche Verschiebung ($\underline{U}_0$) des Sternpunktes zur Folge.

Abhilfe bietet eine zusätzliche Wicklung in Dreieckschaltung. Über sie kann ein Ausgleichsstrom $\underline{I}_A$ fließen, der das Auftreten eines Zusatzflusses $\underline{\phi}_Z$ verhindert. Aus dem Durchflutungsgesetz, angewandt auf die Integrationswege C_1 und C_2 in ***Bild 4.37*** ergeben sich gerade wieder die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ gemäß (5.141), da sich die Wirkung des Ausgleichsstromes $\underline{I}_A$ aufhebt.

Zur Bestimmung der Durchflutungen in den 3 Schenkeln muß der zusätzliche Strom $\underline{I}_A$ in der Dreieckwicklung (auch Ausgleichswicklung genannt) berücksichtigt werden. Falls kein Zusatzfluss auftreten soll, müssen die Schenkeldurchflutungen $\underline{\Theta}_{S1}$, $\underline{\Theta}_{S2}$ und $\underline{\Theta}_{S3}$ verschwinden. Als Konsequenz daraus verschwindet aber auch die Summe der Schenkeldurchflutungen, d. h. $\Sigma\underline{\Theta}_S = 0$ und man erhält:

$$\begin{aligned}
\underline{\Theta}_{S1} &= w_1 \cdot \underline{I}_1 - w_2 \cdot \underline{I}_0 + w_A \cdot \underline{I}_A &&= 0 \\
\underline{\Theta}_{S2} &= w_1 \cdot \underline{I}_2 + w_A \cdot \underline{I}_A &&= 0 \\
\underline{\Theta}_{S3} &= w_1 \cdot \underline{I}_3 + w_A \cdot \underline{I}_A &&= 0 \\
\underline{\Theta}_{S1} + \underline{\Theta}_{S2} + \underline{\Theta}_{S3} &= w_1 \cdot \underbrace{(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3)}_{=0} + 3 \cdot w_A \cdot \underline{I}_A - w_2 \cdot \underline{I}_0 = 0
\end{aligned} \quad . \tag{5.152}$$

Daraus folgt für den Strom in der Ausgleichswicklung:

$$\underline{I}_A = \frac{1}{3} \cdot \frac{w_2}{w_A} \cdot \underline{I}_0 \quad . \tag{5.153}$$

Für die Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$ in den Zuleitungen gilt wieder die Gleichung (5.141).

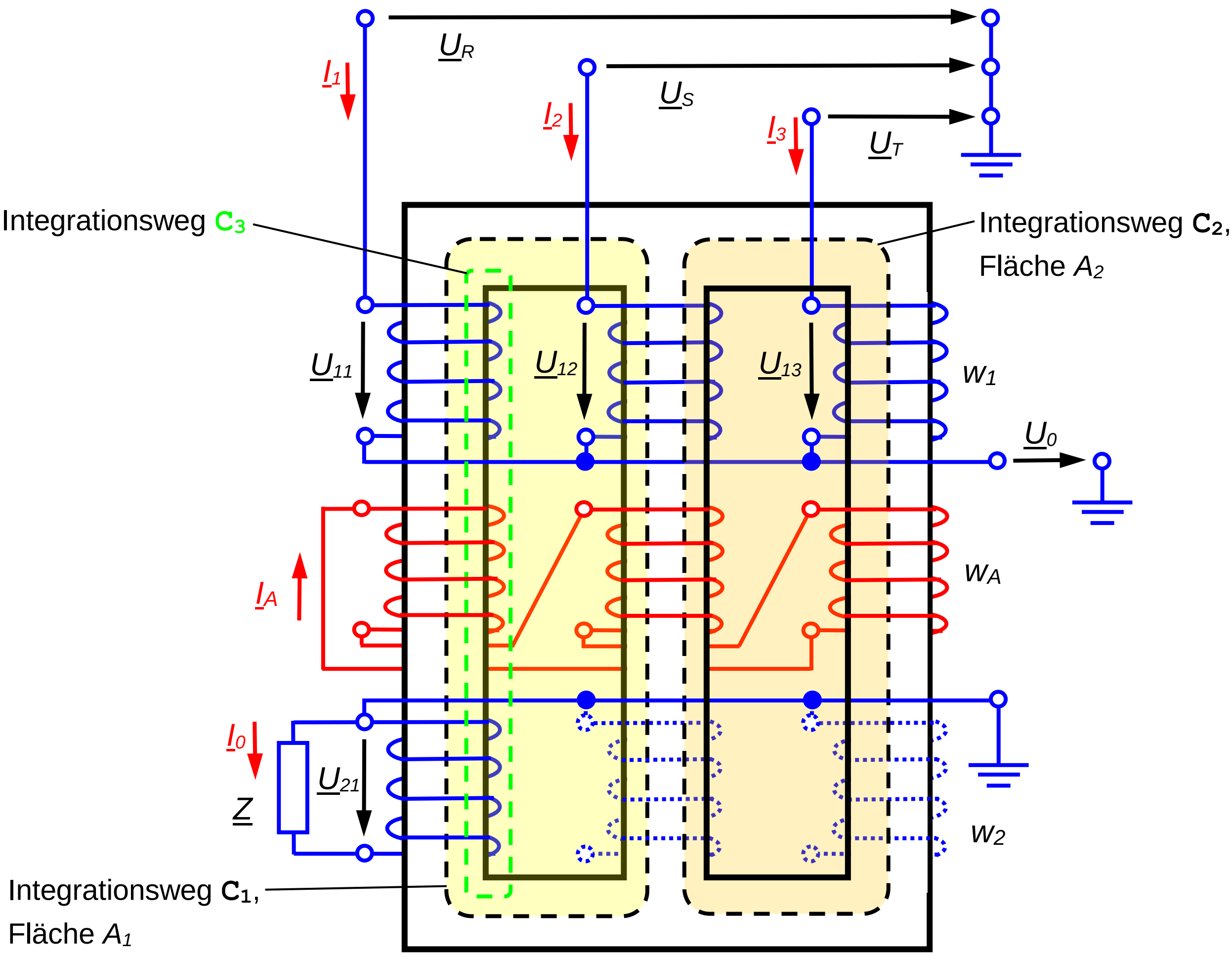


Bild 4.37 Wicklungsanordnung eines Stern-Stern-Transformators mit einer Ausgleichswicklung in Dreieckschaltung

Dimensionierung der Ausgleichswicklung:

Der Sternpunkt des Unterspannungssystems (System 2) eines Netzkuppeltransformators soll bis zu einem Anteil von x ($0 < x \leq 1$) seines Nennstromes $I_{2,N}$ belastbar sein. Es fließt ein Ausgleichsstrom von

$$I_{A,N} = \frac{1}{3} \cdot \frac{w_2}{w_A} \cdot \left(x \cdot I_{2,N} \right) \qquad \text{mit} \quad 0 < x \leq 1 \quad . \tag{5.154}$$

Für die Spannungen gilt

$$\frac{w_2}{w_A} = \frac{U_{2,N}}{U_{AW,N}} \quad . \tag{5.155}$$

Daraus folgt

$$I_{A,N} = \frac{1}{3} \cdot \frac{U_{2,N}}{U_{AW,N}} \cdot \left(x \cdot I_{2,N} \right) \quad . \tag{5.156}$$

Durch beidseitige Multiplikation mit dem Term ($3 \cdot U_{AW,N}$) und Erweiterung mit dem Faktor √3 folgt daraus

$$\begin{aligned}\sqrt{3} \cdot 3 \cdot U_{AW,N} \cdot I_{A,N} &= 3 \cdot \left(\sqrt{3} \cdot U_{AW,N} \cdot I_{A,N}\right) = 3 \cdot S_{AW,N} \\ &= \sqrt{3} \cdot U_{2,N} \cdot \left(x \cdot I_{2,N}\right) = x \cdot S_{2,N}\end{aligned} \tag{5.157}$$

und daraus:

$$S_{AW,N} = \frac{1}{3} \cdot x \cdot S_{2,N} \quad . \tag{5.158}$$

Falls der Sternpunkt des Unterspannungssystems eines Netzkuppeltransformators bis zum Nennstrom der Wicklungen belastbar sein soll, so muss die Ausgleichswicklung auf 1/3 der Scheinleistung der beiden anderen Wicklungen dimensioniert sein.

Die resultierende Gesamtdurchflutung ist stets dann bei unsymmetrischer Belastung = 0, wenn ein Ausgleichsstrom als Kreisstrom durch Wicklungen in allen drei Schenkeln fließen kann. Dies ist bei Dreieck- und Zick-Zack-Wicklungen der Fall. Bei Maschinentransformatoren in Yd-Schaltung ist daher keine zusätzliche Ausgleichswicklung nötig, Netzkuppeltransformatoren in Yy-Schaltung benötigen eine Ausgleichswicklung in Dreieckschaltung und sind daher als Dreiwicklungstransformatoren ausgeführt.

4.3.6.3 Transformatoren mit einstellbarer Übersetzung

Ein Teil der OS- oder US-Wicklung ist mit Anzapfungen versehen. Diese Wicklung wird als Stufenwicklung bezeichnet. Die Anzapfungen werden über einen Schalter z. B. zum Sternpunkt weitergeschaltet. Bei Leistungstransformatoren ist die Stufenwicklung meist ein Teil der Oberspannungswicklung (***Bild 4.38***). Vorteile dieser Ausführung:

- OS-Wicklung liegt meist außen bei konzentrischer Anordnung, deshalb sind die Anzapfungen einfach zugänglich,
- oberspannungsseitig fließt der geringere Strom, damit ist der Kontaktabbrand im Stufenschalter leichter beherrschbar,
- ab einer Spannung von ca. 60 kV ist die OS-Wicklung in Sternschaltung ausgeführt. Bei einem Dreiphasentransformator liegt dann immer ein Wicklungsende auf demselben Potential. Bei einer Dreieckschaltung wären 3 getrennte Schalter notwendig (Kosten!)

Leistungstransformatoren verfügen über einen weiten Stellbereich der Übersetzung; Stellbereiche von bis zu ± 17,5% sind durchaus üblich. Die Zahl der Stufen, in der die Übersetzung angepaßt werden kann, ist vom Einsatz und der Art der Transformatoren abhängig; eine typische Anzahl von Stufen ist 19 oder 27 Stufen. Zur Umschaltung von einer Anzapfung zur nächsten kommt ein <u>*Stufenschalter*</u> zum Einsatz, der <u>*unter Last*</u> geschaltet werden kann.

Für die Änderung der Übersetzung gibt es zwei Prinzipien (***Bild 4.38***):

- Grob- und Feinstufe
- Zu- und Gegenschaltung.

Bei der *Zu- und Gegenschaltung* wird durch den Schalter K die Stufenwicklung einmal in Reihe und einmal gegen die Stammwicklung geschaltet. Da durch Stufenwicklung und Stammwicklung derselbe Strom fließt, werden bei der Zuschaltung Windungen der Stufenwicklung zur

Stammwicklung hinzugeschaltet (hinzuaddiert), und in der Gegenschaltung abgezogen. Beim Prinzip der *Grob- und Feinstufe* können die Windungen der Stufenwicklung zu- oder weggeschaltet sein. Sie tragen entweder zur oberspannungsseitigen (primären) Windungszahl w_1 bei oder nicht. Die Feinanpassung erfolgt durch die Feinstufenwicklung.

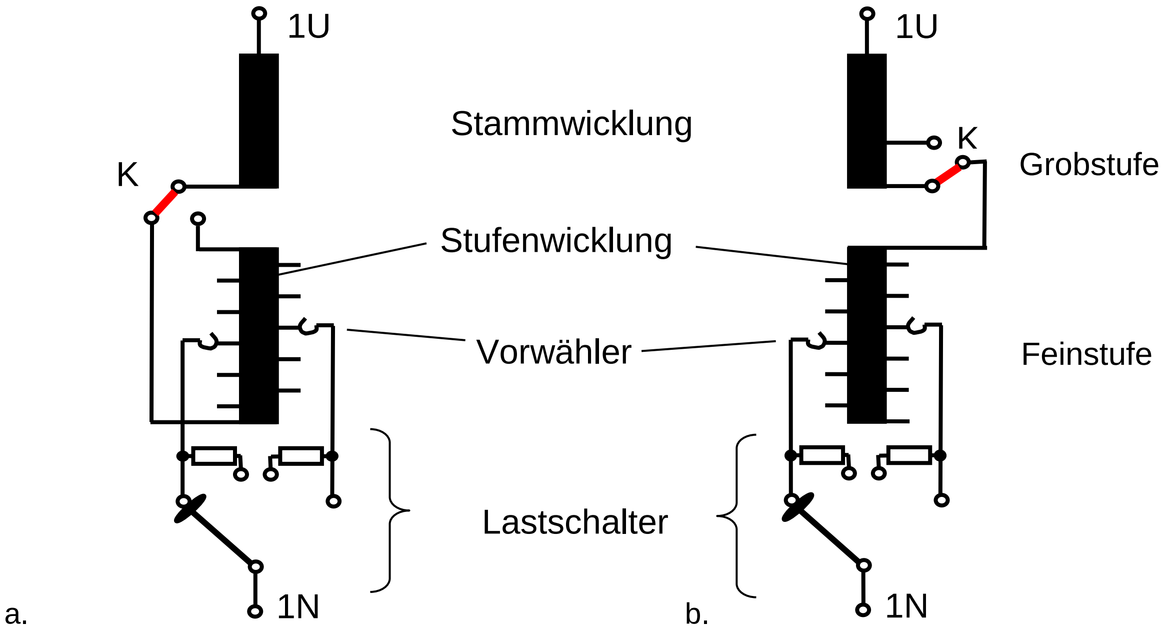


Bild 4.38 Realisierung der variablen Übersetzung bei Leistungstransformatoren
a. Zu- und Gegenschaltung
b. Grob- und Feinstufe

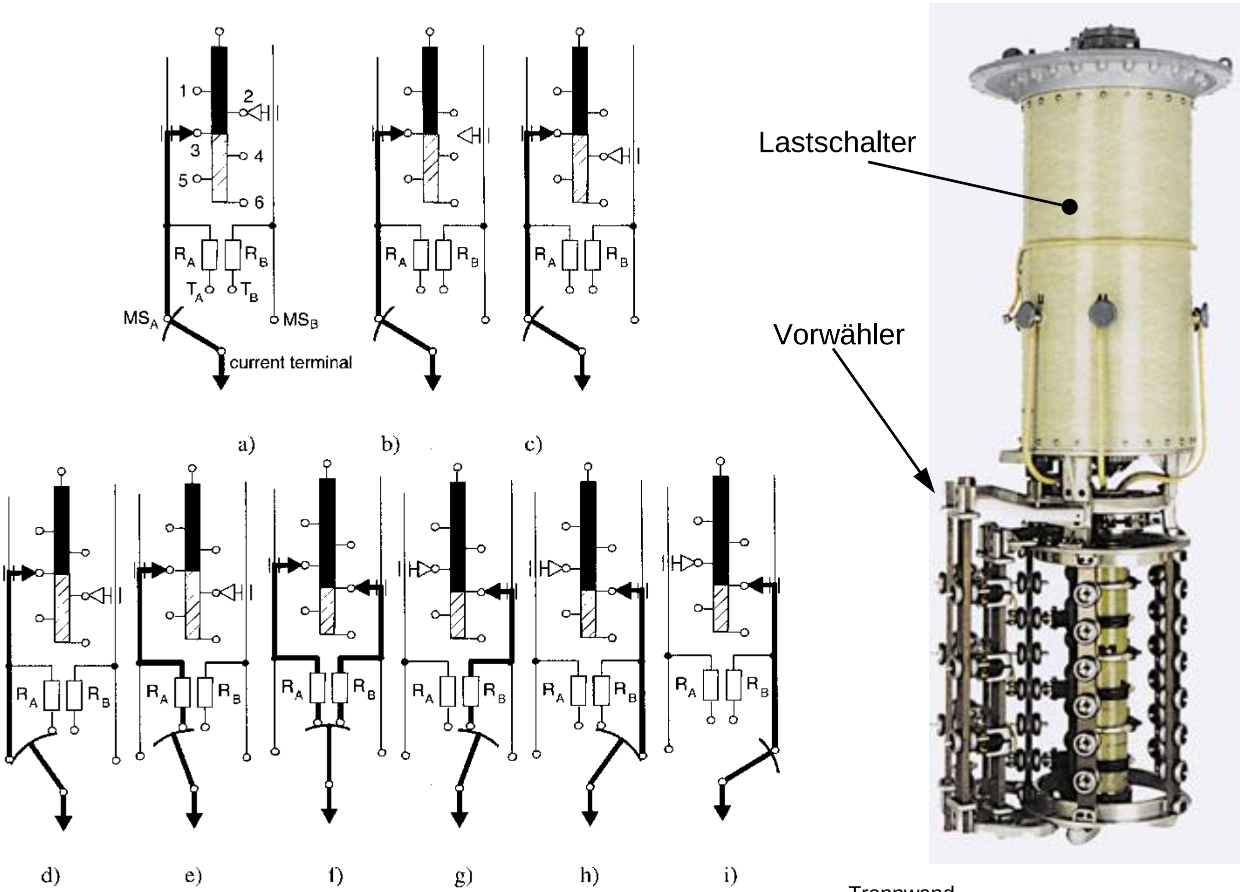
Funktionsweise des Stufenschalters

Bild 4.39 zeigt die einzelnen Stadien und den Stromfluß beim Umschalten von einer Anzapfung der Feinstufenwicklung zur nächsten unter Last. Der Stufenschalter besteht aus den Vorwählerkontakten, dem Lastschalter und dem Schalterantrieb (hier nicht gezeichnet). Die Vorwählerkontakte können nur im stromlosen Zustand geschaltet werden. ***Bild 4.39*****a** zeigt den Ausgangszustand; es soll von Anzapfung 3 nach Anzapfung 4 umgeschaltet werden. Dazu wird der nicht stromführende Vorwählerkontakt zur Anzapfung 4 geschaltet (***Bild 4.39*****b** und **c**). Dann wird der Lastschalter von der Position MS_A in die Position MS_B bewegt. Zunächst fließt der Strom noch direkt von der Anzapfung 3 über den Lastschalter (***Bild 4.39*****d**), dann über den Widerstand R_A (***Bild 4.39*****e**), dann über beide Widerstände (***Bild 4.39*****f**), dann von der Anzapfung 4 über den Widerstand R_B (***Bild 4.39*****g)** und schließlich vollständig von Anzapfung 4 über den Lastschalter.

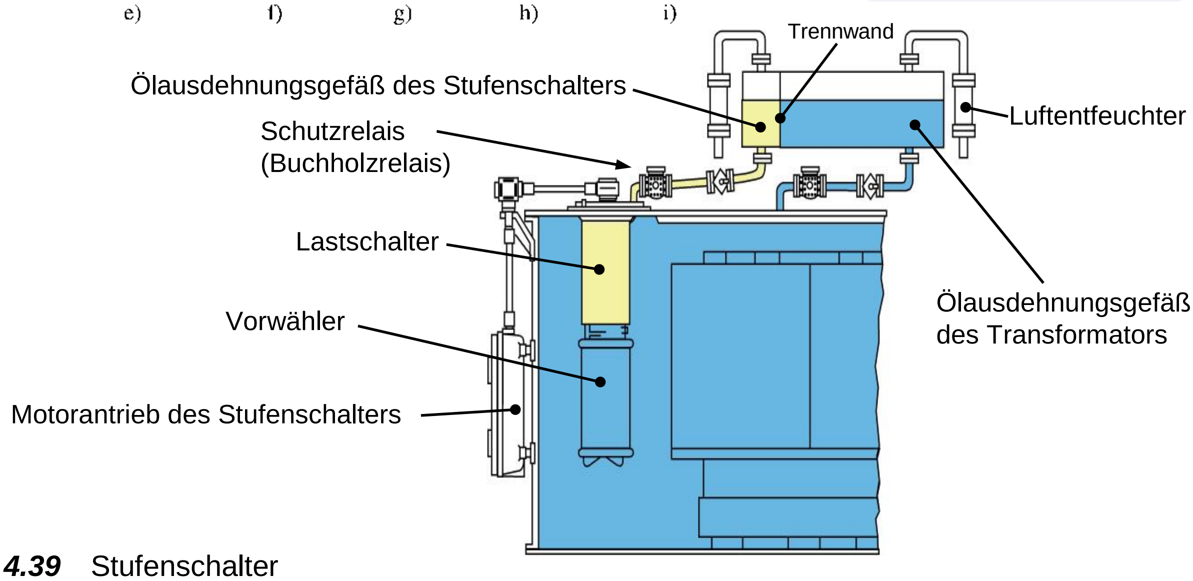
Bei Leistungstransformatoren ist die OS-Wicklung üblicherweise in Sternschaltung ausgeführt. Aufgrund des gemeinsamen Sternpunktes kann ein Stufenschalter eingesetzt werden, der aus 3 Ebenen besteht. Von den außen liegenden Stufenwicklungen sind Leitungen von den Anzapfungen zu den Vorwählerkontakten des Stufenschalters geführt. Die Vorwählereinheit ist – wie der Lastschalter – aus 3 Ebenen für die 3 Phasen aufgebaut.

Der Lastschalter ist als Ölschalter aufgebaut. Das Öl dient als Löschmedium zur Löschung des Schaltlichtbogens beim Umschalten von einem Kontakt zum anderen (MSA, MSB). Durch die Widerstände R_A und R_B (***Bild 4.39***) wird letztlich die Brenndauer des Lichtbogens verringert.

Durch den Lichtbogen wird das Öl zersetzt und verunreinigt. Das Öl im Transformator muß jedoch von hoher Reinheit und Qualität sein, um den Anforderungen an die Isolierfähigkeit zu genügen. Deshalb ist das Öl des Stufenschalters vollständig vom Öl des Transformators abgeschottet. Außen ist am Transformator der Motorantrieb des Stufenschalters angebaut. Ein Elektromotor treibt über ein Getriebe und Verbindungsstangen den Umschaltmechanismus des Stufenschalters an. In jüngster Zeit wurden Stufenschalter mit einer Vakuumschaltkammer entwickelt und am Markt verfügbar gemacht.



a.



b.

Bild 4.39 Stufenschalter

a. Funktionsweise und Aufbau des Stufenschalters zur Anpassung der Übersetzung
b. Einbau des Stufenschalters im Transformatorkessel

4.3.6.4 Spartransformatoren

Bei großen Nennscheinleistungen (≥ 1000 MVA) werden aus Gründen des Transportes (Gewicht, Baugröße) oft 3 getrennte Einphasentransformatoren verwendet. Diese können als Spartransformatoren ausgeführt sein, wenn sich die Nennspannungen der gekoppelten Netze nicht mehr als um den Faktor 2 bis 3 unterscheiden. Mit Spartransformatoren lassen sich gegenüber Volltransformatoren Material (Eisen, Kupfer, Öl), Gewicht und Verluste einsparen. Bei vorgegebenem Bahnprofil für den Transport lassen sich größere Einheitenleistungen realisieren, als bei Volltransformatoren. Durch Spartransformatoren sind die Netze allerdings galvanisch gekoppelt. Üblicherweise sind die OS-Wicklungen im Stern geschaltet, die dritte, galvanisch vom eigentlichen Spartransformator getrennte Wicklung, die so genannte Tertiärwicklung ist im Dreieck geschaltet (***Bild 4.40*a**).

***Bild 4.40*c** und ***Bild 4.40*d** zeigen Spartransformatoren mit unterschiedlichen Konzepten zur Einstellung der Übersetzung. Die Stufenwicklung kann – abhängig von den technischen Anforderungen – sowohl ober- als auch mittelspannungsseitig angeordnet sein. Es unterscheiden sich dabei insbesondere die an den jeweiligen Wicklungsenden auftretenden (Prüf)-Wechselspannungen. Für einen Dreiphasen-Spartransformator werden – im Gegensatz zu einem Dreiphasen-Volltransformator – 3 getrennte Stufenschalter benötigt, da keiner der Stufenschalterkontakte auf demselben Potential liegt.

Bei Spartransformatoren wird nur ein Teil der Ausgangsleistung wirklich im Transformator umgeformt, der andere Teil wird der Primärseite unmittelbar entnommen. Der OS-seitig fließende Strom $\underline{I}_1$ wird um den induzierten Strom $\underline{I}_3$ ergänzt; beide Ströme zusammen bilden den US-seitigen Ausgangsstrom $\underline{I}_2$. Die (Nenn)-Ausgangsleistung eines Spartransformators wird als *Durchgangsleistung* S_{DN} bezeichnet:

$$S_{DN} = 3 \cdot U_{2N} \cdot I_{2N} \quad . \tag{5.159}$$

Die vom Transformator tatsächlich übertragene Leistung wird als *Eigenleistung* S_{EN} bezeichnet

$$S_{EN} = 3 \cdot U_{2N} \cdot I_{3N} \quad . \tag{5.160}$$

Läßt man die Streuinduktivitäten, Widerstände und den Magnetisierungsstrom zunächst außer Acht, so gilt

$$\frac{U_{1N}}{U_{2N}} = \frac{w_1 + w_2}{w_2} \qquad \frac{I_{1N}}{I_{3N}} = \frac{w_2}{w_1} \qquad \frac{I_{1N}}{I_{2N}} = \frac{w_2}{w_1 + w_2} \quad . \tag{5.161}$$

Für den Quotienten S_{EN}/S_{DN} erhält man damit

$$\frac{S_{EN}}{S_{DN}} = \frac{3 \cdot U_{2N} \cdot I_{3N}}{3 \cdot U_{2N} \cdot I_{2N}} = \frac{I_{3N}}{I_{2N}} = \frac{I_{3N}}{I_{1N}} \cdot \frac{I_{1N}}{I_{2N}} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \frac{w_2}{w_1 + w_2}$$

$$= \frac{w_1 + w_2 - w_2}{w_1 + w_2} = 1 - \frac{w_2}{w_1 + w_2} \quad . \tag{5.162}$$

$$= \boxed{1 - \frac{U_{2N}}{U_{1N}} = \frac{S_{EN}}{S_{DN}} < 1}$$

Dabei ist U_{2N} stets die kleinere Spannung.

Die Typenleistung S_{EN} ist also im Vergleich zur Durchgangsleistung S_{DN} um so kleiner, und der Spartransformator wird im Vergleich zu den Volltransformatoren (mit getrennten Wicklungen für jede Spannungsebene) um so günstiger, je weniger Primär- und Sekundärspannungen voneinander abweichen. Allerdings ist die relative Kurzschlußspannung, d. h. die Kurzschlußimpedanz deutlich geringer als bei Volltransformatoren. Dies muß bei der Auslegung des Netzes hinsichtlich Kurzschlußfestigkeit berücksichtigt werden.

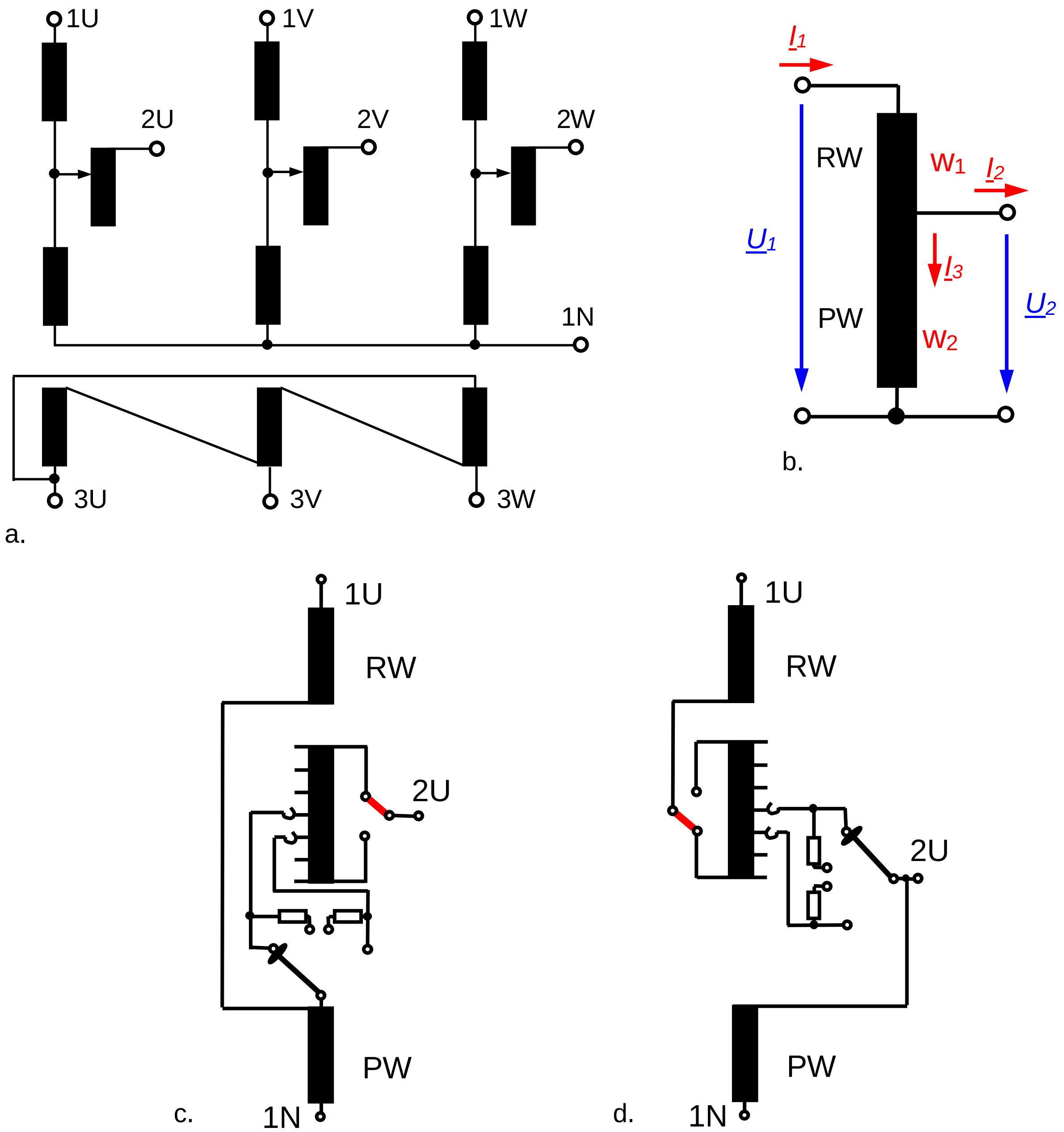


Bild 4.40 a. Dreiphasen-Spartransformator mit Spannungseinstellung an der Mittelspannungswicklung
b. einphasiges Schaltbild eines Spartransformators

Schaltungen der Stufenwicklung von Spartransformatoren
c. Stufenwicklung <u>mittel</u>spannungsseitig
d. Stufenwicklung <u>ober</u>spannungsseitig

4.3.6.5 Quer- und Schrägregeltransformatoren

Bei der *Längsregelung* wird nur der Betrag der Unterspannung geändert, nicht aber deren Phasenlage. Bei der *Querregelung* wird eine Spannung quer (d. h. um 90 ° versetzt) so eingekoppelt, daß sich auf der Unterspannungsseite ein Drehspannungssystem ergibt, dessen Phasendrehung mit der Übersetzung geändert werden kann. Die Kombination aus Längs- und Querregelung wird als *Schrägregelung* bezeichnet.

Man unterscheidet Quer- und Schrägregeltransformatoren, die durch einen einzigen Transformator realisiert sind und solche, die aus zwei Transformatoren bestehen. Bei der Lösung mit zwei Transformatoren dient der *Erregertransformator* zur Speisung des *Zusatztransformators*. Dabei kann sowohl die direkte Regelung in der Serienwicklung des Zusatztransformators oder die indirekte Regelung in der Sekundärwicklung des Erregertransformators realisiert sein. Die Lösung mit einem Transformator wird als direkte Quer- oder Schrägregelung bezeichnet.

<u>Schaltungen für die direkte Quer- und Schrägregelung</u>

Bild 4.41 zeigt einen Querregeltransformator. Die Spannung zwischen 1U und 1V fällt am linken Schenkel der Dreieckwicklung ab. In der Unterspannungswicklung wird eine zu dieser Spannungsdifferenz gleich- oder gegenphasige Spannung induziert, abhängig vom Wicklungssinn. Diese an der US-Wicklung induzierte Spannung $\underline{U}_X$ addiert sich zu der Spannung $\underline{U}_{1W}$ hinzu. $\underline{U}_{1W}$ und $\underline{U}_X$ stehen senkrecht zueinander. Für die Spannung $\underline{U}_{2W}$ erhält man

$$\underline{U}_{2W} = \underline{U}_{1W} + \underline{U}_X = \underline{U}_{1W} + \frac{w_2}{w_1} \cdot \underline{U}_{1U-1V} = \underline{U}_{1W} + \sqrt{3}\frac{w_2}{w_1} \cdot j \cdot \underline{U}_{1W} = \underline{U}_{1W}\left(1+\sqrt{3}\frac{w_2}{w_1} \cdot e^{+j90^o}\right). \quad (5.163)$$

Die Phasendrehung φ wird durch das Windungszahlverhältnis bestimmt.

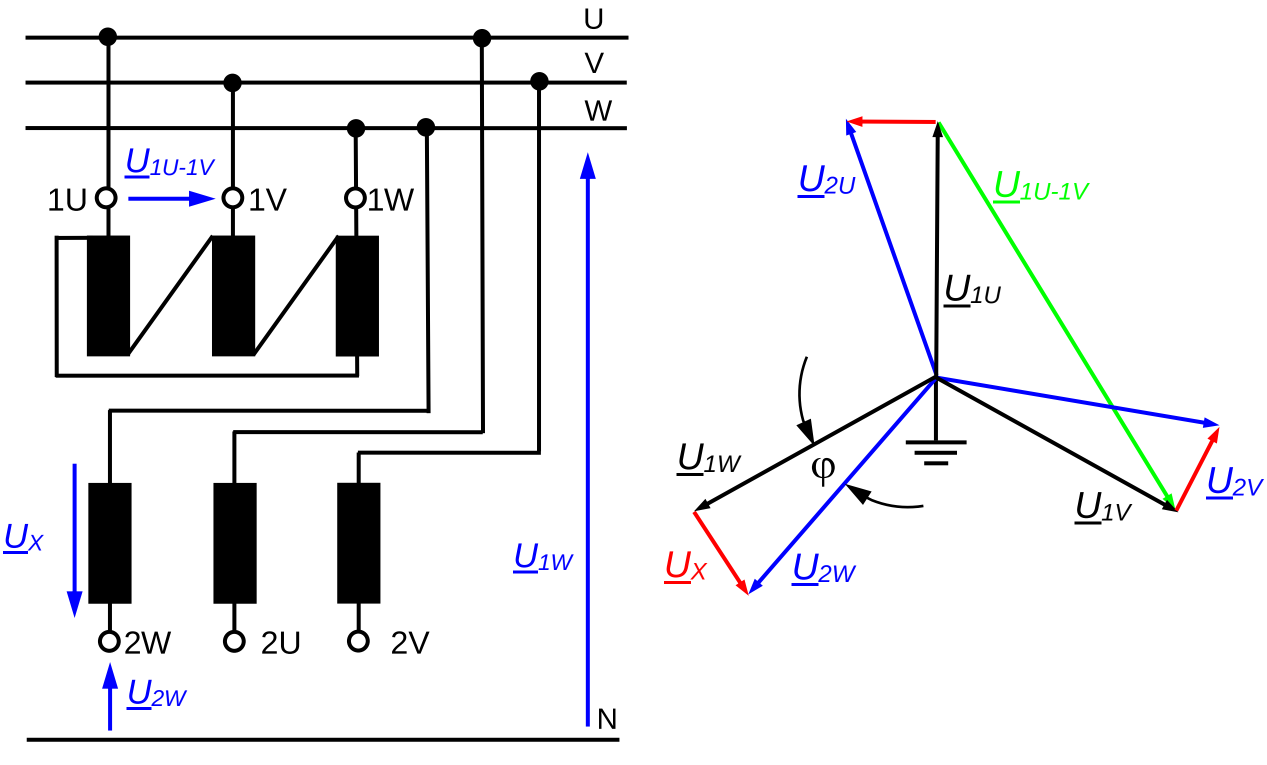


Bild 4.41 Beispiel für einen *Querregeltransformator* (direkte Querregelung) und Zeigerdiagramm der Spannungen

In ***Bild 4.42*** ist die Schaltung eines Schrägregeltransformators dargestellt. Da die Sternschaltung symmetrisch aufgebaut ist, liegt die Spannung $\underline{U}_{1U}$ auch an den Wicklungen der Sternschaltung an. Abhängig von der Stufenschalterstellung ist die Spannung $\underline{U}_{X}$ gleich- oder gegenphasig zu $\underline{U}_{1U}$. Damit ergibt sich abhängig von der durch den Stufenschalter eingestellten Stromrichtung und dem Windungszahlverhältnis eine Phasendrehung des Drehspannungssystems 2 (2U, 2V, 2W) gegenüber dem Drehspannungssystem 1 (1U, 1V, 1W) und eine deutlich stärkere Amplitudenänderung als bei der reinen Querregelung. Die Spannung $\underline{U}_{2W}$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\underline{U}_{2W} &= \underline{U}_{1W} - \underline{U}_{X} = \underline{U}_{1W} - \frac{w_2}{w_1}\cdot\underline{U}_{1U} = \underline{U}_{1W} - \frac{w_2}{w_1}\cdot\underline{U}_{1W}\cdot e^{-j120^o} \\ &= \underline{U}_{1W}\cdot\left(1-\frac{w_2}{w_1}\cdot e^{-j120^o}\right)\end{aligned} \quad . \qquad (5.164)$$

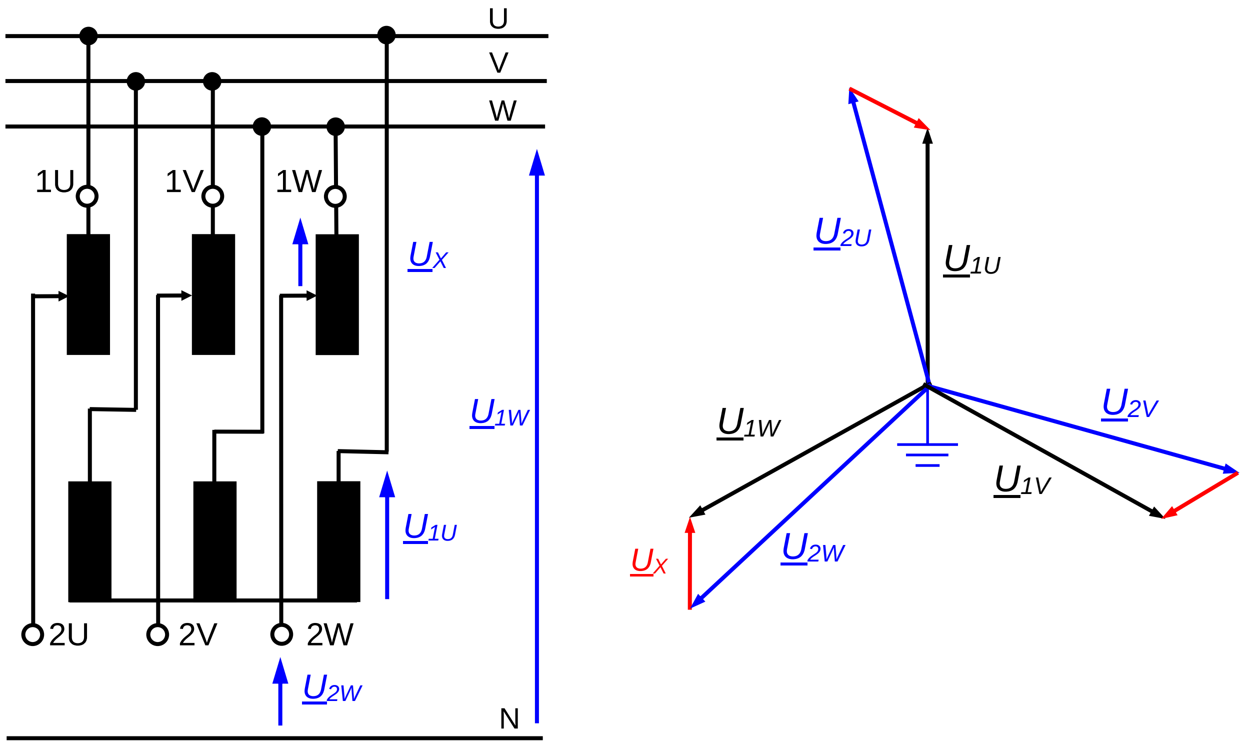


Bild 4.42 Beispiel für einen *Schrägregeltransformator* (direkte Schrägregelung) und Zeigerdiagramm der Spannungen

Allgemein gilt für die Übersetzung eines Längs-, Quer- oder Schrägregeltransformators:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1\cdot\left(k_1 \pm k_2\cdot e^{j\alpha}\right) \qquad \text{oder} \qquad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{1}{k_1 \pm k_2\cdot e^{j\alpha}} = \underline{\ddot{u}} \qquad (5.165)$$

Anhand von Zeigerdiagrammen kann gezeigt werden, dass mit dem Längsregeltransformator vor allem die Blindleistung beeinflusst wird. Mit dem Querregeltransformator wird im Wesentlichen der Wirkleistungsfluss beeinflusst. Im ENTSO-E-Netz werden nahezu ausschließlich Längsregeltransformatoren eingesetzt.

4.3.7 Auslegung von Transformatoren

Die Auslegung von Transformatoren bedeutet die Erfüllung aller technischer Forderungen seitens des Kunden bei gleichzeitig idealerweise minimalen Herstellkosten. Dieses komplexe Optimierungsproblem wird in der Praxis durch einen iterativen Prozess gelöst. Technische Anforderungen an Transformatoren von Seiten des Kunden sind:

- Spannung und Leistung (daraus ergibt sich der Strom),
- Einstellbereich der Spannung,
- relative Kurzschlußspannung (Kurzschlußimpedanz),
- Leerlauf- und Kurzschlußverluste,
- Geräuschpegel,
- Abmessungen (Bahnprofilgängigkeit),
- Prüfspannungen (bestimmen die hochspannungstechnische Auslegung).

Im Folgenden soll die Auslegung von Leistungstransformatoren anhand eines Beispiels gezeigt werden.

Beispiel:

Ein 175-MVA-Transformator mit den Daten 520 kV±12,5 %/11 kV und der Schaltgruppe YNd11 soll grob dimensioniert werden. Die Spannungseinstellung soll in ± 5 Stufen erfolgen. Die relative Kurzschlußspannung soll u_k = 0,12 ± 7,5 % betragen.

4.3.7.1 Streuinduktivität und Kurzschlußreaktanz

Bild 4.43a zeigt die Anordnung der Wicklungen bei einem Leistungstransformator. Die dem Kernschenkel am nächsten liegende (innere) Wicklung ist überlicherweise die Unterspannungswicklung, die außen liegende Wicklung ist die Oberspannungswicklung. Aufgrund des identischen Wickelsinns sind die Stromrichtungen in den beiden Wicklungen entgegengesetzt gerichtet.

Aus dem Durchflutungsgesetz folgt:

$$\begin{aligned}\oint_C \underline{\boldsymbol{H}} \cdot d\boldsymbol{s} &= \oint_{C_{Luft}} \underline{\boldsymbol{H}}_{Luft} \cdot d\boldsymbol{s} + \oint_{C_{Fe}} \underline{\boldsymbol{H}}_{Fe} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{C_{Luft}} \underline{\boldsymbol{H}}_{Luft} \cdot d\boldsymbol{s} + \oint_{C_{Fe}} \frac{1}{\mu_{r,Fe}} \underline{\boldsymbol{H}}_{Luft} \cdot d\boldsymbol{s} \\ &\approx \oint_{C_{Luft}} \underline{\boldsymbol{H}}_{Luft} \cdot d\boldsymbol{s} = \underline{\Theta} = \underline{H}_{Luft} \cdot h = \underline{H}_\sigma \cdot h\end{aligned} \quad . \qquad (5.166)$$

Aufgrund der hohen Permeabilität des Eisens ist die magnetische Feldstärke im Eisen gegenüber jener in der Luft vernachlässigbar. Somit leistet nur das magnetische Feld im Bereich der Wicklungen einen Beitrag zu dem Wegintegral.

Die Durchflutung nimmt mit der Ortkoordinate x im Bereich der inneren Wicklung linear zu, da dann immer mehr Leiter durch den Integrationsweg umfaßt werden (***Bild 4.43a***). Für Werte von x zwischen den Wicklungen bleibt die Durchflutung konstant; im Bereich der äußeren Wicklung nimmt die Durchflutung wieder linear bis aus den Wert Null ab, da der Strom in der äußeren Wicklung dem in der inneren Wicklung entgegen gerichtet ist. Die magnetische Feldstärke $\underline{H}_\sigma(x)$ im Bereich der Wicklungen ist gemäß Gleichung (5.166) mit der Durchflutung $\underline{\Theta}(x)$ verknüpft.

Somit gilt für die magnetische Feldstärke im Bereich der Wicklungen

$$\underline{H}_\sigma(x)=\begin{cases}\dfrac{w_1\cdot I_1}{h}\cdot\left(\dfrac{x-\dfrac{D_{Fe}}{2}-s}{b_{US}}\right) & \text{für}\quad \dfrac{D_{Fe}}{2}+s\le x\le\dfrac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}\\ \dfrac{w_1\cdot I_1}{h} & \text{für}\quad \dfrac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}\le x\le\dfrac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta\\ \dfrac{w_1\cdot I_1}{h}\cdot\left(\dfrac{\dfrac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta+b_{OS}-x}{b_{OS}}\right) & \text{für}\quad \dfrac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta\le x\le\dfrac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta+b_{OS}\end{cases}\quad . \qquad (5.167)$$

Die Induktivität der Anordnung kann durch Betrachtung der magnetischen Energie berechnet werden:

$$W_{magn}=\frac{1}{2}\cdot L_\sigma\cdot I_1^2=\frac{1}{2}\cdot\iiint_V \boldsymbol{B_\sigma}\cdot\boldsymbol{H_\sigma}\,d\boldsymbol{V}=\frac{\mu_0}{2}\cdot\iiint_V H_\sigma^2\,dV \quad . \qquad (5.168)$$

Die Integration erfolgt in dem Volumen, in dem die magnetische Feldstärke nicht verschwindet, also im Bereich der Wicklungen:

$$L_\sigma=\frac{\mu_0}{I_1^2}\cdot\iiint_V H_\sigma^2\,dV=\frac{\mu_0}{I_1^2}\cdot\int_0^h\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2}H_\sigma^2\cdot x\,dx\,d\varphi\,dz=\frac{\mu_0}{I_1^2}\cdot h\cdot 2\pi\cdot\int_{r_1}^{r_2}H_\sigma^2\cdot x\,dx$$

$$=\frac{\mu_0\cdot w_1^2}{h}\cdot 2\pi\cdot\left[\int_{\frac{D_{Fe}}{2}+s}^{\frac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}}\left(\frac{x-\frac{D_{Fe}}{2}-s}{b_{US}}\right)^2 x\,dx+\int_{\frac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}}^{\frac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta}x\,dx+\int_{\frac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta}^{\frac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta+b_{OS}}\left(\frac{\frac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta+b_{OS}-x}{b_{OS}}\right)^2 x\,dx\right] . \qquad (5.169)$$

$$=\frac{\mu_0\cdot w_1^2}{h}\cdot 2\pi\cdot\left[\frac{1}{3}b_{US}\cdot\left[\frac{D_{Fe}}{2}+s+\frac{3}{4}b_{US}\right]+\Delta\cdot\left[\frac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\frac{1}{2}\Delta\right]+\frac{1}{3}b_{OS}\cdot\left[\frac{D_{Fe}}{2}+s+b_{US}+\Delta+\frac{1}{4}b_{OS}\right]\right]$$

$$=\frac{\mu_0\cdot w_1^2}{h}\cdot\pi\cdot\left[\frac{1}{3}b_{US}\cdot\left[D_{Fe}+2s+\frac{3}{2}b_{US}\right]+\Delta\cdot\left[D_{Fe}+2s+2b_{US}+\Delta\right]+\frac{1}{3}b_{OS}\cdot\left[D_{Fe}+2s+2b_{US}+2\Delta+\frac{1}{2}b_{OS}\right]\right]$$

Der Einfluß von Randeffekten kann durch den Rogowski-Faktor

$$R\approx 1-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\cdot(b_{US}+\Delta+b_{OS})}{h}\right]=1-\frac{b_{US}+\Delta+b_{OS}}{\pi\cdot h} \qquad (5.170)$$

berücksichtigt werden. Der Rogowski-Faktor R nimmt üblicherweise Werte nahe 1 an, er wird für eine erste Abschätzung mit R = 0,98 angesetzt.

Damit und mit den „mittleren“ Durchmessern D_{US}, D_m und D_{OS} gemäß

$$\begin{aligned}D_{OS}&=D_{Fe}+2s+2b_{US}+2\Delta+\frac{1}{2}b_{OS}\\ D_m&=D_{Fe}+2s+2b_{US}+\Delta\\ D_{US}&=D_{Fe}+2s+\frac{3}{2}b_{US}\end{aligned} \qquad (5.171)$$

vereinfacht sich der Ausdruck zur Berechnung der Streuinduktivität zu

$$L_\sigma\approx\frac{\mu_0\cdot\pi\cdot w_1^2}{h}\cdot\left[\Delta\cdot D_m+\frac{1}{3}b_{US}\cdot D_{US}+\frac{1}{3}b_{OS}\cdot D_{OS}\right]\cdot R \quad . \qquad (5.172)$$

Dies kann noch weiter vereinfacht werden zu

$$L_\sigma \approx \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot w_1^2}{h} \cdot \left[\underbrace{\left(D_{Fe} + 2s + 2b_{US} + \Delta\right)}_{D_S} \cdot \underbrace{\left(\Delta + \frac{1}{3} b_{US} + \frac{1}{3} b_{OS}\right)}_{s_{korr}} + \frac{1}{3}\left(b_{OS} - b_{US}\right) \cdot \left(\Delta + \frac{1}{2}\left(b_{US} + b_{OS}\right)\right) \right] \cdot R \cdot \quad (5.173)$$

Bei etwa gleichen Breiten b_{US} und b_{OS} der Wicklungen ist der 2. Term gegenüber dem 1. Term vernachlässigbar und man erhält eine Beziehung für die Streuinduktivität, die sich für eine erste Abschätzung sehr gut eignet:

$$L_\sigma \approx \frac{0{,}98 \cdot \mu_0 \cdot \pi \cdot w_1^2}{h} \cdot \left[\left(D_{Fe} + 2s + 2b_{US} + \Delta\right) \cdot \left(\Delta + \frac{1}{3} b_{US} + \frac{1}{3} b_{OS}\right) \right] = \frac{0{,}98 \cdot \mu_0 \cdot \pi \cdot w_1^2}{h} \cdot D_S \cdot s_{korr} \quad . \quad (5.174)$$

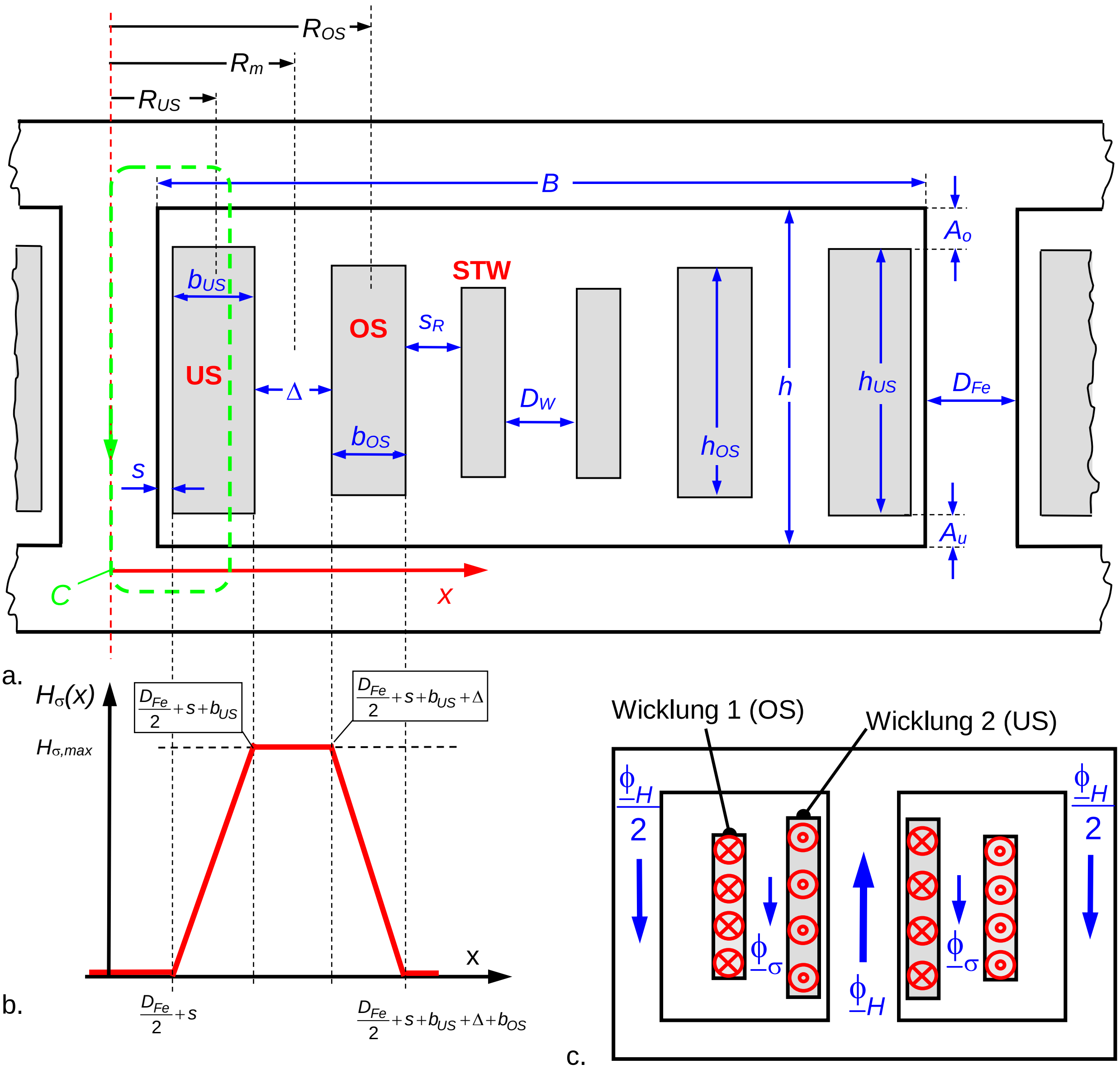


Bild 4.43 Berechnung der Streuinduktivität bei einem Zweiwicklungstransformator
a. Prinzipielle Anordnung und geometrische Abmessungen
b. Magnetisches Feld im Bereich der Wicklungen
c. Stromrichtungen bei gleichem Wickelsinn (Beispiel: 1-Phasen-Transformator)

Die relative Kurzschlußspannung u_x ergibt sich aus der Streuinduktivität zu

$$u_x = \omega \cdot L_\sigma \cdot \frac{I_{1N}}{U_{1N}} = \frac{I_{1N} \cdot U_{1N} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{U_{1N} \cdot U_{1N} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \cdot \omega \cdot L_\sigma = \frac{\sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_{1N}}{U_N \cdot U_N} \cdot \omega \cdot L_\sigma = \frac{S_N}{U_N^2} \cdot \omega \cdot L_\sigma \quad . \tag{5.175}$$

4.3.7.2 Windungszahlen und Kernquerschnitt

Die Windungszahlen eines Transformators müssen ganzzahlig sein. Gleichzeitig müssen alle Übersetzungsverhältnisse mit minimalem Fehler realisierbar sein. Daher sind bei Vorgabe einer bestimmten Obergrenze für den Übersetzungsfehler in Abhängigkeit vom Einstellbereich der Spannung und dem Übersetzungsverhältnis nur ganz bestimmte Windungszahlen möglich.

Für einen Maschinentransformator mit der Schaltgruppe Yd, symmetrischer Spannungseinstellung und insgesamt N Stufen (z. B. $N = 5$) erhält man für das Verhältnis der Spannungen:

$$\frac{U_{1N} + k \cdot \Delta U_1}{U_{2N}} = \sqrt{3} \cdot \frac{w_{1N} + k \cdot \Delta w_1}{w_2} = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{w_{1N}}{w_2} + \frac{k \cdot \Delta w_1}{w_2} \right) \quad . \tag{5.176}$$

$$\text{mit} \quad k = -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2} + 1, \ldots -1, 0, 1, \ldots, \frac{N-1}{2}$$

Man geht zunächst von einer ganzzahligen Windungszahl w_2 aus. Mit der Nennübersetzung erhält man die Windungszahl w_{1N} der Oberspannungswicklung

$$w_{1N} = \text{round}\left\{ \frac{U_{1N}}{U_{2N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w_2 \right\} \quad . \tag{5.177}$$

Durch Runden des Klammerausdrucks erhält man einen ganzzahligen Wert für w_{1N}. Anschließend wird die Windungszahl Δw_1 für eine Spannungsstufe bestimmt, indem aus dem gesamten bezogenen Einstellbereich X (z. B. 0,125 = 12,5%) und der Stufenzahl in einer Einstellrichtung die Spannung ΔU_1 bestimmt wird:

$$\Delta w_1 = \text{round}\left\{ \frac{\Delta U_1}{U_{2N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w_2 \right\} = \text{round}\left\{ \frac{\dfrac{X}{\frac{N-1}{2}} \cdot U_{1N}}{U_{2N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w_2 \right\} \quad . \tag{5.178}$$

Nun kann für jede Spannungsstufe der Fehler aus der theoretischen Windungszahl $w_{1k,theo}$

$$w_{1k,theo} = \sqrt{3} \cdot \frac{U_{1N} + k \cdot \Delta U_1}{U_{2N}} \cdot w_2 \qquad \text{mit} \quad k = -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2} + 1, \ldots -1, 0, 1, \ldots, \frac{N-1}{2} \tag{5.179}$$

und der sich aus obiger Berechnung ergebenden ganzzahligen Windungszahl w_{1k} mit

$$w_{1,k} = w_{1N} + k \cdot \Delta w_1 = \text{round}\left\{ \frac{U_{1N}}{U_{2N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w_2 \right\} + k \cdot \text{round}\left\{ \frac{X}{\frac{N-1}{2}} \cdot \frac{U_{1N}}{U_{2N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot w_2 \right\} \quad . \tag{5.180}$$

$$\text{mit} \quad k = -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2} + 1, \ldots -1, 0, 1, \ldots, \frac{N-1}{2}$$

berechnet werden:

$$D_k = \frac{w_{1k,theo} - w_{1,k}}{w_{1k,theo}}$$

$$= \frac{\left(w_{1k,theo} - w_{1,k}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{w_2}}{w_{1k,theo} \cdot \frac{\sqrt{3}}{w_2}} = \frac{\sqrt{3}\frac{w_{1k,theo}}{w_2} - \sqrt{3}\frac{w_{1,k}}{w_2}}{\sqrt{3}\frac{w_{1k,theo}}{w_2}} = \frac{\ddot{u}_{k,theo} - \ddot{u}_{k,real}}{\ddot{u}_{k,theo}} \quad . \tag{5.181}$$

$$\text{mit} \quad k = -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2}+1, \ldots -1,\ 0, 1, \ldots, \frac{N-1}{2}$$

Dieser Fehler entspricht demnach direkt dem Übersetzungsfehler, der dadurch entsteht, dass ganzzahlige Nennspannungen aufgrund des Faktors √3 nicht auf ganzzahlige Windungszahlen führen können. Generell wird versucht, den Übersetzungsfehler so gering wie möglich zu halten. Gemäß Norm (DIN EN 60076) ist die Mindestanforderung jedoch $|D| < 0{,}5\ \%$.

Mit diesen Beziehungen können nun für alle ganzzahligen Windungszahlen w_2 beginnend von einem Mindestwert, z. B. $w_2 = 1$, bis zu einem Höchstwert, z. B. $w_2 = 200$, alle Windungszahlen w_{1k} und $w_{1k,theo}$ sowie die Fehler D_k berechnet werden. Tatsächlich realisiert werden können jedoch nur diejenigen Windungszahlen w_2, w_{1N} und Δw_1, für die der maximale Übersetzungsfehler D_{max} eine bestimmte Größe ε nicht überschreitet, d. h.

$$D_{\max} = \max\left\{\left|D_k\right|\right\} = \max\left\{\left|\frac{w_{1k,theo} - w_{1,k}}{w_{1k,theo}}\right|\right\} \leq \varepsilon < 0{,}5\% \quad . \tag{5.182}$$

$$\text{mit} \quad k = -\frac{N-1}{2}, -\frac{N-1}{2}+1, \ldots -1,\ 0, 1, \ldots, \frac{N-1}{2}$$

Unter Vernachlässigung der Wicklungswiderstände und der Streuinduktivität erhält man aus dem Induktionsgesetz für die Spannung $U_1/\sqrt{3}$ an der Oberspannungswicklung

$$\frac{U_{1N}}{\sqrt{3}} \approx \frac{U_{h1N}}{\sqrt{3}} = w_{1N} \cdot \omega \cdot \phi_H = w_{1N} \cdot 2\pi \cdot f \cdot A_{Fe} \cdot \frac{B_{\max}}{\sqrt{2}} \quad . \tag{5.183}$$

Mit der Querschnittfläche A_{Fe} des Eisenkerns, der Netzfrequenz f, und dem Scheitelwert B_{max} der magnetischen Induktion liegt die Windungsspannung

$$\frac{U_{1N}}{\sqrt{3} \cdot w_{1N}} = \frac{U_{1YN}}{w_{1N}} = 2\pi \cdot f \cdot A_{Fe} \cdot \frac{B_{\max}}{\sqrt{2}} \tag{5.184}$$

fest. Daraus kann nun der erforderliche Querschnitt A_{Fe} des Eisenkern und damit der erforderliche Durchmesser D_{Fe} des Kerns bestimmt werden:

$$A_{Fe} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi \cdot f \cdot B_{\max}} \cdot \frac{U_{1N}}{\sqrt{3} \cdot w_{1N}} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi \cdot f \cdot B_{\max}} \cdot \left(\frac{U_{1YN}}{w_{1N}}\right)$$

$$D_{Fe} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{6} \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{f \cdot B_{\max}} \cdot \frac{U_{1N}}{w_{1N}}} \quad . \tag{5.185}$$

Der mögliche Maximalwert B_{max} der magnetischen Induktion hängt stark von dem gefordertem Geräuschpegel ab. Eine wesentliche Geräuschquelle bei Transformatoren im Betrieb sind Vibrationen des Eisenkerns aufgrund der Magnetostriktion, d. h. der Längenänderung der Kernbleche infolge der sich mit der Spannung ändernden magnetischen Induktion. Die Vibrationen des Kerns übertragen sich über die Ölfüllung des Transformators auf den Kessel, wo sie in Druckschwingungen der Luft umgesetzt werden. Diese Druckschwingungen der Luft werden als Geräusch, oft als „Transformator-Brummen" bezeichnet, wahrgenommen. Die Kerngeräusche sind sehr stark vom Scheitelwert B_{max} der Induktion abhängig. Bei besonders strengen Geräuschforderungen liegt die Maximalinduktion bei $B_{max} = 1{,}2\ldots1{,}3$ T, sind keine besonders kritischen Anforderungen zu erfüllen, so kann die Maximalinduktion B_{max} bis ca. 1,75 T gesteigert werden. Die Sättigungsinduktion B_{sat} des Eisens beträgt 2,04 T.

Die Festlegung eines höchstens zulässigen Übersetzungsfehlers führt in aller Regel auf eine ganze Reihe möglicher ganzzahliger Windungszahlkombinationen. Für eine sinnvolle Auswahl sind eine Reihe von Kriterien zu erfüllen:

- Windungsspannung U_{1N}/w_{1N} und Maximalinduktion B_{max} legen den Kerndurchmesser fest. Maschinentransformatoren werden üblicherweise in Kraftwerken in schallgedämpften Räumen betrieben. Daher liegt die Maximalinduktion bei Maschinentransformatoren bei ca. $B_{max} = 1{,}75$ T. Bei Netzkuppel- und Ortsnetztransformatoren verwendet man üblicherweise niedrigere Induktionswerte.
- Eine weitere wichtige Anforderung an einen Transformator ist seine Streureaktanz oder relative Kurzschlussspannung. Sie wird maßgeblich durch die Windungszahl bestimmt.

Bild 4.44 zeigt den Kerndurchmesser bereits realisierter Maschinentransformatoren in Abhängigkeit der Scheinleistung sowie eine Least-Squares-Approximation, die als Anhaltswert bei der Auslegung eines neuen Transformators dienen kann. Da die relativen Kurzschlussspannungen in Abhängigkeit der Scheinleistung stets etwa im selben Bereich liegen, kann davon ausgegangen werden, dass ein Kerndurchmesser in der Umgebung der Least-Squares-Approximation zu einem realisierbaren Transformator führt. Die Least-Squares-Approximation der Wertepaare $\{D_{Fe},S\}$ führt zu folgender Beziehung 3. Ordnung:

$$\frac{D_{Fe}}{\mathrm{mm}} = 628 + 2{,}1 \cdot \left(\frac{S}{\mathrm{MVA}}\right) - 0{,}00175 \cdot \left(\frac{S}{\mathrm{MVA}}\right)^2 + 5{,}25 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\frac{S}{\mathrm{MVA}}\right)^3 \quad . \tag{5.186}$$

Für den zu berechnenden 175-MVA-Transformator erhält man für einen höchstens zulässigen Fehler für die Übersetzung von $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4} = 0{,}05$ % die folgenden Daten für die möglichen Windungszahlen, den Kerndurchmesser und die Windungsspannung:

	Lösung Nr. 1	Lösung Nr. 2	Lösung Nr. 3	Lösung Nr. 4
w_1	1119	1201	1556	1638
Δw_1	28	30	39	41
w_2	41	44	57	60
D_{Fe} [mm]	937,4	904,8	794,9	774,8
U_{1YN}/w_1 [Volt/Wdg.]	268,3	250	192,9	183,3

Prinzipiell wären sowohl die Lösung Nr. 1 als auch Nr. 2 denkbar. Bei den anderen Lösungen weichen die Kerndurchmesser zu stark von der Least-Squares-Approximation ab. Wählt man beispielsweise die Lösung Nr. 2, so liegen die Windungszahlen und damit auch die Windungsspannung fest. Verändert man den berechneten Kerndurchmesser noch etwas, so verändert man damit gemäß Gleichung (5.185) auch die Maximalinduktion B_{max}.

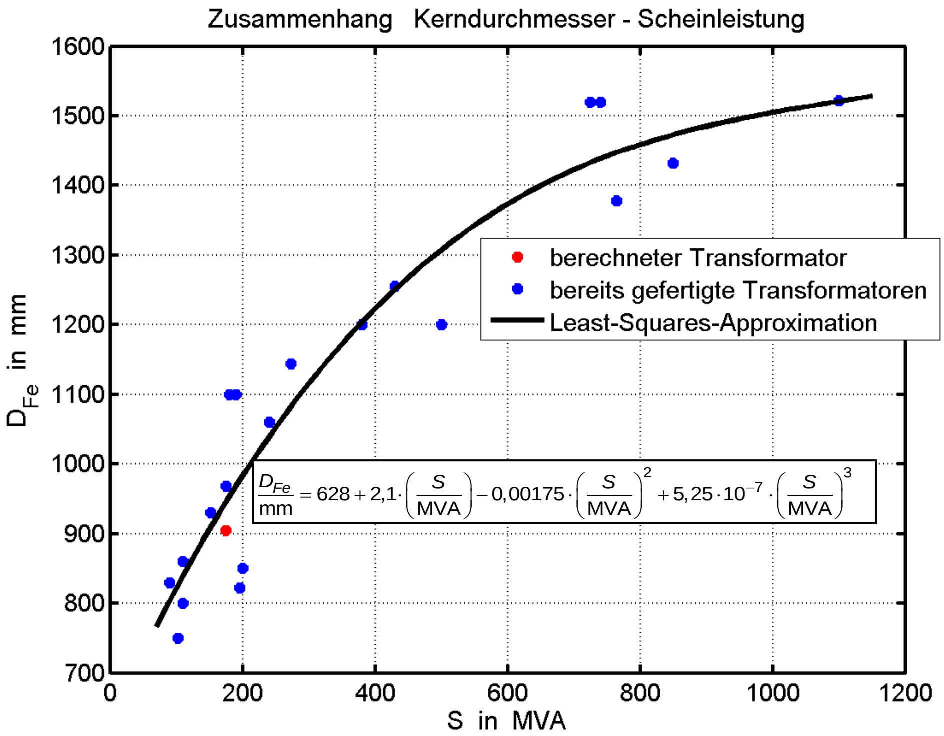


Bild 4.44 Zusammenhang zwischen Kerndurchmesser D_{Fe} und Scheinleistung S, abgeleitet aus einigen bereits gefertigten Drehstromtransformatoren

4.3.7.3 Hauptabmessungen

Die Leiternennströme I_{1N} und I_{2N} ergeben sich aus der Scheinleistung S_N und den Nennspannungen der Ober- und der Unterspannungsseite (U_{1N} und U_{2N}) zu:

$$I_{1N} = \frac{S_N}{c \cdot U_{1N}} \qquad I_{2N} = \frac{S_N}{c \cdot U_{2N}} \qquad \text{mit} \quad c = \begin{cases} 1 & \text{bei Einphasentransformatoren} \\ \sqrt{3} & \text{bei Dreiphasentransformatoren} \end{cases} \quad . \tag{5.187}$$

Zur Berechnung der erforderlichen Kupferquerschnitte $A_{Leiter,OS}$ und $A_{Leiter,US}$ der Leiter von Ober- und Unterspannungswicklung müssen die Wicklungsströme herangezogen werden. Bei der Sternschaltung (hier OS) entspricht der Leiterstrom dem Wicklungsstrom, bei der Dreieckschaltung (hier US) muss der Faktor 1/√3 berücksichtigt werden und man erhält

$$A_{Leiter,OS} = \frac{I_{1N}}{J_{OS}} \qquad A_{Leiter,US} = \frac{I_{2N}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{J_{US}} \quad . \tag{5.188}$$

Die Stromdichte J in den Leitern ist durch die mögliche Wärmeabfuhr vom Kupfer über die Papierisolation der Leiter an das umgebende Öl begrenzt. Meist liegt die Stromdichte bei höchstens ca. 3…4 A/mm².

Damit liegen die Kupferquerschnitte der beiden Wicklungen und das Produkt der Abmessungen der reinen Kupferfläche ohne die Papierisolierung der Leiter fest:

$$A_{Cu,OS} = w_1 \cdot A_{Leiter,OS} = w_1 \cdot \frac{I_{1N}}{J_{OS}} \quad , \qquad (5.189)$$

$$A_{Cu,US} = w_2 \cdot A_{Leiter,US} = w_2 \cdot \frac{I_{2N}}{\sqrt{3} \cdot J_{US}} \qquad \text{mit} \qquad h_{OS} < h_{US}$$

oder mit (5.187) und (5.188)

$$\frac{A_{Cu,OS}}{A_{Cu,US}} = \frac{w_1}{w_2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{ü} \cdot \frac{J_{US}}{J_{OS}} \overset{Yd(11)}{=} \frac{J_{US}}{J_{OS}} \qquad \text{mit} \qquad h_{OS} < h_{US} \quad . \qquad (5.190)$$

Man wählt die Wicklungslänge der OS-Wicklung kürzer, als jene der US-Wicklung, d. h. $h_{OS} < h_{US}$, um eine gleichmäßige Kräfteverteilung in axialer Richtung sicher zu stellen.

Die Leiter der Unterspannungswicklung haben aufgrund der geringen Spannung nur eine verhältnismäßig dünne Papierisolierung. Dadurch und durch die viel geringere Windungszahl w_2 erhält man durch die Beziehung

$$A_{Cu,US} = w_2 \cdot A_{Leiter,US} = w_2 \cdot \frac{I_{2N}}{\sqrt{3} \cdot J_{US}} = b_{US} \cdot h_{US,Cu} \qquad \text{und} \qquad h_{US} > h_{US,Cu} \qquad (5.191)$$

eine erste Abschätzung für die Höhe h_{US} der US-Wicklung. Zu der reinen Höhe der Kupferwicklung $h_{US,Cu}$ kommen noch die Papierisolation der Leiter sowie eventuell radiale Kühlkanäle in der Wicklung hinzu, deshalb ist $h_{US} > h_{US,Cu}$.

Eine ganze Reihe von Abständen werden wesentlich durch die Prüfspannungen bestimmt. Der Kern eines Transformators befindet sich auf Erdpotential, während an den Wicklungen die Prüfspannungen anliegen. Die Prüfspannungen legen den Isolationspegel und damit die hochspannungstechnische Auslegung des Transformators fest. Abhängig vom Isolationspegel sind bestimmte Mindestmaße für den Abstand Δ zwischen OS- und US-Wicklung, zwischen den Wicklungen und dem oberen und unteren Joch sowie zwischen den äußeren Wicklungen benachbarter Phasen erforderlich (***Bild 4.43a***). Transformatorenhersteller verfügen über eine Zusammenstellung aller geometrischer Mindestabmessungen für sämtliche in den Normen vorgesehenen Isolationspegel. Diese Mindestabmessungen basieren einerseits auf jahrzehntelanger Erfahrung und andererseits auf genauen Berechnungen des elektrischen Feldes an den kritischen Stellen.

Aus der mindestens erforderlichen Höhe $h_{US,Cu}$ der US-Wicklung ohne Papierisolation und den notwendigen Abständen A_o und A_u zum oberen und unteren Joch kann die Höhe h des Kernfensters festgelegt werden:

$$h = h_{US} + A_o + A_u > h_{US,Cu} + A_o + A_u \quad . \qquad (5.192)$$

Für die weitere Rechnung werden zunächst folgende Daten angenommen:

$$b_{US} = 75\text{mm} \qquad b_{OS} = 140\text{mm} \qquad \Delta = 100\text{mm} \qquad s = 30\text{mm}$$

$$A_0 = 140\text{mm} \qquad A_u = 110\text{mm} \qquad \text{und} \qquad J_{OS} = J_{US} = 3\,\frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$$

Für das genannte Beispiel erhält man mit diesen Daten die folgenden Werte:

$$I_{1N} = \frac{S_N}{\sqrt{3} \cdot U_{1N}} = 194{,}3\,\mathrm{A} \qquad I_{2N} = \frac{S_N}{\sqrt{3} \cdot U_{2N}} = 9185{,}1\,\mathrm{A}$$

$$A_{Leiter,OS} = \frac{I_{1N}}{J_{OS}} = 64{,}8\,\mathrm{mm}^2 \qquad A_{Leiter,US} = \frac{I_{2N}}{\sqrt{3} \cdot J_{US}} = 1767{,}7\,\mathrm{mm}^2$$

$$A_{Cu,OS} = w_1 \cdot A_{Leiter,OS} = 77784{,}8\,\mathrm{mm}^2$$

$$A_{Cu,US} = w_2 \cdot A_{Leiter,US} = 77777{,}6\,\mathrm{mm}^2$$

$$h_{US,Cu} = \frac{A_{Cu,US}}{b_{US}} = 1037{,}0\,\mathrm{mm} \qquad h_{US} > h_{US,Cu} + A_o + A_u = 1287\,\mathrm{mm}$$

Die Höhe h des Kernfensters wird aufgrund dieser Daten zu

$$h = 2000\,\mathrm{mm}$$

festgelegt.

Die primärseitige Streuinduktivität ergibt sich aus (5.173) und D_{Fe} = 910 mm zu

$$L_\sigma \approx \frac{\mu_0 \cdot \pi \cdot w_1^2}{h} \cdot \left[\left(D_{Fe} + 2s + 2b_{US} + \Delta\right) \cdot \left(\Delta + \frac{1}{3} b_{US} + \frac{1}{3} b_{OS} \right) + \frac{1}{3}\left(b_{OS} - b_{US}\right) \cdot \left(\Delta + \frac{1}{2}\left(b_{US} + b_{OS}\right) \right) \right] \cdot R \quad ;$$

$$= 2{,}847 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{mm}^2} \left[209433{,}33\,\mathrm{mm}^2 + 4495{,}83\,\mathrm{mm}^2 \right] \cdot 0{,}9544 \quad = \quad 0{,}5813\,\mathrm{H}$$

für die relative Kurzschlußspannung erhält man

$$u_x = \frac{S_N}{U_N^2} \cdot \omega \cdot L_\sigma = 0{,}116 \ \ (= 11{,}6\%) \quad .$$

Der berechnete Wert liegt damit gut in dem gegebenen Toleranzbereich (u_k = 0,111…0,129).

In weiteren Schritten erfolgt die Optimierung hinsichtlich der Verluste, die ebenfalls einen Garantiewert darstellen und vom Kunden meist pönalisiert sind. Die Leerlaufverluste des Eisenkerns ergeben sich aus dem Produkt von Kernmasse m_{Fe} und den spezifischen Kernverlusten P_0'. Die spezifischen Verluste (in W/kg) werden stark von der Blechsorte und der Blechstärke bestimmt. Zur Senkung der Leerlaufverluste kann entweder ein höherwertiges Elektroblech verwendet werden oder die Kernmasse wird verringert. Dies bedeutet nach (5.185) eine Erhöhung der Windungszahl oder der Kerninduktion.

Die Kurzschlußverluste P_k ergeben sich aus den Kupferverlusten $R \cdot I^2$ und den Verlusten aufgrund der Wirbelströme in den Leitern. Zur Senkung der Wirbelstromverluste sind die Leiter nicht als ein massiver Kupferstab ausgeführt, sondern bestehen aus vielen gegeneinander lackisolierten Einzeldrähten (***Bild 4.45***). Um die Kurzschlußverluste zu senken, kann man den Leiterquerschnitt und die Zahl der Teilleiter erhöhen. Dies hat jedoch Auswirkungen auf die Kosten des Leitermaterials und auch auf die Abmessungen des Transformators.

Die letztendliche Auslegung eines Transformators ist also eine Optimierungsaufgabe, hinsichtlich einer Vielzahl von Parametern. Ziel ist die Herstellung zu minimalen Kosten unter Einhaltung aller technischer Forderungen. Bei der Brücksichtigung der Kosten spielen aber auch Faktoren wie Art und Komplexität der Wicklungen, Stundensätze etc. eine große Rolle.

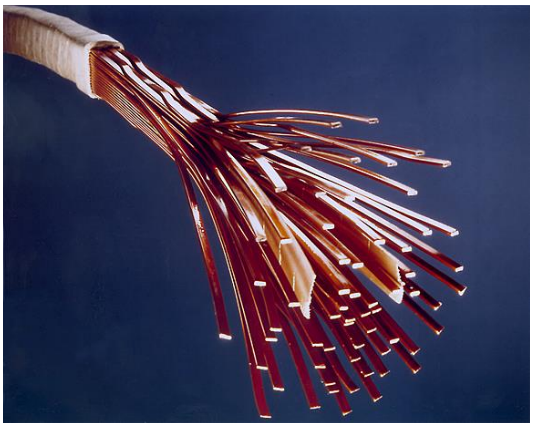


Bild 4.45 Drillleiter bestehend aus gegeneinander lackisolierten Einzelleitern

4.3.8 Betrieb von Transformatoren

4.3.8.1 Wirkungsgrad

Der Wirkungsgrad eines Transformators wird durch die Leerlaufverlustleistung P_0 und die Kurzschlussverlustleistung P_k bestimmt. Die Leerlaufverluste entstehen durch Ummagnetisierungsvorgänge im Eisenkern und hängen von der Spannung ab. Die Kurzschlussverluste entstehen dagegen durch ohmsche Verluste und Wirbelstromverluste in den Wicklungen und in metallischen Konstruktionsteilen, in die das Magnetfeld eindringt. Die Kurzschlussverlustleistung hängt daher quadratisch vom Laststrom ab. Im Ersatzschaltbild werden P_0 und P_k durch die Widerstände R_{Fe} und R_k modelliert (***Bild 4.29***). Für den Wirkungsgrad gilt:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_V} = 1 - \frac{P_V}{P_{ab} + P_V} \quad . \qquad (5.193)$$

Die abgeführte (oder übertragene) Leistung ergibt sich aus Nennspannung U_N, dem Strom I und dem Leistungsfaktor $\cos(\varphi)$ zu

$$P_{ab} = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I \cdot \cos(\varphi) = \left(\frac{I}{I_N} \right) \cdot \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_N \cdot \cos(\varphi) = k \cdot S_N \cdot \cos(\varphi) \quad . \qquad (5.194)$$

Darin ist das Verhältnis von momentanem Strom I zum Nennstrom I_N der Lastfaktor k. Für den Wirkungsgrad erhält man insgesamt:

$$\eta = 1 - \frac{P_0 + k^2 \cdot P_k}{k \cdot S_N \cdot \cos\varphi + P_0 + k^2 \cdot P_K} < 1 \quad . \qquad (5.195)$$

<u>Beispiel:</u> Transformator mit S_N = 42 MVA, P_0 = 35 kW, P_k = 192 kW, $\cos\varphi$ = 0,8 und k = 1 .

$$\eta = 1 - \frac{0{,}227}{42 \cdot 0{,}8 + 0{,}227} = 0{,}993 \quad (= 99{,}3\%) \quad .$$

4.3.8.2 Einschaltvorgang bei Transformatoren

Aus (5.122) folgt

$$u_1 \approx u_{h1} = w_1 \cdot \frac{d\phi_H}{dt} = K \cdot \frac{dB}{dt} \quad . \tag{5.196}$$

Der ungünstigste Fall tritt auf, wenn der Transformator im Spannungsnulldurchgang zugeschaltet wird. Mit

$$u_1 \approx \hat{u}_1 \cdot \sin(\omega t) \tag{5.197}$$

ergibt sich aus (5.196)

$$B = -\frac{K \cdot \hat{u}_1}{\omega} \cdot \cos(\omega t) + B_0 \quad . \tag{5.198}$$

Die anfängliche Induktion zum Zeitpunkt t = 0 sei Null, ($B(t$=0) = 0). Damit ergibt sich

$$B = \frac{K \cdot \hat{u}_1}{\omega} \cdot \left(1 - \cos(\omega t)\right) = \hat{B} \cdot \left(1 - \cos(\omega t)\right) \quad . \tag{5.199}$$

Die Induktion *B(t)* ist also um einen Gleichanteil versetzt. Direkt nach dem Zuschalten gerät der Eisenkern des Transformators aufgrund der stark nichtlinearen Magnetisierungskennlinie $B = B(i_\mu)$ für einige Perioden immer wieder in Sättigung. Dies führt zu einem hohen Magnetisierungsstrom i_μ (***Bild 4.46***); dieser hohe Einschaltstrom wird auch als <u>*Inrush*</u> bezeichnet. Der Gleichanteil in *B(t)* und damit der Inrush klingen aufgrund des ohmschen Widerstandes im Kreis nach einigen Perioden ab.

Aufgrund des hohen Einschaltstromes können Schutzeinrichtungen, wie z. B.

- Überstromschutz
- Differentialschutz, der das Durchflutungsgleichgewicht $w_1 \cdot \underline{I}_1 = \sum_k w_k \cdot \underline{I}_k$ kontrolliert,

in ihrer Funktion beeinträchtigt werden. Für die Schutztechnik ist deshalb die Erkennung des Inrush besonders wichtig.

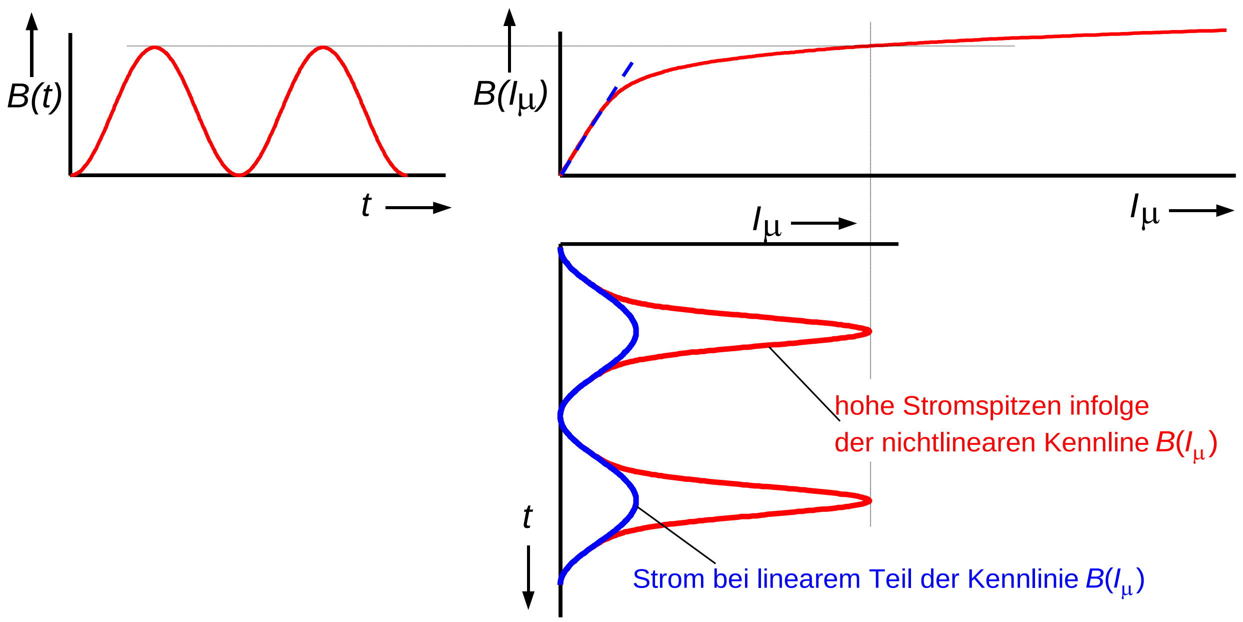


Bild 4.46 Inrush beim Einschalten eines Transformators im Spannungsnulldurchgang

4.3.8.3 Parallelbetrieb von Transformatoren

Man unterscheidet 2 Arten des Parallelbetriebes:

- direkter Parallelbetrieb (Sammelschienen-Parallelbetrieb)
  Sowohl die Ober- als auch die Unterspannungsseiten der Transformatoren sind ohne zusätzliche Impedanz miteinander verbunden.
- indirekter Parallelbetrieb (Netz-Parallelbetrieb)
  Die parallel geschalteten Transformatoren sind auf mindestens einer Spannungsebene über Anlagenteile (z. B. Leitungen) und damit über eine zusätzliche Impedanz miteinander gekoppelt.

Für den Sammelschienen-Parallelbetrieb gilt das in ***Bild 4.47*** gezeigte Ersatzschaltbild. Für die unterspannungsseitigen Spannungen gilt:

$$\underline{U}_{20,1} = \frac{1}{\underline{ü}_1} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} \qquad \underline{U}_{20,2} = \frac{1}{\underline{ü}_2} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} \quad . \tag{5.200}$$

Idealerweise fließt kein Ausgleichsstrom zwischen den Transformatoren. Für diesen Ausgleichsstrom gilt gemäß ***Bild 4.47***

$$\underline{U}_{20,2} = \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{I}_A \cdot \underline{Z}_{k1} + \underline{U}_{20,1}$$

$$\text{und daraus} \qquad \underline{I}_A = \frac{\underline{U}_{20,2} - \underline{U}_{20,1}}{\underline{Z}_{k1} + \underline{Z}_{k2}} = \frac{\left(\frac{1}{\underline{ü}_2}\right) - \left(\frac{1}{\underline{ü}_1}\right)}{\underline{Z}_{k1} + \underline{Z}_{k2}} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} \quad . \tag{5.201}$$

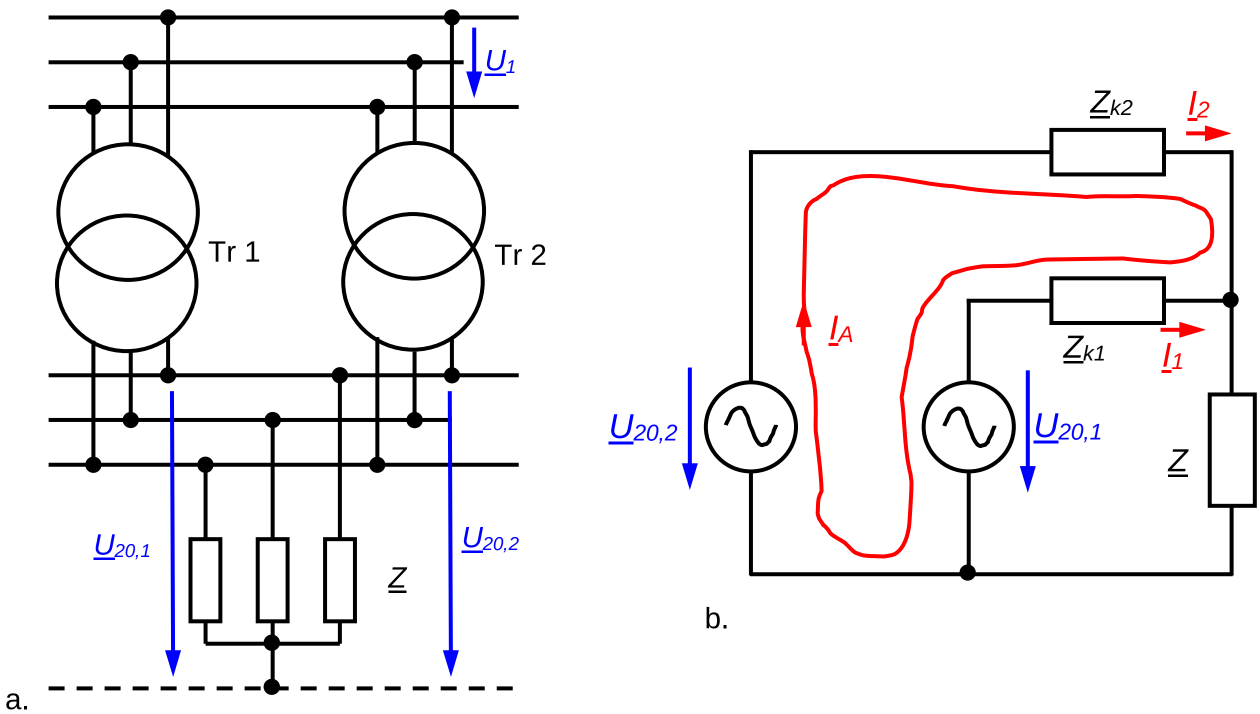


Bild 4.47 Direkter Parallelbetrieb von 2 Transformatoren
a. Anordnung im Netz mit Belastungsimpedanz $\underline{Z}$
b. Ersatzschaltung zur Berechnung des Kreisstromes $\underline{I}_A$

Die Forderung

$$\underline{I}_A = 0 \tag{5.202}$$

führt auf

$$\underline{ü}_1 = \underline{ü}_2 = \underline{ü} \quad . \tag{5.203}$$

Gemäß (5.137) müssen dann sowohl der Betrag der Übersetzung *ü* als auch die Kennzahl der Schaltgruppe (Phasendrehung) *K* übereinstimmen. Für die Ströme gilt dann gemäß ***Bild 4.47***:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{(\underline{Z}_{k2} + \underline{Z}) \cdot \underline{U}_{20,1} - \underline{Z} \cdot \underline{U}_{20,2}}{\underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{Z} \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}} \overset{\underline{ü}_1 = \underline{ü}_2 = \underline{ü}}{=} \frac{\underline{Z}_{k2} \cdot \left(\frac{1}{\underline{ü}} \right)}{\underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{Z} \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}} \\
\underline{I}_2 &= \frac{(\underline{Z}_{k1} + \underline{Z}) \cdot \underline{U}_{20,2} - \underline{Z} \cdot \underline{U}_{20,1}}{\underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{Z} \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}} \overset{\underline{ü}_1 = \underline{ü}_2 = \underline{ü}}{=} \frac{\underline{Z}_{k1} \cdot \left(\frac{1}{\underline{ü}} \right)}{\underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{Z} \cdot \underline{Z}_{k2} + \underline{Z}_{k1} \cdot \underline{Z}} \cdot \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{3}}
\end{aligned} \quad . \tag{5.204}$$

Damit ergibt sich für das Verhältnis der Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_{k2}}{\underline{Z}_{k1}} = \left(\underline{u}_{k2} \frac{U_{20}^2}{S_{N2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\underline{u}_{k1}} \frac{S_{N1}}{U_{10}^2} \right) \overset{U_{10} = U_{20}}{=} \frac{\underline{u}_{k2}}{\underline{u}_{k1}} \cdot \frac{S_{N1}}{S_{N2}} \quad . \tag{5.205}$$

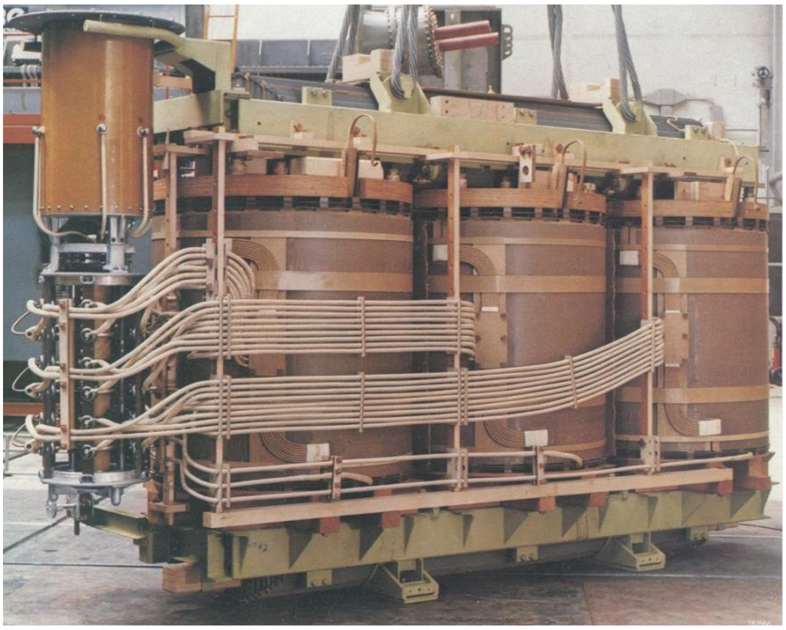
Wenn die Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ durch die beiden Transformatoren identisch sein sollen, so muß gelten

$$\underline{u}_{k1} = \underline{u}_{k2} \qquad \text{und} \qquad S_{N1} = S_{N2} \quad . \tag{5.206}$$

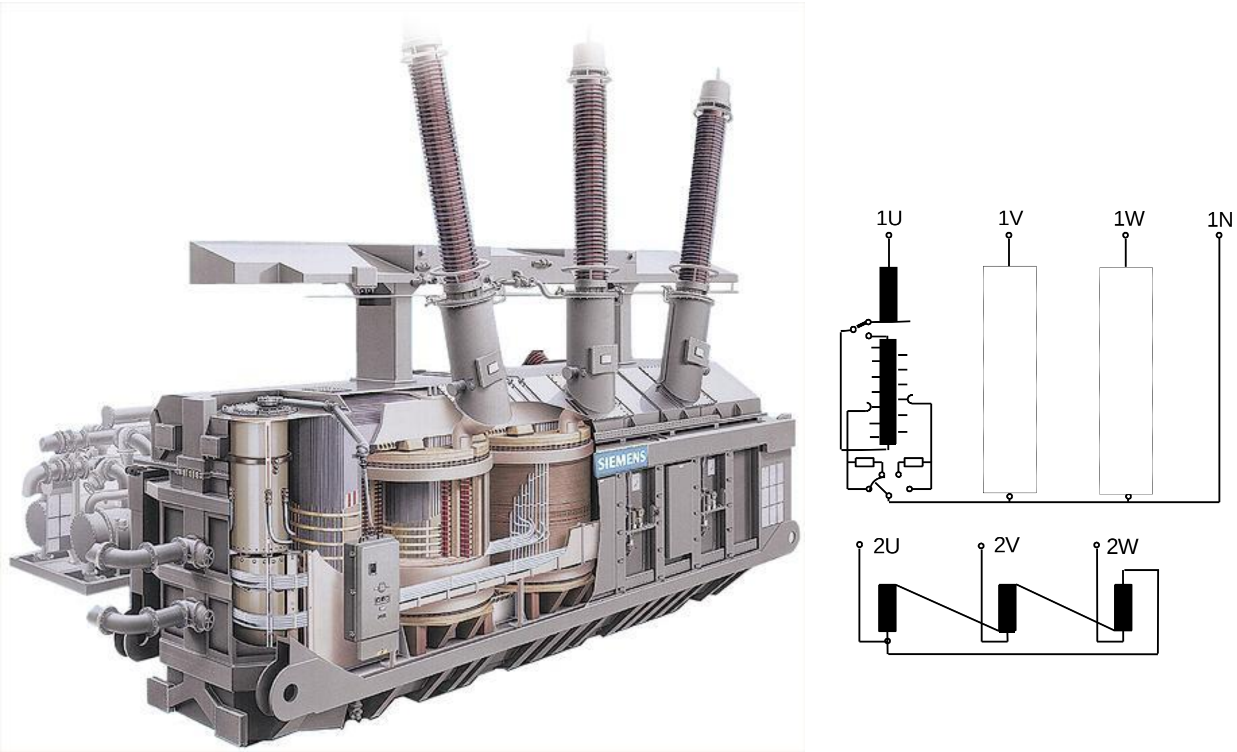
4.3.9 Aufbau von Transformatoren der Energietechnik

Der Aktivteil eines Transformators besteht aus dem Eisenkern, den Wicklungen und der Leitungsführung von den Stufenwicklungen zum Stufenschalter (***Bild 4.48*a**). Dieser Aktivteil befindet sich in einem Stahlkessel, der mit Öl gefüllt ist. Das Öl ist einerseits Isolationsmedium, um die hohen Spannungen bei moderaten Abständen beherrschen zu können, andererseits dient es als Wärmeträger der Wärmeabfuhr aus den Wicklungen, d. h. dient der Kühlung des Transformators.

***Bild 4.48*b** zeigt einen großen Maschinentransformator. Er gehört mit einer Scheinleistung von 850 MVA zu den größten Transformatoren in deutschen Kraftwerken. Die Übersetzung beträgt:
410 kV ± 57,6 kV in 27 Stufen einstellbar / 27 kV (OS / US).
Das Gesamtgewicht eines solchen Transformators beträgt 550 t, davon entfallen auf das Öl 92,5 t und das Kupfergewicht beträgt 60 t. Auch die Abmessungen sind mit B = 3,9 m, H = 5,2 m und L = 13 m (ohne Durchführungen) sehr beachtlich.
Die Hochspannung wird über so genannte Durchführungen in das Innere des Transformators – den Kessel – dem Aktivteil zugeführt. Ein Ölausdehnungsgefäß auf dem Transformatordeckel sorgt dafür, daß sich das Öl temperaturabhängig ausdehnen kann. Die Kühlanlage ist hier als Öl-Wasser-Kühlanlage ausgeführt.



a.



b.

Bild 4.48 a. Aktivteil eines Netzkuppeltransformators (40 MVA, 110 kV)
b. 850-MVA-Maschinentransformator und zugehörige Schaltung

4.4 Drosselspulen

4.4.1 Reihen- und Paralleldrosselspulen

Reihendrosselspulen dienen der Begrenzung des Kurzschlußstromes, indem sie eine zusätzliche Impedanz im Zuge einer Leitung bilden. Häufig werden Reihendrosselspulen mit Kabeln in Reihe geschaltet. Strombegrenzungsdrosseln haben keinen Eisenkern, es sind praktisch reine Luftspulen. Dadurch bleibt ihre Induktivität auch bei größten Strömen erhalten.

Reihendrosselspulen werden durch die folgenden Daten charakterisiert:

- Nennspannung U_{1N},
- Durchgangsleistung (Drehstromleistung) S_N (Nennstrom I_N),
- bezogener Nennspannungsabfall Δu_N.

Bei allen Drosselspulen (Reihen-, Parallel- und Sternpunkterdungsdrossel) kann der ohmsche Widerstand gegenüber dem induktiven Blindwiderstand vernachlässigt werden. In der Praxis gilt:

$$R_D \approx 0{,}03 \cdot X_D \qquad \text{d. h.} \qquad R_D \ll X_D \quad . \tag{5.207}$$

Der Nennspannungsabfall ist ***Bild 4.49*a**

$$\Delta U_N = X_D \cdot I_N \quad . \tag{5.208}$$

Für den induktiven Blindwiderstand ergibt sich

$$\begin{aligned} X_D &= \frac{\Delta U_N}{I_N} = \frac{\Delta U_N}{\left(\dfrac{U_{1N}}{\sqrt{3}}\right)} \cdot \frac{\left(\dfrac{U_{1N}}{\sqrt{3}}\right)}{I_N} = \Delta u_N \cdot \frac{U_{1N}^2}{\sqrt{3} \cdot U_{1N} \cdot I_N} \quad , \\ &= \Delta u_N \cdot \frac{U_{1N}^2}{S_N} \end{aligned} \tag{5.209}$$

wenn man den Nennspannungsabfall ΔU_N auf die Nennphasenspannung ($U_{1N}/\sqrt{3}$) bezieht.

Hauptaufgabe von *Paralleldrosselspulen* ist die Kompensation von leer laufenden oder schwach belasteten Leitungen. Sie werden als Drehstromdrosselspulen hauptsächlich ans Mittelspannungsnetz geschaltet. Die Leistung beträgt dann einige 10 MVA. Für größere Leistungen und höhere Spannungen werden Einphasendrosselspulen zu Drehstromgruppen zusammengeschaltet.

Paralleldrosselspulen liegen parallel zum Drehspannungssystem (***Bild 4.49*b**). Der Fluß in der Drossel wird deshalb durch die Netzspannung bestimmt. Die Netzspannung kann auch im Fehlerfall nicht beliebig ansteigen, damit ist auch der magnetische Fluß in der Drosselspule begrenzt. Die Drosselspule kann mit Eisenkern ausgeführt und so ausgelegt werden, daß keine Sättigungseffekte auftreten.

In der Praxis kann der ohmsche Widerstand R_D auch hier vernachlässigt werden. Die Reaktanz X_D ergibt sich zu

$$X_D = \frac{U_{1N}}{\sqrt{3}} \frac{1}{I_{D,N}} = \frac{U_{1N}^2}{\sqrt{3} \cdot U_{1N} \cdot I_{D,N}} = \frac{U_{1N}^2}{S_N} \quad . \tag{5.210}$$

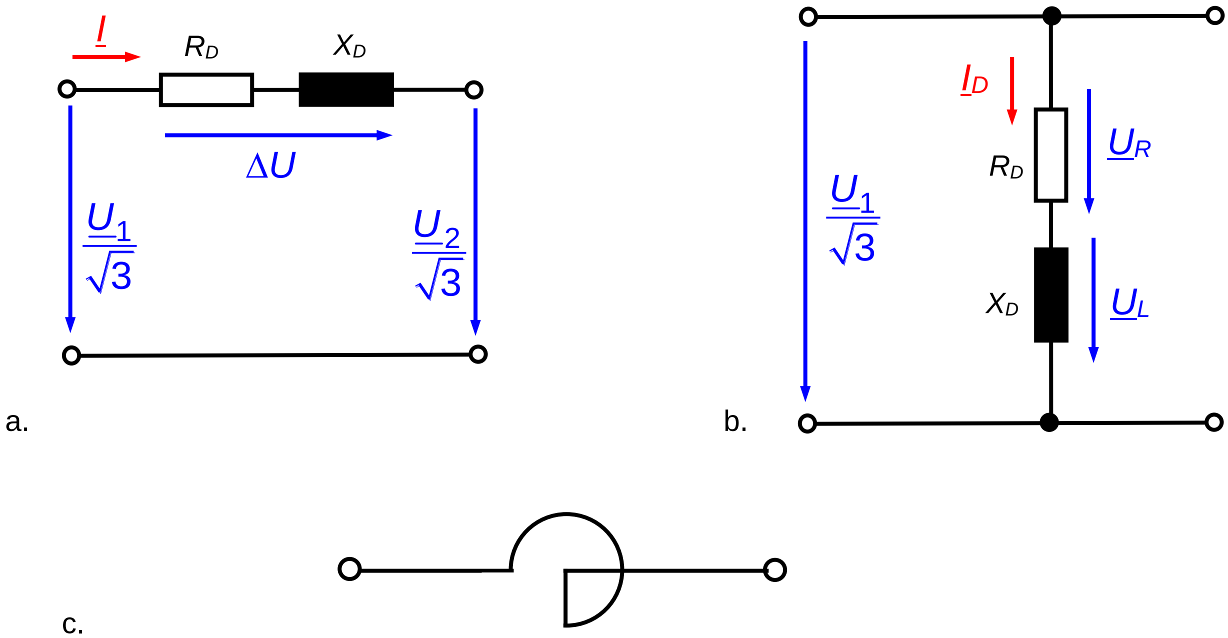


Bild 4.49 a. Anordnung der Reihendrosselspule z. B. im Zug einer Leitung
b. Anordnung der Paralleldrosselspule zur Kompensation leer laufender Leitungen
c. Schaltzeichen von Drosselspulen

4.4.2 Sternpunkterdungsdrossel

Sternpunkterdungsdrosseln werden als Einphaseneinheiten an die Sternpunkte der Transformatoren angeschlossen. Sie dienen in Kabelnetzen zur Löschung des Erdschlußstromes und werden nach ihrem Erfinder als Petersen-Spulen bezeichnet. Ihre Induktivität muß veränderbar sein, um die Drossel an verschiedene Kabellängen anpassen zu können. Die Spulen besitzen deshalb Anzapfungen längs der Wicklung oder sie sind als Tauchkernspulen mit einem veränderbaren Luftspalt ausgeführt. Beide Prinzipien führen zu einer in gewissen Grenzen variablen Induktivität.

In ***Bild 4.50*** ist ein Kabel dargestellt, das durch einen Transformator gespeist wird. Das Kabel wird durch die Kapazitäten C_E repräsentiert, der Transformator kann durch ein symmetrisches Drehspannungssystem modelliert werden. In den Sternpunkt des Transformators ist eine Sternpunkterdungsdrossel geschaltet.

Die Schaltung kann z. B. mit Hilfe des Überlagerungssatzes analysiert werden. Der Lichtbogen an der Fehlerstelle kann nur verlöschen, wenn der Fehlerstrom von einem der 3 Leiter gegen Erde verschwindet. Für den Fehlerstrom bei einem Erdschluß des Leiters R gilt:

$$\underline{I}_F = \underline{U}_R \cdot \frac{1-\omega^2 \cdot L_D \cdot 2 \cdot C_E}{j \cdot \omega \cdot L_D} - \underline{U}_S \cdot (j \cdot \omega \cdot C_E) - \underline{U}_T \cdot (j \cdot \omega \cdot C_E) \quad . \tag{5.211}$$

Im symmetrischen Drehspannungssystem ist $\underline{U}_R + \underline{U}_S + \underline{U}_T = 0$. Damit vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$\underline{I}_F = \underline{U}_R \cdot \frac{1-\omega^2 \cdot L_D \cdot 3 \cdot C_E}{j \cdot \omega \cdot L_D} \quad . \tag{5.212}$$

Die Abgleichbedingung für die Sternpunkterdungsdrossel, um den Strom $\underline{I}_F$ zum Verschwinden zu bringen, lautet also:

$$X_D = \frac{1}{3 \cdot \omega \cdot C_E} \quad . \tag{5.213}$$

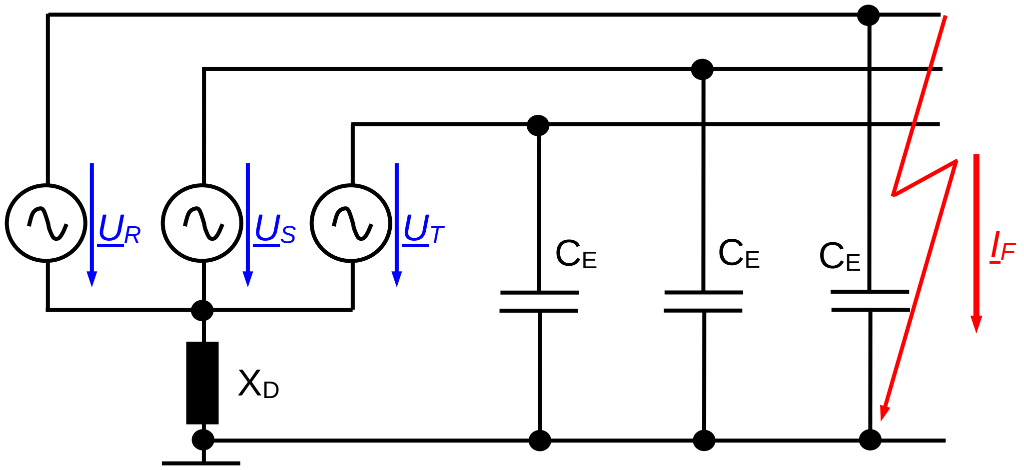


Bild 4.50 Erdschlußlöschung mit einer Petersenspule in einem Mittelspannungsnetz

4.4.3 Ausführung und Aufbau von Drosselspulen

Drosselspulen sind in ihrem Aufbau den Transformatoren sehr ähnlich. Ihr Aktivteil befindet sich – wie der von Transformatoren – in einem mit Öl gefüllten Stahlkessel (***Bild 4.51***). Auch hier dient das Öl der Wärmeabfuhr und als Isolationsmedium.

Ein wesentlicher Unterschied zum Transformator ist der Aufbau des Kerns bei Drosselspulen. In ***Bild 4.52*****b** ist der Kern einer Einphasendrossel mit dargestellt. Drosseln ohne Kernschenkel sind z. B. Reihendrosselspulen und Glättungsdrosseln für HGÜ-Anlagen. Der äußere Magnetkreis dient der Führung des Streufeldes der Drossel. Ohne diese Führung würde das Streufeld in Konstruktionsteile aus Stahl, z. B. die Kesselwände eindringen und dort zu lokalen Erwärmungen führen. Dadurch würde die Verlustleistung (R_D) steigen, außerdem könnte es zu thermischen Problemen kommen. ***Bild 4.52*****c** zeigt verschiedene Ausführungen der Kerne von Dreiphasendrosseln. Im Bereich der Kernschenkel sind die magnetisch gut leitfähigen Teile geblecht ausgeführt. Dazwischen befinden sich Abstandhalter aus Keramik, die den notwendigen Luftspalt erzeugen (***Bild 4.52*****a**).

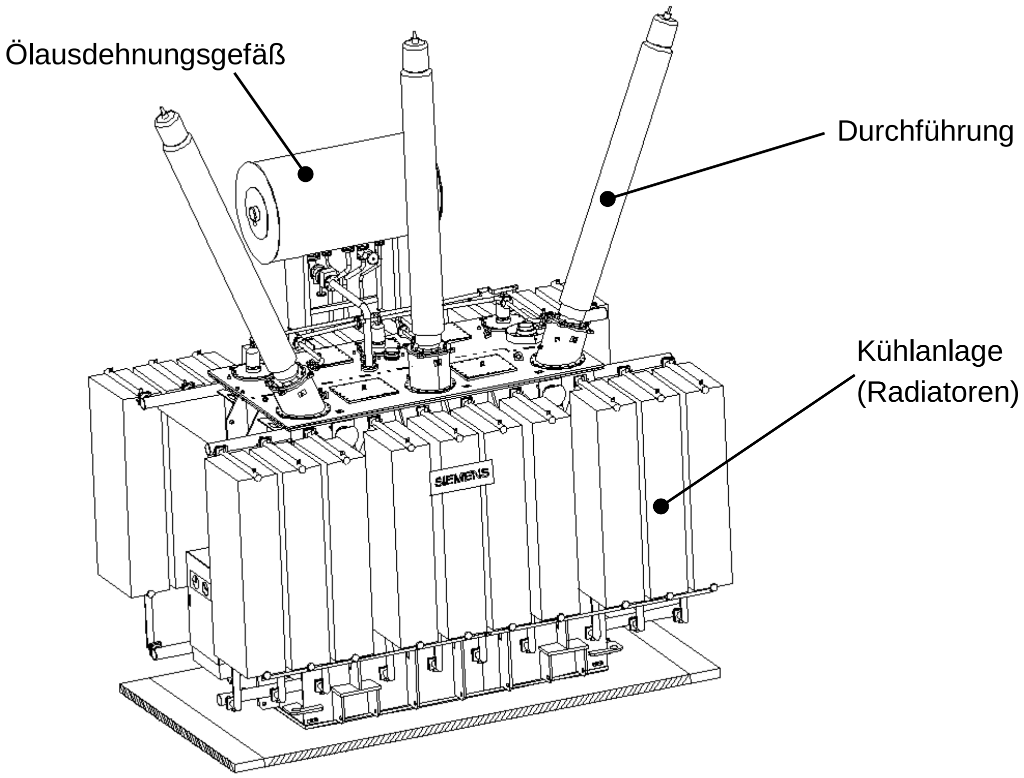


Bild 4.51 3D-Graphik einer 420-kV-Dreiphasendrosselspule

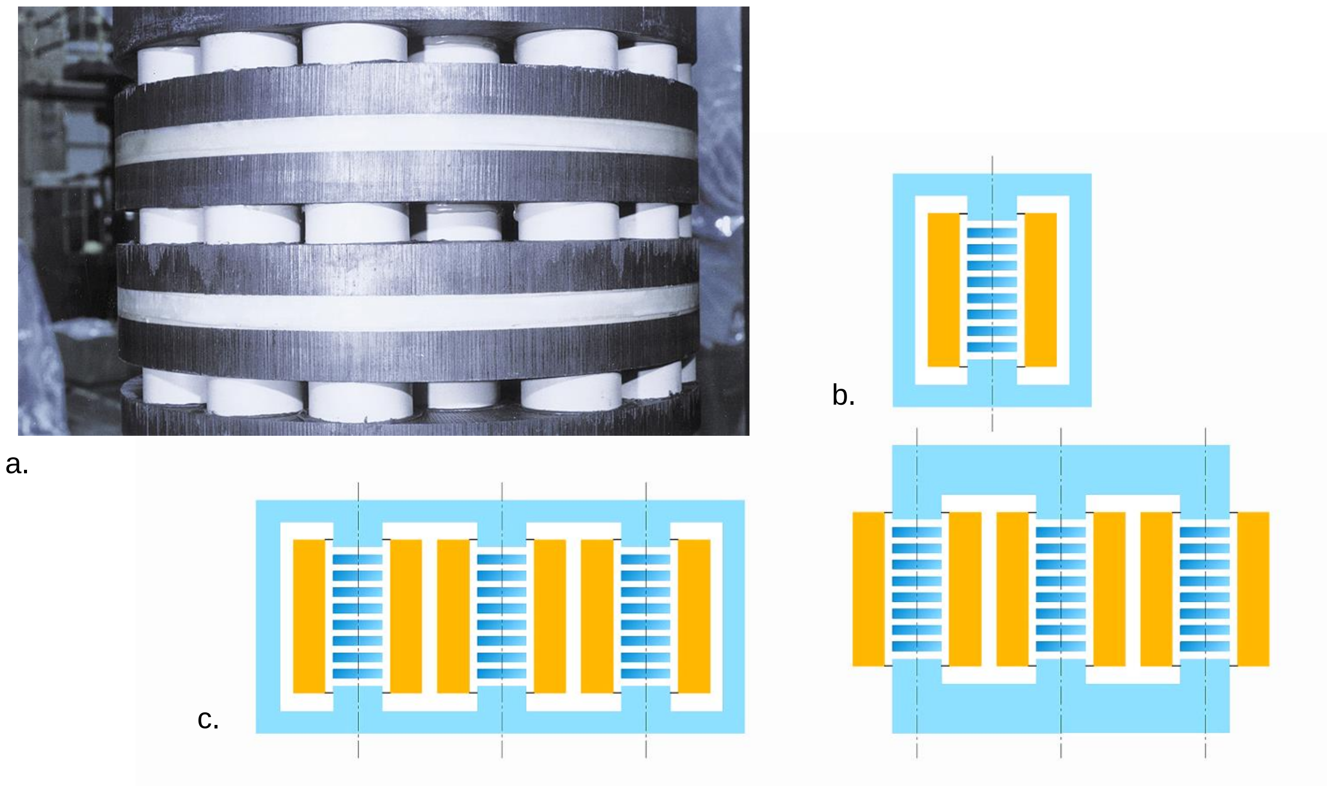


Bild 4.52 Aufbau des Kerns von Drosselspulen

a. Aufbau des Kernschenkels mit Keramikdistanzierungen
b. Einphasendrosseln
c. Dreiphasendrosseln (mit und ohne Rückschlussschenkel)

4.5 Kondensatoren

Leistungskondensatoren werden parallel zum Netz oder in Serie, z. B. in den Zug einer Leitung, geschaltet. Man unterscheidet demnach zwischen

- Reihenkondensatoren und
- Parallelkondensatoren.

Reihenkondensatoren dienen der Kompensation der Induktivität einer Leitung durch Verringerung des Spannungsabfalls an der gesamten Übertragungsstrecke (Leitung und Reihenkondensatoren) und Verringerung der Phasendrehung der Spannungen am Anfang und am Ende der Übertragungsstrecke.

Nenndaten des Reihenkondensators:
- Nennspannung U_{CN}, (Spannungsabfall im Nennbetrieb)
- Nennleistung (Durchgangsleistung) Q_N,
- Nennstrom (Durchgangsstrom I_N)

Der kapazitive Blindwiderstand

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \tag{5.214}$$

läßt sich aus der Nennleistung gemäß

$$Q_N = 3\left(\frac{U_{CN}}{I_N}\right) I_N^2 = 3 \cdot X_C \cdot I_N^2 \tag{5.215}$$

berechnen.

Parallelkondensatoren dienen zur Kompensation induktiver Blindleistung, d. h. der cos φ wird in Richtung cos φ = 1 verändert. Der kapazitive Blindwiderstand

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} \tag{5.216}$$

läßt sich aus der Nennleistung gemäß

$$Q_N = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot I_{CN} = \sqrt{3} \cdot U_N \cdot \left(\frac{U_N}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{X_C}\right) = \frac{U_N^2}{X_C} \quad . \tag{5.217}$$

berechnen, wobei U_N die Leiterspannung des betrachteten Netzes und I_{CN} der Nennstrom der Kompensationsanlage sind.

Parallelkondensatoren können im Stern oder Dreieck geschaltet sein (***Bild 4.53*****b**). Die Kompensationsleistungen sind:

$$\begin{aligned} Q(\mathrm{Y}) &= 3 \cdot U_\mathrm{Y} \cdot I_\mathrm{Y} = 3 \cdot U_\mathrm{Y} \cdot \left(U_\mathrm{Y} \cdot \omega \cdot C_\mathrm{Y}\right) = 3 \cdot U_\mathrm{Y}^2 \cdot \omega C_\mathrm{Y} \\ Q(\Delta) &= 3 \cdot U_\Delta \cdot I_\Delta = 3 \cdot U_\Delta \cdot \left(U_\Delta \cdot \omega \cdot C_\Delta\right) = 3 \cdot U_\Delta^2 \cdot \omega C_\Delta \end{aligned} \quad . \tag{5.218}$$

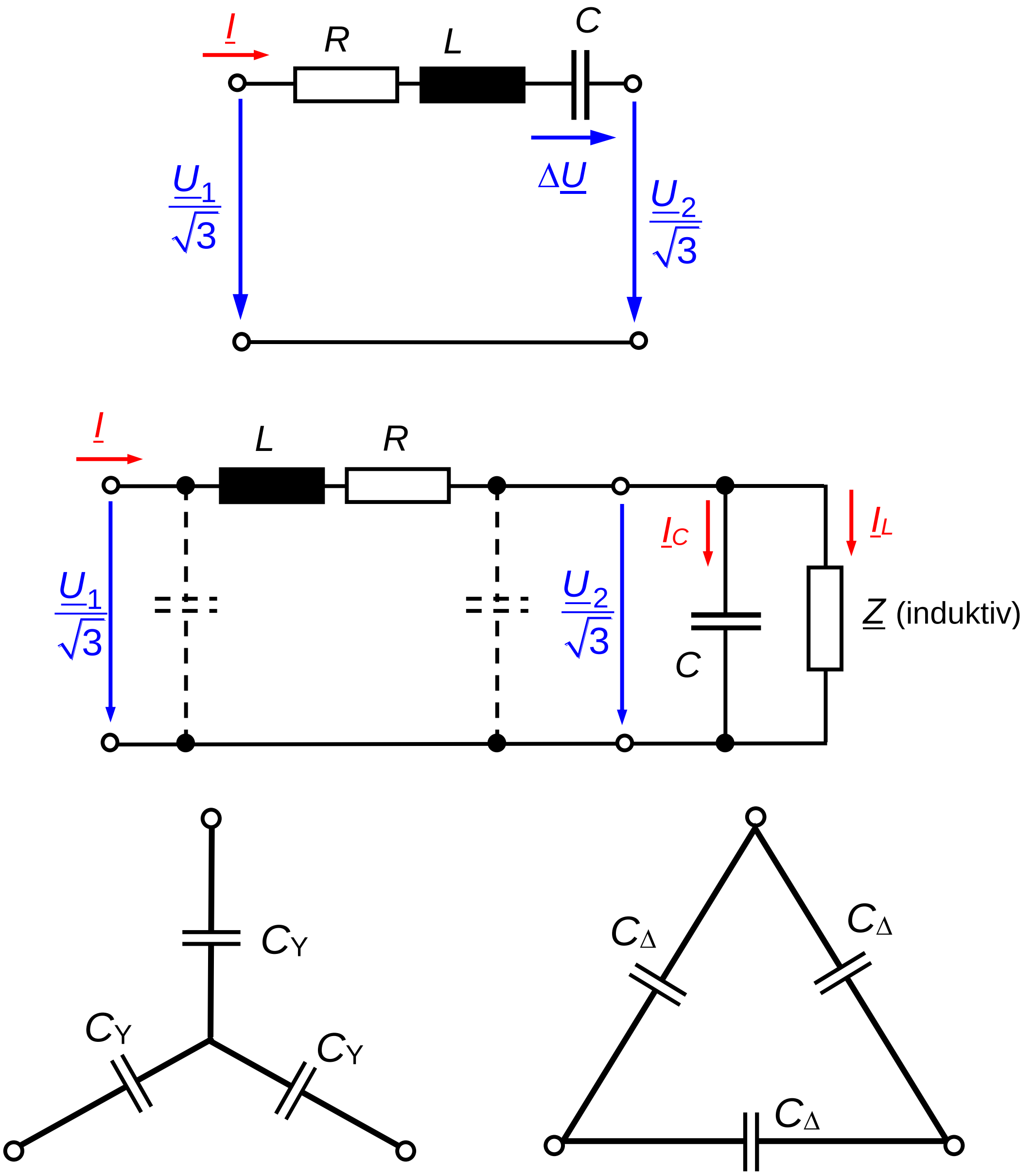
Bei gleichen Kompensationsleistungen muß gelten:

$$C_\mathrm{Y} = 3 \cdot C_\Delta \quad . \tag{5.219}$$

Demnach ist für dieselbe Kompensationsleistung bei der Sternschaltung die 3-fache Kapazität im Vergleich zur Dreieckschaltung notwendig. Die Spannung an den Kapazitäten ist bei der Dreieckschaltung allerdings um den Faktor $\sqrt{3}$ höher. Die Kosten einer Kompensationsanlage werden sowohl von der notwendigen Kapazität als auch von der Nennspannung der Kondensatoren bestimmt. Es hängt nun davon ab, wie die Parameter Spannung und Kapazität Einfluss auf die Kosten nehmen, welche der beiden Varianten wirtschaftlich günstiger ist.

Hochspannungskondensatoren bestehen aus vielen Einzelkondensatoren, die in Reihen- und Parallelschaltungen entsprechend der geforderten Kapazität und Nennspannung zusammengeschaltet sind.

Bei Netzberechnungen werden üblicherweise die Verlustwiderstände der Kondensatoren vernachlässigt.



a.
b.
c.

Bild 4.53 a. Serienkompensation der Induktivität einer Übertragungsleitung
b. Blindleistungskompensation durch Parallelkondensator zur induktiven Last
c. Blindleistungskompensation in Stern- oder Dreieckschaltung

4.6 Leitungen

4.6.1 Freileitungen und Kabeln in der Energieübertragung

Die Fernübertragung elektrischer Energie erfolgt ausschließlich mit Freileitungen. Freileitungen haben im Vergleich zu Kabeln eine wesentlich geringere Kapazität, außerdem sind sie billiger als vergleichbare Kabel. Weiterhin stehen 400-kV-Kabel erst seit einigen Jahren zur Verfügung.

In den letzten Jahren, vor allem seit 1990, ist ein Rückgang der Stromkreislängen bei 220-kV-Freileitungen zu beobachten. Langfristig beabsichtigen die Netzbetreiber einen Rückbau der 220-kV-Spannungsebene, zugunsten der 380-kV-Ebene.
Der Transport elektrischer Energie über größere Entfernungen erfolgt überwiegend durch Freileitungen. In Stadtgebieten mit hohen Flächenkosten (€/m^2) werden heute ausschließlich Kabel eingesetzt, da sie unterirdisch verlegt werden können.

Die folgende Tabelle (***Bild 4.54***) zeigt eine Zusammenstellung der Leitungsbeläge einiger typischer ausgeführter Freileitungen und Kabel.

Nennspg.	**Art der Leitung**	**Leiter**	R'_B **Ω/km**	X'_B **Ω/km**	C'_B **nF/km**	I_{gr} **A**
10 kV	Dreileitergürtelkabel	3 x 120 mm^2 Cu	0,181	0,094	480	290
20 kV	Dreimantelkabel	3 x 150 mm^2 Cu	0,158	0,116	440	325
20 kV	Freileitung	95 Al	0,310	0,360	10	340
30 kV	Freileitung	95/12 Al/St	0,320	0,370	10	350
110 kV	Freileitung	240/40 Al/St	0,120	0,390	9	645
220 kV	Freileitung	2er-Bündel 240/40 Al/St	0,060	0,300	12	1290
380 kV	Freileitung	3er-Bündel 380/50 Al/St	0,025	0,260	14	2520

I_{gr}: Grenzstrom (dauernd) bei zulässiger Erwärmung der Leiter

Bild 4.54 Leitungsbeläge von Freileitungen und Kabeln für verschiedene Spannungsebenen

Der Kapazitätsbelag eines Kabels ist deutlich größer als bei Freileitungen – bei vergleichbaren sonstigen Parametern. Dies hat zwei wesentliche Gründe:

- Bei Freileitungen beträgt der Abstand *d* der Leiterseile zur Erde einige Meter (***Bild 4.55***), während der Abstand zwischen dem spannungsführenden Innenleiter und dem geerdeten Drahtschirm bei Kabeln abhängig von der Bemessungsspannung nur im cm-Bereich liegt (***Bild 4.56***). Wegen

$$C_B \sim \varepsilon_r \cdot \frac{1}{d} \quad . \tag{5.220}$$

  verringert dies die Erdkapazität von Freileitungen gegenüber Kabeln deutlich.

- Bei Freileitungen ist Luft das Isoliermedium zwischen der Betriebsspannung und der Erde mit $\varepsilon_r = 1$. Die Isolierung von Kabeln besteht heute vorwiegend aus VPE (vernetztem Polyäthylen) mit $\varepsilon_r \approx 4$. Gemäß Gleichung (5.220) erhöht auch dies den Kapazitätsbelag eines Kabels gegenüber der Freileitung, wenn auch nicht in dem Maß wie der geringe Abstand zwischen Innenleiter und geerdetem Kabelschirm.

Durch den deutlich höheren Kapazitätsbelag eines Kabels gegenüber einer gleich langen Freileitung ist die kapazitive Blindleistung, die ein Kabel aufnimmt, bedeutend größer als bei einer Freileitung. Dies ist ein begrenzender Faktor für die mögliche Übertragungsstrecke einer Kabelverbindung. Typischerweise gilt folgende Regel für die maximale Länge einer Kabelverbindung:

- 110 kV: $\ell \leq 100$ km und
- 380 kV: $\ell \leq 50$ km.

In der Hoch- und Höchstspannungsebene (≥ 110 kV) spielen Kabel im Vergleich zu Freileitungen eine vernachlässigbar geringe Rolle. Im Mittelspannungsnetz ist die Verwendung von Kabeln weitaus häufiger, vor allem in Stadtgebieten. Aufgrund der räumlichen Enge erfolgt hier die Energieverteilung unterirdisch durch Kabel.

Im Niederspannungsnetz kommen heute praktisch ausschließlich Kabelverbindungen zum Einsatz; sie haben die noch bis in die 70er-Jahre üblichen Versorgungen einzelner Häuser über die Dächer mit Freileitungen von Haus zu Haus nahezu vollständig verdrängt.

4.6.2 Freileitungen

Leiterseile von Freileitungen und Kabeln bestehen aus mehreren Einzeldrähten mit gleichem Durchmesser. Die Einzeldrähte verlaufen in mehreren Schichten um eine so genannte Seele oder einen Kern herum. Dabei können verschiedene Werkstoffe für die einzelnen Drähte zum Einsatz kommen. Die Seele besteht oft – um die geforderte Zugfestigkeit zu erreichen – aus Stahldrähten. Als Material für Leiterdrähte kommen vor allem Aluminiumlegierungen (Aldrey) zum Einsatz.

Bild 4.55 zeigt die verschiedenen Mastbilder. Man unterscheidet

- Tragmaste, meist mit vertikaler Isolatoranordnung,
- Abspannmaste mit horizontaler Isolatoranordnung und
- Winkelmaste bzw. Winkelabspannmaste an Knickpunkten von geradlinig verlaufenden Leitungsstrecken.

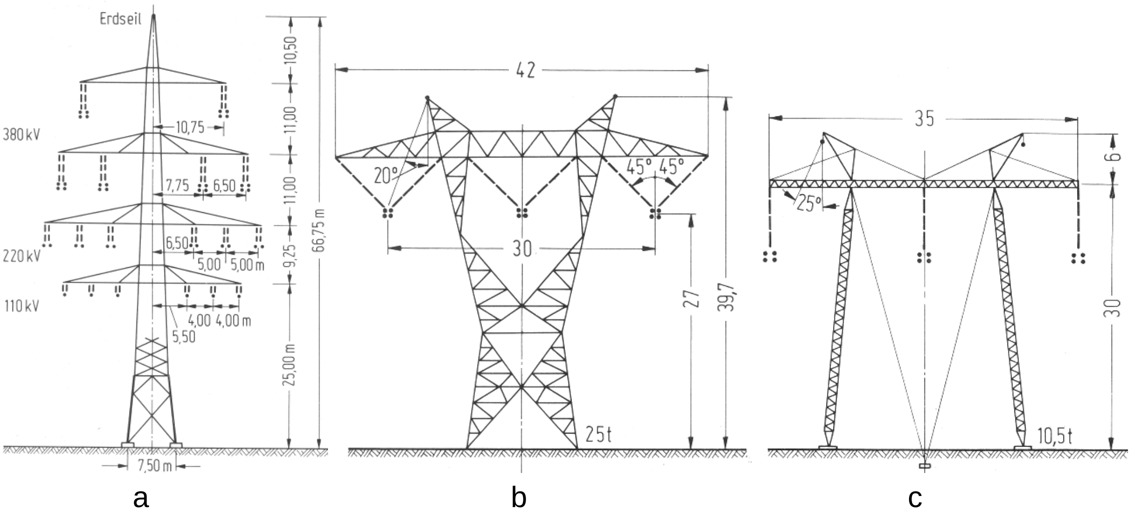


Bild 4.55 a. Drehstromfreileitung mit 6 Stromkreisen und einem Erdseil
b. 735-kV-Leitung in Kanada (selbsttragender Mast)
c. 750-kV-Leitung in Rußland (abgespannter Mast)

Bei Freileitungen können, angeregt durch Windböen, Seilschwingungen entstehen. Man unterscheidet Schwingungen im Frequenzbereich von ca. 10...30 Hz und kleiner Amplitude im Bereich einiger cm und niederfrequente Schwingungen (um 1 Hz) mit großen Amplituden von einigen Metern. Durch entsprechende konstruktive Maßnahmen und Dämpfer auf den Seilen werden die Schwingungsamplituden auf unkritische Werte reduziert.

4.6.3 Kabel

Starkstromkabel bestehen aus:

- den Leitern (aus Kupfer),
- der Isolierung und
- den Metallmänteln bzw. Schirmen
- einer Außenisolierung aus Kunststoff zum Schutz gegen Feuchtigkeit.

Der Leiter bildet zusammen mit dem Kabelmantel auf Erdpotential eine Kapazität. Aufgrund der hohen Dielektrizitätszahl ($\varepsilon_r \approx 4$) und des geringen Abstandes zwischen Leiter und Kabelmantel ergibt sich ein beträchtlicher Kapazitätsbelag im Vergleich zu Freileitungen. Der dadurch entstehende kapazitive Ladestrom schränkt die maximal mögliche Länge einer Kabelstrecke gegenüber der Übertragungslänge einer Freileitung stark ein. Man kann von folgenden Zahlen ausgehen:

- 110 kV: $\ell \leq 100$ km und
- 380 kV: $\ell \leq 50$ km.

Als Isolationsmaterial für Hochspannungskabel wird heute vernetztes Polyethylen (VPE, engl.: XLPE = Cross linked Polyethylene) eingesetzt. Ein hoher Anteil der heute betriebenen Kabel sind allerdings Ölkabel oder Papier-Masse-Kabel.

Bei der Auslegung von Kabelverbindungen ist insbesondere auch die Wärmeabfuhr vom Kabel ins Erdreich zu berücksichtigen. Erdböden haben je nach Aufbau und Struktur eine unterschiedliche Wärmeleitfähigkeit. Bei Kabeln in Luft wird die Wärme durch Konvektion und Strahlung an die Umgebung abgegeben. Von der Art der Kühlung, d. h. der Wärmeabfuhr hängt auch die Strombelastbarkeit ab. Kabel können deshalb nur weit unter ihrer natürlichen Leistung betrieben werden. Auch deshalb sind sie für die Fernübertragung von Energie im Vergleich zu Freileitungen ungeeignet.

Beim Aufbau der Starkstromkabel unterscheidet man Gürtelkabel und Radialfeldkabel als Einleiter- und Mehrleiterkabel. Einleiterkabel sind stets Radialfeldkabel. In ***Bild 4.56*** ist der Aufbau von Mittelspannungs-Kunststoffkabeln dargestellt.

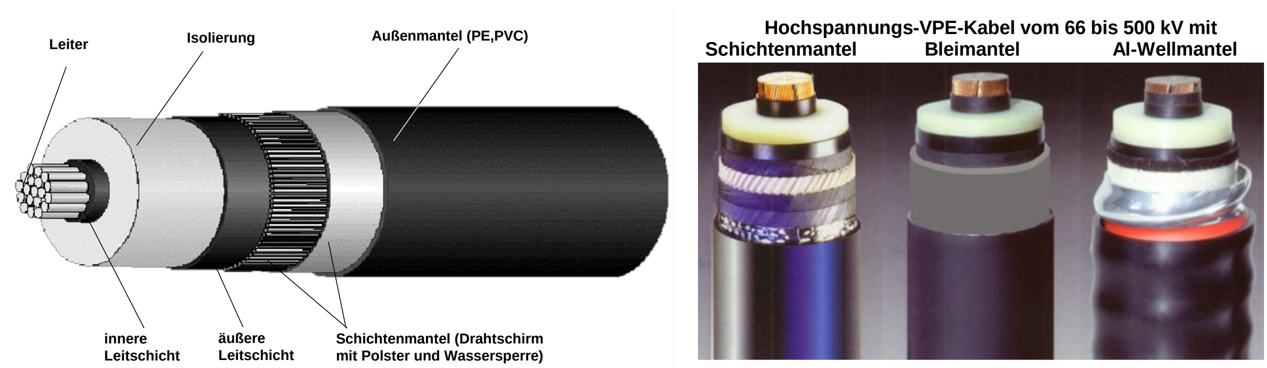
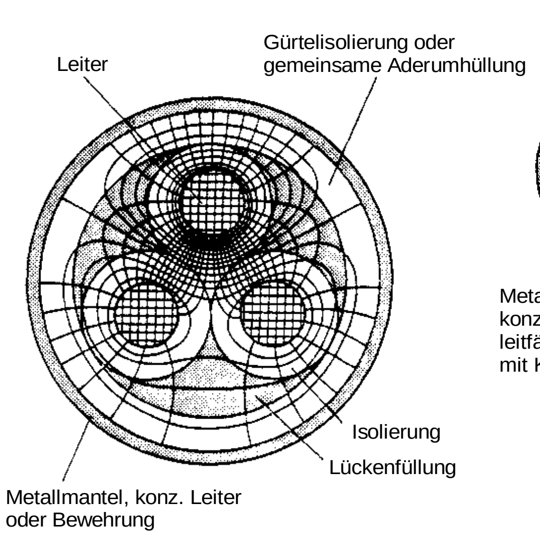
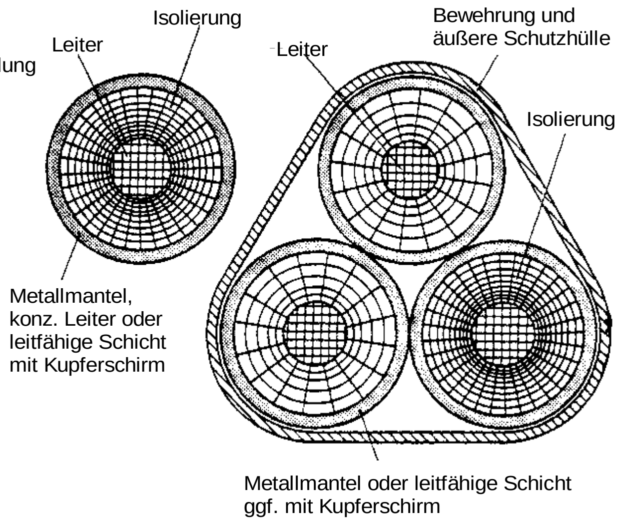


Bild 4.56 Aufbau von einadrigen Mittel- und Hochspannungskabeln (VPE-Kabeln

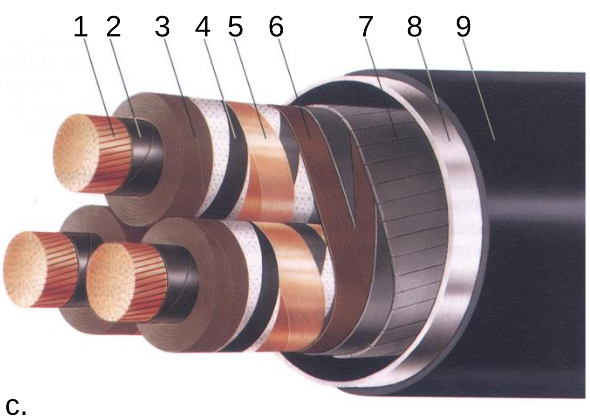
Bild 4.57 zeigt Feldbilder und Aufbau für Gürtelkabel und Radialfeldkabel sowie den Aufbau von Gasinnen- und Gasaußendruckkabeln.



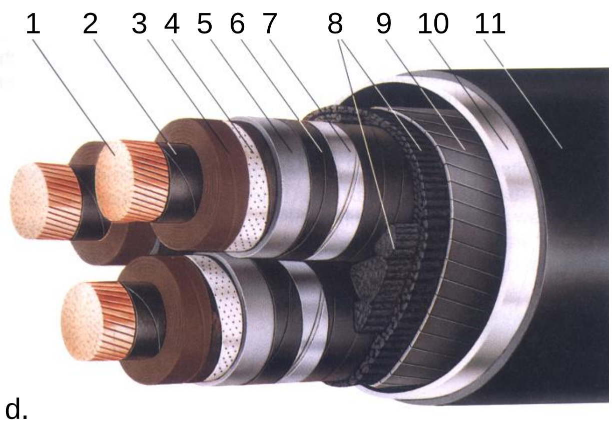
a.



b.



c.



d.

Gasinnendruckkabel
1: Leiter
2: innere Leitschicht (Russpapier)
3: Papierisolierung
4: äußere Leitschicht
5: Querleitwendel
6: Polster
7: Bewehrung
8: Stahlrohr
9: PE-Mantel

Gasaußendruckkabel
1: Leiter
2: innere Leitschicht (Russpapier)
3: Papierisolierung
4: äußere Leitschicht
5: Bleimantel
6: Korrosionsschutz
7: Druckschutzbandage
8: Zwickelfüllung
9: Bewehrung
10: Stahlrohr
11: PE-Mantel

Bild 4.57 a. Gürtelkabel mit nicht radialem Feld
b. Radialfeldkabel als Einleiter- und als Dreileiterkabel
c. Gasinnendruckkabel: Gas ist Bestandteil des Dielektrikums
d. Gasaußendruckkabel: Gas hat mechanische Funktion

Gleichspannungskabel können kleiner gebaut werden als vergleichbare Wechselspannungskabel, da wegen des fehlenden Skineffektes der Leiterquerschnitt voll genutzt wird, keine induktive Erwärmung in der Bewehrung aus Metall entsteht und außerdem die Polarisationsverluste im Dielektrikum entfallen.

4.6.4 Gasisolierte Leitungen (GIL)

Gasisolierte Leitungen kommen vor allem dort zum Einsatz, wo Kabel an ihre Grenzen stoßen und Freileitungen als Platzgründen nicht realisierbar sind. Jenseits einer Übertragungsleistung von 1000 MVA ist eine GIL kostengünstiger als eine entsprechende Kabelverbindung.
Eine GIL besteht aus einem Aluminium-Rohr als Außenhülle auf Erdpotential. In dieser Hülle befindet sich der Leiter, ebenfalls ein Aluminium-Rohr. Als Isoliermedium dient eine Gasmischung aus 80 % Stickstoff (N_2) und 20 % Schwefelhexaflourid (SF_6). Der Innenleiter wird durch Stützisolatoren in der Mitte des Hüllrohres gehalten. Alle 1200...1500 m befindet sich ein Schott zur Trennung der Gasräume. An dieser Stelle kann die GIL aufgetrennt werden, um z. B. die Prüfspannung bei der Endprüfung der GIL zuführen zu können. Unter Ausnutzung der Rohrelastizität kann der Verlauf den Landschaftsgegebenheiten angepaßt werden, d. h. kleinere Bodenunebenheiten können durch die Rohre selbst ausgeglichen werden. Für Richtungsänderungen gibt es spezielle Winkelelemente. Außerdem gibt es Kompensatoren, welche die temperaturabhängige Längenausdehnung der Rohrleiter ausgleichen. Jeder Leiter eines Dreiphasensystems befindet sich in einem Rohr, das gesamte System kann unterirdisch in einem Tunnel untergebracht (***Bild 4.58***) sein, oder die Rohre werden direkt ins Erdreich verlegt.

Die GIL wurde erstmals 1975 in einem Tunnel des Schluchseewerks eingesetzt. Dort geriet ein Kabel in einem Tunnel in Brand und verursachte einen hohen Sachschaden. Der Betreiber wollte eine sichere Technik und hat sich deshalb für die GIL entschieden. Bei einer Spannungsebene von 400 kV ist diese GIL, die seit 1975 störungsfrei in Betrieb ist, mit 700 m die längste derartige Verbindung.

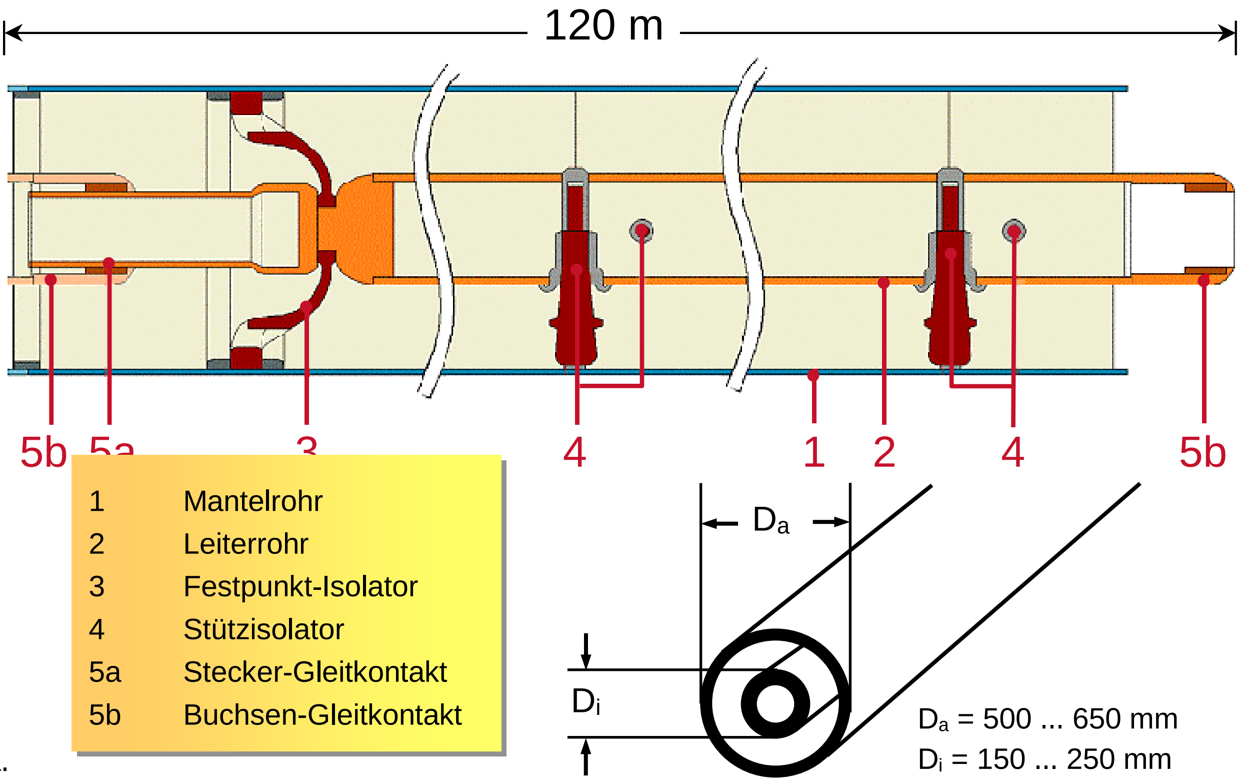
Insgesamt existieren weltweit GIL mit einer Gesamtlänge von ca. 100 km. Die derzeit umfangreichste Anlage ging 2002 in Thailand in Betrieb: 3,5 km bei einer Spannung von 550 kV. Prinzipiell wären Systemlängen von bis zu 100 km realisierbar.

Vorteile und Eigenschaften der GIL:

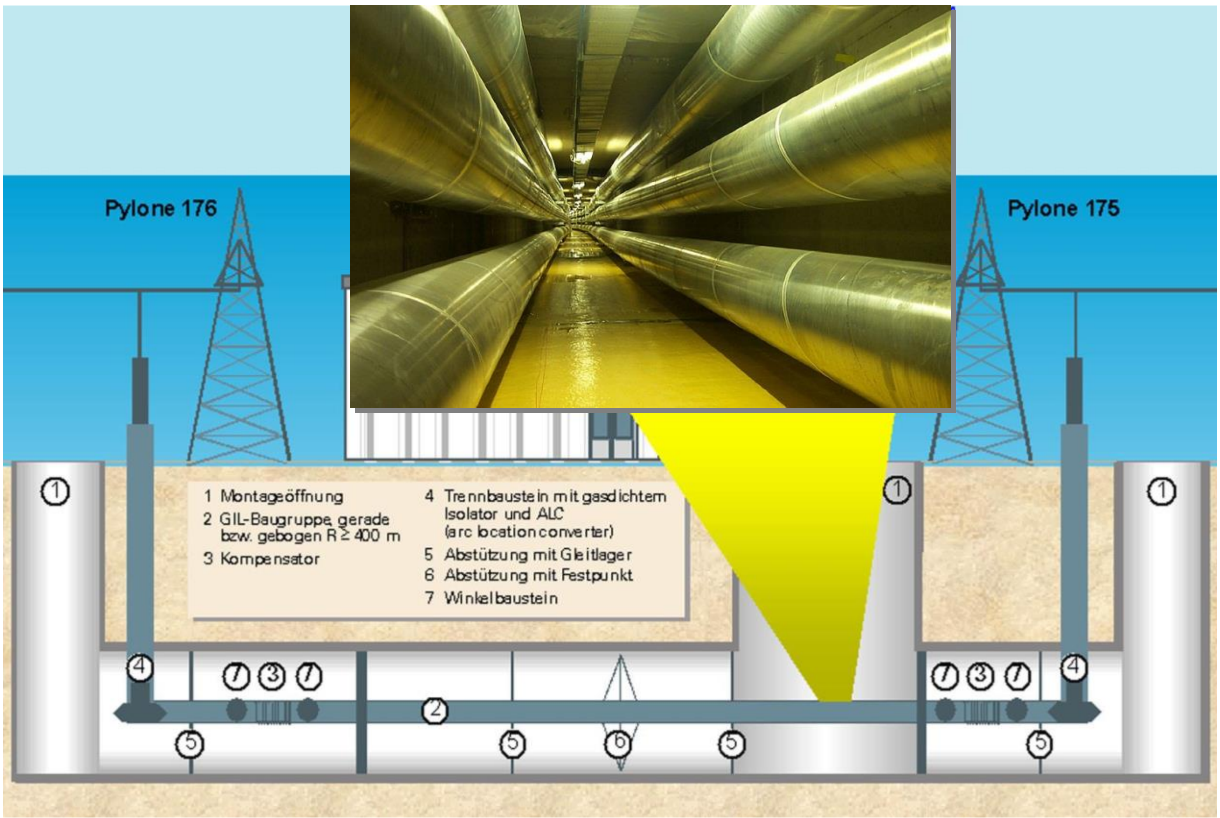
- Keine Alterung des Isolationssystems, da Gasisolationen nicht altern.
- Geringere Verluste als bei Freileitungen und Kabeln aufgrund des großen Leiterquerschnitts.
- Geringerer Kapazitätsbelag im Vergleich zu Kabeln.
- Kein Blitzeinschlag in eine GIL möglich (im Gegensatz zu einer Freileitung), deshalb genügt für die GIL eine geringere Blitzstoßstehspannung bei gleichzeitiger Beschaltung der GIL-Enden mit Ableitern.

Grenzdaten der GIL:

- Nennspannung bis 800 kV.
- Nennstrom bis 6300 A.
- Übertragungsleistung: 500...4000 MVA..
- Kurzschlußstrom: 63 KA während 1 s.



a.



b.

Bild 4.58 a. Gerader GIL-Baustein, typische Länge 120 m, Biegeradius > 400 m
b. Skizze der GIL-Anlage am Genfer Flughafen: Eine Freileitung wurde durch die GIL ersetzt, um Platz für ein Gebäude (Palexpo, Halle 6) zu schaffen

4.6.5 Ersatzschaltungen von Leitungen

4.6.5.1 π-Ersatzschaltbild der Leitung

Bild 4.59 zeigt das π-Ersatzschaltbild für die Leitung. Aus der Maschengleichung ausgehend von x = 0 und der Knotengleichung folgt

$$\begin{aligned} &\underline{U}_1 - (\underline{I}_2 + \underline{Y}\cdot\underline{U}_2)\cdot\underline{Z} = \underline{U}_2 \\ &\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{Y}\cdot\underline{U}_2 + \underline{Y}\cdot\underline{U}_1 = \underline{I}_2 + \underline{Y}\cdot\underline{U}_2 + \underline{Y}\cdot(1+\underline{Y}\cdot\underline{Z})\cdot\underline{U}_2 + \underline{Y}\cdot\underline{Z}\cdot\underline{I}_2 \end{aligned} \quad . \qquad (5.221)$$

Dies kann zusammengefaßt und damit vereinfacht werden zu:

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{U}_1 = (1+\underline{Y}\cdot\underline{Z})\cdot\underline{U}_2 + \underline{Z}\cdot\underline{I}_2 \\ &\underline{I}_1 = \underline{Y}\cdot(2+\underline{Y}\cdot\underline{Z})\cdot\underline{U}_2 + (1+\underline{Y}\cdot\underline{Z})\cdot\underline{I}_2 \end{aligned}} \quad . \qquad (5.222)$$

Ein Koeffizientenvergleich von Gleichung (5.222) mit der Gleichung (2.191) liefert:

$$\underline{Z} = \underline{Z}_L = \underline{Z}_W\cdot\sinh(\underline{g}) \qquad \underline{Y} = \underline{Y}_Q = \frac{\cosh(\underline{g})-1}{\underline{Z}_W\cdot\sinh(\underline{g})} \qquad \text{mit} \qquad \underline{g} = \underline{\gamma}\cdot\ell \quad , \qquad (5.223)$$

wobei der Koeffizientenvergleich bei der Strom- und Spannungsgleichung zum selben Ergebnis führt. Weiterhin führt

$$\underline{Y}\cdot(2+\underline{Y}\cdot\underline{Z})\cdot\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_w}\cdot\sinh(\underline{g}) \quad . \qquad (5.224)$$

auf den Wellenwiderstand $\underline{Z}_W$.

$$\underline{Z}_W = \sqrt{\frac{\underline{Z}}{\underline{Y}\cdot(2+\underline{Y}\cdot\underline{Z})}} \quad . \qquad (5.225)$$

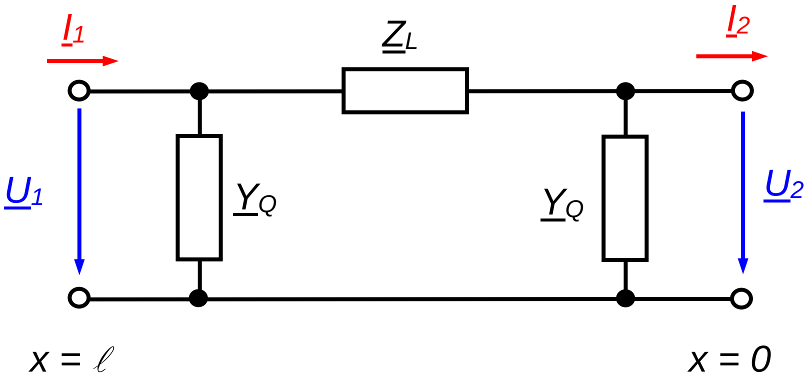


Bild 4.59 Einphasiges π-Ersatzschaltbild für Fernleitungen

4.6.5.2 Elektrisch lange und elektrisch kurze Leitungen

Man unterscheidet *elektrisch lange* und *elektrisch kurze* Leitungen. Ein Leitung wird als elektrisch kurz bezeichnet, wenn gilt

$$\underline{U}(x) \approx const. \qquad \text{oder genauer} \qquad \Delta U \le 0{,}5\% \quad . \qquad (5.226)$$

Vernachlässigt man in Gleichung (2.199) den Strom $\underline{I}_2$, so ist obige Bedingung erfüllt, wenn gilt

$$x = \ell < \frac{\lambda}{60} \quad . \tag{5.227}$$

Eine elektrisch kurze Leitung hat demnach höchstens die Länge

$$\ell_{\max} < \frac{\lambda}{60} = \begin{cases} 100\,\text{km} & \text{bei Freileitungen} \\ 50\,\text{km} & \text{bei Kabeln} \end{cases} \quad . \tag{5.228}$$

In aller Regel können zur Nachbildung elektrisch kurzer Freileitungen die Queradmittanzen (Kapazitätsbelag und Ableitbelag) vernachlässigt werden. Übrig bleibt nur die Längsimpedanz bestehend aus dem Widerstands- und dem Induktivitätsbelag (***Bild 4.60*****a**).

- Freileitungen für ℓ < 300 km und
- Kabel für ℓ < 100 km

können als *Leitungen mittlerer Länge* bezeichnet werden. Bei f = 50 Hz weichen die Real- und Imaginärteile der Funktionen sinh($\underline{g}$) und cosh($\underline{g}$) um weniger als 10% von den jeweiligen Näherungen ab und es gilt:

$$\sinh(\underline{g}) \approx \underline{g} \quad \text{und} \quad \cosh(\underline{g}) \approx 1 + \frac{1}{2}\underline{g}^2 \quad . \tag{5.229}$$

Damit gilt für die Längsimpedanz und die Querleitwerte – analog zu Gleichung (5.223) –

$$\underline{Z}_L = \underline{Z}_W \cdot (\underline{\gamma}\ell) \qquad \underline{Y}_Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\underline{\gamma}\ell}{\underline{Z}_W} \quad . \tag{5.230}$$

Der Ansatz für den Wellenwiderstand gemäß

$$\sqrt{\frac{\underline{\underline{Z}}}{\underline{Y}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_L}{2 \cdot \underline{Y}_Q}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_W \cdot (\underline{\gamma}\ell)}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\underline{\gamma}\ell}{\underline{Z}_W}}} = \underline{Z}_W = \sqrt{\frac{R_B^{'} + j \cdot \omega \cdot L_B^{'}}{G_B^{'} + j \cdot \omega \cdot C_B^{'}}} \tag{5.231}$$

führt auf die folgende Beziehung zwischen der Längsimpedanz und den Querleitwerten und den Betriebsparametern der Leitung:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_L &= \underline{Z}_B = \underline{Z}_B^{'} \cdot \ell = \left(R_B^{'} + j\omega L_B^{'}\right) \cdot \ell \\ \underline{Y}_Q &= \frac{1}{2} \cdot \underline{Y}_B = \frac{1}{2} \cdot \underline{Y}_B^{'} \cdot \ell = \frac{1}{2} \cdot \left(G_B^{'} + j\omega C_B^{'}\right) \cdot \ell \end{aligned} \quad . \tag{5.232}$$

Eine kurze Leitung kann also mit ausreichender Näherung durch ein einzelnes π-Glied nachgebildet werden (***Bild 4.60a*****/b**). Für numerische Berechnungen lässt sich eine bessere Nachbildung durch die Reihenschaltung mehrerer π-Glieder erreichen (***Bild 4.60*****c**). Für die Zahl der benötigten Kettenglieder gilt aufgrund der Gleichung (5.227):

$$n \geq \frac{\ell}{\left(\frac{\lambda}{60}\right)} = \begin{cases} \dfrac{\ell}{100\,\text{km}} & \text{bei Freileitungen} \\[2ex] \dfrac{\ell}{50\,\text{km}} & \text{bei Kabeln} \end{cases} \quad . \tag{5.233}$$

Für die Werte des Ersatzschaltbildes ***Bild 4.60c*** mit *n* Gliedern gilt:

$$R_\pi = \frac{R_B}{n} = \frac{R_B^{'} \cdot \ell}{n} \qquad C_\pi = \frac{C_B}{n} = \frac{C_B^{'} \cdot \ell}{n} \qquad L_\pi = \frac{L_B}{n} = \frac{L_B^{'} \cdot \ell}{n} \qquad G_\pi = \frac{G_B}{n} = \frac{G_B^{'} \cdot \ell}{n} \quad .(5.234)$$

Die Querkapazitäten und Querleitwerte der inneren Glieder addieren sich stets zu C_π und G_π. An den beiden Enden der Leitung liegen dann die Querelemente $C_\pi/2$ und parallel dazu $G_\pi/2$.

Aufgrund der verfügbaren Rechenkapazität bietet sich allerdings auch die numerische Berechnung der Leitungsgleichungen an, ohne den Umweg über ein Ersatzschaltbild zu gehen.

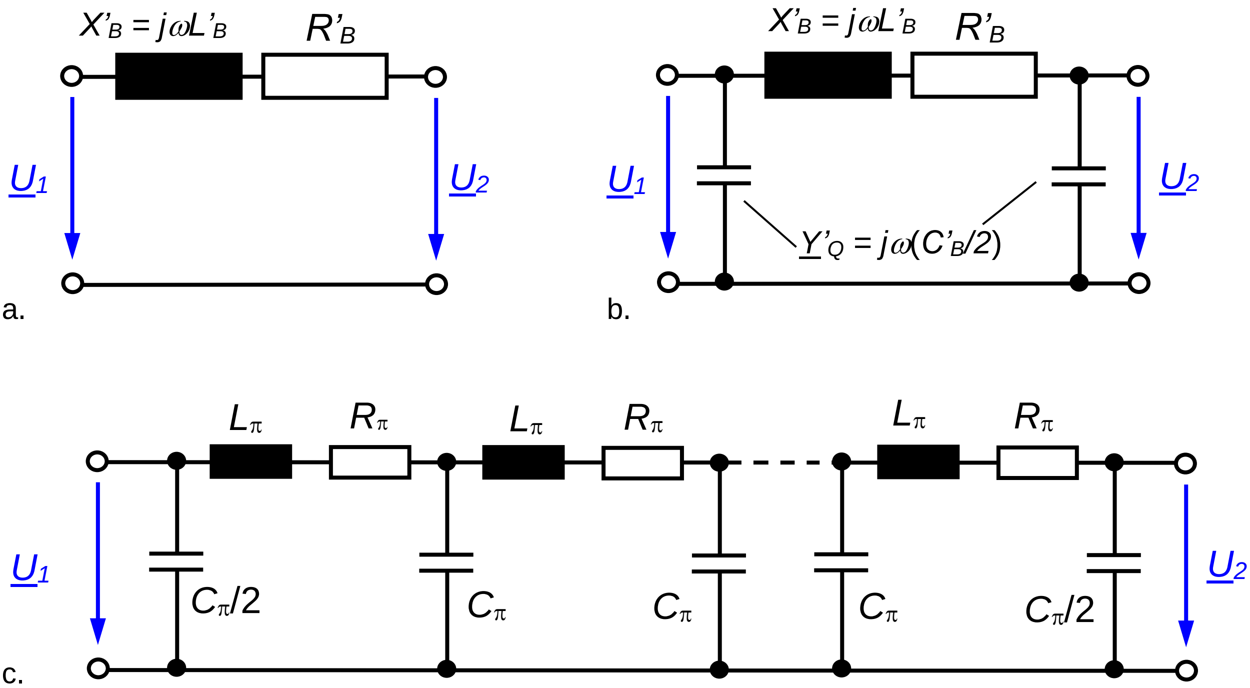


Bild 4.60 π-Ersatzschaltbilder zur Modellierung von Leitungen (G'_B ist hier vernachlässigt)
a. Ersatzschaltbild für eine Freileitung bis zu mittleren Längen (< 300 km)
b. π-Ersatzschaltbild für Leitungen (speziell Kabel) bis zu mittleren Längen
c. π-Ersatzschaltbild mit *n* Gliedern für längere Leitungen

4.6.5.3 Wirkungsgrad von Übertragungsleitungen

Gemäß ***Bild 4.61*** ist:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_2 + P_V} \quad . \qquad (5.235)$$

mit

$$P_V = 3 \cdot R \cdot I_R^2 = 3 \cdot R \cdot \left(I_{2W}^2 + (I_{2B} - U_2 \cdot \omega \frac{C_B^{'}\ell}{2})^2 \right) \quad . \qquad (5.236)$$

Mit den Beziehungen für die Wirkleistung P_2 und die Blindleistung Q_2

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot U_{2\Delta} \cdot I_{2W} \qquad \text{und} \qquad Q_2 = \sqrt{3} \cdot U_{2\Delta} \cdot I_{2B} \quad . \qquad (5.237)$$

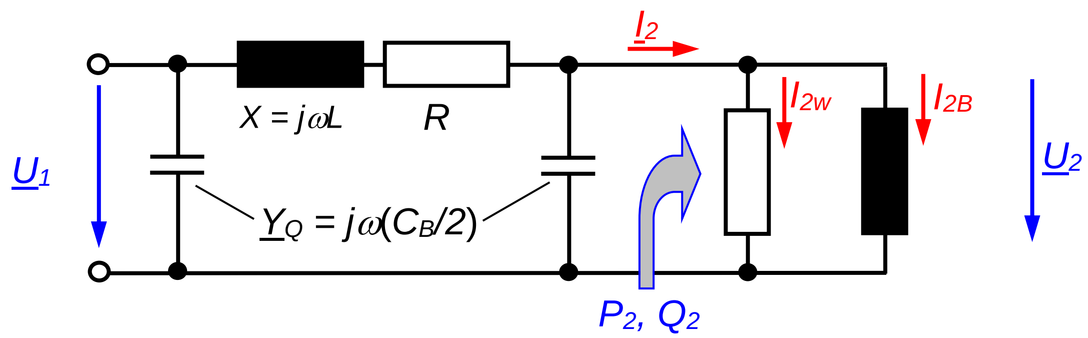
folgt für den Wirkungsgrad der Übertragung

$$\eta = \frac{P_2}{P_2 + \dfrac{R}{U_{2\Delta}^2} \cdot \left(P_2^2 + \left(Q_2 - U_{2\Delta}^2 \cdot \omega \dfrac{C_B^{'}\ell}{2}\right)^2 \right)} = \frac{1}{1 + \dfrac{P_2 \cdot R}{U_{2\Delta}^2} \cdot \left(1 + \left(\tan(\varphi) - U_{2\Delta}^2 \cdot \dfrac{\omega C_B^{'}\ell}{2P_2} \right)^2 \right)}$$
$$= \frac{1}{1 + \left\{\dfrac{S_2}{S_{gr}}\right\} \cdot R \cdot \dfrac{\sqrt{3} \cdot \cos(\varphi) \cdot I_{gr}}{U_{2\Delta}} \cdot \left[1 + \left(\tan(\varphi) - \dfrac{\omega C_B^{'}\ell}{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3} \cdot \cos(\varphi) \cdot I_{gr}}{U_{2\Delta}} \right)^{-1} \cdot \left\{\dfrac{S_2}{S_{gr}}\right\}^{-1} \right)^2 \right]} \quad . \qquad (5.238)$$

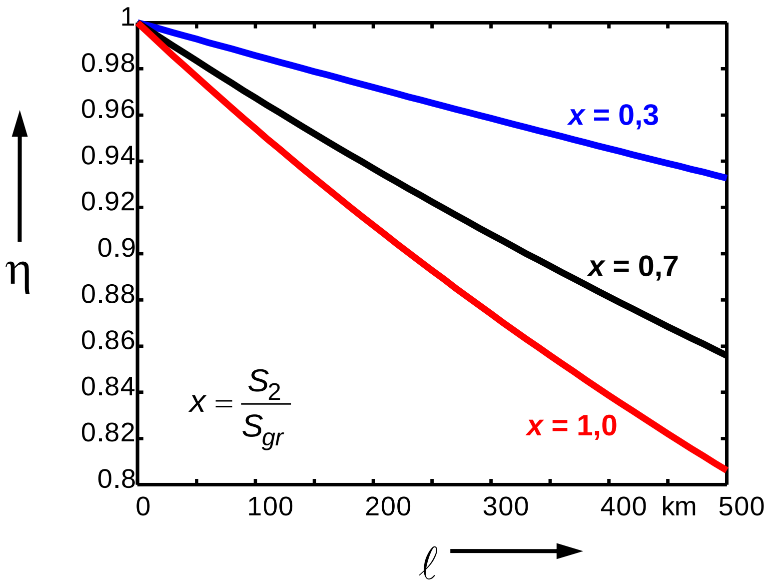
Induktive Blindleistung bedeutet $Q_2 > 0$, für kapazitive Blindleistung ist $Q_2 < 0$. $\cos(\varphi)$ ist der Leistungsfaktor.

Typische Zahlenwerte für den Wirkungsgrad einer Übertragungsleitung liegen bei 80…90 %, im Wesentlichen abhängig von ihrer Auslastung.

Beispiel: 380-kV-Freileitung, 4er-Bündel; $R' = 0{,}03\ \Omega/\text{km}$; $C'_B = 14\ \text{nF/km}$; $U_{2\Delta} = 400\ \text{kV}$; $I_{gr} = 2580\ \text{A}$ (Grenzstrom, maximal zulässiger Strom); $\cos(\varphi) = 0{,}8$; $S_{gr} = \sqrt{3} \cdot U_{2\Delta} \cdot I_{gr}$
Wirkungsgradverlauf: siehe ***Bild 4.61*b**



a.



b.

Bild 4.61 Bestimmung des Wirkungsgrades einer Übertragungsleitung
a. π-Ersatzschaltbild mit Last
b. Wirkungsgrad η für die oben genannten Zahlenwerte in Abhängigkeit der Belastung mit $\cos(\varphi) = 0{,}8$

4.6.6 Leitungskonstanten von Freileitungen und Kabeln

4.6.6.1 Ohmscher Widerstand

Für überschlägige Berechnungen eignen sich folgende Richtwerte für den Widerstandsbelag gemäß VDE 0102, DIN EN 60909, die für eine Temperatur von 20 °C gelten:

$$R' = \frac{R}{\ell} = \begin{cases} \dfrac{1}{54 \cdot A} & \text{für Kupfer} \\[2ex] \dfrac{1}{34 \cdot A} & \text{für Aluminium} \quad \text{mit} \quad A \text{ in } \mathrm{mm}^2 \quad \text{und} \quad R' \text{ in } \dfrac{\Omega}{\mathrm{m}} \\[2ex] \dfrac{1}{31 \cdot A} & \text{für } \mathit{Aldrey} \end{cases} \quad . \tag{5.239}$$

Bei einer anderen Temperatur als 20 °C ist eine Umrechnung des Widerstandswertes gemäß folgender Beziehung zweckmäßig:

$$R(\vartheta_w) = R(\vartheta_k) \cdot \frac{\vartheta_w + \vartheta_0}{\vartheta_k + \vartheta_0} \quad . \tag{5.240}$$

mit $R(\vartheta_w)$: ohmscher Widerstand bei der Temperatur ϑ_w in °C (Warmwiderstand)
$R(\vartheta_k)$: ohmscher Widerstand bei der Temperatur ϑ_k in °C (Kaltwiderstand)
ϑ_0: Materialkonstante, $\vartheta_0 = 235$ für Kupfer, $\vartheta_0 = 225$ für Aluminium

Bei Wechselströmen verteilt sich der Strom i. a. nicht homogen auf den Leiter. Die so genannte Stromverdrängung wird durch die Wechselwirkung von Stromfluß und magnetischem Feld erzeugt (***Bild 4.62***).

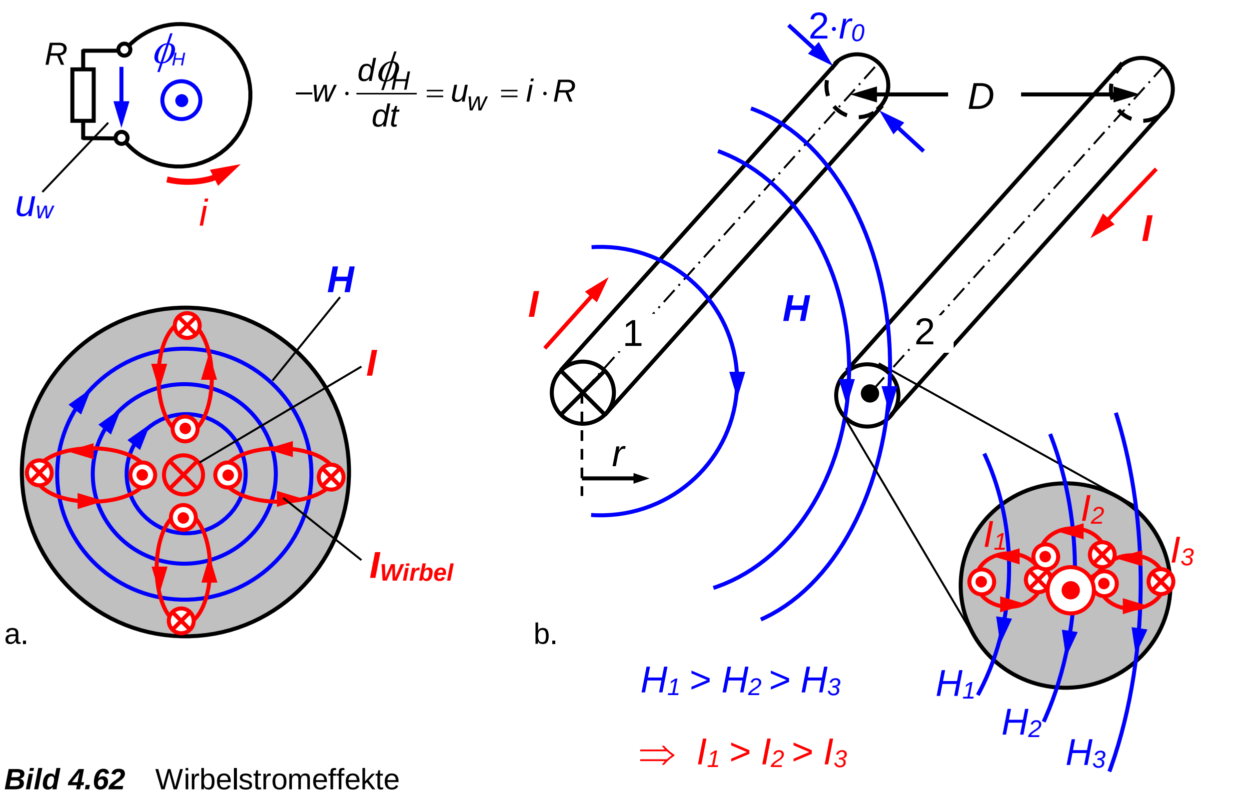


Bild 4.62 Wirbelstromeffekte
a. Skineffekt: außen wird *I* durch I_{wirbel} verstärkt, innen abgeschwächt
b. Proximityeffekt: unterschiedlich starkes Magnetfeld über dem Leiterquerschnitt

Man unterscheidet 2 Effekte:

Skineffekt: Der im Leiter fließende Strom erzeugt ein Magnetfeld. Dieses induziert im Leiter einen Strom, der seiner Ursache, nämlich dem Stromfluß entgegenwirkt (Lenz'sche Regel). Im Zentrum des Leiters wird der Strom durch die Wirbelströme abgeschwächt, nahe der Oberfläche addieren sich der Strom und die Wirbelströme. Insgesamt erhöht sich die Stromdichte zur Oberfläche des Leiters hin. Der Strom fließt quasi in der Haut des Leiters, deshalb die Bezeichnung „Skineffekt".

Proximityeffekt: Bei zwei parallelen Leitern beeinflußt das Magnetfeld des einen Leiters (1) den Stromfluß in dem anderen Leiter (2). Dieser Einfluß ist über dem Querschnitt des Leiters (2) etwas unterschiedlich, da die Feldstärke auf der dem Leiter (1) zugewandten Seite etwas größer und auf der dem Leiter (1) abgewandten Seite etwas kleiner ist. Der Mechanismus ist derselbe wie beim Skineffekt, d. h. induzierte Ströme verstärken den Hauptstrom oder sie schwächen ihn ab. Bei Freileitungen spielt – im Gegensatz zu Kabeln - der Proximityeffekt aufgrund des großen Leiterabstandes praktisch keine Rolle.

4.6.6.2 Induktivität

Zur Berechnung der Induktivität (oder besser des Induktivitätskoeffizienten) einer bestimmten Anordnung ist oft der Weg über die im Magnetfeld gespeicherte Energie vorteilhaft. Die in einem stationären Magnetfeld gespeicherte Energie W_{magn} kann einerseits über die Feldgrößen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{H}$, andererseits aber auch aus der Induktivität L der Anordnung und dem fließenden Strom i, der das Magnetfeld verursacht, berechnet werden:

$$W_{magn} = \frac{1}{2} \cdot \int_V \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H} \cdot dV \overset{!}{=} \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \quad . \tag{5.241}$$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \boldsymbol{H}$$

Bild 4.63 zeigt den Verlauf des magnetischen Feldes innerhalb und außerhalb eines zylindrischen Leiters der Länge L, der vom Strom i durchflossenen wird. Aus dem Durchflutungsgesetz folgt für die magnetische Feldstärke innerhalb und außerhalb des Drahtes mit dem Radius r_0:

$$H(r) = H_\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{i}{2\pi \cdot r_0^2} \cdot r & \text{für} \quad 0 \le r \le r_0 \\[2ex] \dfrac{i}{2\pi \cdot r} & \text{für} \quad r \ge r_0 \end{cases} \quad . \tag{5.242}$$

Die so genannte *„innere Induktivität"* kann über die Energie des Magnetfeldes im Leiter berechnet werden. Es gilt:

$$W = \frac{1}{2} \cdot L_i \cdot i^2 = \frac{1}{2} \int_V H \cdot B \cdot dV = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 \cdot i^2}{4\pi^2 \cdot r_0^4} \right) \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} r^2 \cdot r \cdot d\varphi \cdot \ell \cdot dr = \frac{\mu_0 \ell}{16 \cdot \pi} \cdot i^2 \quad , \tag{5.243}$$

d. h. die innere Induktivität ist

$$L_i = \frac{\mu_0 \ell}{8 \cdot \pi} \quad . \tag{5.244}$$

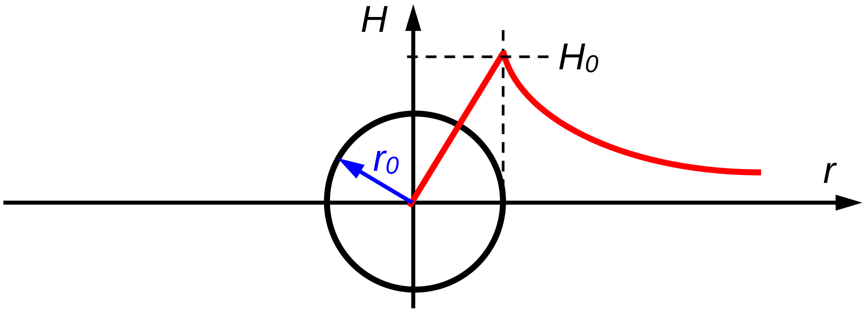


Bild 4.63 Magnetfeld eines zylindrischen Leiters, der vom Strom *i* durchflossen wird

Zur Definition der *„äußeren Induktivität"* wird ein System mit dem Leiter 1-1' und dem Referenzleiter 0-0' gemäß ***Bild 4.64a***. Der Leiterradius sei r_0. Für den Fluß, den der Strom i in einer gedachten Leiterschleife $\mathbf{c}_1$ erzeugt, gilt:

$$\phi = \mu_0 \ell \cdot \int_{r_0}^{d} H_1(r)\, dr = \mu_0 \ell \cdot \int_{r_0}^{d} \frac{i_1}{2\pi \cdot r}\, dr = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right) \cdot i_1 = L_a \cdot i_1 \quad . \tag{5.245}$$

Die so genannte „äußere Induktivität" ist demnach

$$L_a = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{r_0}\right) \quad . \tag{5.246}$$

Daraus kann zusammen mit der inneren Induktivität eines Leiters gemäß (5.244) die Eigeninduktivität des Leiters 1-1' berechnet werden:

$$L_{11} = L_i + L_a = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \cdot \left(\ln\left(\frac{d}{r_0}\right) + \frac{1}{4} \right) \quad . \tag{5.247}$$

Die Gegeninduktivität (oder auch Koppelinduktivität) zu einem Referenzleiter ergibt sich aus dem Fluß ϕ_{21}, den der Strom i_1 in der gedachten Leiterschleife $\mathbf{c}_2$ aus dem Leiter 2-2' und dem Referenzleiter erzeugt.

$$\underline{\phi}_{21} = \mu_0 \ell \cdot \int_{D_{12}}^{d} \frac{i_1}{2\pi \cdot r}\, dr = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{D_{12}}\right) \cdot i_1 = L_{21} \cdot i_1 \quad . \tag{5.248}$$

Die Gegeninduktivität (Koppelinduktivität) zwischen den Leitern 1-1' und 2-2' ist also:

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{d}{D_{12}}\right) \quad . \tag{5.249}$$

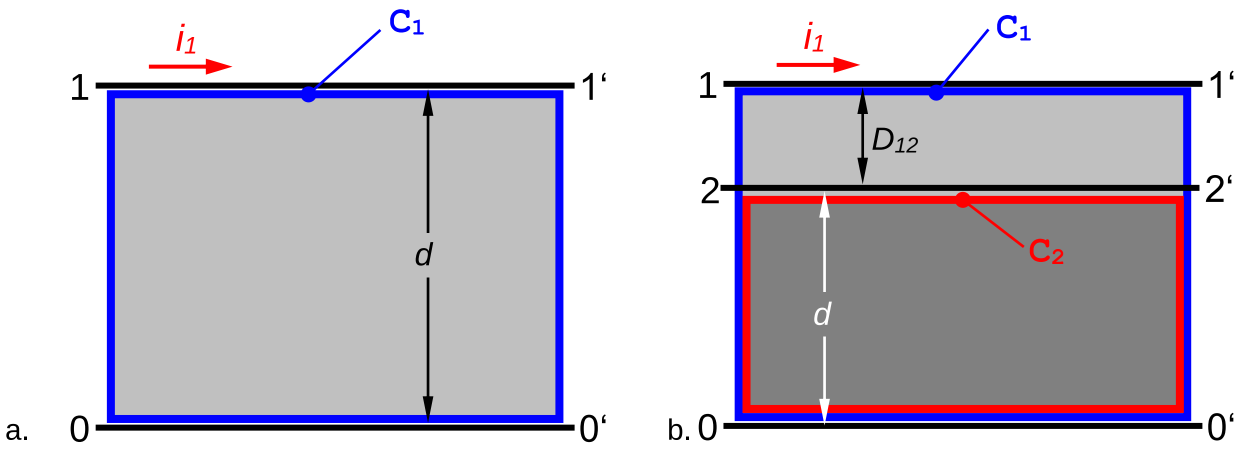


Bild 4.64 a. „Äußere Induktivität" und Eigeninduktivität
b. Koppelinduktivität (Gegeninduktivität)

Die Eigeninduktivität eines geraden Leiters mit dem Radius r_0 und dem Abstand d zu einem Referenzleiter lässt sich gemäß (5.244) bestimmen. Aufgrund der identischen Abmessungen sind die Eigeninduktivitäten der 3 Leiter identisch, d. h. es ist:

$$L_{11} = L_{22} = L_{33} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\ln\left(\frac{d}{r_0}\right) + \frac{1}{4}\right) \quad . \tag{5.250}$$

Die Gegeninduktivität oder Koppelinduktivität zwischen zwei Leitern mit jeweils einem Referenzleiter als Rückleiter lässt sich gemäß (5.249) berechnen. Analog gilt für die Koppelinduktivitäten zwischen den Leitern 1 und 2, 3 und 1 sowie 2 und 3:

$$L_{21} = L_{12} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{d}{D_{12}}\right) \quad L_{31} = L_{13} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{d}{D_{13}}\right) \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\frac{d}{D_{23}}\right). \tag{5.251}$$

Darin sind D_{12}, D_{13} und D_{23} die Abstände der einzelnen Leiter zueinander und d ist der Abstand der 3 Leiter zu dem Referenzleiter.

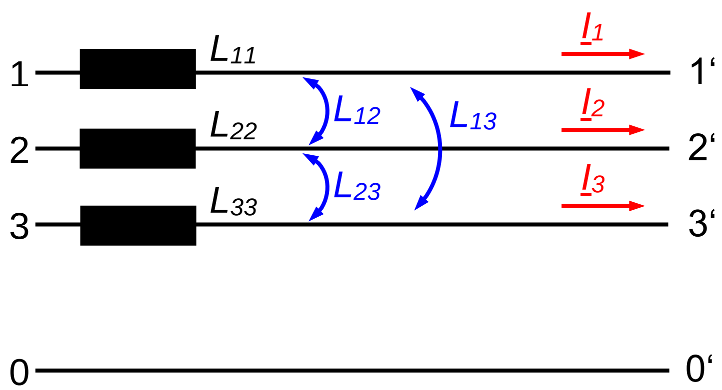


Bild 4.65 Netzwerk aus Eigen- und Gegeninduktivitäten bei einem Dreileitersystem

Damit ergibt sich eine Schaltung des Dreileitersystems gemäß ***Bild 4.65***. Der Spannungsabfall längs der einzelnen Leiter ist

$$\begin{aligned}\Delta\underline{U}_1 &= j\omega L_{11}\cdot\underline{I}_1 + j\omega L_{12}\cdot\underline{I}_2 + j\omega L_{13}\cdot\underline{I}_3\\ \Delta\underline{U}_2 &= j\omega L_{12}\cdot\underline{I}_1 + j\omega L_{22}\cdot\underline{I}_2 + j\omega L_{23}\cdot\underline{I}_3 \quad .\\ \Delta\underline{U}_3 &= j\omega L_{13}\cdot\underline{I}_1 + j\omega L_{23}\cdot\underline{I}_2 + j\omega L_{33}\cdot\underline{I}_3\end{aligned} \tag{5.252}$$

Das Dreileitersystem sei symmetrisch aufgebaut, d. h. die Leiter sind auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet. Dann sind wegen $D_{12} = D_{13} = D_{23} = D$ sämtliche Koppelinduktivitäten identisch, d. h.

$$L_{ij} = \begin{cases} L = \dfrac{\mu_0 \ell}{2\pi}\ln\left(\dfrac{d}{D}\right) & \text{für } i \neq j \\ L_0 = \dfrac{\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\ln\left(\dfrac{d}{r_0}\right) + \dfrac{1}{4}\right) & \text{für } i = j \end{cases} \quad . \tag{5.253}$$

Damit und mit der Gleichung für ein symmetrisches Drehstromsystem

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \tag{5.254}$$

vereinfacht sich (5.252) deutlich. Das System ist entkoppelt, d. h. der Spannungsabfall längs des Leiters i hängt nur vom Strom $\underline{I}_i$ ab:

$$\begin{bmatrix}\Delta\underline{U}_1\\ \Delta\underline{U}_2\\ \Delta\underline{U}_3\end{bmatrix} = j\omega\cdot\left(L_0 - L\right)\cdot\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\\ \underline{I}_3\end{bmatrix} = j\omega\cdot L_B\cdot\begin{bmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\\ \underline{I}_3\end{bmatrix}$$

mit $\quad .$ (5.255)

$$L_B = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\cdot\left(\ln\left(\frac{D}{r_0}\right) + \frac{1}{4}\right)$$

Bei hohen Spannungen entstehen Korona-Entladungen durch die hohe elektrische Feldstärke an der Oberfläche der Leiterseile. Diese Korona-Entladungen erzeugen zusätzliche Verluste, die bei großen Leitungslängen sehr beträchtlich sein können. Man vergrößert daher die effektive Oberfläche durch Bündelleiter. Bündelleiter haben im Vergleich zu einem massiven Leiterseil mit der gleichen effektiven Oberfläche den Vorteil des weit geringeren Gewichtes.

Bei Bündelleiteranordnungen mit n Teilleitern gemäß ***Bild 4.66*** ist die Betriebsinduktivität L_B

$$L_B = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\cdot\left(\ln\left(\frac{D}{r_B}\right) + \frac{1}{4n}\right) \quad , \tag{5.256}$$

$$\text{mit} \quad r_B = \sqrt[n]{n\cdot r_0\cdot r_T^{n-1}} \quad \text{und} \quad D = \sqrt[3]{D_{12}\cdot D_{13}\cdot D_3}$$

d.h. bei etwas unsymmetrischen Leiteranordnungen wird mit einem „mittleren“ Leiterabstand D gerechnet.

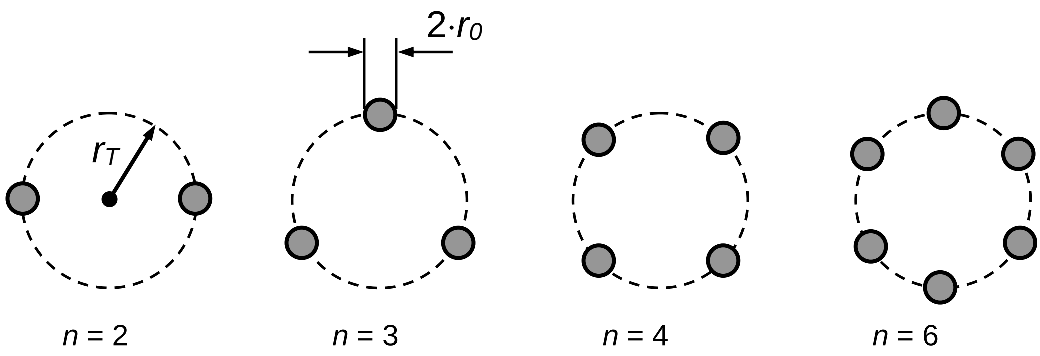


Bild 4.66 Geometrie von Bündelleiteranordnungen

4.6.6.3 Kapazität

Die allgemeine Definition des Potentials ist:

$$\varphi = \varphi_B - \int_{\boldsymbol{r}_B}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} \quad . \tag{5.257}$$

Dabei ist φ_B das Bezugspotential am Punkt $\boldsymbol{r_B}$.

Es wird nun ein Leiter mit dem Radius r_0, der Ladung Q und der Länge ℓ betrachtet (***Bild 4.67*****a**). Aus Symmetriegründen ist:

$$Q = \oint_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{A} = \varepsilon_0 \cdot \oint_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = 2\pi\varepsilon_0 r \cdot \ell \cdot E_r \quad . \tag{5.258}$$

E_r ist die elektrische Feldstärke in radialer Richtung. Aus (5.257) wird:

$$\varphi = \varphi_B - \int_{\boldsymbol{r}_B}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \varphi_B - \int_{r_B}^{r} \frac{Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} dr = \varphi_B + \frac{Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_B}{r}\right) \quad . \tag{5.259}$$

Das Bezugspotential φ_B am Ort r_B ist frei wählbar, z. B. kann man $\varphi_B = 0$ setzen. Durch die Anwendung der Spiegelungsmethode wird die Erdoberfläche zur Symmetrieebene (***Bild 4.67*****b**). Das Potential an einem bestimmten Punkt P berechnet sich zu

$$\varphi(P) = \frac{+Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_B}{r_P}\right) + \frac{-Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_B}{r_P'}\right) = \frac{Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{r_P'}{r_P}\right) \quad . \tag{5.260}$$

An der Oberfläche des Leiters 1 gilt mit $r_P = r_0$ und $r'_P = 2 \cdot h$:

$$\varphi_1 = \frac{Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot h}{r_0}\right) \quad . \tag{5.261}$$

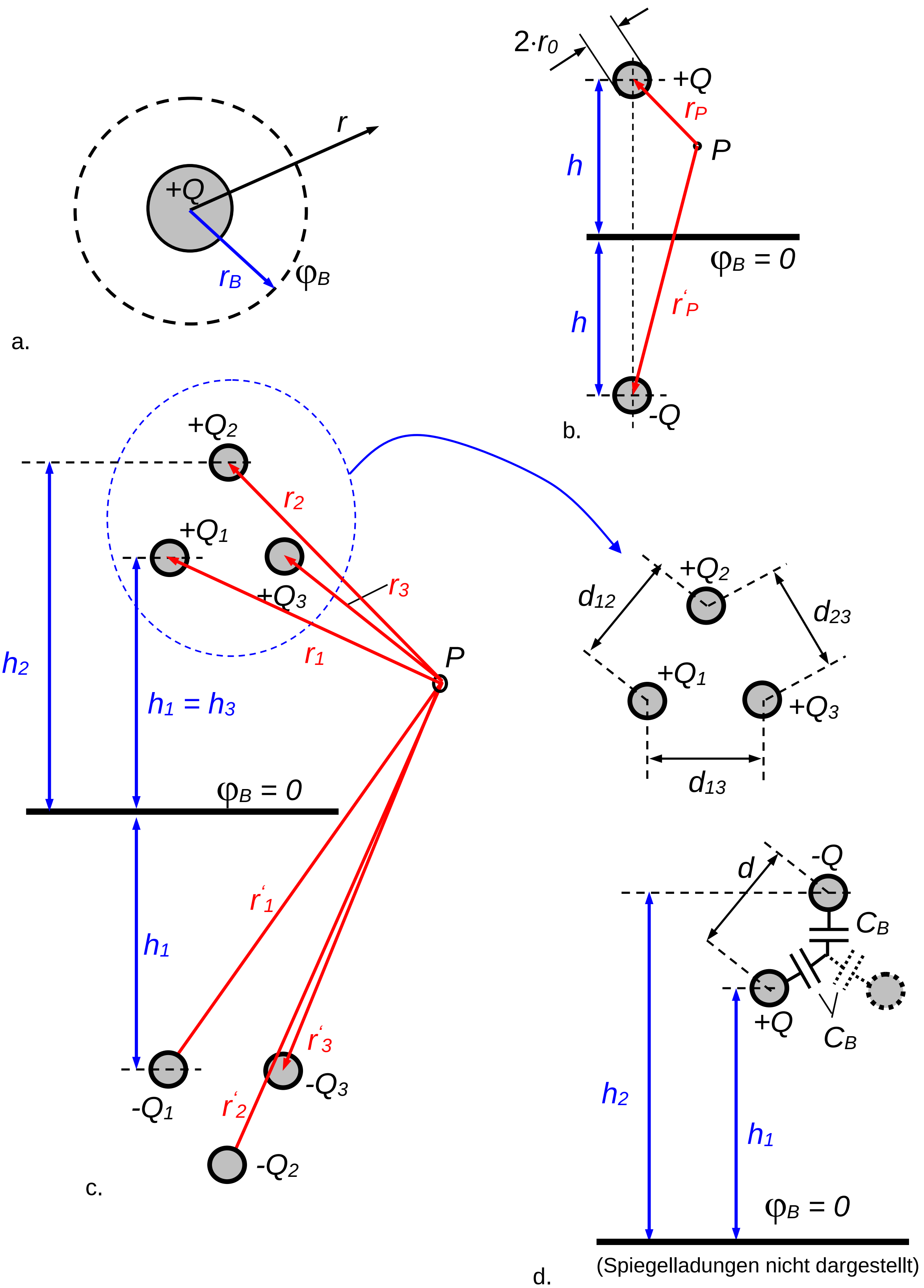


Bild 4.67 Herleitung der Kapazitäten eines Dreileitersystems
a. Leitung mit der Ladung Q und der Länge l
b. Spiegelungsmethode
c. Dreileiteranordnung (symmetrisch gezeichnet), mit Spiegelladungen
d. Herleitung der Koppelkapazität zwischen 2 Leitern

Für das Dreileitersystem (***Bild 4.67*c**) gilt für die Potentiale φ_1, φ_2 und φ_3 an der Oberfläche der 3 Leiter:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \frac{Q_1/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{2\cdot h_1}{r_0}\right) + \frac{Q_2/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{d'_{12}}{d_{12}}\right) + \frac{Q_3/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{d'_{13}}{d_{13}}\right)\\
\varphi_2 &= \frac{Q_1/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{d'_{21}}{d_{21}}\right) + \frac{Q_2/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{2\cdot h_2}{r_0}\right) + \frac{Q_3/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{d'_{23}}{d_{23}}\right)\quad .\\
\varphi_3 &= \frac{Q_1/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{d'_{31}}{d_{31}}\right) + \frac{Q_2/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{d'_{32}}{d_{32}}\right) + \frac{Q_3/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\ln\left(\frac{2\cdot h_3}{r_0}\right)
\end{aligned}\tag{5.262}$$

Darin sind:

d'_{ik}: Abstand des Leiters i vom Spiegelbild des Leiters k

d_{ik}: Abstand des Leiters i vom Leiter k.

Die Leiter sollen symmetrisch sein, d. h. die Leiter sind auf den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks angeordnet. Der Abstand d der Leiter zueinander ist klein gegenüber dem Abstand h von den 3 Leitern zur Erde. Außerdem seien die Ladungen auf den 3 Leitungen identisch:

$$\begin{aligned}
&D = \sqrt[3]{d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{31}}\\
&h = \sqrt[3]{h_1\cdot h_2\cdot h_3}\quad .\\
&d'_{ik} = 2\cdot h \qquad \text{für } i\neq k \qquad \text{und} \qquad Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q
\end{aligned}\tag{5.263}$$

Damit gilt für die Potentiale φ_1, φ_2 und φ_3 der 3 Leitungen:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi &= \frac{Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\ln\left(\frac{2\cdot h}{r_0}\right) + \ln\left(\frac{2\cdot h}{D}\right) + \ln\left(\frac{2\cdot h}{D}\right)\right)\\
&= \frac{Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\ln\left(\frac{2\cdot h}{r_0}\right) + 2\cdot\ln\left(\frac{2\cdot h}{D}\right)\right)\quad .
\end{aligned}\tag{5.264}$$

Die Erdkapazität der einzelnen Leiter eines Dreileitersystems <u>ohne Erdseil</u> ist damit:

$$C_E = \frac{Q}{\varphi-\varphi_B} = \frac{Q}{\varphi} = \frac{2\pi\varepsilon_0\cdot\ell}{\ln\left(\frac{2\cdot h}{r_0}\right) + 2\cdot\ln\left(\frac{2\cdot h}{D}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0\cdot\ell}{3\cdot\ln\left(\frac{2\cdot h}{\sqrt[3]{r_0\cdot D^2}}\right)}\quad .\tag{5.265}$$

Die Koppelkapazität C_k zwischen 2 Leitern kann mit Hilfe der Anordnung gemäß ***Bild 4.67*d** berechnet werden. Die so genannte Betriebskapazität C_B ist das Doppelte der Koppelkapazität C_k. Der Leiter 3 hat aufgrund der Symmetrie auf Leiter 1 und Leiter 2 dieselbe Auswirkung und kann deshalb für die folgende Betrachtung weggelassen werden.

Für die Potentiale φ_1 und φ_2 an den Oberflächen der beiden Leiter gilt:

$$\varphi_1 = \frac{Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\ln\left(\frac{2 \cdot h}{r_0}\right) - \ln\left(\frac{2 \cdot h}{D}\right) \right) \qquad \varphi_2 = \frac{Q/\ell}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\ln\left(\frac{2 \cdot h}{D}\right) - \ln\left(\frac{2 \cdot h}{r_0}\right) \right) \quad . \tag{5.266}$$

Die Koppelkapazität C_k zwischen den Leitern berechnet sich daraus gemäß

$$C_k = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cdot \ell}{2 \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot h}{r_0}\right) - 2 \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot h}{D}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cdot \ell}{2 \cdot \ln\left(\frac{D}{r_0}\right)} \quad . \tag{5.267}$$

Die Betriebskapazität C_B ist damit

$$C_B = 2 \cdot C_k = \frac{2\pi\varepsilon_0 \cdot \ell}{\ln\left(D/r_0\right)} \quad . \tag{5.268}$$

4.6.6.4 Ableitbelag

Ursache der Querverluste bei Freileitungen sind Koronaentladungen und Leckströme an den Isolatoren. Beides ist stark witterungsabhängig und bei Regen deutlich stärker ausgeprägt. Bei Kabeln sind Leitfähigkeits- und Polarisationsverluste des Dielektrikums Ursache für die Ableitverluste. Für Netzberechnungen kann dennoch der Ableitbelag *G'* üblicherweise gegenüber dem Leitwert $\omega \cdot C'_B$ durch die Betriebskapazität vernachlässigt werden. Dies gilt sowohl für Kabel, als auch für Freileitungen, d. h.

$$G_B \approx 0 \quad . \tag{5.269}$$

4.7 Schaltanlagen

4.7.1 Schaltanlagen in Energieübertragungssystemen

Als Schaltanlage bezeichnet man die Gesamtheit aller an einem Ort zusammengezogenen Betriebsmittel. Schaltanlagen dienen zum Verbinden und Trennen von Freileitungen und Kabeln. Oft sind auch Transformatoren Bestandteil einer Schaltanlage. Sie werden dann oft als *Umspanner* bezeichnet und die Schaltanlage dann auch als *Umspannanlage*.

4.7.2 Topologie von Schaltanlagen

4.7.2.1 Höchstspannungsschaltanlagen

In der Höchstspannungsebene sind Schaltanlagen häufig nach dem in ***Bild 4.68*** dargestellten Schaltbild aufgebaut. Auf diese Sammelschienen speisen ankommende Leitungen, z. B. von Kraftwerken, elektrische Leistung ein. Diese Leistung wird dann auf die abgehenden Leitungen verteilt und zu den Umspannanlagen geführt, wo sie auf unterlagerte Netze verteilt wird oder die Leitungen dienen der Fernübertragung elektrischer Energie.

Unabhängig davon, ob eine Leitung elektrische Leistung einspeist oder abnimmt, wird eine Leistungsankopplung an die Schaltanlage als *Abzweig* bezeichnet. Um auch während des Betriebs den Leistungsschalter und die Wandler freischalten zu können, beispielsweise zu

Wartungszwecken, kann der betreffende Abzweig dann über die *Umgehungsammelschiene* (6) versorgt werden. Die Umgehungssammelschiene wird dann über die *Querkupplung* (Leistungsschalter 9) gespeist. Die Sammelschienen sind entweder als Einfach-, Doppel- oder Dreifachsammelschiene ausgeführt. Dies erhöht die Flexibilität der Schaltanlage bei Wartungen, Revisionen und im Fehlerfall. So kann man z. B. das Netz dadurch in galvanisch getrennte Bereiche aufteilen. Zwischen den getrennten Netzen wirken dann die Längsimpedanzen der Transformatoren, was eine Verringerung des Kurzschlussstromes zur Folge hat.

Durch eine Längstrennung (8) ist die Flexibilität einer Schaltanlage noch weiter erhöht. Allerdings muß bei aufgetrennter Längsverbindung die zu und abgehende Scheinleistung, d. h. Wirk- und Blindleistung, in jedem der beiden Abschnitte der Sammelschienen identisch sein.

In ***Bild 4.69*** ist die typische Schaltung eines Abzweiges dargestellt. Zusätzlich zu den Sammelschienentrennern, dem Leistungsschalter, dem Leitungstrenner und den Wandlern sieht man in einem Abzweig auch noch einen *Erdungsschalter* vor. Er dient bei Wartungsarbeiten als Schutz gegen kapazitive Restspannungen, induktive Einstreuungen, einlaufende Wanderwellen und außerdem dem Schutz gegen versehentliches Einschalten. Man bezeichnet ihn deswegen auch als *Arbeitserder*.

Der Leistungsschalter dient – im Gegensatz zu den Trennern, die im stromlosen Zustand schalten - dem Schalten des Laststromes. Er ist auf die Abschaltung eines bestimmten Kurzschlussstromes ausgelegt.

Bei einer Doppelsammelschiene sind die Sammelschienentrenner in doppelter Ausführung vorhanden, um den Abzweig auf jede der Sammelschienen schalten zu können. Da die Trenner nur im stromlosen Zustand schalten können – anderenfalls würden sie zerstört werden – erfolgt die gewünschte Konfiguration des Abzweigs zunächst durch Schalten der Trenner bei geöffnetem Leistungsschalter. Der Abzweig wird letztlich über den Leistungsschalter zu- oder abgeschaltet.

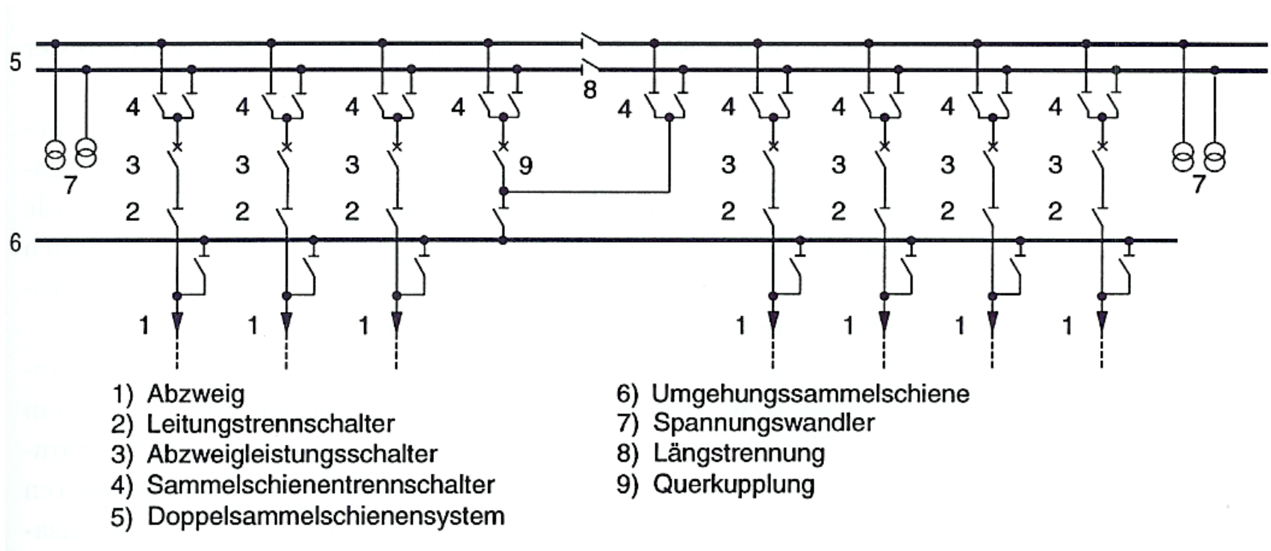


Bild 4.68 Schaltplan einer Höchstspannungsschaltanlage mit Umgehungssammelschiene, Querkupplung und Längstrennung

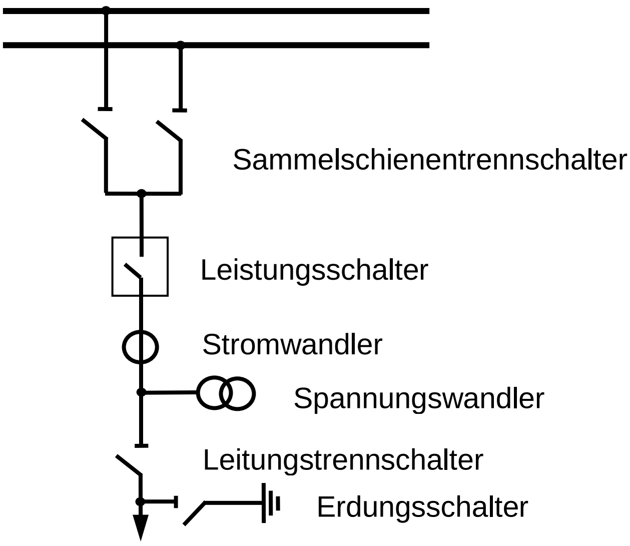


Bild 4.69 Typische Schaltung eines Abzweigs

4.7.2.2 Typische Schaltung einer 380/110-kV-Umspannanlage

Die Speisung einer 380/110-kV-Schaltanlage erfolgt häufig über 2 Freileitungen mit 2 Systemen auf der 380-kV-Seite (***Bild 4.70***).

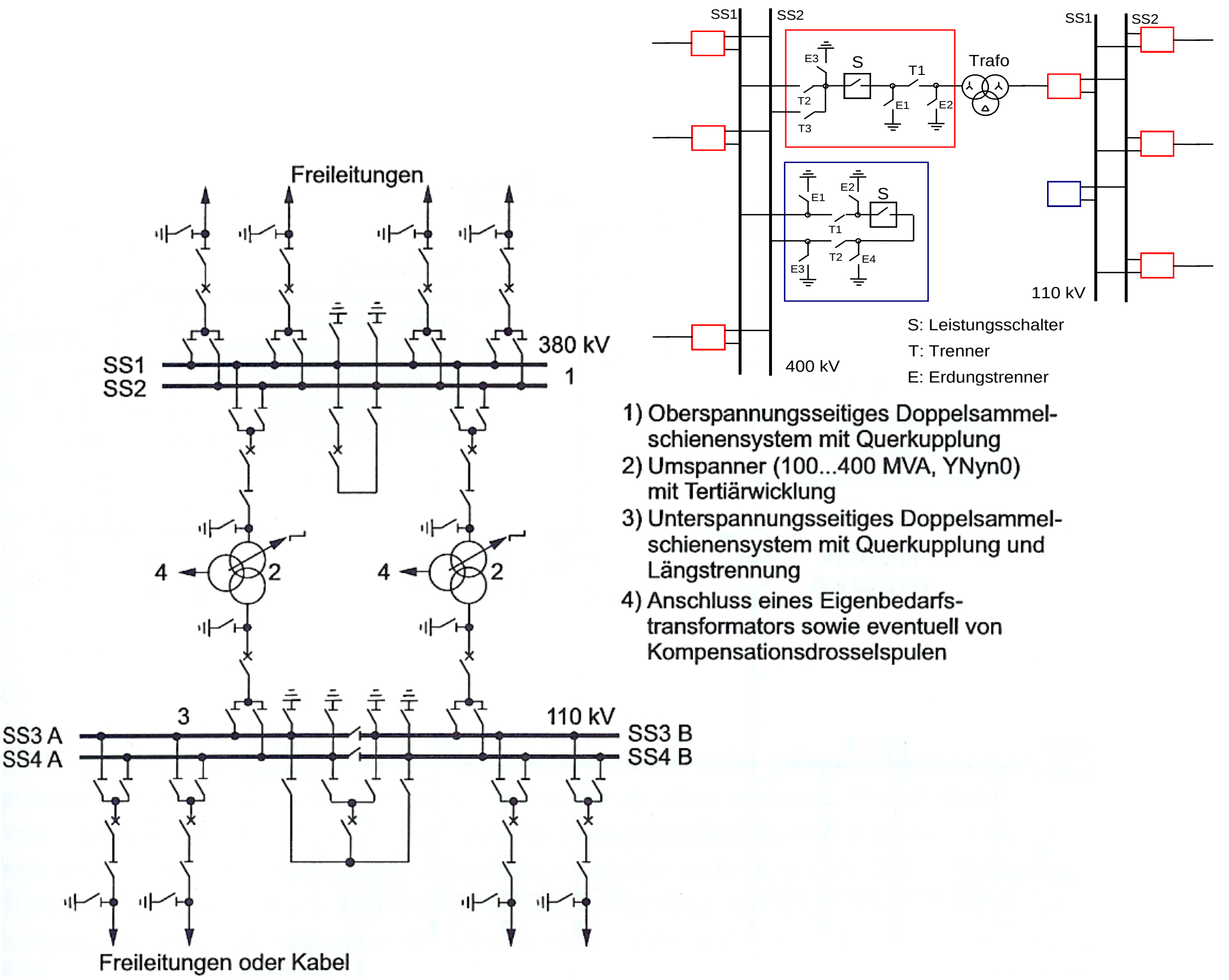


Bild 4.70 Typische Schaltung einer 400/110-kV-Umspannanlage

Die Freileitungen sind dann meist als Viererbündel ausgeführt. Oberspannungsseitig ist die Schaltanlage als Doppelschienensystem mit Querkupplung ausgeführt. Auf der Unterspannungsseite (110 kV) liegt eine Doppelsammelschiene mit Querkupplung und Längstrennung vor. Die Längstrennung bringt hier den Vorteil, dass man einzelne Teilnetze galvanisch trennen kann, was im Höchstspannungsnetz eine geringere Rolle spielt, da das 110-kV-Netz doch sehr ausgedehnt ist. Zwischen den Sammelschienen befinden sich die Netzkuppeltransformatoren (Umspanner). Aus Redundanzgründen sind sie in doppelter Ausführung vorhanden. Netzkuppeltransformatoren haben üblicherweise eine YNyn0-Schaltung zwischen Ober- und Unterspannungswicklung. Zusätzlich ist noch eine Tertiär- oder Ausgleichswicklung vorhanden. Die Tertiärwicklung kann leer laufend sein; sie kann aber auch mit Eigenbedarfstransformatoren oder Kompensationsdrosselspulen beschaltet sein – je nach Anforderungen des Netzes und der Versorgungssituation der Umspannanlage.

4.7.2.3 Typische Schaltung einer Umspannstation (110/10 kV)

Das den 380/110-kV-Umspannanlagen nachfolgende 110-kV-Netz weist üblicherweise bereits eine Ringstruktur auf. Aus dem Ring sollen nun im Fehlerfall einzelne Umspannstationen ausgeblendet werden können, ohne dass dahinter liegende Anlagen nicht mehr versorgt werden können. Um dies zu erreichen werden 110-kV-Schaltanlagen *oberspannungsseitig eingeschleift*. Die *H-Schaltung* hat sich dafür besonders bewährt (***Bild 4.71***).

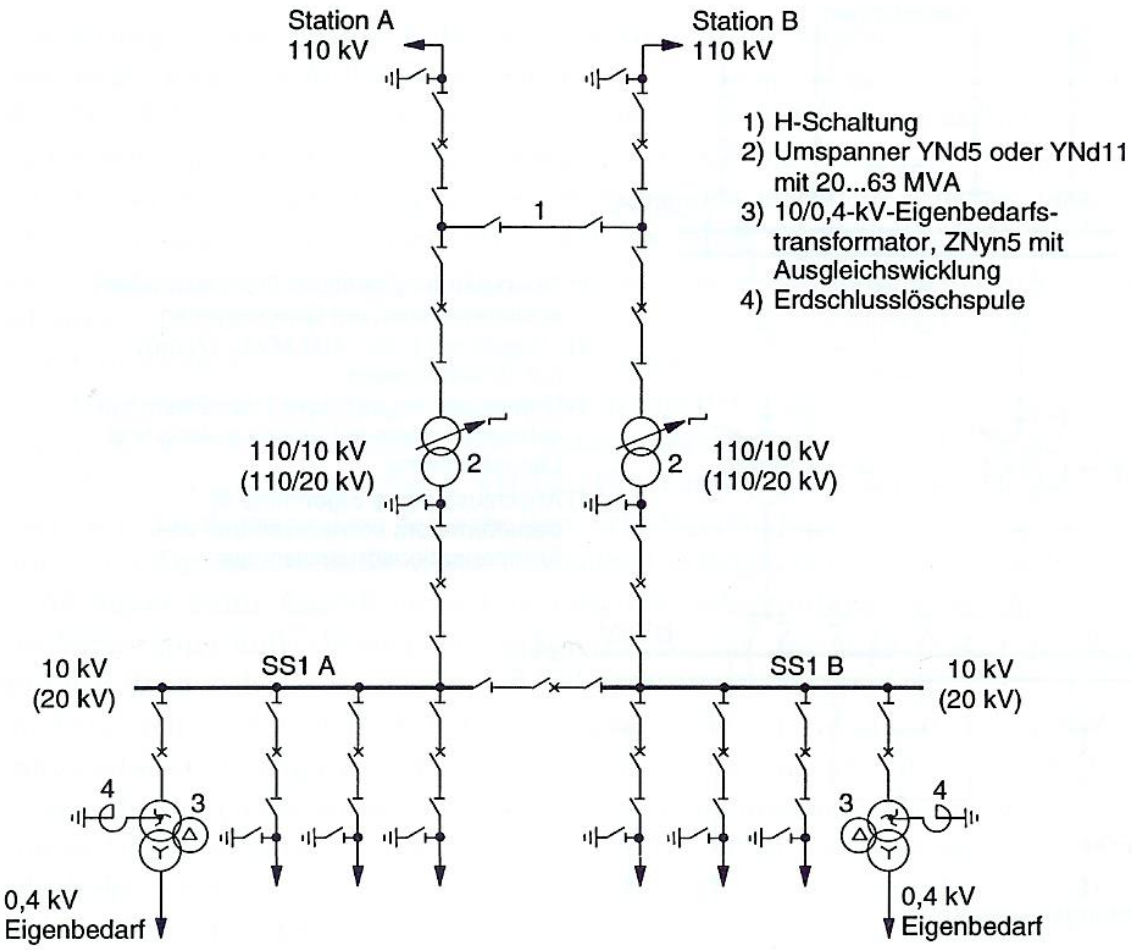


Bild 4.71 Typische Schaltung einer 110-kV-Umspannstation

Auf der Mittelspannungsseite (10 kV oder 20 kV) wird meist ein Einfachsammelschienensystem verwendet. Die Längs-Trennung der Sammelschienen erfolgt hier über einen Leistungsschalter. Aufgrund der bei Mittelspannungsnetzen sehr ausgeprägten Ringstruktur kann mit dieser Ausführung der Sammelschiene auch der sehr seltene Ausfall eines Sammelschienenabschnitts aufgefangen werden.

Die verwendeten 110-kV-Umspanner weisen selten Leistungen über 50 MVA auf. Typisch ist der 40-MVA-Transformator. Wie angedeutet sind mittelspannungsseitig noch Eigenbedarfstransformatoren angeschlossen, ausgeführt in ZNynd5-Schaltung. An den Sternpunkt der Zick-Zack-Wicklung ist meist noch eine Erdschlusslöschspule angeschlossen.

4.7.3 Bauweise von Schaltanlagen

4.7.3.1 Freiluftschaltanlagen

In den 50er- und 60er-Jahren wurden Schaltanlagen überwiegend als Freiluftschaltanlagen ausgeführt. Sie verwenden Luft als Isoliermedium. Vor allem im Höchstspannungsbereich (380 kV) benötigt man bei Luft als Isoliermedium allerdings sehr große Isolierabstände. Der Platzbedarf für eine 400-kV-Schaltanlage ist daher relativ groß. Um den Platzbedarf zu senken, wurden gekapselte gasisolierte Schaltanlagen verwendet, die unter Druck stehendes SF_6-Gas als Isoliermedium verwenden.

Bild 4.72 zeigt einen typischen Aufbau einer Freiluftschaltanlage, die so genannte Diagonalbauweise. Im Eingangsfeld wird die ankommende Freileitung zunächst an einem Portalmast abgespannt. Vor dem Portalmast ist ein kapazitiver Spannungswandler (oder –teiler) angeschlossen. Über die Kapazität wird eine Trägerfrequenz von 35…375 kHz eingekoppelt. Mit dieser Trägerfrequenzübertragung erfolgt eine Nachrichtenübertragung zu benachbarten Umspannwerken über die Freileitungen. Um ein Abfließen der hochfrequenten Signale in die 110-kV-Ebene zu verhindern, wird eine TFH-Drosselspule in den Leitungszug zur 110-kV-Seite hin geschaltet. Die Induktivität der TFH-Drosselspule wirkt zusammen mit den Eigenkapazitäten als Sperrkreis für die Trägerfrequenz.
Nach dem Portalmast beginnt das eigentliche Abzweigfeld mit den folgenden Komponenten:

- Leitungstrenn- und Erdungsschalter
- Kombiwandler (Strom- und Spannungswandler in einem Gehäuse)
- Leistungsschalter
- 2 Sammelschienentrennschalter.

Die einzelnen Betriebsmittel sind durch Leiterseile miteinander verbunden. Die Betriebsmittel stehen auf ca. 2 m hohen Unterkonstruktionen. Dadurch wird die Begehbarkeit der Anlage durch das Personal sichergestellt.

Die Sammelschienen verlaufen rechtwinklig zum Eingangsfeld. Anwendung finden hier Doppel- oder Dreifachsammelschienensysteme. Unter jedem Sammelschienensystem, das aus den 3 Phasen besteht, sind so genannte Scherentrennschalter angeordnet. Durch Hochfahren der Scheren kann die vertikale Trennstrecke geschlossen werden. Dann wird das Eingangsfeld über die Sammelschienen mit dem Ausgangsfeld verbunden. Bei Anlagen mit Nennströmen über 3000 A werden die Sammelschienen in Rohrbauweise ausgeführt.

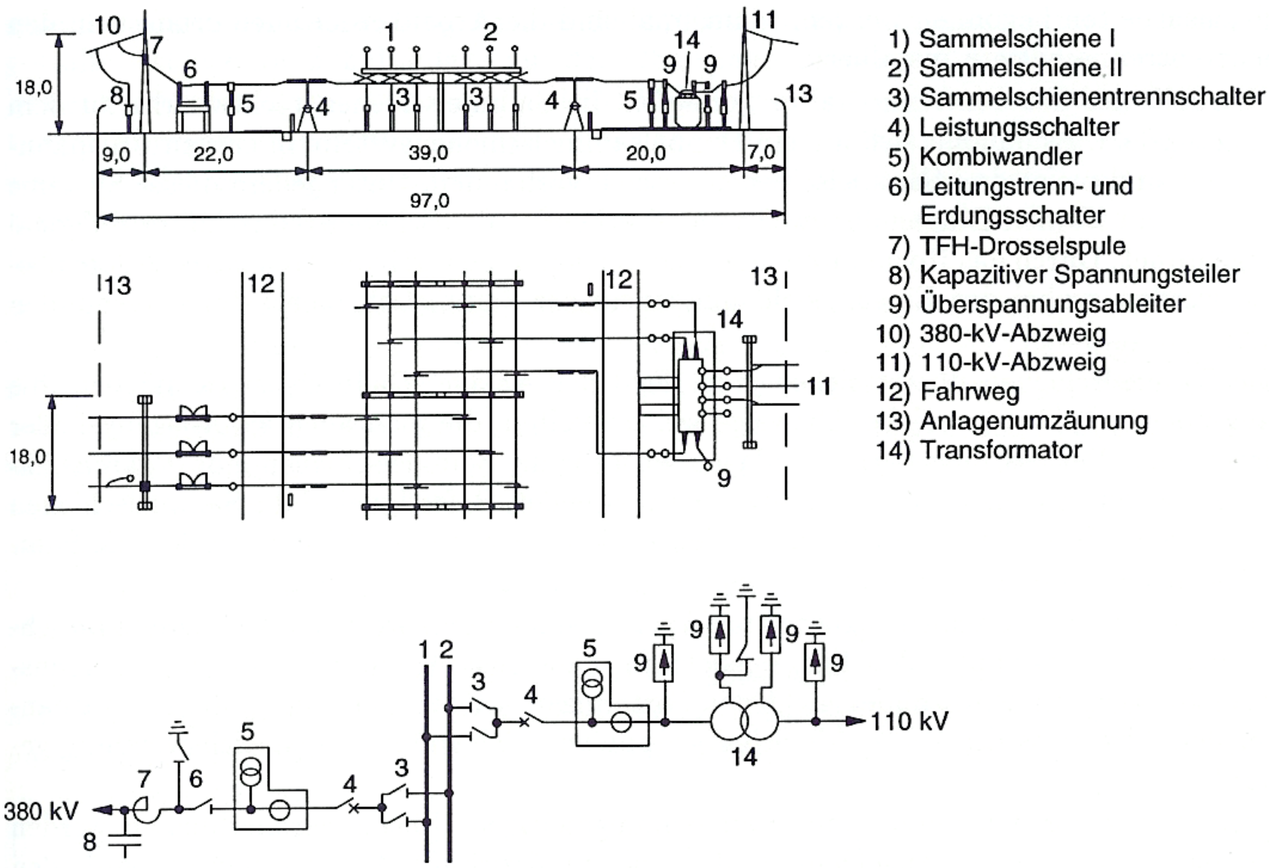


Bild 4.72 Prinzipieller Aufbau einer Freiluftschaltanlage (Diagonalbauweise)

4.7.3.2 Gasisolierte Schaltanlagen (GIS)

Gasisolierte Schaltanlagen besitzen eine Kapselung aus Aluminiumguss oder unmagnetischem Stahl. Der Einsatz ferromagnetischer Werkstoffe (Stahl) hätte erhebliche Wirbelströme in der Hülle und damit eine unzulässig hohe Erwärmung bei entsprechend hohen Energieverlusten zur Folge. Die Kapselung dient dem Einschluß des Isoliergases und schützt die spannungsführenden Bauteile vor direktem Berühren. Die Kapselung ist geerdet.

Als Isoliergas kommt SF_6 (Schwefelhexaflourid) und neuerdings aus Kostengründen und wegen der besseren Umweltverträglichkeit ein Gemisch aus 20 % SF_6 und 80 % Stickstoff zum Einsatz.
SF_6 ist
- unsichtbar
- geruchlos
- ungiftig
- schwerer als Luft.

Bei Lichtbögen, wie sie in Schaltkammern beim Schalten eines elektrischen Stromes vorhanden sind oder im Fehlerfall auch an anderen Stellen der GIS entstehen können, entstehen zu einem geringen Grad Abbauprodukte von SF_6, die umweltschädlich sind. Aus diesem Grund ist man auf das Gasgemisch übergegangen, um den SF_6-Anteil zu reduzieren. Das Isoliergas steht unter einem Druck von 3…6 bar. Bei 6 bar beträgt das Isoliervermögen von SF_6 das 3-…4-fache wie bei Normaldruck und etwa das 10-fache des Isoliervermögens von Luft. Dieser Umstand erlaubt es, bei SF_6 als Isoliergas bei entsprechendem Druck die Baugröße einer Schaltanlage erheblich zu verringern, verglichen mit einer luftisolierten Anlage, da die Isolierabstände unter SF_6 deutlich geringer sein können.

In ***Bild 4.73*** ist der äußere und innere Aufbau von GIS dargestellt.

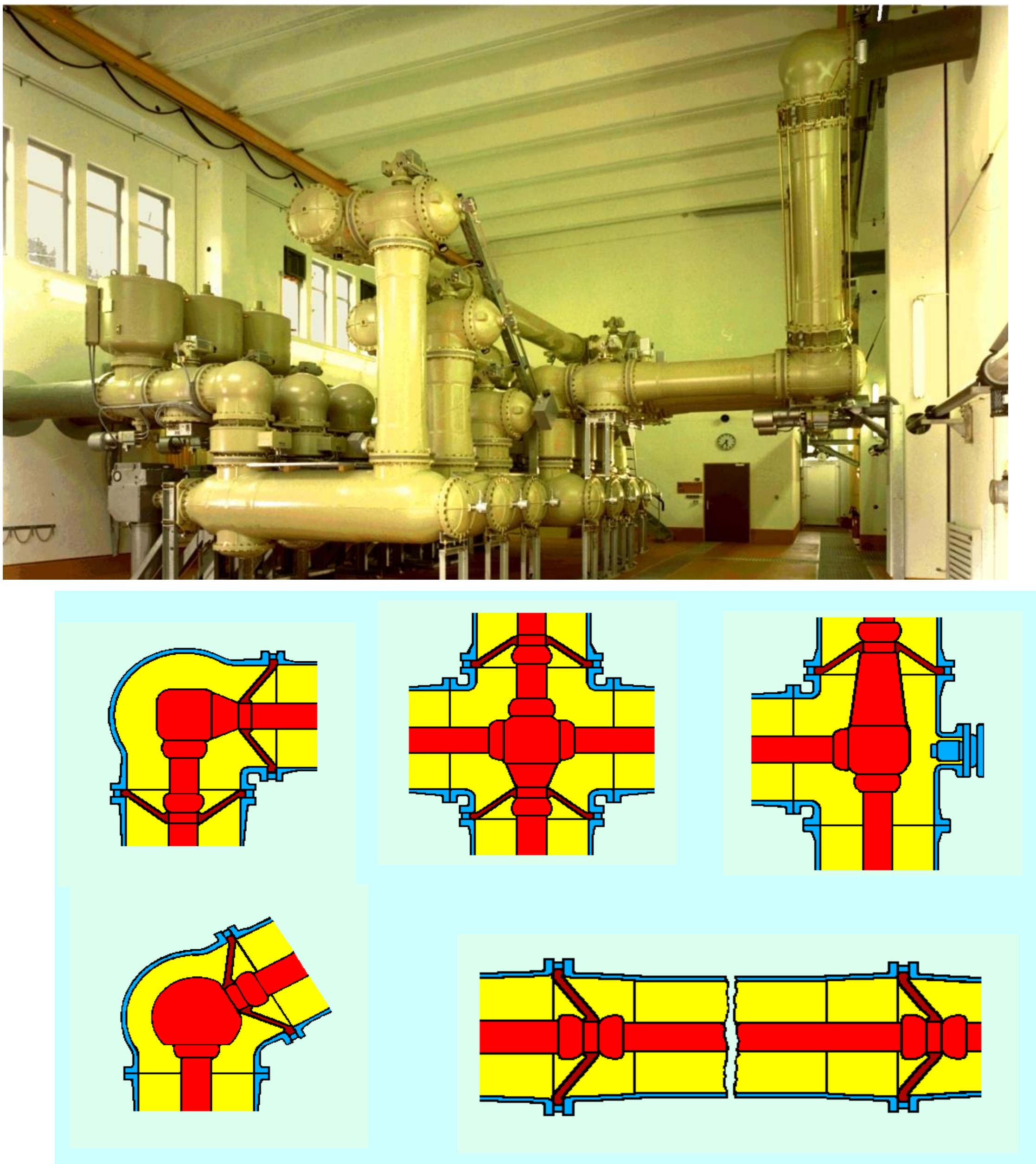


Bild 4.73 Äußerer und innerer Aufbau von GIS (1-polig gekapselt)

Alle Komponenten einer GIS weisen eine baukastenartige Struktur auf, so dass eine Schaltanlage in ihrer Größe (Zahl der Abzweige, Zahl der Sammelschienen, Erdungsschalter, etc.) flexibel den jeweiligen Anforderungen und Kundenwünschen angepasst werden kann.

An den Übergängen zu benachbarten Bauteilen befinden sich Schottstützer aus Gießharz, welche die Kapselung unterbrechen und die gesamte GIS-Anlage in kleinere voneinander unabhängige Gasräume unterteilen.

Die Schottstützer dienen
- konstruktiv als Halterung und Auflage für den (oder die) Innenleiter
- als Sperre für einen im Fehlerfall möglicherweise auftretenden Lichtbogen und
- einer Begrenzung des austretenden Gasvolumens bei einer eventuellen Leckage.

Bei Anlagen unter 110 kV Nennspannung sind die Schottstützer üblicherweise als Scheibenstützer, darüber sind sie wegen der höheren elektrischen Feldstärken als Trichterstützer ausgeführt. Dadurch verlängert sich der Kriechweg und eine Gleitentladung vom Innenleiter entlang dem Schottstützer zur Kapselung wird besser unterdrückt. An den Rändern der Schottstützer befinden sich Dichtungen (O-Ringe), wodurch die Gasdichtheit hergestellt wird.

Bei GIS-Anlagen unterscheidet man die folgenden prinzipiell unterschiedlichen Bauweisen:
- 1-polig gekapselt: jeder Leiter besitzt eine eigene Kapselung
- 3-polig gekapselt: die 3 Leiter besitzen eine gemeinsame Kapselung.

Der hauptsächliche Unterschied liegt in der Ausbildung des elektrischen Feldes und im Materialeinsatz. Die 3-polige Anlage weist einen geringeren Materialeinsatz auf, außerdem ist eine kompaktere Bauweise als bei der 1-phasigen Anlage möglich. Allerdings ist die Struktur des elektrischen Feldes deutlich komplizierter als bei der 1-phasigen Anlage mit ihrem homogenen Radialfeld. Schaltanlagen für Bemessungsspannungen $\geq$ 400 kV sind üblicherweise 1-polig gekapselt ausgeführt. Bei Sammelschienen würden sich aufgrund der höheren Isolationsabstände unhandliche Baugruppen ergeben. Kurzschlüsse können sich bei einer 3-poligen Kapselung auch zwischen den Leitern ausbilden. 1-polige Kurzschlüsse gegen Erde (Erdschlüsse) verursachen i. a. geringere mechanische und thermische Kurzschlusswirkungen.

4.7.4 Leistungsschalter

In Schaltanlagen gibt es die folgenden Hochspannungsschalter:

- Trennschalter: Aufbau einer sichtbaren Trennstrecke, Schalten nur im annähernd stromlosen Zustand möglich
- Lastschalter: Schalten von Betriebsmitteln nur im ungestörten Zustand der Anlage, d. h. eine Abschaltung von Kurzschlussströmen ist nicht möglich
- Leistungsschalter: Schalten von Betriebsmitteln im gestörten und ungestörten Zustand der Anlage, Leistungsschalter sind insbesondere auch für das Abschalten von Kurzschlussströmen bis zu einer bestimmten Stärke ausgelegt

4.7.4.1 Funktionsweise von Leistungsschaltern

Die Funktionen eines Leistungsschalters sind im Einzelnen:
- Führen des Dauerstromes,
- Abschalten des Kurzschlussstromes und
- Herstellen einer Trennstrecke.

Die Funktionsweise des Leistungsschalters sei anhand von ***Bild 4.74*** beschrieben. Im Ersatzschaltbild ***Bild 4.74*****a** sind die Induktivität des Netzes L sowie eine Kapazität berücksichtigt. Dämpfende Einflüsse durch ohmsche Widerstände, die in der Praxis immer auftreten, sind hier der Einfachheit wegen vernachlässigt.

Das Abschalten eines Stromes läuft in 4 Phasen (I – IV) ab:

I.: Schalter S ist noch geschlossen.

II.: Trennen der Kontakte bei $t = t_0$, daraufhin zündet der Lichtbogen

III.: Strom fließt im Lichtbogen bis zum Stromnulldurchgang, Gasströmung kühlt den Lichtbogen

IV.: $t = t_1$: Lichtbogen erlischt, bei intensiver Kühlung zündet Lichtbogen nicht erneut.

Eine Neuzündung erfolgt, wenn

- die Wiederkehrende Spannung (u_e) > Wiederverfestigungskennlinie ist, und wenn
- ein genügend starkes Aufheizen der Gassäule durch den Nachstrom i_N erfolgt.

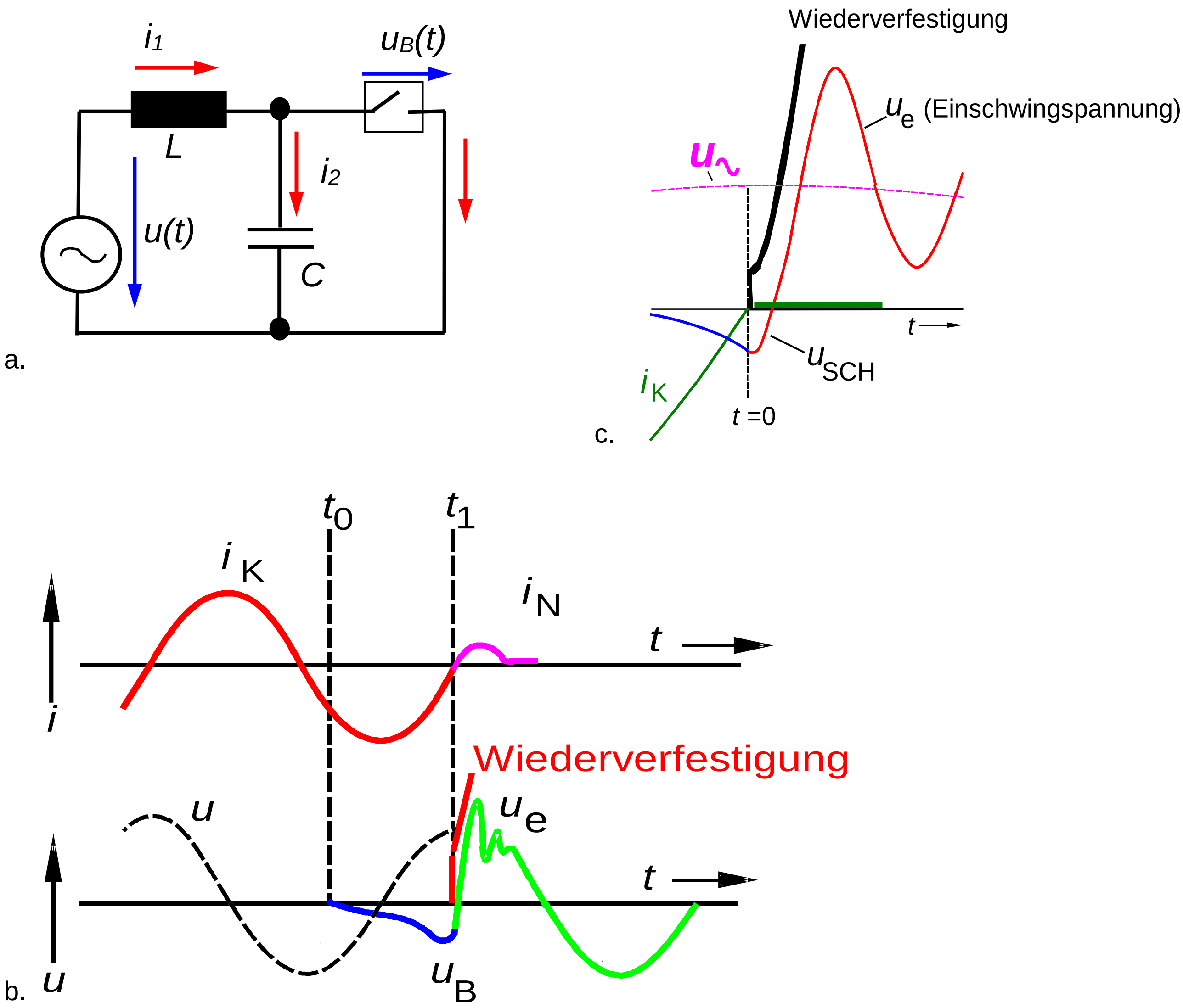


Bild 4.74 Abschalten eines Wechselstromes durch einen Schalter
a. Ersatzschaltbild
b. Zeitliche Verläufe von Strom (i_k), Lichtbogenspannung (u_B) und Spannung über dem geöffneten Schaltkontakt (u_e)
c. Detail (Spannungen und Strom) im Moment der Lichtbogenlöschung

Die Problematik bei der Konstruktion von Leistungsschaltern ist die Lichtbogenlöschung. Die Lichtbogenlöschung muß erfolgen, um den Strom über den Schalter endgültig zum Verschwinden zu bringen. Der Lichtbogen selbst ist ein heißes sehr leitfähiges Plasma. Wird es gekühlt, so steigt der Widerstand an und der Strom durch den Lichtbogen sinkt. Dies hat wiederum eine verringerte Aufheizung zur Folge, so dass der Lichtbogen schließlich zum Erlöschen kommt.

Zur optimalen Kühlung gibt es verschiedene Strategien:

- *Oberflächenvergrößerung durch Verlängerung des Lichtbogens.*
  Dabei wird das Magnetfeld der stromdurchflossenen Kontakte genutzt, um die Gestalt des Lichtbogens entsprechend zu verändern
- *Expansion.*
  Das Gas, das den Lichtbogen umhüllt, kann in Expansionskammern ausweichen und wird dadurch gekühlt.
- *Beblasung.*
  Der Lichtbogen wird durch einen Gasstrom beblasen und dadurch gekühlt.

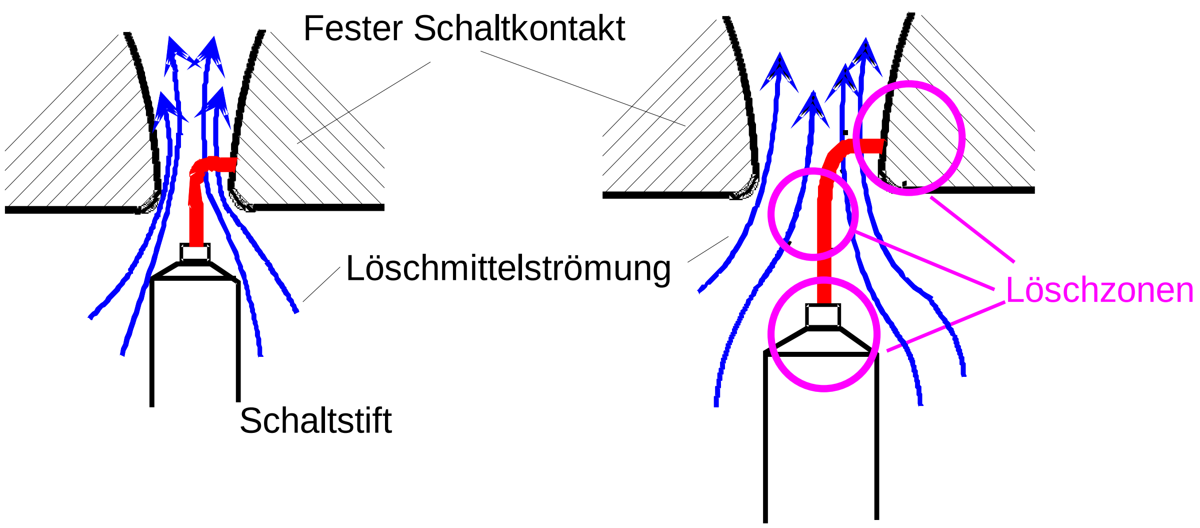


Bild 4.75 Beblasung des Schaltlichtbogens durch einen Gasstrom

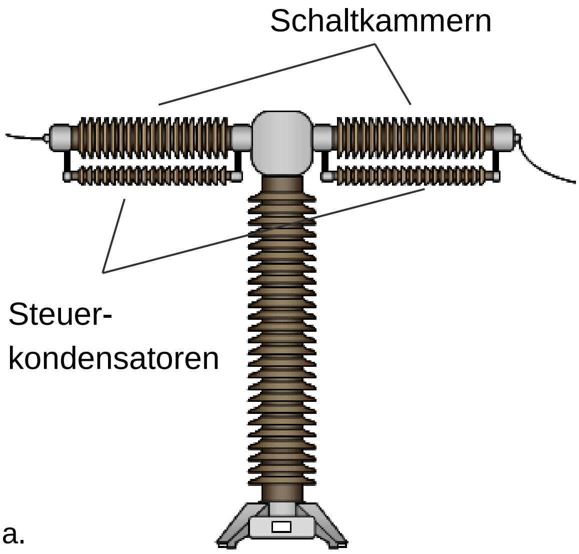
4.7.4.2 Aufbau von Leistungsschaltern

SF_6-Schalter

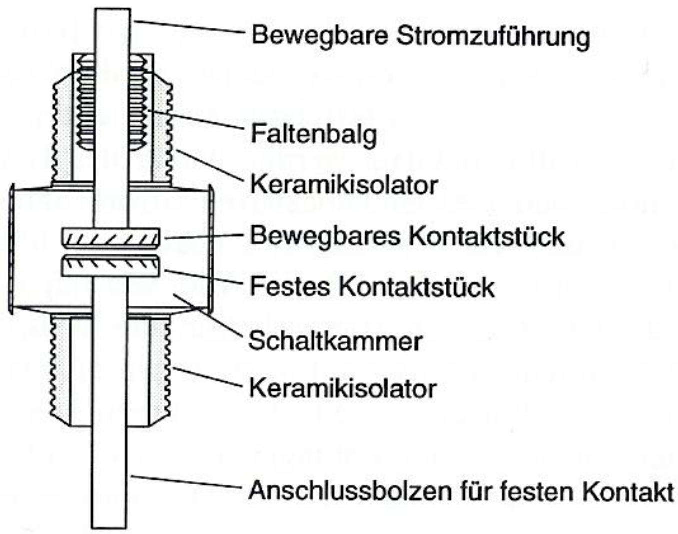
Während man früher Druckluftschalter verwendet hat, so werden heute SF_6-Schalter eingesetzt. SF_6 weist im Gegensatz zu Luft wesentlich bessere Löscheigenschaften auf, so ist die Durchschlagfeldstärke bei Normaldruck um einen Faktor von ca. 2,5 höher als bei Luft. Statt der freien Atmosphäre wird eine geschlossene Schaltkammer verwendet, in der eine SF_6-Füllung enthalten ist, die für die gesamte Lebensdauer des Schalters ausreicht.
Mit SF_6-Schaltern können heute Ströme bis 80 kA geschaltet werden. Im Höchstspannungsbereich ist es notwendig, mehrere Schaltkammern in Reihe zu schalten, so dass über jeder Schaltkammer nur ein Teil der Gesamtspannung abfällt (***Bild 4.76***). Die gleichmäßige Aufteilung der Spannung wird durch so genannte Steuerkondensatoren bewirkt, die parallel zu den einzelnen Kammern geschaltet werden. Steuerkondensatoren weisen häufig Werte um 200 pF auf.

Vakuumschalter

Die Schaltröhre eines Vakuumschalters enthält ein Vakuum von $10^{-8} \ldots 10^{-11}$ bar, wodurch sich sehr gute Isolationseigenschaften und eine schnelle Wiederverfestigung der Schaltstrecke ergeben. Es entsteht ebenfalls ein Lichtbogen der wegen des fehlenden Löschmediums nur aus Partikeln des Kontaktmaterials und freien Elektronen besteht. Bei Strömen über 10 kA bildet der Lichtbogen stehende Fußpunkte aus, die einen starken Abbrand und damit Verschleiß bewirken würden. Um dies zu verhindern, werden die Kontakte schräg geschlitzt. Der sich dadurch ausbildende Stromfluß führt zu einem Magnetfeld, das den Lichtbogen zum Rotieren bringt, wodurch der Abbrand gering bleibt. Seit einiger Zeit existieren auch Varianten, bei denen ein axiales Magnetfeld zu einem großflächigen Fußpunkt führt, dessen Abbrand hinreichend gering ist.



a.



b.

Bild 4.76 Aufbau von Leistungsschaltern
a. SF_6-Schalter
b. Vakuumschalter

4.7.5 Wandler

4.7.5.1 Einsatzgebiete von Wandlern

Strom- und Spannungswandler dienen der möglichst linearen Transformation von hohen Strömen und Spannungen in elektrischen Energienetzen in Niederspannungsgrößen. An die Wandler sind Meßeinrichtungen und Schutzsysteme angeschlossen. Die Anschlußleitungen und die Innenwiderständer dieser Meß- und Schutzsysteme belasten den Wandler. Man bezeichnet diese Belastung als *Bürde*. Die elektrische Leistungsaufnahme liegt üblicherweise im Bereich zwischen 5 VA und 300 VA. Man unterscheidet grundsätzlich zwischen Strom- und Spannungswandlern.

4.7.5.2 Induktiver Spannungswandler

Induktive Spannungswandler arbeiten nach dem transformatorischen Prinzip. Sie stellen also speziell ausgeführte Transformatoren dar (***Bild 4.77***). Bei Spannungen bis zu typischerweise

300 kV erfolgt die Transformation in einer Stufe. Auf einem geschlossenen Eisenkern sitzt ein Wickel, der Ober- und Unterspannungswicklung enthält. Die Hochspannung wird dabei von oben der Hochspannungswicklung über einen Schirmring zugeführt, um Feldkonzentrationen zu vermeiden. Die Hochspannungszuführung und der Wickel sind gegen den geerdeten Kern und gegen das geerdete Gehäuse isoliert.

Bei Spannnungswandlern mit sehr großen Nennspannungen ab ca. 300 kV erfolgt die Transformation der Hoch- in eine Niederspannung 2-stufig. Die beiden Hochspannungswicklungen stellen den ersten Transformator dar, der zweite Transformator wird durch die Hoch- und Niederspannungswicklung auf dem unteren Kernschenkel gebildet.

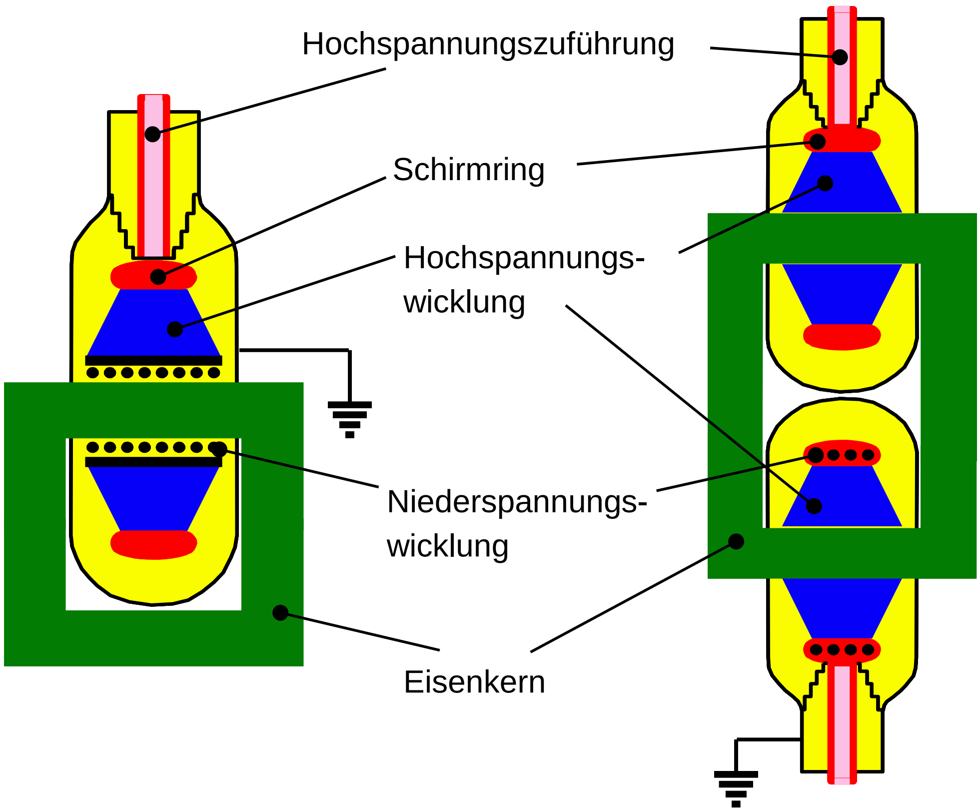
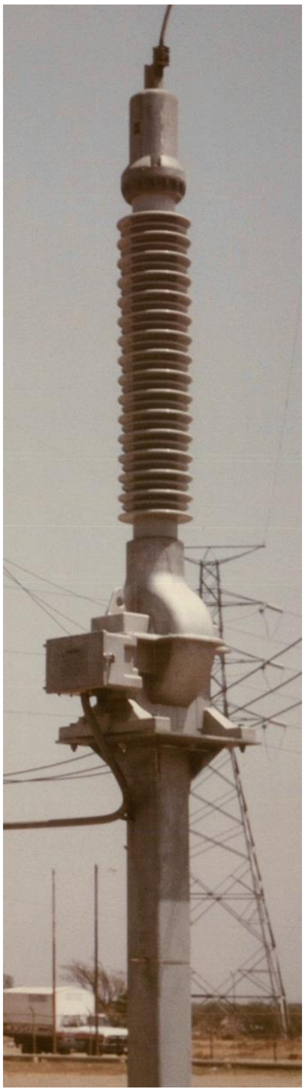


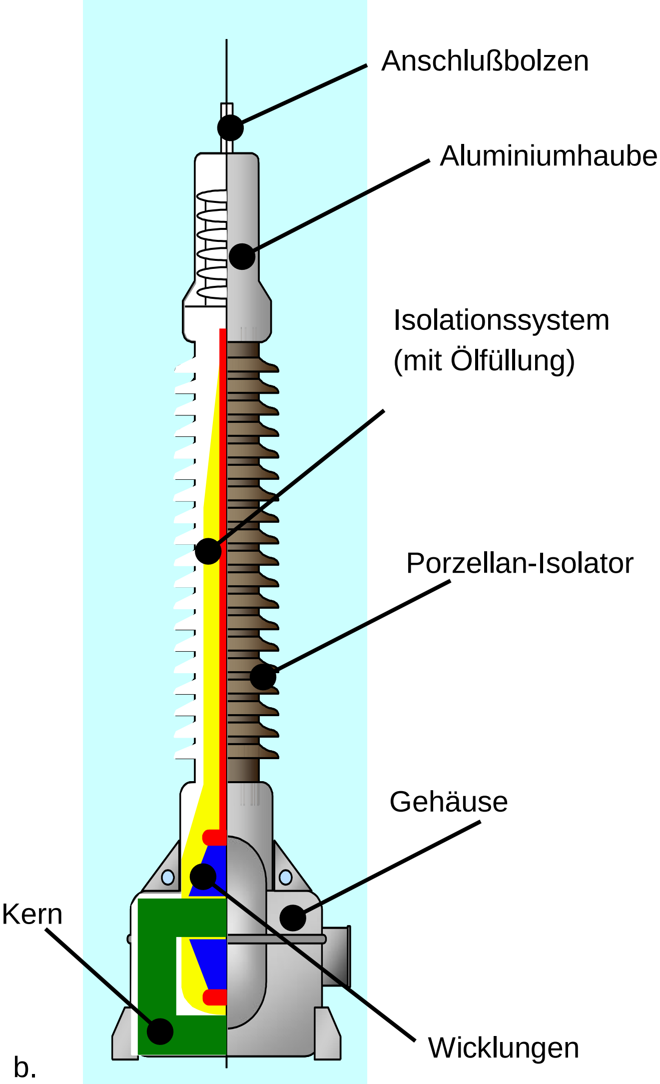
Bild 4.77 Prinzipieller Aufbau von Spannungswandlern (links: bis typ. 300 kV, rechts: ab 300 kV)

Bild 4.78**a** zeigt einen 123-kV-Wandler. Deutlich erkennbar ist das Podest, auf dem der Wandler in der Anlage steht, um die Begehbarkeit der Anlage herzustellen. Erkennbar ist ebenfalls der Wandleranschlußkasten. In ***Bild 4.78*****b** ist die Hochspannungszuführung gezeigt. Der Anschlußbolzen am Kopf der Durchführung führt auf den Schirmring und damit auf die Wicklung des Wandlers. Zwischen Kopf des Wandlers und geerdetem Gehäuse befindet sich eine kapazitive Absteuerung, vom Aufbau vergleichbar mit einer Kondensatordurchführung.

a.



b.



c.

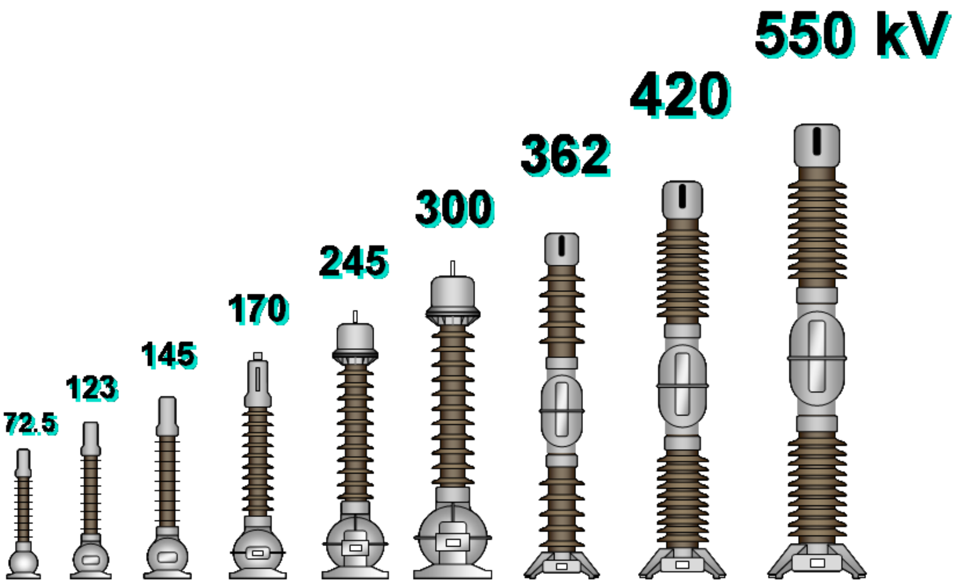
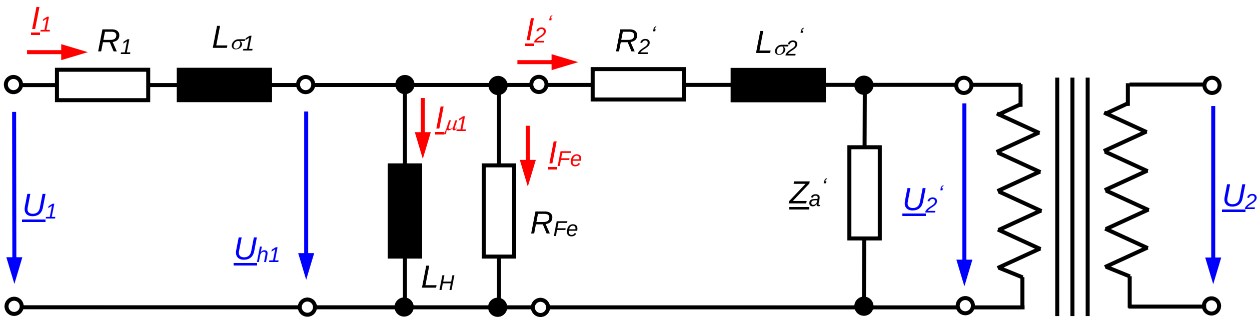
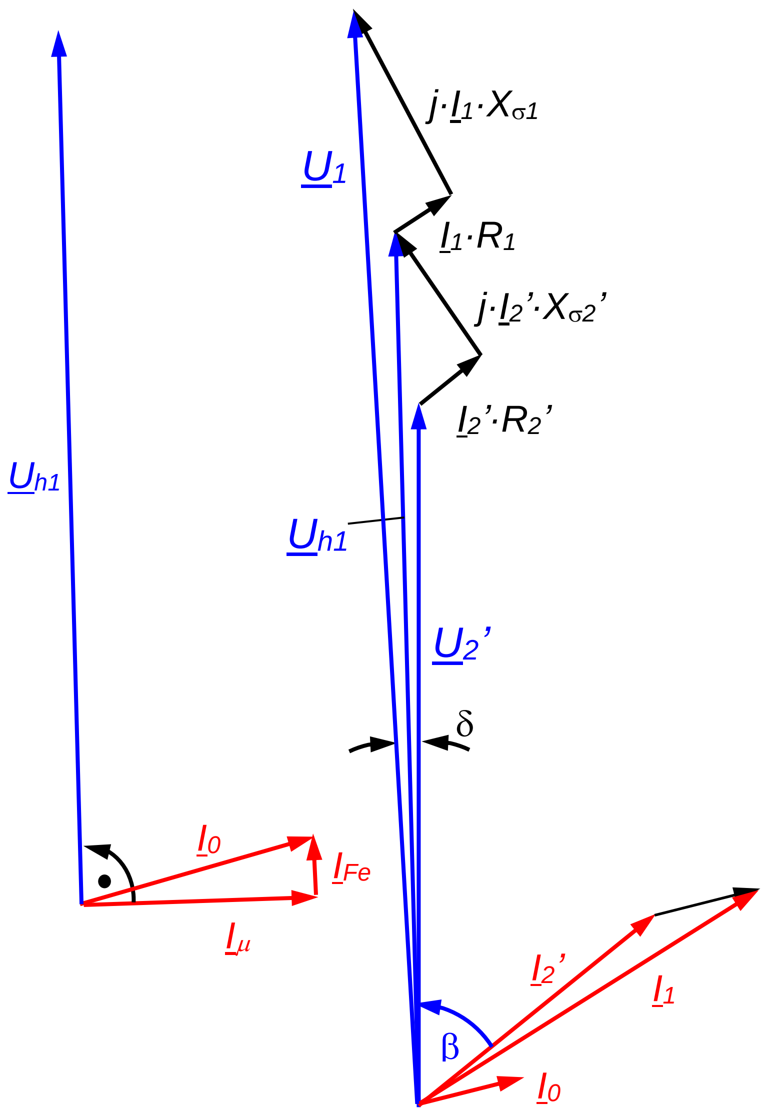


Bild 4.78 a. 123-kV-Spannungswandler
b. Prinzipieller Aufbau von Spannungswandlern (< 300 kV)
c. Baugröße von Spannungswandlern in Anhängigkeit der Nennspannung

Bild 4.79 zeigt das Ersatzschaltbild und das Zeigerdiagramm eines Spannungswandlers. Die Abschlußimpedanz $\underline{Z}_a$ ist sehr hochohmig und belastet den Transformator nur wenig. Die Spannungsabfälle an den Längswiderständen R_1 und R_2 und den Längsreaktanzen $X_{\sigma 1}$ und $X_{\sigma 2}'$ sind im Vergleich zu den Spannungen $\underline{U}_2'$ und $\underline{U}_1$ nur gering, bewirken jedoch einen Winkelfehler δ zwischen $\underline{U}_2'$ und $\underline{U}_1$ sowie einen Amplitudenfehler F.



a.



b.

Bild 4.79 Spannungswandler
a. Ersatzschaltung
b. Zeigerdiagramm

Konstruktion des Zeigerdiagramms:

- Phasenverschiebung β zwischen $\underline{U}_2'$ und $\underline{I}_2'$ ist durch die Bürde $\underline{Z}_a'$ gegeben.
- Die Spannung $\underline{U}_{h1}$ ergibt sich durch geometrische Addition der Spannungsabfälle an R_2' und $X_{\sigma 2}'$ aufgrund des Stromes $\underline{I}_2'$ und der Spannung $\underline{U}_2$.
- Der Magnetisierungsstrom $\underline{I}_\mu$ eilt der Spannung $\underline{U}_{h1}$ um 90º nach, der Strom $\underline{I}_{Fe}$ ist in Phase zu $\underline{U}_{h1}$. Aus der geometrischen Addition von ergibt sich dann zum Leerlaufstrom $\underline{I}_0$.
- Der Leerlaufstrom $\underline{I}_0$ und der Strom $\underline{I}_2'$ durch die Bürde überlagern sich zum Primärstrom $\underline{I}_1$.
- Die Spannung $\underline{U}_1$ ergibt sich durch geometrische Addition der Spannungsabfälle an R_1 und $X_{\sigma 1}$ aufgrund des Stromes $\underline{I}_1$ und der Spannung $\underline{U}_{h1}$.

4.7.5.3 Kapazitiver Spannungswandler

Kapazitive Spannungswandler stellen eine Kombination aus kapazitiver Spannungsteilung und transformatorischer Spannungsteilung dar. Der Hauptvorteil des kapazitiven Spannungswandlers (Kap-Wandlers) liegt in dem im Vergleich zum induktiven Spannungswandler geringeren Isolationsaufwand. Beim Kap-Wandler steigt der Isolationsaufwand mit der Spannung etwa linear, bei induktiven Spannungswandler dagegen etwa quadratisch. Aus Kostengründen erfolgt die kapazitive Spannungsteilung auf etwa 10…30 kV. Der Transformator ist durch eine Bürde $\underline{Z}_B = R_B + j \cdot X_B$ belastet. Die Drossel dient der Phasendrehung der Spannung $\underline{U}_3$, so daß bei einer bestimmten Bürde die Spannung $\underline{U}_3$ in Phase zur Spannung $\underline{U}_0$ liegt.

***Bild 4.80*a** zeigt die Schaltung des kapazitiven Spannungswandlers, in ***Bild 4.80*b** ist das Ersatzschaltbild dargestellt. R_B' und L_B' sind die auf die Primärseite übersetzten Widerstands- und Induktivitätswerte der Bürde. $\underline{U}_3'$ ist die auf die Primärseite übersetzte Spannung an der Bürde. Der primärseitige Widerstand R_1 und die primärseitige Streuinduktivität $L_{\sigma 1}$, sowie die auf die Primärseite übersetzten sekundarseitigen Größen R_2 und $L_{\sigma 2}$ des Transformators kann man sich in den Widerstand R_D und die Induktivität L_D der Kompensationsdrossel integriert denken. Für die weiteren Betrachtungen können die Hauptinduktivität L_H und der Verlustwiderstand des Eisenkerns R_{Fe} vernachlässigt werden. Für eine exakte Fehlerbetrachtung ist diese Vernachlässigung möglicherweise nicht zulässig.

Die Schaltung in ***Bild 4.80*b** läßt sich durch 2-fache Anwendung der Beziehungen für einen Spannungsteiler analysieren:

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R_B' + j\omega L_B'}{(R_B' + R_D) + j\omega(L_B' + L_D)} \quad . \qquad (5.270)$$

und

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \frac{\Re}{\Re + \frac{1}{j\omega C_1}} = \frac{j\omega C_1 \cdot \Re}{1 + j\omega C_1 \cdot \Re} = \frac{j\omega C_1}{\frac{1}{\Re} + j\omega C_1}$$

mit . (5.271)

$$\Re = \frac{\left[(R_B' + R_D) + j\omega(L_B' + L_D)\right] \cdot \frac{1}{j\omega C_2}}{\frac{1}{j\omega C_2} + (R_B' + R_D) + j\omega(L_B' + L_D)} = \frac{(R_B' + R_D) + j\omega(L_B' + L_D)}{1 + j\omega C_2 \cdot \left[(R_B' + R_D) + j\omega(L_B' + L_D)\right]}$$

Für das Spannungsverhältnis zwischen Hochspannung $\underline{U}_0$ und Spannung an der Bürde $\underline{U}_3'$ gilt:

$$\frac{\underline{U}_3'}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}\cdot\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_0} = \frac{R_B'+j\omega L_B'}{(R_B'+R_D)+j\omega(L_B'+L_D)}\cdot\frac{j\omega C_1}{\frac{1}{\Re}+j\omega C_1} \quad . \qquad (5.272)$$

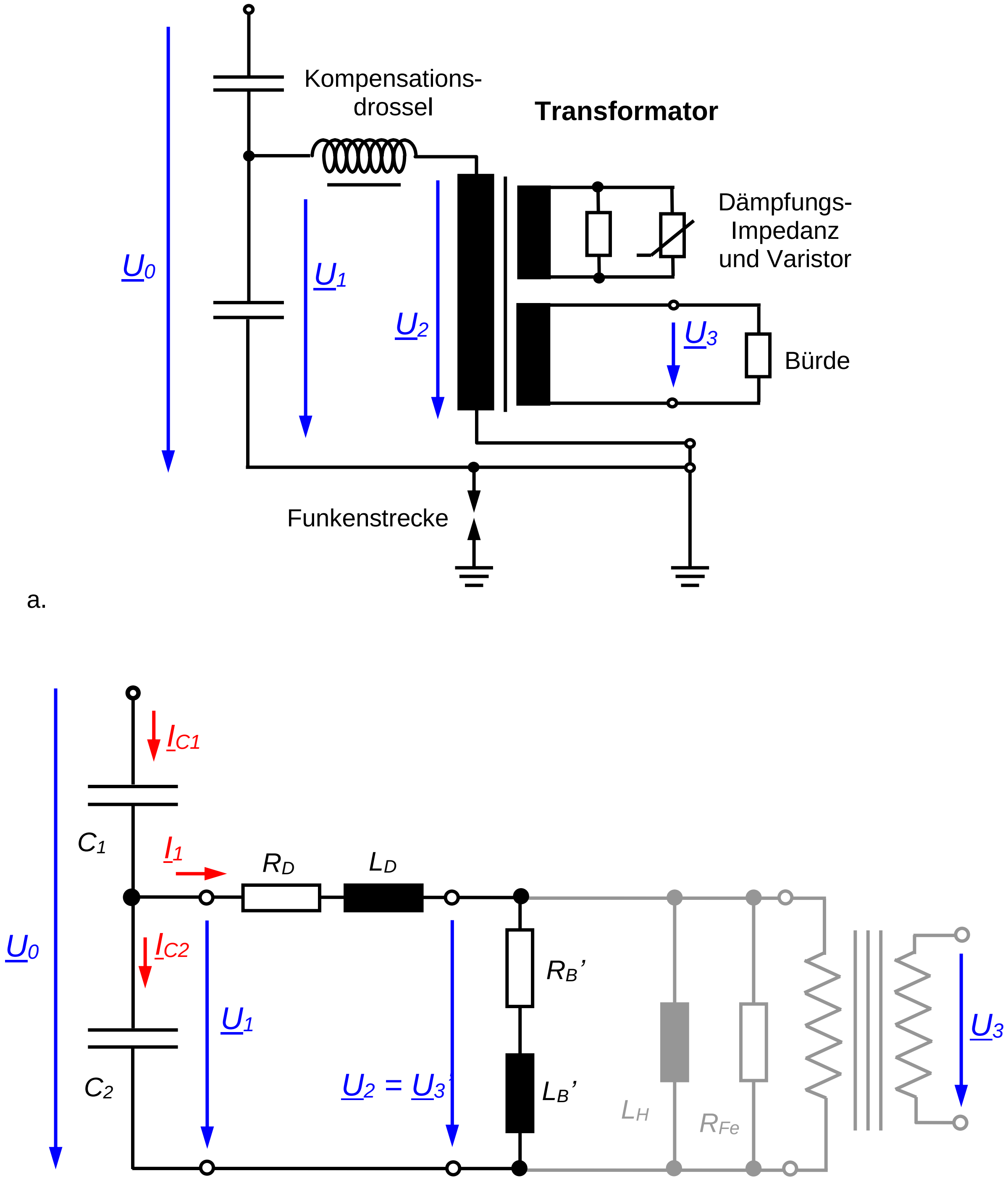


Bild 4.80 Kapazitiver Spannungswandler
a. Schaltung
b. Ersatzschaltbild (Hauptinduktivität und idealer Übertrager vernachlässigt)

$$\frac{\underline{U}_3^{'}}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \frac{R_B^{'} + j\omega L_B^{'}}{(R_B^{'} + R_D) + j\omega(L_B^{'} + L_D)} \cdot \frac{j\omega C_1}{\frac{1}{\Re} + j\omega C_1}$$

$$= \frac{R_B^{'} + j\omega L_B^{'}}{(R_B^{'} + R_D) + j\omega(L_B^{'} + L_D)} \cdot \frac{j\omega C_1}{\frac{1 + j\omega C_2 \cdot \left[(R_B^{'} + R_D) + j\omega(L_B^{'} + L_D)\right]}{(R_B^{'} + R_D) + j\omega(L_B^{'} + L_D)} + j\omega C_1} \quad . \qquad (5.273)$$

$$= \frac{\left(R_B^{'} + j\omega L_B^{'}\right) \cdot j\omega C_1}{1 + j\omega(C_1 + C_2) \cdot \left[(R_B^{'} + R_D) + j\omega(L_B^{'} + L_D)\right]}$$

$$= \frac{\left(R_B^{'} + j\omega L_B^{'}\right) \cdot j\omega C_1}{1 - \omega^2 (C_1 + C_2)(L_B^{'} + L_D) + j\omega(C_1 + C_2) \cdot (R_B^{'} + R_D)}$$

Wenn nun als Bürde ein ohmscher Widerstand verwendet wird, d. h.

$$Z_B^{'} = R_B^{'} \qquad \text{und} \qquad L_B^{'} = 0 \quad , \qquad (5.274)$$

und die Abgleichbedingung

$$L_D = \frac{1}{\omega^2 (C_1 + C_2)} = \frac{1}{4\pi^2 \cdot f_0^2 \cdot (C_1 + C_2)} \quad . \qquad (5.275)$$

erfüllt ist, so ergibt sich für das Spannungsverhältnis

$$\frac{\underline{U}_3^{'}}{\underline{U}_0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_0} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{R_B^{'}}{R_B^{'} + R_D} \overset{R_D \ll R_B^{'}}{\approx} \frac{C_1}{C_1 + C_2} \quad , \qquad (5.276)$$

d. h. eine lineare Beziehung. Die Spannungen $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_0$ sind also in Phase, es ergibt sich daher kein Winkelfehler. Der kapazitive Spannungswandler muß also mit den Teilerkapazitäten C_1 und C_2 auf die jeweilige Netzfrequenz f_0 abgeglichen werden. Zur Bestimmung des exakten Teilerverhältnisses, das auch von den primär- und sekundärseitigen Widerständen R_1 und R_2' des Transformators sowie vom Widerstand der Kompensationsdrossel abhängt, muß eine Kalibrierung bei Netzfrequenz f_0 erfolgen.

Typische Werte für die Gesamtkapazität $C_1 \parallel C_2$ liegen bei 4400 pF, die Spannung an der Bürde beträgt 100/√3 V, bei einer Oberspannung von 110/√3 kV.

4.7.5.4 Induktiver Stromwandler

Stromwandler stellen – wie Spannungswandler – ebenfalls Transformatoren dar (***Bild 4.81***). Der Stromwandler wird primärseitig direkt in den Hauptstrompfad geschleift. Der Primärleiter befindet sich auf Hochspannungspotenzial. Er wird durch einen Leiter gebildet, der von einem bewickelten Ringkern umgeben ist. In der Sekundärwicklung entsteht dann ein zum Leiterstrom proportionaler Strom. Der Primärleiter ist vom geerdeten Eisenkern und der Sekundärwicklung durch ein Isolationssystem isoliert. In ***Bild 4.81*c** sind die Baugrößen von Kopfstromwandlern für unterschiedliche Nennspannungen dargestellt.

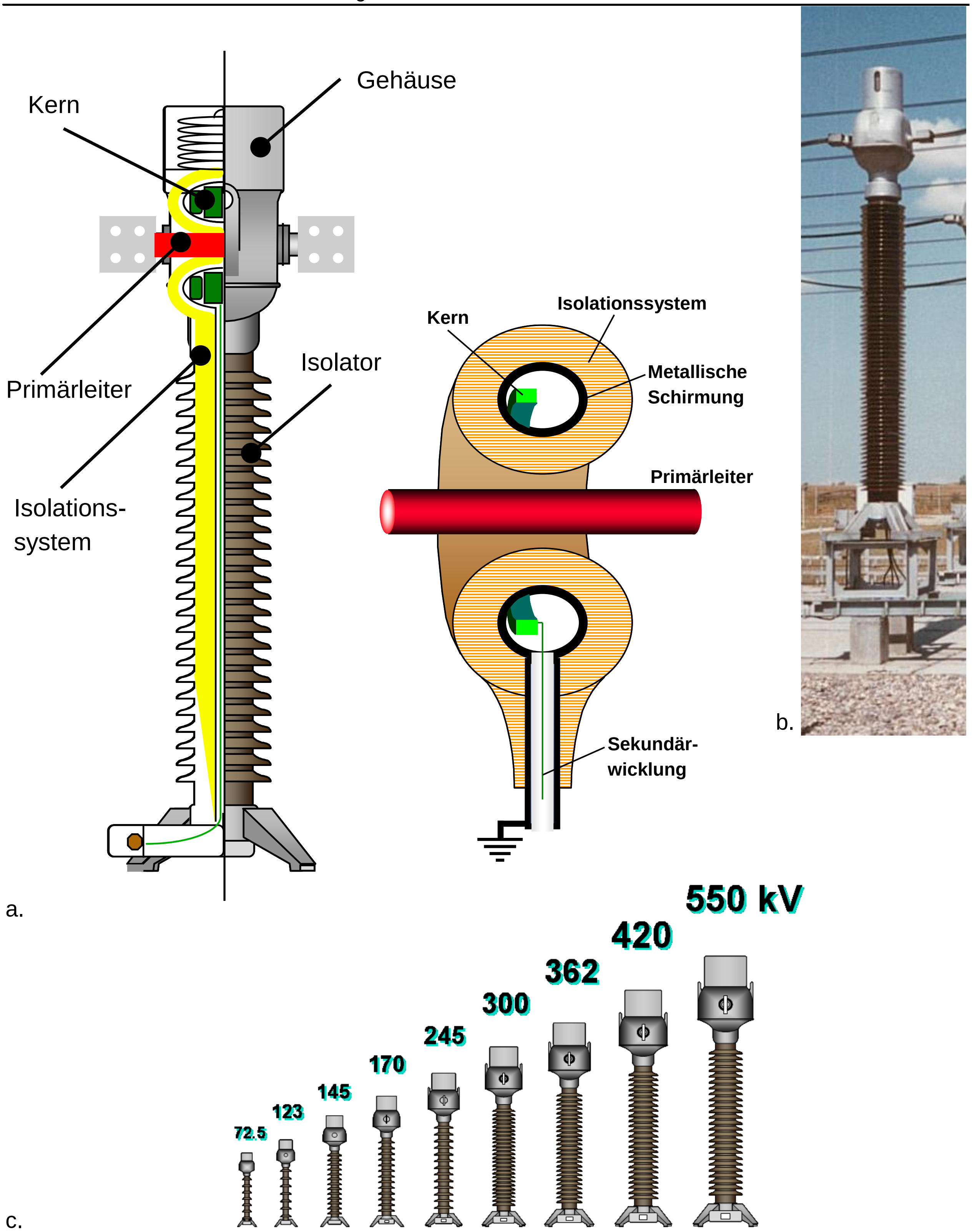


Bild 4.81 Kopfstromwandler

a. Konstruktiver Aufbau eines Kopfstromwandlers
b. Kopfstromwandler im 400-kV-Netz (U_N = 420 kV)
c. Baugröße von Kopfstromwandlern in Anhängigkeit der Nennspannung

Stromwandler sind niederohmig bebürdet. Beim Auftrennen der Bürde würde der Netzstrom durch die Hauptinduktivität fließen und damit am Wandler einen hohen Spannungsabfall erzeugen. Für derartig hohe Klemmenspannungen sind Wandler üblicherweise nicht ausgelegt; entsprechende Zerstörungen wären die Folge. Bei einem Stromwandler in Betrieb dürfen daher die Sekundärklemmen nie offen sein.

Gegenüber dem Transformator kann bei der theoretischen Betrachtung eines Stromwandlers die primäre Impedanz bestehend aus Wicklungswiderstand und Streuinduktivität entfallen, da der Primärstrom als ein vom Netz eingeprägter Strom betrachtet werden kann. Bei Stromwandlern mit gleichmäßig bewickeltem Ringkern und konzentrischem primären Innenleiter kann die sekundäre Streureaktanz ebenfalls mit guter Näherung vernachlässigt werden. Auf diese Weise gelangt man zu dem Ersatzschaltbild ***Bild 4.82*a**.

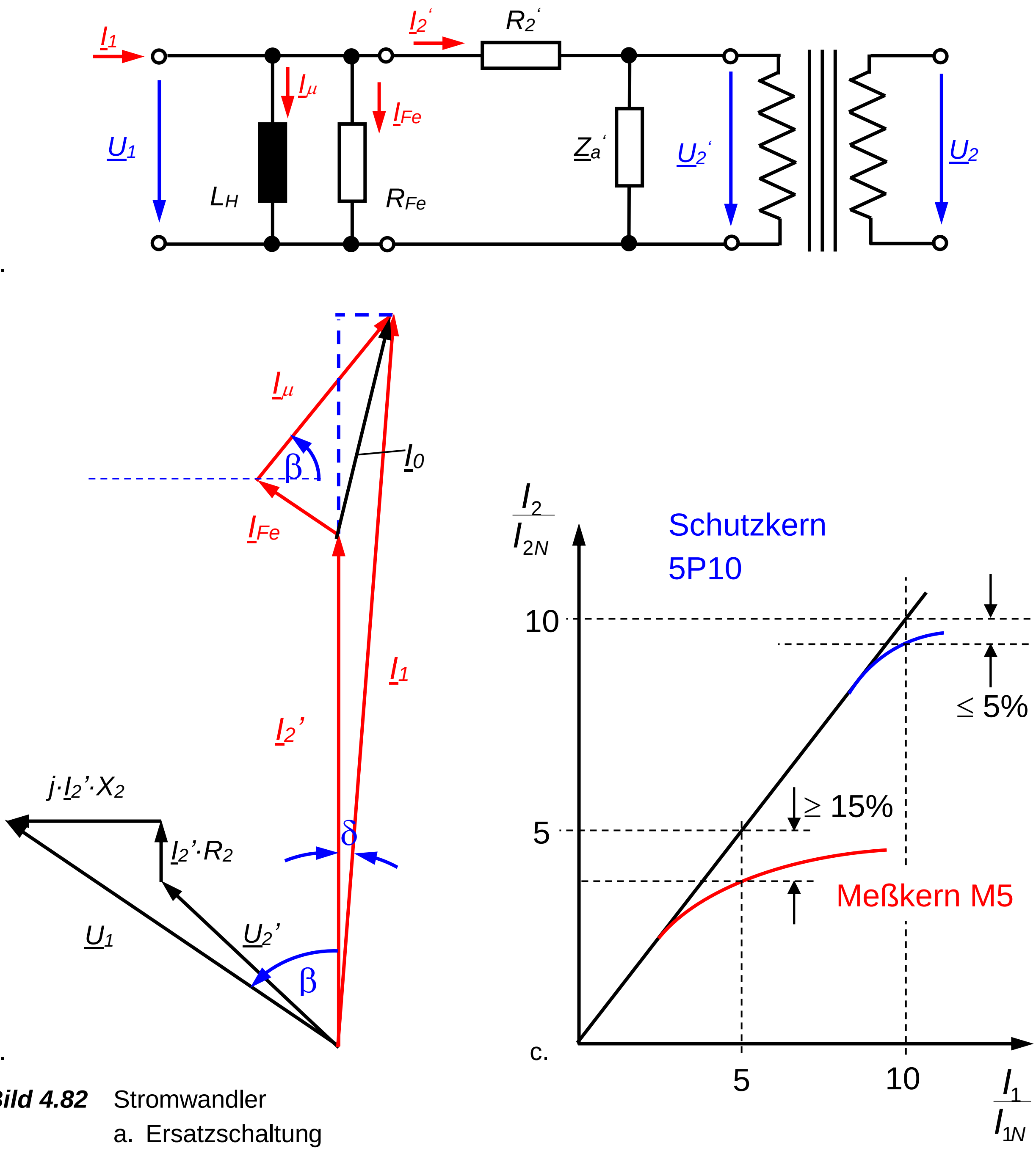


Bild 4.82 Stromwandler
a. Ersatzschaltung
b. Zeigerdiagramm
c. Überstromverhalten von Stromwandlern bei Belastung mit Nennbürde

Durch den Leerlaufstrom $\underline{I}_0$, der sich aus dem Magnetisierungsstrom $\underline{I}_\mu$ und den Wirbelstrom- und Hystereseverlusten im Eisenkern $\underline{I}_{Fe}$ zusammensetzt, entsteht ein Amplitudenfehler A und ein Winkelfehler δ bei der Strommessung (***Bild 4.82*b**).

Man unterscheidet zwischen Meßkernen und Schutzkernen. Meßkerne haben die Aufgabe, die an den Stromwandler angeschlossenen empfindlichen Meßsysteme auch bei großen Überströmen oder Kurzschlußströmen zu schützen. Sie müssen daher bei einem bestimmten Strom, der sich aus dem Nennüberstromfaktor (M5 oder M10) multipliziert mit dem Nennstrom ergibt, eine Abweichung von > 15 % aufweisen (***Bild 4.82*c**). Schutzkerne dürfen hingegen bei Überströmen nur begrenzte Übersetzungsfehler aufweisen, um die gewünschte Schutzfunktion von Schutzgeräten sicherzustellen.

4.7.5.5 Kombiwandler

Aus Platzgründen werden bei Freiluftausführungen häufig Strom- und Spannungswandler kombiniert. Diese Bauart bezeichnet man als Kombiwandler. Im oberen Teil ist – wie beim Kopfstromwandler – der Stromwandler untergebracht, während der Spannungswandler im Fuß des Kombiwandlers eingebaut ist (***Bild 4.83***). Über zwei voneinander getrennte Isoliersysteme wird einmal die Hochspannung dem Spannungswandler zugeführt, zum anderen wird die Niederspannungswicklung vom Kopf des Stromwandlers nach unten geführt.

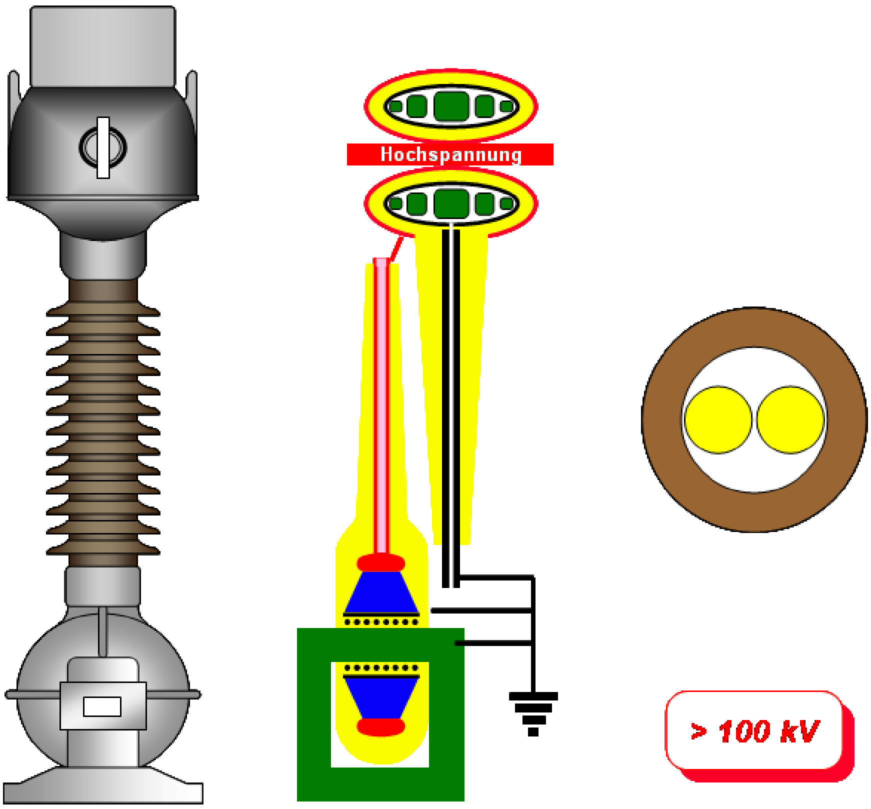


Bild 4.83 Kombiwandler: Kombination aus Spannungs- und Stromwandler, gebräuchlich bei Spannungen > 100 kV

5 Weiterführende Literatur

[1] R. Unbehauen
"Grundlagen der Elektrotechnik 1", 5. Auflage
Springer Verlag, 2006, ISBN 3-540-66017-8

[2] R. Unbehauen
"Grundlagen der Elektrotechnik 2", 5. Auflage
Springer Verlag, 2006, ISBN 3-540-66018-6

[3] R. Süße (Hrsg.)
"Theoretische Grundlagen der Elektrotechnik 1", 1. Auflage
Teubner Verlag, 2005, ISBN 3-519-00524-7

[4] K. Küpfmüller, W. Mathis, A. Reibiger
"Theoretische Elektrotechnik", 17. Auflage
Springer Verlag, 2006, ISBN 3-540-29290-X

[5] A. J. Schwab
"Elektroenergiesysteme", 1. Auflage
Springer Verlag, 2006, ISBN 3-540-29664-6

[6] D. Oeding, B. R. Oswald
"Elektrische Kraftwerke und Netze", 6. Auflage
Springer Verlag, 2004, ISBN 3-540-00863-2

[7] E. Spring
"Elektrische Energienetze"
VDE Verlag GmbH, 2003, ISBN 3-8007-2523-1

[8] P. Kundur
"Power System Stability and Control"
McGraw-Hill Inc., 1994, ISBN 0-07-035958-X

[9] A. J. Schwab
"Begriffswelt der Feldtheorie", 6. Auflage
Springer Verlag, 2002, ISBN 3-540-42018-5

[10] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, H. Mühlig
"Taschenbuch der Mathematik", 5. Auflage
Verlag Harry Deutsch, 2001, ISBN 3-8171-2015-X

[11] L. Papula
"Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1-3", 4. Auflage
Verlag Vieweg, 2001, ISBN 3-528-34937-9

[13] E. Ivers-Tiffee, W. von Münch
"Werkstoffe der Elektrotechnik", 10. Auflage
Teubner Verlag, 2007, ISBN 978-3-8351-0052-7

Anhang

A.I Grundlagen und Regeln der komplexen Rechnung

Die Berechnung von Netzwerken der Energietechnik im stationären, d. h. eingeschwungenen Zustand erfolgt vorzugsweise mit Hilfe komplexer Größen. Neben einer Vereinfachung der Rechnung trägt ihre Darstellung in Zeigerdiagrammen zur Veranschaulichung des Betriebsverhaltens von Anlagen der Energietechnik bei.

Im Folgenden seien die wichtigsten Rechenregeln der komplexen Rechnung wiederholt. ***Bild A.1*** verdeutlicht die Darstellung komplexer Zahlen in der komplexen Ebene. Aus ***Bild A.1*** ergibt sich direkt:

$$\underline{z} = a + jb = |\underline{z}| \cdot e^{j\varphi} = z \cdot e^{j\varphi} \qquad \text{mit} \qquad |\underline{z}| = z = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\text{und} \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\right) \qquad \text{oder} \qquad \tan\varphi = \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \quad . \qquad \text{(A.I.1)}$$

$\underline{z}^*$ ist das *konjugiert komplexe* der Zahl $\underline{z}$. Konjuguert komplex bedeutet, dass Real- und Imaginärteil gleich bleiben, nur das Vorzeichen des Imaginärteils ändert sich, d. h. aus „+“ wird „-“ und umgekehrt. Es gilt

$$\underline{z} = a \pm jb = |\underline{z}| \cdot e^{\pm j\varphi} = z \cdot e^{\pm j\varphi} \qquad \underline{z}^* = a \mp jb = z \cdot e^{\mp j\varphi}$$
$$\text{und} \qquad \underline{z} \cdot \underline{z}^* = (a \pm jb)(a \mp jb) = a^2 + b^2 = z^2 = |\underline{z}|^2 \quad . \qquad \text{(A.I.2)}$$
$$\text{mit} \qquad j = \sqrt{-1} \qquad j \cdot j = -1$$

Für Berechnungen ist oft der Übergang von der Exponentialdarstellung in die Darstellung von Real- und Imaginärteil hilfreich. Hierbei findet der *Satz von Euler* Anwendung

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \qquad \text{und} \qquad \left|e^{j\varphi}\right| = 1 \quad . \qquad \text{(A.I.3)}$$

<u>Rechenregeln mit komplexen Zahlen</u>

1. *Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen:*

   Zur Addition bietet sich die Schreibweise in Real- und Imaginärteil an:

$$(a + jb) \pm (c + jd) = (a \pm c) + j(b \pm d) \quad . \qquad \text{(A.I.4)}$$

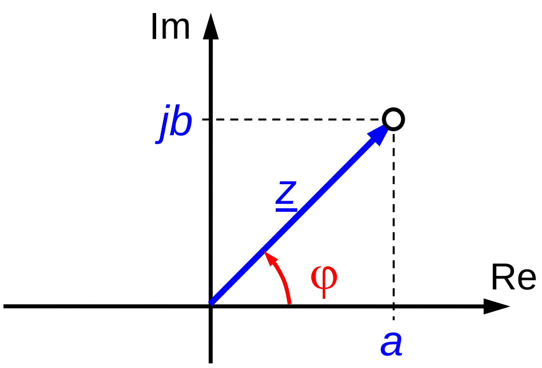


Bild A.1 Komplexe Zahlenebene: Darstellung einer komplexen Zahl

2. *Multiplikation zweier komplexer Zahlen:*

   Man kann die Schreibweise in Real- und Imaginärteil verwenden

$$(a+jb)\cdot(c+jd) = (ac-bd)+j(bc+ad) \quad , \tag{A.I.5}$$

   oder aber die Schreibweise in Betrag und Phase, die manchmal Vorteile bietet

$$(A\cdot e^{j\alpha})\cdot(B\cdot e^{j\beta}) = (A\cdot B)\cdot e^{j(\alpha+\beta)} \quad . \tag{A.I.6}$$

3. *Division zweier komplexer Zahlen:*

   Man kann auch hier die Schreibweise in Real- und Imaginärteil verwenden, indem man den Nenner konjugiert komplex erweitert

$$\frac{(a+jb)}{(c+jd)} = \frac{(a+jb)}{(c+jd)}\cdot\frac{(c-jd)}{(c-jd)} = \frac{(ac+bd)+j(bc-ad)}{c^2+d^2} \quad , \tag{A.I.7}$$

   oft einfacher und daher günstiger ist hier jedoch die Schreibweise in Betrag und Phase

$$\frac{(A\cdot e^{j\alpha})}{(B\cdot e^{j\beta})} = \frac{A}{B}\cdot e^{j(\alpha-\beta)} \quad . \tag{A.I.8}$$

A.II Kraftwirkung durch das Zusammenwirken von Magnetfeld und elektrischem Strom

Bewegte Ladungen dQ erfahren in einem Magnetfeld eine Kraftwirkung $d\boldsymbol{F}$ gemäß

$$d\boldsymbol{F} = dQ\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) \quad ; \tag{A.II.1}$$

$\boldsymbol{v}$ ist dabei der Vektor der Geschwindingkeit und $\boldsymbol{B}$ der Vektor der magnetischen Induktion. Ein Strom ist die fließende Ladung pro Zeiteinheit. Erweitert man dies beidseitig mit dem in der Zeit dt zurückgelegten Wegelement $d\boldsymbol{L}$ und berücksichtigt, dass sich die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ der Ladungen dQ der Quotient aus dem zurückgelegten Weg $d\boldsymbol{L}$ und der Zeit dt ist, so erhält man

$$dI\cdot d\boldsymbol{L} = \frac{dQ}{dt}\cdot d\boldsymbol{L} = dQ\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}\right) = dQ\cdot\boldsymbol{v} \quad . \tag{A.II.2}$$

Setzt man dies in die Gleichung (A.II.1) ein, so erhält man die Kraft auf ein Längenelement $d\boldsymbol{L}$ eines vom Strom dI durchflossenen Leiters, der sich in dem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ befindet zu

$$d\boldsymbol{F} = dQ\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = dI\cdot(d\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}) \quad . \tag{A.II.3}$$

Die magnetische Induktion $\boldsymbol{B}$ kann beispielsweise von einem stromdurchflossenen zweiten Leiter herrühren.

Betrachtet man beispielsweise die Kraftwirkung, die zwei im Abstand D angeordnete exakt parallel verlaufende dünne Leiter (Leiterdurchmesser $d \ll D$) der Länge L aufeinander ausüben, so muss man zunächst das Magnetfeld des Leiters „1“ am Ort des Leiters „2“ berechnen. Aus dem Durchflutungsgesetz erhält man für das Magnetfeld des Leiters „1“ im Abstand D um den Leiter:

$$\oint_C \boldsymbol{H}(t)\cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A_W} \boldsymbol{J}(t)\cdot d\boldsymbol{A} = \Theta = i_1(t) = H_1(t)\cdot 2\pi\cdot D$$

und damit . (A.II.4)

$$B_1(t) = \frac{\mu_0}{2\pi\cdot D}\cdot i_1(t) = B_{1,\varphi}(t)$$

Die magnetische Induktion weist nur eine Azimutalkomponente $B_{1,\varphi}$ auf. Der Vektor $\boldsymbol{B}$ und der Vektor des Wegelementes $d\boldsymbol{L}_2$ entlang dessen der Strom $i_2(t)$ fließt stehen senkrecht aufeinander. Für die Kraft erhält man durch Integration über die Leiterlänge L:

$$F = \int dF = i_2(t)\cdot B_1(t)\cdot \int_0^L dl_2 = \frac{\mu_0\cdot L}{2\pi\cdot D}\cdot i_1(t)\cdot i_2(t) \quad . \qquad \text{(A.II.5)}$$

Auf den Leiter „2“ wirkt eine Kraft $\boldsymbol{F}$, die vom Leiter „1“ weg gerichtet ist (Drei-Finger-Regel der rechten Hand). Aus der „Drei-Finger-Regel der rechten Hand“ für die Vektoren $d\boldsymbol{L}$ ($\boldsymbol{L}$), $\boldsymbol{B}$ und $d\boldsymbol{F}$ ergibt sich folgende Gesetzmäßigkeit:

Zwei in gleicher Richtung stromdurchflossene Leiter ziehen sich gegenseitig an, zwei entgegengesetzt stromdurchflossene Leiter stossen sich ab.

Von praktischer Bedeutung ist die Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter bei der mechanischen Auslegung von Stützkonstruktionen von parallel geführten Stromschienen, z. B. in Kraftwerken im Bereich der Ausleitung großer Generatoren oder bei den Stromzuführungen von Aluminiumschmelzen.

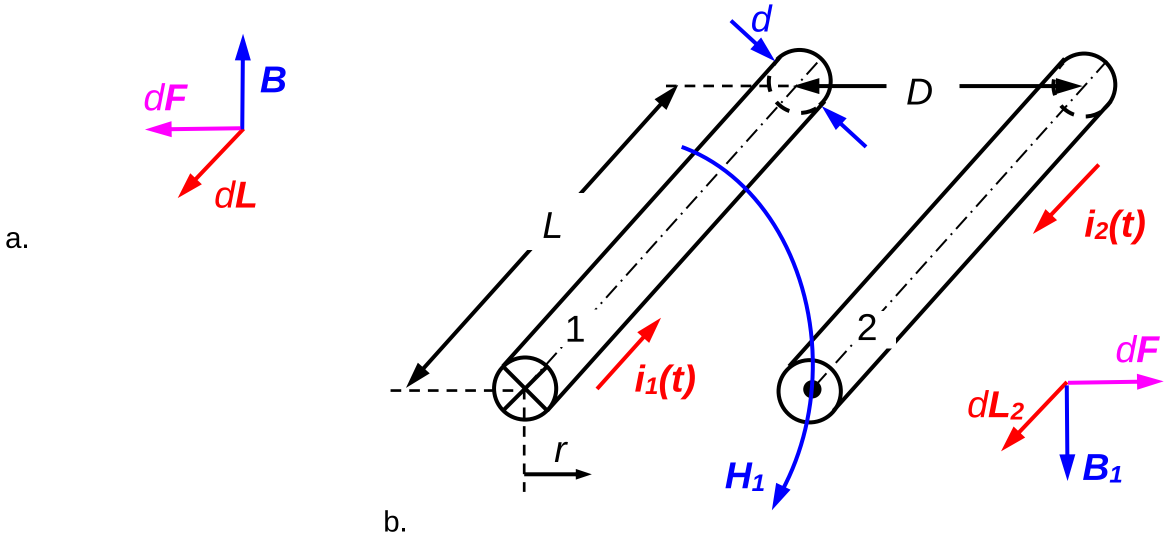


Bild A.2 Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter

a. „Drei-Finger-Regel der rechten Hand“: Daumen in Richtung von $d\boldsymbol{L}$, Zeigefinger in Richtung von $\boldsymbol{B}$, der Mittelfinger gibt dann die Richtung der Kraft $d\boldsymbol{F}$ an

b. Kraftwirkung auf zwei entgegengesetzt stromdurchflossene dünne Leiter der Länge L, die im Abstand D exakt parallel angeordnet sind

A.III Laplace-Transformation: Eigenschaften und Korrespondenztabelle

III.1 Eigenschaften der Laplace-Transformation

1. *Linearitätssatz*
   Die Linearkombination zweier Zeitfunktionen führt im Bildbereich zur Linearkombination der Transformierten:

$$a_1 \cdot f_1(t) + a_2 \cdot f_2(t) \qquad \leftrightarrow \qquad a_1 \cdot F_1(p) + a_2 \cdot F_2(p) \quad . \tag{A.III.1}$$

2. *Ähnlichkeitssatz*
   Wird die Zeitachse um einen reellen Faktor *a* gedehnt oder gestaucht, so verändern sich Frequenz und komplexe Amplitude der Laplace-Transformierten:

$$f(a \cdot t) \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{1}{a} \cdot F(\frac{p}{a}) \quad . \tag{A.III.2}$$

3. *Zeitverschiebung*
   Wird die Zeitachse um *T* nach rechts verschoben, so gilt für die neue Zeitvariable $t^* = t - T$ und für die Laplace-Transformierte:

$$f(t^*) = f(t - T) \qquad \leftrightarrow \qquad e^{-p \cdot T} \cdot F(p) \quad . \tag{A.III.3}$$

4. *Dämpfungssatz*
   Wird die Funktion *f(t)* durch einen Faktor e^{at} gedämpft, so gilt der Zusammenhang:

$$e^{a \cdot t} \cdot f(t) \qquad \leftrightarrow \qquad F(p - a) \quad . \tag{A.III.4}$$

5. *Differentiation im Zeitbereich*
   Unterzieht man die erste Ableitung der Funktion *f(t)* der Laplace-Transformation, so erhält man mit Hilfe der partiellen Integration ($\int udv = uv - \int vdu$):

$$\boldsymbol{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} \cdot e^{-pt} dt = e^{-pt} \cdot f(t)\Big|_0^\infty + p \cdot \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad . \tag{A.III.5}$$

$$= -f(0) + p \cdot F(p)$$

   Für höhere Ableitungen gilt

$$\boldsymbol{L}\left(\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right) = p^k \cdot F(p) - p^{k-1} \cdot f(0) - p^{k-2} \cdot \frac{d}{dt} f(t)\Big|_{t=0} - \ldots - p \cdot \frac{d^{k-2}}{dt^{k-2}} f(t)\Big|_{t=0} - \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t)\Big|_{t=0} \quad . \tag{A.III.6}$$

   Sind alle Anfangsbedingungen $\equiv 0$, so entspricht die Differentiation im Zeitbereich einer Multiplikation der Laplace-Transformierten mit *p*.

6. *Differentiation im Frequenzbereich*
   Für die erste Ableitung der Funktion *F(p)* erhält man:

$$\frac{d}{dp} F(p) = \frac{d}{dp}\left(\int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt\right) = \int_0^\infty -t \cdot f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad . \tag{A.III.7}$$

   Allgemein erhält man:

$$s(t) \cdot \left[(-t)^k \cdot f(t)\right] \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{d^k}{dp^k} F(p) \quad . \tag{A.III.8}$$

7. *Integration im Zeitbereich*
   Unterwirft man das Integral einer Funktion im Zeitbereich der Laplace-Transformation, so erhält man:

$$\boldsymbol{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)d\tau \cdot e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}\cdot\int_0^t f(\tau)d\tau \cdot e^{-pt}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} + \frac{1}{p}\cdot\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt \qquad \text{(A.III.9)}$$

und damit

$$\boldsymbol{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{p}\cdot\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt \quad . \qquad \text{(A.III.10)}$$

8. *Anfangswertsatz*
   Ausgehend vom Differentiationssatz im Zeitbereich erhält man bei einem Grenzübergang $p \to \infty$:

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-pt}dt = 0 = \lim_{p\to\infty} -f(0) + p\cdot F(p) = -f(0) + \lim_{p\to\infty} p\cdot F(p) \qquad \text{(A.III.11)}$$

   und damit

$$\lim_{p\to\infty} p\cdot F(p) = f(0) \qquad \text{(A.III.12)}$$

9. *Endwertsatz*
   Auch zur Herleitung des Endwertsatzes geht man vom Differentiationssatz im Zeitbereich und erhält bei einem Grenzübergang $p \to 0$:

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\cdot e^{-pt}dt = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}dt = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{df(t)}{dt}dt = \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0) = -f(0) + \lim_{p\to 0} p\cdot F(p) \qquad \text{(A.III.13)}$$

   und damit

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} p\cdot F(p) \quad . \qquad \text{(A.III.14)}$$

III.2 Korrespondenztabelle

$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t\sin at}{2a}$
e^{-as}	$\delta(t-a)$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{\sin at+at\cos at}{2a}$
$\frac{1}{s}$	1	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{b\sin at-a\sin bt}{ab(b^2-a^2)}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$
$\frac{1}{s^n}\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$\frac{1}{b}e^{-at}\sin bt$
$\frac{1}{s^a}\ a>0$	$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at}\cos bt$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{\sinh at-\sin at}{2a^3}$
$\frac{1}{(s+a)^n}\ n\in\mathbb{N}$	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{s}{s^4+4a^4}$	$\frac{\sin at\sinh at}{2a^2}$
$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{b-a}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\sin at$	$\arctan\frac{a}{s}$	$\frac{\sin at}{t}$
$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{1-e^{-ks}}{s}$	$u(t)-u(t-k)$
$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\sinh at$	$\frac{1}{s^a}e^{-ks}\ a>0$	$\frac{(t-k)^{a-1}}{\Gamma(a)}u(t-k)$
$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$	$\frac{1}{2}(\sin t+\lvert\sin t\rvert)$
$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{1-\cos at}{a^2}$	$\frac{a\coth(\pi s/2a)}{s^2+a^2}$	$\lvert\sin at\rvert$
$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$	$\frac{at-\sin at}{a^3}$	$\frac{1}{s(1+e^{-as})}$	$\begin{cases} 1 & ,\ 0<t<a \\ 0 & ,\ a<t<2a \\ & f(t+2a)=f(t) \end{cases}$
$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{\sin at-at\cos at}{2a^3}$		

A.IV Schutz des Menschen vor elektrischem Strom

IV.1 Physiologische Wirkungen des elektrischen Stromes bei Menschen

Entscheidend für die Auswirkungen eines Stromschlages auf einen Organismus sind die Stromstärke und die Einwirkdauer des elektrischen Stromes. Nach Biegelmeier (*G. Biegelmeier: „Wirkungen des elektrischen Stromes auf Menschen und Nutztiere“, Lehrbuch der Elektropathologie, VDE-Verlag, 1987*) sind 4 Bereiche zu unterscheiden (**Bild A.3a**):

- Im *Bereich 1* mit Strömen < 1 mA wird der Strom üblicherweise nicht oder kaum wahrgenommen.
- Bei Strömen von 1 mA bis < 10 mA (*Bereich 2*) können bereits Muskelverkrampfungen auftreten. Diese führen dazu, dass ein Loslassen der spannungsführenden Teile nicht mehr möglich ist. Damit wird der Stromfluss nicht unterbrochen und die Einwirkdauer des Stromes nimmt zu. Es treten in der Regel noch keine organischen Schäden auf.
- Der *Bereich 3* mit Strömen > 10 mA wird durch 3 Sicherheitskurven zu höheren Strömen hin begrenzt. Oberhalb der Kurve c1 kann Herzkammerflimmern auftreten. Dadurch wird die Pumpwirkung des Herzens so stark beeinträchtigt, dass es zum Zusammenbruch des Blutkreislaufes kommen kann. Die Angaben der Sicherheitskurven gelten für eine Durchströmung des Körpers von einer Hand zu den Füßen. Bei einer Durchströmung über den Weg Hand-Brust-Hand tritt eine stärkere Gefährdung auf, da bei diesem Stromweg das Herz stärker beansprucht wird.
- Im *Bereich 4* jenseits der Sicherheitskurve c3 stellt sich Herzkammerflimmern ein, das dann schnell zum Tode führt. Bei hohen Stromstärken im A-Bereich treten außerdem starke Verbrennungen auf, vor allem an Körperstellen mit erhöhtem Widerstand, also z. B. in Gelenken.

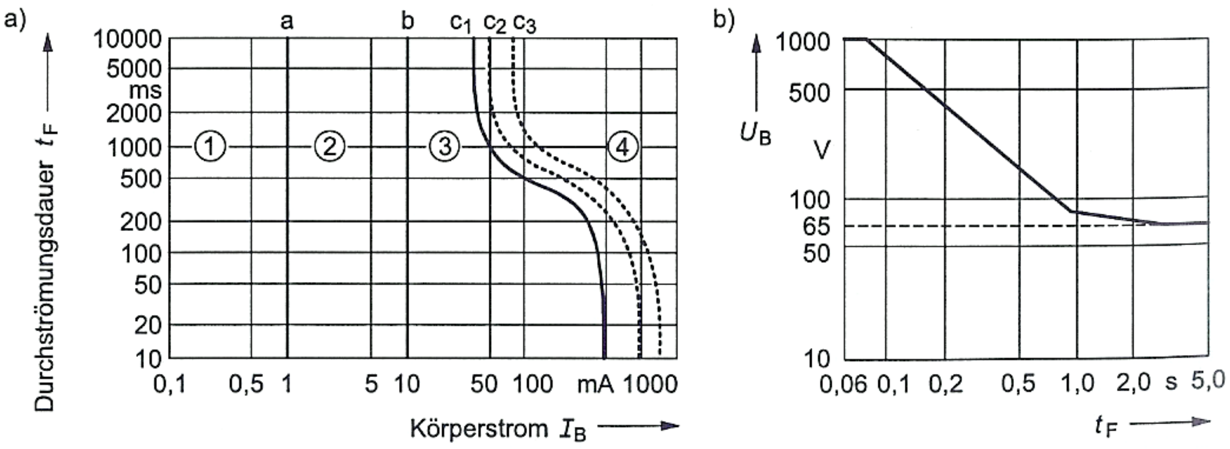


Bild A.3 Zulässige Körperströme und Berührungsspannungen bei Menschen

a. Auswirkungen von Körperströmen mit Frequenzen von 50…60 Hz
   a: Wahrnehmungsschwelle, b: Loslassschwelle, c1: Sicherheitskurve
   c2: Herzkammerflimmern mit 5% Wahrscheinlichkeit
   c3: Herzkammerflimmern mit 50% Wahrscheinlichkeit
b. Effektivwerte der zulässigen Berührungsspannung U_B in Abhängigkeit von der Einwirkdauer t_F

Es stellt sich noch die Frage, welche Berührungsspannungen zulässig sind. Hierbei spielt der elektrische Widerstand des Körpers eine Rolle. Nach Untersuchungen von Biegelmeier hängt dieser nichtlinear von der Berührungsspannung ab. **Bild A.3b** zeigt die maximal zulässige Berührungsspannung U_B in Abhängigkeit von der Einwirkdauer t_F.
Bei Spannungen < 200 V kann für den Stromweg „Hand-Fuß" mit ca. 1100 Ω gerechnet werden. Wird ein Strom von ca. 46 mA für eine lange Einwirkdauer noch als zulässig angesehen, so ergibt sich eine höchste Berührungsspannung von

$$U_{\max} \leq 50\,V \quad . \tag{A.IV.1}$$

Dieser Wert ist nach DIN VDE 0100 Teil 410 als „höchste dauernd zulässige Berührungsspannung" festgelegt.
Im Falle des Stromweges „Hand-Brust-Hand" sinkt der Körperwiderstand auf 450 Ω ab, die höchste zulässige Berührungsspannung ist dann nur noch 25 V.
Der Körperwiderstand wird außerdem durch zahlreiche Parameter beeinflusst, z. B. die Feuchtigkeit der Haut, der Kleidung etc.

Erste-Hilfe-Maßnahmen (VDE 0134/7.71)

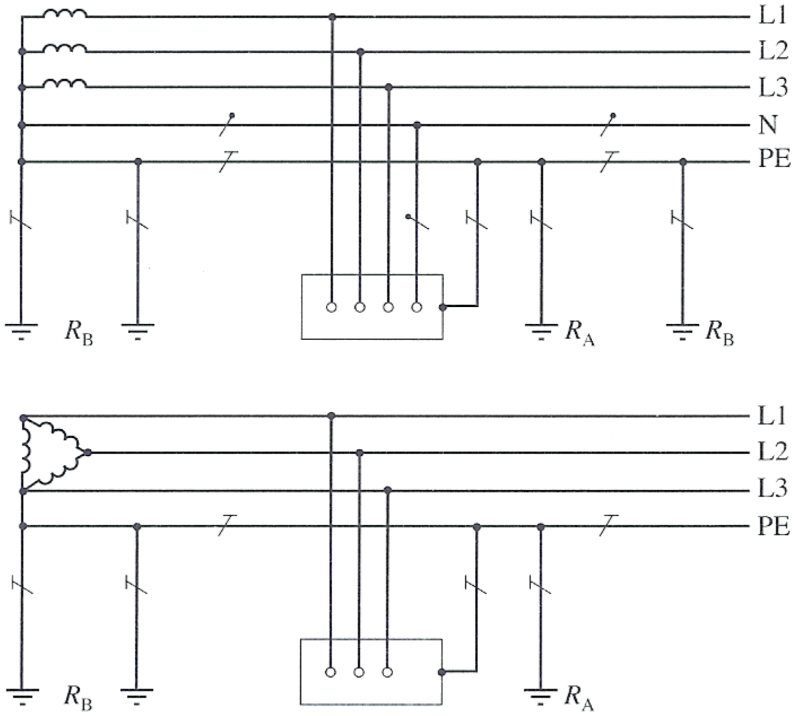
1. Strom abschalten und gegen Wiedereinschalten sichern.
2. Das Unfallopfer aus den Gefahrenbereich bringen, Arzt und Unfallrettung verständigen lassen.
3. Bei Atemstillstand muss sofort eine Atemspende (Beatmung) erfolgen.
4. Bei Kreislaufstillstand muss sofort Beatmung und Herzmassage am Besten durch darin ausgebildete Helfer erfolgen. Wenn nur ein Soforthelfer die erste Hilfe ausführen kann, so folgen 3 Beatmungen 15 Herzdruckmassagen.

IV.2 Aufbau des Drehstromnetzes (Niederspannungsnetz ≤ 400 V)

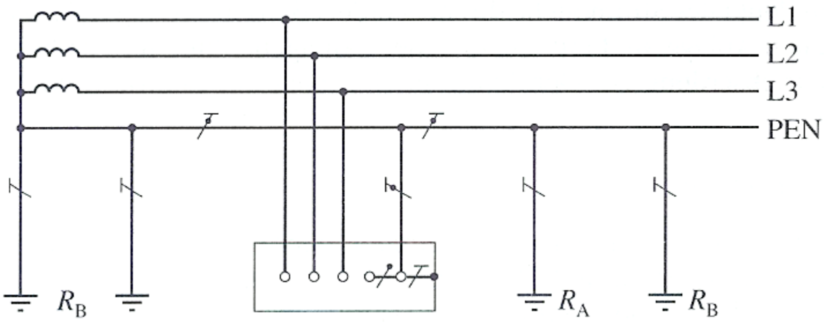
IV.2.1 Stromversorgungssysteme nach Art der Erdverbindung

Für Stromversorgungssysteme wurde nach Art der Erdverbindung mit Erdung der Stromquelle (Betriebserder R_B) und Erdung in der Verbraucheranlage (Anlagenerder R_A) eine internationale Kennzeichnung erarbeitet (**Bild A.4**):

- *Erster Buchstabe: Erdungsbedingungen der speisenden Quelle*
  T: direkte Erdung eines Punktes (Terre = Erde)
  I: Isolierung aller aktiven Teile der Quelle gegen Erde oder Erdung über eine Impedanz
- *Zweiter Buchstabe: Erdungsbedingungen der Körper (= Geräte) der elektrischen Anlage*
  T: Körper direkt geerdet
  N: Körper direkt mit Betriebserde verbunden
- *weitere Buchstabe: Anordnung von Neutralleiter und Schutzleiter*
  S: Neutralleiter und Schutzleiter sind getrennt
  C: Neutralleiter und Schutzleiter sind in einem Leiter, dem PEN-Leiter, kombiniert.



a.



b.

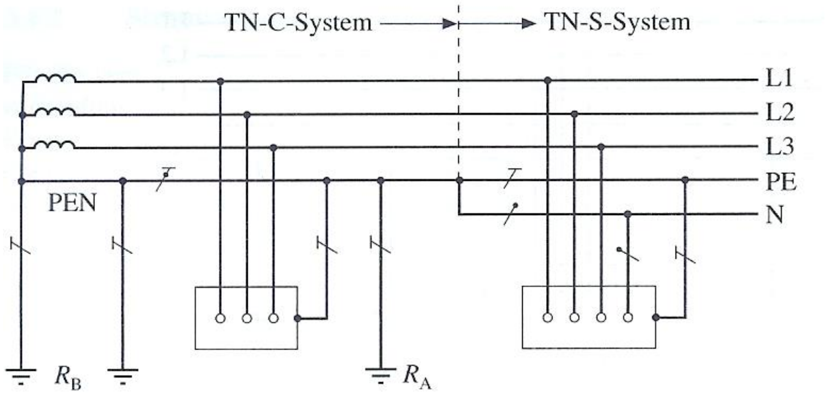


Bild A.4 Stromversorgungssysteme

R_A Erdungswiderstand der Anlagenerder, R_B Gesamterdungswiderstand aller Betriebserder

a. TN-S-System: Neutralleiter und Schutzleiter getrennt
b. TN-C-System: Neutralleiter und Schutzleiter verbunden (seit den 60er-Jahren in Gebäuden nicht mehr üblich, heute noch gebräuchlich in öffentlichen Verteilnetzen)
c. TN-C-S-System

Einen Sonderfall stellt das TN-S-System mit einem geerdeten Außenleiter dar (**Bild A.4a**). Der geerdete Außenleiter ist im gesamten Netz getrennt vom Schutzleiter zu führen. Einen Neutralleiter gibt es in diesem Fall nicht. Einen Außenleiter mit dem Schutzleiter zu kombinieren ist nicht zulässig.

IV.2.2 Schutzmaßnahmen gemäß DIN VDE 0100

Bild A.5 zeigt eine Übersicht der möglichen Schutzmaßnahmen gegen elektrischen Schlag. Darin bedeuten:

- Basisschutz: Schutz gegen elektrischen Schlag unter normalen Bedingungen
- Fehlerschutz: Schutz gegen elektrischen Schlag unter Fehlerbedingungen
- Zusatzschutz: Schutz gegen elektrischen Schlag bei Versagen der Basisisolierung

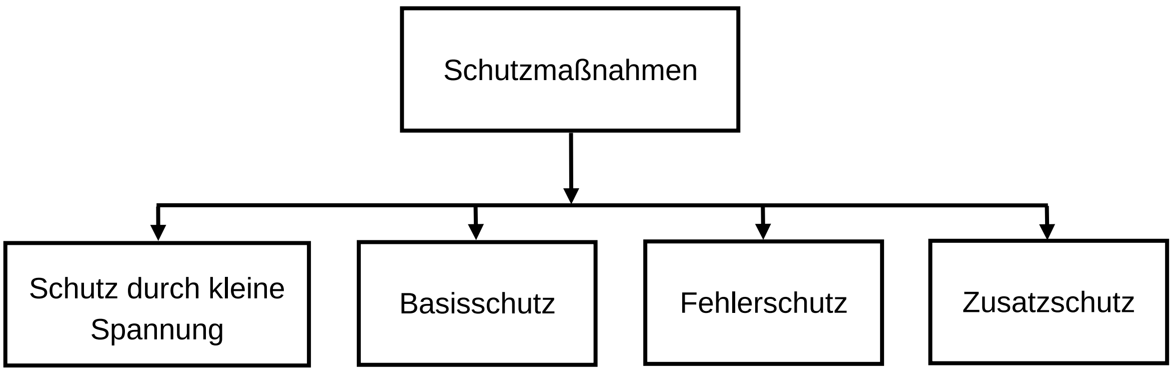


Bild A.5 Zusammenstellung der Schutzmaßnahmen gegen einen elektrischen Schlag

IV.2.2.1 Schutz durch Verwendung kleiner Spannungen

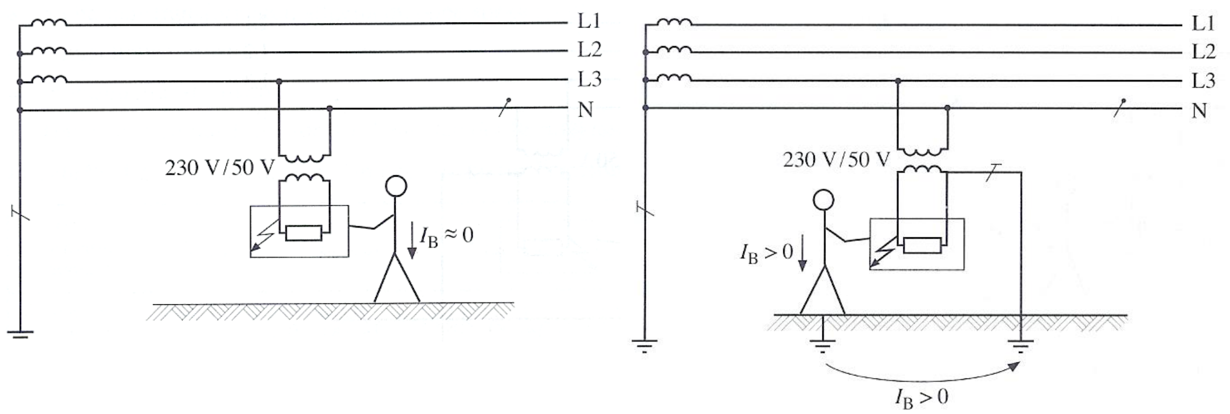
Prinzip dieses Schutzes

- Verwendung kleiner Spannungen, die für Menschen bei Vorliegen normaler Bedingungen keine Gefahr darstellen.
- Konsequente Trennung der Spannungsquellen und Betriebsmittel mit kleiner Spannung von Systemen, die mit höherer Spannung betrieben werden.

Als Spannungen, die normalerweise für den Menschen als ungefährlich angesehen werden können wurde international festgelegt:

- 50 V AC effektiv
- 120 V DC (oberschwingungsfrei).

Bild A.6 zeigt die beiden Schutzprinzipien. In **Bild A.6a** fließt aufgrund der kleinen Kapazität des Netztransformators auch im Fehlerfall praktisch kein Strom über die Person. In **Bild A.6b** fließt ein Strom, der durch die Sekundärspannung des Transformators von 50 V und den Körperwiderstand des Menschen gegeben ist. In beiden Fällen kommt es unter bis auf den Fehler am Gerät normalen Betriebsbedingungen zu keiner akuten Gefährdung von Menschen.



a. b.

Bild A.6 Schutz durch kleine Spannungen
a. SELV (= Safety Extra Low Voltage, Schutzkleinspannung)
b. PELV (= Protection Extra Low Voltage, Funktionskleinspannung)

IV.2.2.2 Basisschutz

Schutz durch Isolierung von aktiven Teilen

Der Hersteller oder der Errichter einer Anlage muss alle aktiven, d. h. unter Spannung stehenden Teile gegen Berühren durch eine Isolierung sichern. Die Isolierung muss so angebracht sein, dass sie nur durch Zerstörung entfernt werden kann. Der Hersteller ist für diese Isolierung verantwortlich. Durch das VDE-Zeichen am Betriebsmittel wird dies dokumentiert.

Schutz durch Abdeckungen oder Umhüllungen

Abdeckungen und Umhüllungen (Gehäuse) verhindern das Berühren aktiver Teile im normalen Gebrauch von Geräten und Systemen.

Schutz durch Hindernisse

Durch Hindernisse wie z. B. Absperrungen oder Schranken soll das unbeabsichtigte Berühren aktiver Teile verhindert werden. Das Berühren aktiver Teile durch bewusstes Umgehen oder Entfernen der Hindernisse braucht nicht berücksichtigt zu werden. Allerdings muss das unbeabsichtigte Entfernen der Hindernisse ausgeschlossen ein.

Schutz durch Abstand

Im „Handbereich“ der in VDE 0100 genormt ist, dürfen keine berührbaren Teile mit (stark) unterschiedlichem Potential vorhanden sein.

IV.2.2.3 Fehlerschutz

In VDE 0100-410 sind Vorkehrungen zur automatischen Abschaltung eines Fehlerstromes für die in Kapitel 8.2.1 behandelten Stromversorgungssysteme beschrieben. An dieser Stelle soll nur das Vorgehen beim TN-System erklärt werden. Es wird dabei gefordert, dass beim Auftreten eines Fehlers, der eine zu hohe Berührungsspannung zur Folge hätte, die Stromversorgung der betreffenden elektrischen Anlage sofort abgeschaltet wird.

Schutz in TN-Systemen

Die automatische Abschaltung im Fehlerfall wird dadurch erreicht, dass alle in einer Anlage vorhandenen Geräte (Körper) mit dem an der Stromquelle geerdeten Punkt des speisenden Netzes über einen Schutzleiter (PEN-Leiter) verbunden sind. Dadurch kommt ein Kurzschlussstrom über den Schutzleiter zum Fließen, der die Abschaltung auslösen kann.

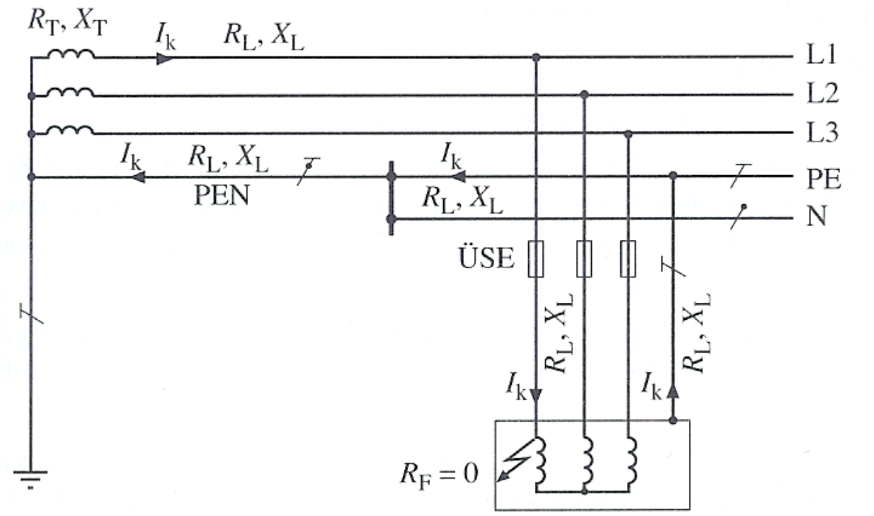


Bild A.7 TN-C-S-System im Fehlerfall mit Fehlerstrom, zusätzlich eingetragen sind die wirksamen Impedanzen

Für Endstromkreise, die über Steckdosen oder einen festen Anschluss Geräte der Schutzklasse I versorgen, gelten folgende Abschaltzeiten abhängig von der Netzspannung

- 230 V: t_a = 0,4 s
- 400 V: t_a = 0,2 s
- > 400 V: t_a = 0,1 s

Schutzleiter und PEN-Leiter in TN-Systemen

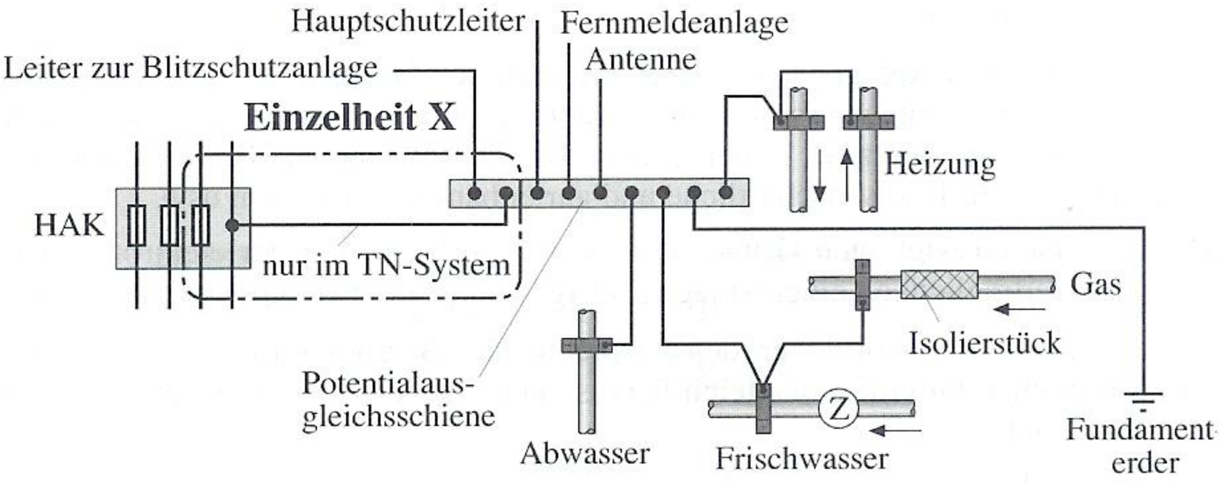
In einer fest angebrachten Installation darf die Funktion des Schutzleiters und des Neutralleiters durch einen Leiter, den so genannten PEN-Leiter übernommen werden, wenn

- der Querschnitt des PEN-Leiters mindestens 10 mm^2 bei Kupfer und 16 mm^2 bei Aluminium beträgt
- der PEN-Leiter ist für die höchste zu erwartende Spannung zu isolieren.

Potentialausgleich

Die Schutzmaßnahmen der einzelnen Stromversorgungssysteme (z. B. TN-System) sind nur dann richtig wirksam, wenn in jedem Gebäude ein Hauptpotentialausgleich vorhanden ist. Dieser stellt aber für sich noch keine Schutzmaßnahme dar. Er sorgt jedoch dafür, dass im Fehlerfall keine zu hohen Berührungsspannungen des Erdungssystems durch Spannungsabfälle an dessen Widerstand auftreten.

Der Hauptpotentialausgleich sollte an zentraler Stelle, am besten in unmittelbarer Näher der Hauseinführungen an einer Ausgleichsschiene erfolgen (**Bild A.8**).



Einzelheit X:

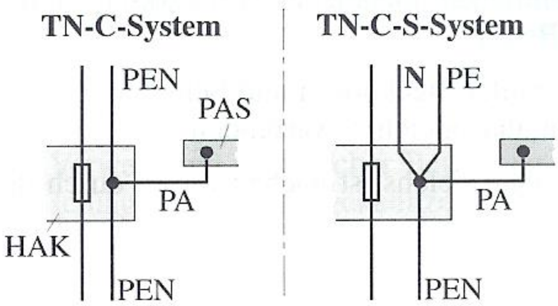


Bild A.8 Beispiel für den Hauptpotentialausgleich einer Anlage

Schutz durch Schutztrennung

Bei der Schutztrennung werden, z. B. durch einen Trenntransformator, die Betriebsmittel auf der Sekundärseite elektrisch sicher (d. h. galvanisch) vom speisenden Netz getrennt. Wenn im Sekundärnetz kein weiterer Erdschluss auftritt, dann fließen nur kapazitive und induktive Ströme.

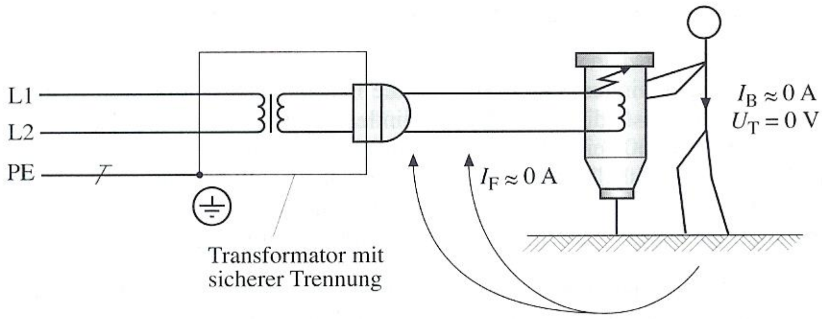
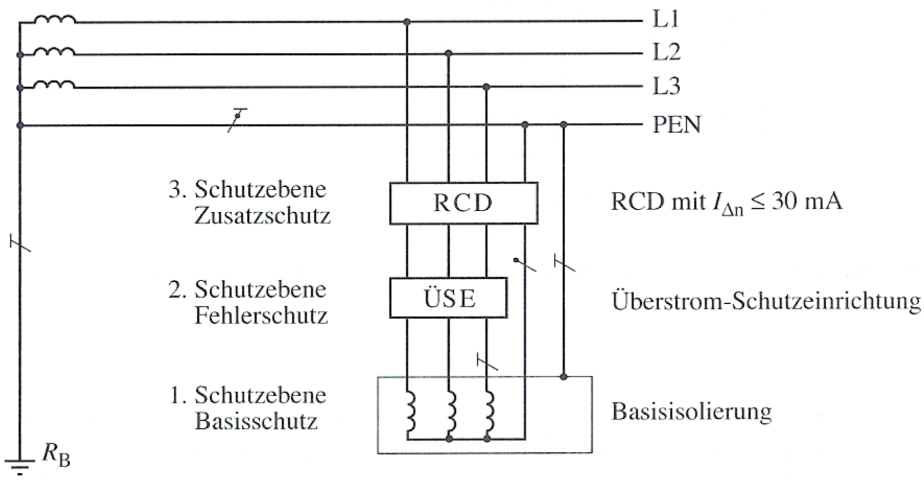


Bild A.9 Prinzip der Schutztrennung

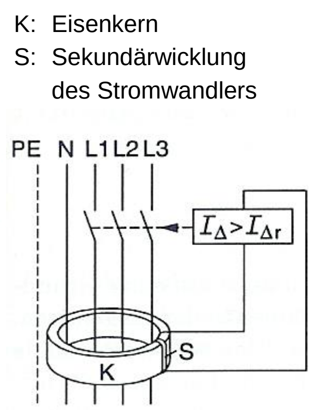
IV.2.2.4 Zusatzschutz durch RCD in TN-Systemen

RCD (= Residual Current Protective Devices) sind hochempfindliche Systeme zur Erkennung eines Fehlerstromes ($I_{\Delta n}$ ≤ 30 mA). Sie sind als eine „dritte Schutzbarriere“ gedacht und ersetzen auf keinen Fall die vorher beschriebenen Schutzmaßnahmen. Das RCD schaltet Ströme > 30 mA in einer Zeit unter 40 ms ab.

Je nach Aufbau und Größe der Anlage sollte der Zusatzschutz (**Bild A.10a**) zentral für mehrere Stromkreise oder dezentral für einen oder mehrere Stromkreise angeordnet werden.



a.



b.

Bild A.10 a. Zusatzschutz; Aufbau der Schutzebenen Basisschutz, Fehlerschutz und Zusatzschutz
b. Prinzipieller Aufbau eines Fehlerstrom- bzw. FI-Schutzschalters

Bild A.10b zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Fehlerstrom- bzw. FI-Schutzschalters. Ein Eisenkern umfasst alle drei Leiter des Drehstromnetzes sowie den Neutralleiter. Bei ordnungsgemäßem – auch unsymmetrischen Betrieb - ist die Stromsumme in diesen 4 Leitern identisch Null. Bei einem Fehler fließt ein Teilstrom über den PE-Leiter, die Stromsumme ist nicht mehr Null und es wird in einer Sekundärwicklung ein Strom induziert. Mit dessen Hilfe wird bei Überschreiten eines Grenzwertes eine dreipolige Abschaltung des Stromkreises bewirkt.

IV.2.3 Erdungen gemäß DIN VDE 0100-540

Grundsätzliche Festlegungen über Erdungen und Erdungsanlagen sind in DIN VDE 0100-540 getroffen. **Bild A.11** gibt eine Übersicht der Erdungen bei Netzanlagen > 1 kV und < 1 kV. Erden ist das Verbinden eines Punktes des Betriebsstromkreises oder eines Körpers über einen Erdungsleiter mit dem Erdreich. Das Erdreich kann dabei als großer und bedeutsamer Potentialausgleich angesehen werden.

Man unterscheidet im Wesentlichen:

- Betriebserdung: Erdung, die aus betrieblichen Gründen hergestellt wird (Erdung des Sternpunktes eines Transformators).
- Schutzerdung: Erdung, die zum Schutz von Personen vor zu hoher Berührungsspannung hergestellt wird.

Die Stationserdung der Netzstation stellt eine Schutzerdung dar. Gleichzeitig muss der Transformatorsternpunkt geerdet werden. Er darf nur dann mit der Stationserdung verbunden werden, wenn dadurch bei einem Erdschluss auf der Mittelspannungsseite (MS) nicht unzulässig hohe Berührungsspannungen entstehen. Anderenfalls muss der Transformatorsternpunkt außerhalb der Station geerdet werden, wobei ein bestimmter Abstand einzuhalten ist, um eine gegenseitige Beeinflussung (d. h. Potentialanhebung) einer der Erde bei einem Fehler zu vermeiden. An die Stationserdung sind alle passiven Anlagenteile sowohl der MS- als auch der NS-Seite anzuschließen.

Der 4. Leiter des Drehstrom-Niederspannungsnetzes wird mit dem niederspannungsseitigen Transformatorsternpunkt an die Betriebserdung angeschlossen. Im Falle unsymmetrischer Last fließt ein Strom über diesen 4. Leiter und beansprucht damit auch den Erder. Daher rührt die Bezeichnung „Betriebserdung“. Zusätzlich ist dieser 4. Leiter noch an vielen Stellen zu erden, z. B. durch Fundamenterder. Dadurch entsteht parallel zu dem 4. Leiter ein (niederohmiger) Strompfad über das Erdreich. Dadurch wird der 4. Leiter auf Erdpotential gezwungen und potentialmäßig neutral gehalten.

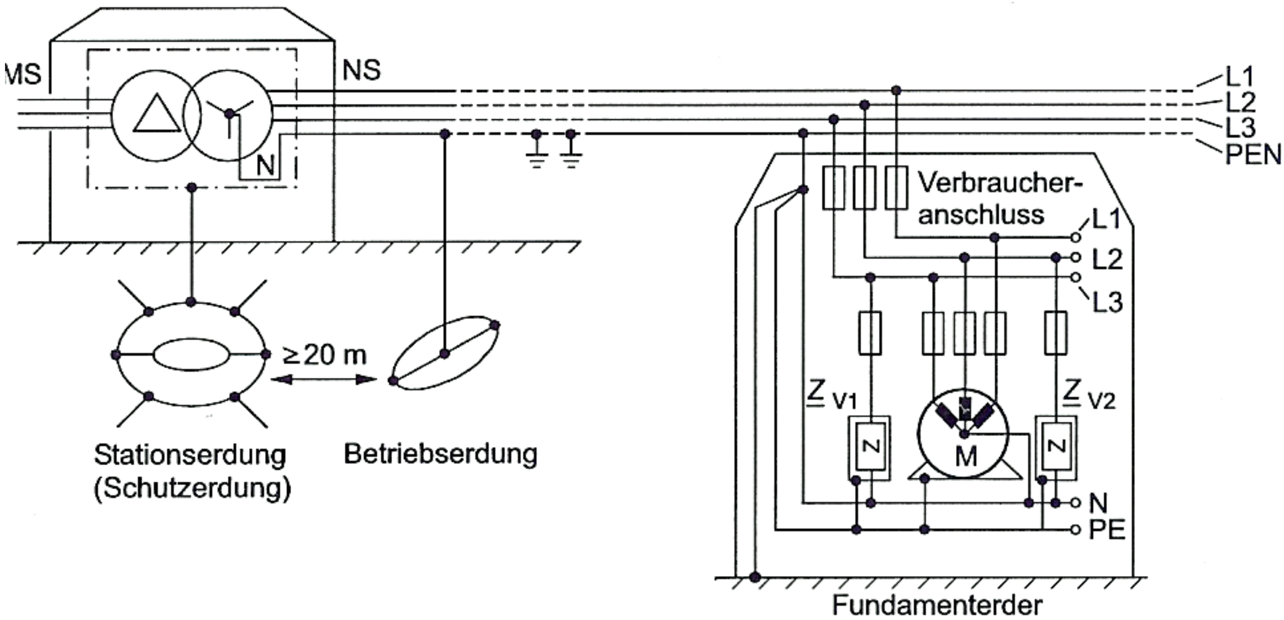


Bild A.11 Erdungsanlagen bei Netzen > 1 kV (links) und < 1 kV (rechts)

IV.2.4 Ersatzschaltbild eines Fehlerstromkreises

In **Bild A.12** sind eine typische Fehlersituation und das zugehörige Ersatzschaltbild dargestellt. Die Isolierung eines unter Spannung stehenden Leiters sei schadhaft; dadurch ist ein normalerweise nicht unter Spannung stehendes Teil, hier mit „Körper" bezeichnet über einen Fehlerwiderstand R_F mit dem Leiter verbunden. Das Gerät wird von einem Menschen berührt.

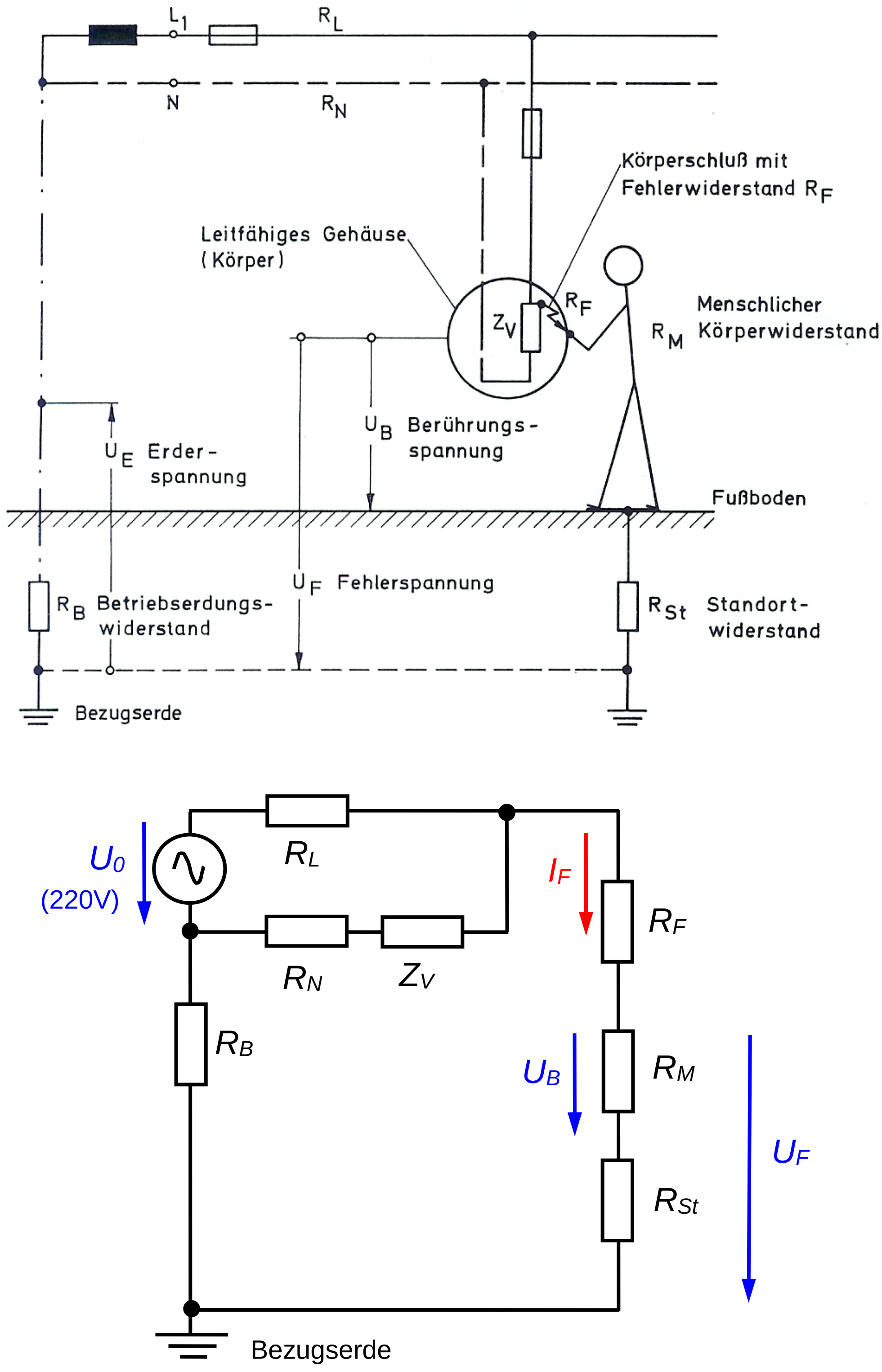


Bild A.12 Fehlerszenario in einem Niederspannungsnetz und zugehörige Ersatzschaltung

Widerstände im Kreis:

- R_F: Übergangswiderstand von dem elektrischen Leiter zum Gehäuse, das von einem Menschen berührt wird.
- R_M: Gesamtwiderstand des Menschen, oft werden 3000 Ω angesetzt, da auch hochisolierendes Schuhwerk durch Feuchteeinwirkung, Risse und Verschmutzung in seiner Isolationsfestigkeit stark reduziert sein kann.
- R_{St}: Standortwiderstand, hängt von der Art der Fußbodens und seiner Beschaffenheit ab.
- R_L: Leitungswiderstand der Phase (L1).
- R_N: Leitungswiderstand des Neutralleiters (N).
- R_B: Betriebserdungswiderstand des Netztransformators.