

EMF Übung I

Dienstag, 30. April 2019 14:12

nächste Übung: Fr, 10.05.2019

Hinweis: Anmeldung Tutorien bis einschließlich heute

Bekanntgabe am Do, 02.05.2019

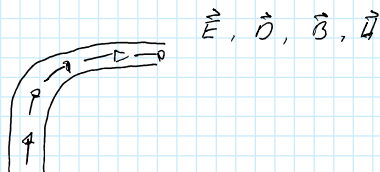
Wiederholung zu HM

Skalarfelder: ordnet jedem Punkt im Raum
einen skalaren Wert zu, z.B.: el. Potential

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{ in EMF oft } \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Vektorfelder: ordnet jedem Punkt einen Vektor zu

z.B.: Strömung



$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \text{ in EMF oft } \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Partielle Ableitung geg.: Vektorfeld $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

$$\text{PA: } \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Differentialoperatoren in Kartesischen Koordinaten

Gradient: f sei ein Skalarfeld ($f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$)

$$\text{dann: } \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Vektorfeld
Richtung: steilster Anstieg
Stärke: Änderungsrate

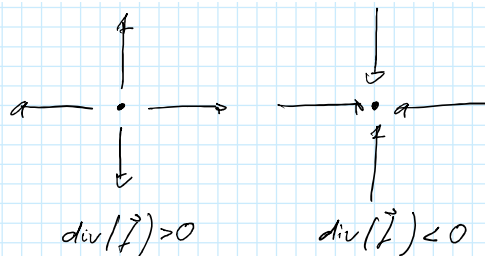
Divergenz: $\vec{f}$ sei ein Vektorfeld ($f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$)

$$\text{dann: } \text{div}(\vec{f}) = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}$$

Skalarfeld gibt an wie viel
Strömung in jeweiligem
Punkt entsteht/endet

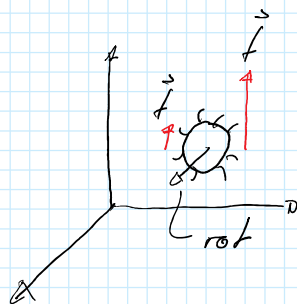
Quelle

Senke



Rotation: $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\text{dann: } \text{rot}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

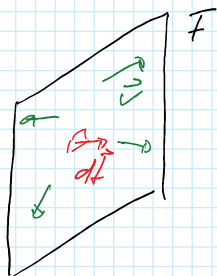


Drehrichtung und Geschwindigkeit eines imaginären Scheitelrades

Integrale

Flächenintegral über Vektorfeld

$\iint_F \vec{v} d\vec{f} \rightarrow$ infinitesimales Flächenelement, Richtung, Normalenvektor der Fläche F an jeweiligem Punkt
 $F \hookrightarrow$ Vektorfeld



"Wie viel $\vec{v}$ fließt durch F ?"
 (Skalar, nur Anteil $\perp F$ zählt)

$\oint_F \vec{v} d\vec{f}$ Integral über geschlossene Fläche, zB Oberfläche einer Kugel $K \rightarrow F = \partial K$ (Rand von K)

Volumenintegral über Skalarfeld

$\iiint_V A dv \rightarrow$ Volumenelement "Wie viel A in V ?"
 $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}$

$\iiint_V A \, dv \rightarrow$ Volumenelement "Wie viel A in V ?"
 $V \hookrightarrow$ Skalarfeld

1. Aufgabe

a) geg.: $\vec{v} = \frac{K}{3} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) = \frac{K}{3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ges.: $\operatorname{div}(\vec{v})$

$$\operatorname{div}(\vec{v}) \stackrel{FS}{=} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{K}{3} + \frac{K}{3} + \frac{K}{3} = K$$

b) geg.: $\vec{v}$

ges.: $\iint_{\partial W} \vec{v} \, d\vec{f} = \iint_{A_1} \vec{v} \, d\vec{f} + \dots + \iint_{A_6} \vec{v} \, d\vec{f}$

$A_1: \iint_{A_1} \vec{v} \, d\vec{f} = \int_{z=-a}^a \int_{y=-a}^a \frac{K}{3} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z) \vec{e}_x \, dy \, dz \Big|_{x=a}$

$$= \int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{K}{3} (a \vec{e}_x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \vec{e}_x + z \vec{e}_z \vec{e}_x) \, dy \, dz$$

$$= \underbrace{\int_{-a}^a \int_{-a}^a \frac{K}{3} a \, dy \, dz}_{NR} = \int_{-a}^a \frac{2K}{3} a^2 \, dz = \underline{\underline{\frac{4K}{3} a^3}}$$

NR: $\left[\frac{K}{3} a y \right]_{-a}^a = \frac{2}{3} K a^2$

$A_2: \iint_{A_2} \vec{v} \, d\vec{f} \Big|_{y=-a} = \int_{z=-a}^a \int_{x=-a}^a -\vec{v} \vec{e}_y \, dx \, dz \Big|_{y=-a}$

$$= \int_{-a}^a \int_{-a}^a -\frac{K}{3} y \vec{e}_y \vec{e}_y \, dx \, dz \Big|_{y=-a} = \frac{K}{3} a \int_{-a}^a \int_{-a}^a dx \, dy$$

$$= \frac{K}{3} a \underbrace{2a} \int_{-a}^a dz = \frac{K}{3} a \underbrace{2a} \underbrace{2a} = \frac{4K}{3} a^3$$

ebenso: $A_3 \dots A_6 = \frac{4K}{3} a^3$

$$\oint_{\partial W} \vec{v} d\vec{l} = 6 \cdot \frac{4K}{3} a^3 = \underline{8Ka^3}$$

c) geg.: $\operatorname{div}(\vec{v}) = K$

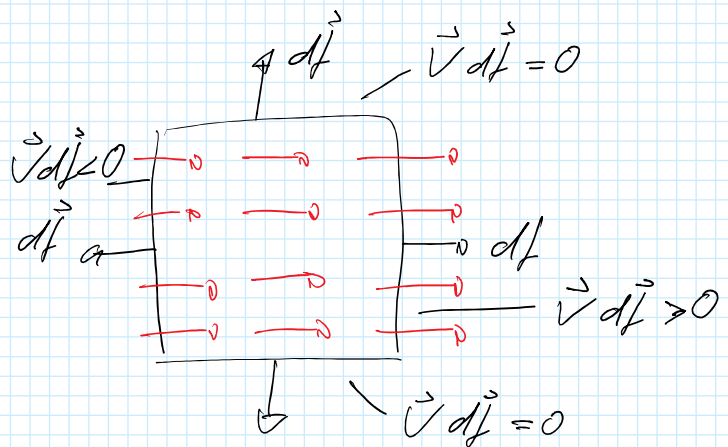
ges.: $\iiint_W \operatorname{div}(\vec{v}) dV$

$$\stackrel{FS}{=} \int_{z=-a}^a \int_{y=-a}^a \int_{x=-a}^a K dx dy dz = K 2a 2a 2a = \underline{8Ka^3}$$

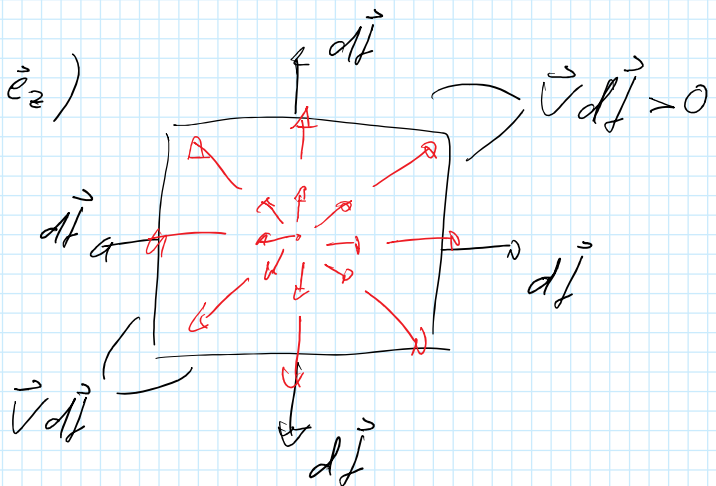
Bsp.:

$$\vec{v} = K \vec{e}_x$$

$\vec{e}_x$



$$\vec{v} = K(x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z)$$



12) a) geg.: $\vec{v} = \frac{K}{3} r \vec{e}_r$ | Kugelkoordinaten:
 ges.: $\text{div}(\vec{v})$ | Radius r / Winkel ϑ / Winkel φ
 $\in [0, \pi]$ $\in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{v}) &\stackrel{\text{FS}}{=} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \underbrace{\frac{K}{3} r}_{V_r} \right) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\underbrace{V_\vartheta}_{=0} \sin \vartheta \right) \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \stackrel{=0}{=} \\ &= \frac{1}{r^2} K r^2 = \underline{K} \end{aligned}$$

b) geg.: $\vec{v}$

ges.: $\oiint \vec{v} d\vec{f}$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \frac{K}{3} r \underbrace{\vec{e}_r \vec{e}_r}_{=1} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \Big|_{r=a}$$

$$= \frac{K}{3} a^3 \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta}_{= [-\cos \vartheta]_0^{\pi} = 2} d\varphi = \frac{K}{3} a^3 2 2\pi = \underline{\underline{\frac{4}{3} K \pi a^3}}$$

c) geg.: $\vec{v}$, $\text{div}(\vec{v}) = K$

ges.: $\iiint \text{div}(\vec{v}) dv$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{r=0}^a K r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

$\int_0^a$ $\int_0^{\pi}$ $\int_0^{2\pi}$

$$\varphi=0 \quad \vartheta=0 \quad r=0$$

$$= 4 \pi 2 \int_{r=0}^a r^2 dr = \frac{4 \pi K a^3}{3}$$
