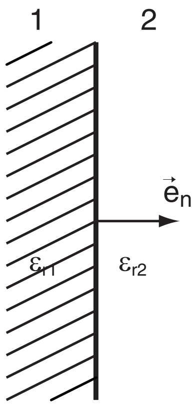
Elektromagnetische Felder

SS 2019

Musterlösung zur 2. Übung

4. Aufgabe

Grenzbedingungen:



$$\sigma = D_{n2} - D_{n1} \tag{1}$$

$$E_{t2} = E_{t1} \tag{2}$$

Hier: Keine Grenzflächenladung, $\sigma = 0$

$$\Rightarrow D_{n2} = D_{n1} \tag{3}$$

Materialgleichung:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \tag{4}$$

Einsetzen in (3):

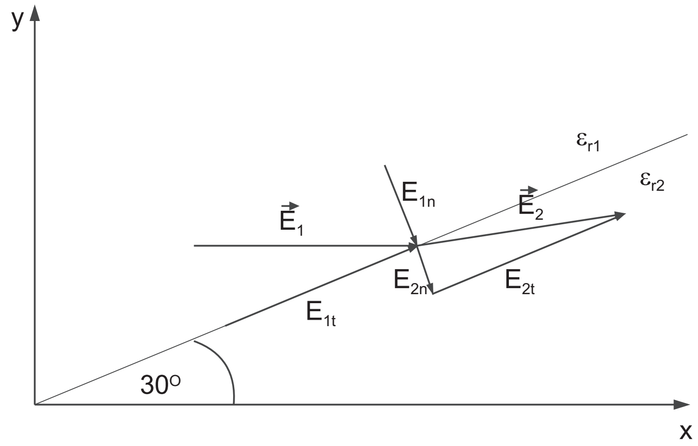
$$\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} E_{n_2} = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E_{n_1}$$

$$\Rightarrow E_{n_2} = \frac{\varepsilon_{r_1}}{\varepsilon_{r_2}} E_{n_1} \tag{5}$$

Einsetzen in (2):

$$\frac{D_{t_2}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_2}} = \frac{D_{t_1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r_1}}$$

$$\Rightarrow D_{t_2} = \frac{\varepsilon_{r_2}}{\varepsilon_{r_1}} D_{t_1} \tag{6}$$



Lage der Grenzfläche:
gegeben: $\vec{E}_1 = E_0\,\vec{e}_x$, gesucht: $\vec{D}_1,\ \vec{E}_2, \vec{D}_2$. aus Gleichung (4) folgt:

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \vec{E}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E_0 \vec{e}_x$$

Zerlegung von $\vec{E}_1$ in Normal- und Tangentialkomponente:

$$E_{n_1} = E_0 \sin 30^\circ = \frac{E_0}{2}$$
$$E_{t_1} = E_0 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0$$

Anwendung der Grenzbedingungen:

$$(5) \Rightarrow E_{n_2} = \frac{1}{2} E_{n_1} = \frac{E_0}{4}$$
$$(2) \Rightarrow E_{t_2} = E_{t_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0$$

Zusammenfassung der x- und y- Anteile:

$$E_{x_2} = E_{n_2} \sin 30^\circ + E_{t_2} \cos 30^\circ = \frac{7}{8} E_0$$
$$E_{y_2} = -E_{n_2} \cos 30^\circ + E_{t_2} \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} E_0$$

Bestimmung von $\vec{D}_2$ aus der Materialgleichung:

$$(4) \Rightarrow \vec{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} \vec{E}_2 = \frac{7}{4} \varepsilon_0 E_0 \vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{4} \varepsilon_0 E_0 \vec{e}_y$$

5. Aufgabe

Die Aufgabe wird mit der Methode: Satz vom Hüllenfluß & Symmetrie (Skript Kapitel 3.3) gelöst. Ausgangspunkt ist die Maxwellgleichung

$$\oint \vec{D}\, d\vec{f} = \int \varrho\, dv$$

Die Ladungsverteilung ist kugelsymmetrisch $\Rightarrow \vec{E} = E_r(r)\vec{e}_r$, Rechnung in Kugelkoordinaten. Außerdem gilt $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Linke Seite der Gleichung:

$$\oint \vec{D}\, d\vec{f} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon_0 E_r(r)\; \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{1}\; r^2 \underbrace{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}_{4\pi} = \varepsilon_0 E_r(r) \;\cdot\; 4\pi r^2$$

Dieses Zwischenergebnis gilt für alle kugelsymmetrischen Ladungsverteilungen
(konstant in ϑ, φ).

Rechte Seite:

Die Ladungsdichte ist für die beiden Bereiche $0 \leq r < R_0$ und $R_0 \leq r < \infty$ durch unterschiedliche Funktionen definiert. Die praktischste Vorgehensweise ist, die Ladung zunächst innerhalb eines Kugelvolumen mit dem Radius $r < R_0$ zu bestimmen und dann die Ladung innerhalb eines Kugelvolumen mit Radius $r \geq R_0$ zu bestimmen.

Bereich 1 ($r \leq R_0$):

$$\begin{aligned}
\int \varrho\, dv &= \int_{r'=0}^{r}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} \varrho(r')\, r'^2 \underbrace{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}_{4\pi}\, dr' \\
&= 4\pi \int_0^r \frac{\varrho_1}{R_0^2}\, r'^2\, r'^2\, dr' \\
&= 4\pi \left[\frac{\varrho_1}{R_0^2}\, \frac{r'^5}{5}\right]_0^r \\
&= 4\pi \frac{\varrho_1}{R_0^2}\, \frac{r^5}{5} \; =: Q(r) \quad \text{(Ladung innerhalb der Kugel mit Radius } r\text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow E_r(r) &= \frac{4\pi \frac{\varrho_1}{R_0^2}\, \frac{r^5}{5}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\varrho_1\, r^3}{5\varepsilon_0\, R_0^2} \\
\vec{E}_1 &= \frac{\varrho_1}{5\varepsilon_0}\, \frac{r^3}{R_0^2}\, \vec{e}_r
\end{aligned}$$

Bereich 2 (Ladung innerhalb eines Kugelvolumens mit $R_0 \leq r < \infty$):

Das Kugelvolumen mit $r \geq R_0$ enthält auch den Bereich 1. Die Gesamtladung Q im Bereich 1 ist (s.o)

$$Q(R_0) = \frac{4}{5}\, \pi \varrho_1 R_0^3$$

Daraus folgt für $r \geq R_0$:

$$\int \varrho \, dv = \int\limits_{r'=R_0}^{r} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{\vartheta=0}^{\pi} \varrho(r') \, r'^2 \underbrace{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{4\pi} \, dr' + Q(R_0)$$
$$= 4\pi \int\limits_{R_0}^{r} \varrho_2 \, \frac{{R_0}^4}{r'^4} \, r'^2 \, dr' + Q(R_0)$$
$$= 4\pi\varrho_2 \left[-\frac{{R_0}^4}{r'} \right]_{R_0}^{r} + Q(R_0)$$
$$= 4\pi\varrho_2 {R_0}^3 \left(1 - \frac{R_0}{r} \right) + \frac{4}{5} \, \pi\varrho_1 {R_0}^3$$

Linke Seite auflösen nach E_r:

$$\Rightarrow E_r = \frac{4\pi\varrho_2 {R_0}^3 \left(1 - \frac{R_0}{r}\right) + \frac{4}{5} \, \pi\varrho_1 {R_0}^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$
$$= \frac{\varrho_2}{\varepsilon_0} \frac{{R_0}^3}{r^2} \left(1 - \frac{R_0}{r} \right) + \frac{\varrho_1}{5\varepsilon_0} \, \frac{{R_0}^3}{r^2}$$

$$\vec{E}_2 = E_r \, \vec{e}_r$$

6. Aufgabe

a) Formelsammlung

$$\varPhi(r_2) - \varPhi(r_1) = - \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{E_0}{r_0} \, r' \, e^{-r'/r_0} \, dr'$$

Randbedingungen: $r_2 = r$; $r_1 = \infty$; $\varPhi(\infty) = 0$
Substitution: $\tilde{r} = r'/r_0; \; dr' = r_0 d\tilde{r}$

$$\varPhi(r) - 0 = - \int\limits_{\infty}^{r/r_0} E_0 \, \tilde{r} \, e^{-\tilde{r}} \, r_0 d\tilde{r}$$
$$= E_0 r_0 \, e^{-r/r_0} \left(\frac{r}{r_0} + 1 \right)$$
$$\Rightarrow \varPhi(r) = E_0 \, e^{-r/r_0} \, (r + r_0)$$

b) Nur E_r-Komponente $\Rightarrow$ Kugelsymmetrie. Es gilt die 1. Maxwellgleichung in Differentialform

$$div\vec{D} = \varrho$$
$$\Leftrightarrow div\vec{E} = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$

$div\vec{E}$ in Kugelkoordinaten mit $E_\vartheta = E_\varphi = 0$ (Formelsammlung 4.)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 E_r(r)\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$
$$\frac{E_0}{r_0}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^3 e^{-r/r_0}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$
$$\frac{E_0}{r_0}\frac{1}{r^2}\left(3r^2 e^{-r/r_0} - \frac{r^3}{r_0}e^{-r/r_0}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon_0}$$
$$\varrho = \frac{E_0\varepsilon_0}{r_0}\left(3 - \frac{r}{r_0}\right)e^{-r/r_0}$$

Aufgabe 7

a) Raumladungsdichten:

$R \leq R_a :$ $\quad D_R \;=\; \varepsilon_0 E_R \;=\; \varrho_0 \frac{R^2}{R_a}$

$$\mathrm{div}\vec{D} \;=\; \varrho \;=\; \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{R}{R_a}\,D_R\right) \;=\; \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\,R\,\varrho_0\,\frac{R^2}{R_a}$$
$$=\; 3\,\varrho_0\,\tfrac{R}{R_a}$$

$R_a < R \leq R_b :$ $\quad \vec{E} \;=\; 0 \qquad \varrho \;=\; 0$

$R_b < R \leq R_c :$ $\quad D_R \;=\; \varrho_0\,\frac{R_a^2}{R}$

$$\varrho \;=\; \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\varrho_0\,\frac{R_a^2}{R}\right) \;=\; 0$$

$R_c < R :$ $\vec{E} \;=\; 0 \qquad \varrho \;=\; 0$

Flächenladungsdichten:

$\sigma \;=\; D_{N2} \;-\; D_{N1}$

$\sigma_a \;=\; -\varrho_0\,\frac{R_a^2}{R_a} \;=\; -\varrho_0\,R_a$

$\sigma_b \;=\; +\varrho_0\,\frac{R_a^2}{R_b}$

$$\sigma_c = -\varrho_0 \frac{R_a^2}{R_c}$$

b) $\Phi(\infty) = 0$

$$R > R_c : \qquad E = 0 \qquad \to \Phi = 0$$

$$R_b < R \le R_c : \qquad \Phi(R) - \Phi(R_c) = -\int\limits_{R_c}^{R} \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \frac{R_a^2}{R'} \, dR' \qquad \Phi(R_c) = 0$$

$$= -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} R_a^2 \ln \frac{R}{R_c}$$

$$R_a < R \le R_b : \qquad \vec{E} = 0 \qquad \to \Phi = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} R_a^2 \ln \frac{R_b}{R_c}$$

$$R \le R_a : \ \Phi(R) - \Phi(R_a) = -\int\limits_{R_a}^{R} \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{R_a} \, dR$$

$$\Phi(R) = -\left[\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{3} \frac{R^3}{R_a}\right]_{R_a}^{R} - \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} R_a^2 \ln \frac{R_b}{R_c}$$

$$\Phi(R) = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{R^3}{R_a} - R_a^2\right) + R_a^2 \ln \frac{R_b}{R_c}\right]$$