Elektromagnetische Felder

SS 2019

Musterlösung zur 4. Übung

10. Aufgabe

a) Auf den Leitern befinden sich die Ladungen Q_1 und Q_2. Wegen der Kugelsymmetrie folgt

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e}_r$$

Das elektrische Feld wird mit dem Satz vom Hüllenfluß berechnet

$$\oint \varepsilon \vec{E}\, d\vec{f} = \int \varrho\, dv$$

Innerhalb des ersten Leiters befindet sich keine Ladung, deshalb gilt

$$\vec{E} = 0 \text{ für } 0 < r < a$$

Zwischen den Leitern gilt für das Feld (nur Leiter 1 innerhalb der Integrationsfläche)

$$4\pi\varepsilon r^2 E_r = Q_1 \Rightarrow E_r = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2} \text{ für } a \leq r < b$$

Für den Bereich ausserhalb des Leiter 2 schließt die Integrationsfläche sowohl Q_1 als auch Q_2 ein. Für $\vec{E}$ gilt

$$E_r = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon r^2} \text{ für } b \leq r < \infty$$

Bei der Berechnung der Potentiale, muß von einem Punkt mit bekanntem Potential ausgegangen werden, das Potential im Unendlichen ist Null ($\phi(\infty) = 0$). Für $b \leq r < \infty$ gilt

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \phi(\infty) - \int_\infty^r E_r\, dr \\
&= 0 - \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \int_\infty^r \frac{1}{r^2}\, dr \\
&= -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r \\
&= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{r}
\end{aligned}$$

Auf dem Leiter 2 gilt

$$\phi_2 = \phi(b) = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{b}$$

Mit dem bekannten Potential ϕ_2 kann das Potential für $a \leq r < b$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}
\phi(r) &= \phi(b) - \int_b^r E_r \, dr \\
&= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{b} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\int_b^r \frac{1}{r^2}\, dr \\
&= \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{b} - \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^r \\
&= \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{b} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r} \\
\phi(a) &= \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{b} + \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a} = \phi_1
\end{aligned}$$

Damit gilt folgendes Gleichungssystem für die Ladungen und die Potentiale auf den Leitern

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{b} \\
\phi_2 &= \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{b} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{b}
\end{aligned}$$

Sind die Potentiale bekannt, und sollen die Ladungen berechnet werden, muß das Gleichungssystem nach Q_1 und Q_2 aufgelöst werden. Dieses einfache System kann natürlich durch elementare Umformungen der Gleichungen gelöst werden. Für kompliziertere Problem und bei Einsatz eines Computers ist die formale Darstellung, wie im Skript S. 95ff sinnvoll. Die beiden Gleichungen drücken die Potentiale durch Ladungen und Potentialkoeffizienten aus ($\phi_i = \sum_{k=1}^{2} p_{ik} Q_k$, in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1 \\ Q_2\end{bmatrix}$$

b) Sollen die Ladungen bei bekannten Potentialen ϕ_i berechnet werden muß die inverse Matrix berechnet werden.
Mit

$$\begin{bmatrix}A & B \\ C & D\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{AD - BC}\begin{bmatrix}D & -B \\ -C & A\end{bmatrix}$$

erhält man:

$$\begin{bmatrix}Q_1 \\ Q_2\end{bmatrix} = \frac{4\pi\varepsilon}{b-a}\begin{bmatrix}ab & -ab \\ -ab & b^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1 \\ \phi_2\end{bmatrix}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{4\pi\varepsilon ab(\phi_1 - \phi_2)}{b-a} \\
Q_2 &= \frac{4\pi\varepsilon b(-a\phi_1 + b\phi_2)}{b-a}
\end{aligned}$$

c) Die Gesamtenergie eines statischen Systems aus Ladungen ist das Integral des elektrischen Feldes zum Quadrat über das gesamte Volumen. Rechnung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}\int \epsilon E^2\,dv \\
&= 2\pi\varepsilon \int_a^b \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 r^2\,dr + 2\pi\varepsilon \int_b^\infty \left(\frac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\right)^2 r^2\,dr \\
&= \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b + \frac{(Q_1+Q_2)^2}{8\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r}\right]_b^\infty \\
&= \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) + \frac{(Q_1+Q_2)^2}{8\pi\varepsilon}\frac{1}{b} \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1^2}{a} + \frac{2Q_1Q_2}{b} + \frac{Q_2^2}{b}\right)
\end{aligned}$$

Mit der Formel aus dem Skript S. 112 kann die Energie als Funktion der Ladungen und Potentialkoeffizienten berechnet werden

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}Q_1 & Q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(p_{11}Q_1^2 + p_{12}Q_1Q_2 + p_{21}Q_2Q_1 + p_{22}Q_2^2) \\
&= \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1^2}{a} + \frac{2Q_1Q_2}{b} + \frac{Q_2^2}{b}\right)
\end{aligned}$$

Analog mit der Influenzkoeffizientenmatrix

$$\begin{aligned}
W_e &= \frac{1}{2}(c_{11}\phi_1^2 + c_{12}\phi_1\phi_2 + c_{21}\phi_2\phi_1 + c_{22}\phi_2^2 \\
&= \frac{2\pi\varepsilon}{b-a}\left(ab\phi_1^2 - 2ab\phi_1\phi_2 + b^2\phi_2^2\right)
\end{aligned}$$

d) Auf den beiden Leitern befindet sich die gleiche Ladungsmenge mit umgekehrtem Vorzeichen ($Q_2 = -Q_1 = Q$).

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= (p_{11} - p_{12})Q_1 \\
\phi_2 &= (p_{21} - P_{22})Q_1
\end{aligned}$$

Es gilt $U = \phi_1 - \phi_2$ und $C = \left|\frac{Q}{U}\right|$. Daraus folgt:

$$U = (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22})\,Q$$

$$\begin{aligned}
C_{ges} &= (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22})^{-1} \\
&= 4\pi\epsilon\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

Vergleichen Sie diese Lösung mit der Kapazität eines Kugelkondensators (Skript S. 89).

11. Aufgabe

a) Elektrisches Feld : Satz von Gauss:

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = \int \varrho dv$$

$$\oint \vec{D} d\vec{f} = 2\pi R\, L\, D_R$$

$$\begin{aligned}
R < R_a &: \quad D_R = 0 & E_R &= 0 \\
R_a \le R < 2R_a &: \quad D_R = \frac{Q}{2\pi R\, L} & E_R &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_a\, L} \\
2R_a \le R < 3R_a &: \quad D_R = 0 & E_R &= 0 \\
3R_a \le R < 4R_a &: \quad D_R = \frac{Q}{2\pi R\, L} & E_R &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R\, L} \\
4R_a \le R &: \quad D_R = 0 & E_R &= 0
\end{aligned}$$

Skalarpotential

$$4R_a \le R \; : \qquad \Phi(R) = 0$$

$$3R_a \le R \le 4R_a \; : \qquad \Phi(R) - \Phi(4R_a) = -\int\limits_{4R_a}^{R} E_R\, dR' = -\int\limits_{4R_a}^{R} \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R'\, L}\, dR'$$

$$\begin{aligned}
\Phi(R) &= -\left[\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, L} \ln R'\right]_{4R_a}^{R} \\
&= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, L} \ln \frac{R}{4R_a} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, L} \ln \frac{4R_a}{R}
\end{aligned}$$

$$2R_a \le R \le 3R_a \; : \qquad \Phi(R) = konst. = \Phi(3R_a) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, L} \ln \frac{4}{3}$$

$$R_a \le R \le 2R_a \; : \qquad \Phi(R) - \Phi(2R_a) = -\int\limits_{2R_a}^{R} E_R\, dR' = -\int\limits_{2R_a}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_a\, L}\, dR'$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_a\, L} \left[R'\right]_{2R_a}^{R} \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_a\, L} (2R_a - R)
\end{aligned}$$

$$\Phi(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_a\, L} (2R_a - R) + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, L} \ln \frac{4}{3}$$

$$R \leq R_a : \qquad \Phi(R) = \Phi(R_a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L} + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln\frac{4}{3}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}(1 + 2\ln\frac{4}{3})$$

Ladung

$$U = \Phi(R_a) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}(1 + 2\ln\frac{4}{3})$$

$$\Rightarrow Q = U\frac{4\pi\varepsilon_0 L}{1 + 2\ln\frac{4}{3}}$$

b) Es gibt keine Raumladungen sondern nur Flächenladungen:

$$\sigma \; = \; D_{N2} \; - \; D_{N1}$$

$$R = R_a : \quad \sigma = \frac{Q}{2\pi R_a L}$$

$$R = 2R_a : \quad \sigma = -\frac{Q}{4\pi R_a L}$$

$$R = 3R_a : \quad \sigma = \frac{Q}{6\pi R_a L}$$

$$R = 4R_a : \quad \sigma = -\frac{Q}{8\pi R_a L}$$

c) Kapazität:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0 L}{1 + 2\ln\frac{4}{3}}$$

d) Maximales E-Feld im Kondensator:

$$E_{max} = E_D = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_a L} = U\frac{4\pi\varepsilon_0 L}{4\pi\varepsilon_0 R_a L}\frac{1}{\left(1 + 2\ln\frac{4}{3}\right)}$$

$$= \frac{U}{R_a\left(1 + 2\ln\frac{4}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow R_a = \frac{U}{E_D\left(1 + 2\ln\frac{4}{3}\right)}$$

Die Kapazität ist in diesem speziellen Fall unabhängig von R_a. Es gilt:

$$L = C_0\frac{1 + 2\ln\frac{4}{3}}{4\pi\varepsilon_0}$$

Skizze