Elektromagnetische Felder

SS 2019

Musterlösung zum 1. Tutorium

1. Aufgabe (*)

Zur Einleitung etwas Grundsätzliches über Flächen-, Volumen-, und Linienintegrale. Die Integration ist am einfachsten, wenn das gewählte Koordinatensystem der Symmetrie der geometrischen Anordnung, also der Fläche, Linie oder des Volumens entspricht. Die Transformation des Feldes in ein anderes Koordinatensystem ist meistens einfacher als die Transformation der Fläche, des Volumens oder der Linie. Differentialoperationen div, grad, rot und Δ können in beliebigen Koordinatensystemen berechnet werden, das Ergebnis ist immer gleich.

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = 5z\,\vec{e}_z$$

a) Die Integrationsoberfläche ist kugelsymmetrisch. Die Transformation von Vektorfeldern in ein anderes Koordinatensystem wird in 2 Schritten durchgeführt:

1) Transformation der Komponenten des Vektorfeldes (Skript S. 23)
2) Transformation der Variablen (Ortsvektoren) (Skript S. 22)

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_r \\ A_\vartheta \\ A_\varphi \end{pmatrix} = A_r\,\vec{e}_r + A_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + A_\varphi\,\vec{e}_\varphi \qquad \text{in Kugelkoordinaten}$$

1) $A_r = A_z \cos\vartheta = 5z\,\cos\vartheta$
$A_\vartheta = -A_z \sin\vartheta = -5z\,\sin\vartheta$
$A_\varphi = 0$

2) $z = r\cos\vartheta$

$$\Rightarrow \vec{A} = 5r\cos^2\vartheta\,\vec{e}_r - 5r\sin\vartheta\cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta$$

Die Oberfläche einer Kugel um den Ursprung zeigt in r-Richtung. Das infinitesimale Flächenelement ist gleich

$$d\vec{f} = \vec{e}_r\, r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

.

$$\int \vec{A}\, d\vec{f} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} 5r\left(\cos^2\vartheta\,\vec{e}_r - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\vec{e}_\vartheta\right)\cdot\vec{e}_r r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_r = 1 \qquad \vec{e}_\vartheta\cdot\vec{e}_r = 0$$

Über r wir nicht integriert. Terme mit r können vor das Integral gezogen werden.

$$= 5r^3\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

Der Integrant hängt nicht von φ ab, $[\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi$.

$$= 10\pi r^3\int\limits_0^{\pi}\cos^2\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta$$

Ein schwieriges Integral: Entweder hilft ein Trick aus $HM \rightarrow \int g' f(g) = F(g)$ oder eine Integraltabelle (Bronstein). -$\sin\vartheta$ ist die innere Ableitung von $\cos^2\vartheta$.

$$\begin{aligned}
&= -\,10\pi r^3\left[\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^{\pi}\\
&= -\,\frac{10}{3}\pi r^3\,[-1-1]\\
&= \frac{20\pi\, a^3}{3}
\end{aligned}$$

b) div$\vec{A}$ in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A} =& \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\\
=& 0 + 0 + 5 = 5
\end{aligned}$$

In Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A} =& \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\vartheta\sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\\
=& \frac{5}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}(r^3\cos^2\vartheta) - \frac{5}{r\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}(r\sin^2\vartheta\cos\vartheta)\\
=& 15\cos^2\vartheta - \frac{5}{\sin\vartheta}(2\sin\vartheta\cos^2\vartheta - \sin^3\vartheta)\\
=& 15\cos^2\vartheta - 10\cos^2\vartheta + 5\sin^2\vartheta\\
=& 5(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)\\
=& 5
\end{aligned}$$

c) Zunächst wird das Volumenelement in Kugelkoordinaten benötigt:

$$dv = r^2 \sin\vartheta \; dr \; d\vartheta \; d\varphi$$

Integrationsgrenzen: $r = 0 \ldots a, \vartheta = 0 \ldots \pi, \varphi = 0 \ldots 2\pi$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} 5r^2 \sin\vartheta \; dr \; d\vartheta \; d\varphi &= 2\pi \int_0^{\pi}\int_0^{a} 5r^2 \sin\vartheta \; dr \; d\vartheta \\
&= 2\pi \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} \int_0^{a} 5r^2 dr \\
&= 4\pi \left[\frac{5}{3} r^3\right]_0^a \\
&= \frac{20\pi \, a^3}{3}
\end{aligned}$$

Dies bestätigt den Gaußschen Satz:

$$\int \mathrm{div}\vec{A} \cdot dv = \oint \vec{A} \, d\vec{f}$$

Natürlich kann man sich hier die ganze Integriererei auch komplett sparen: $\mathrm{div}\vec{A} = 5 = \mathrm{const.}$

$$\Rightarrow \int \mathrm{div}\vec{A} \cdot dv = \mathrm{div}\vec{A} \cdot \text{Volumen der Kugel} = 5 \cdot \frac{4\pi}{3} a^3$$

2. Aufgabe (*)

a) Transformation der Vektorkomponenten von $\vec{A}$ in Zylinderkoordinaten (Skript S. 23)

$$\vec{A} = 2y \, \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_R &= A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi = 2y \cos\varphi \\
A_\varphi &= -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi = -2y \sin\varphi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = 2y \cos\varphi \, \vec{e}_R - 2y \sin\varphi \, \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 2y\cos\varphi \\ -2y\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformation der Variablen (Skript S. 22)

$$\begin{aligned}
y &= R \sin\varphi \\
\Rightarrow \vec{A} &= 2R \sin\varphi \cos\varphi \, \vec{e}_R - 2R \sin^2\varphi \, \vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Integration des Feldes entlang eines Kreises um den Ursprung:
Der Integrationsweg verläuft immer in φ-Richtung. Benötigt wird das Linienelement $d\vec{s}$ in φ-Richtung (Skript S. 24).

$$d\vec{s} = \vec{e}_\varphi \, R \, d\varphi$$

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int 2R \left(\sin\varphi \cos\varphi \, \vec{e}_R - \sin^2 \varphi \vec{e}_\varphi \right) \cdot \vec{e}_\varphi \, R \, d\varphi$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = 1 \qquad \vec{e}_R \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \qquad \varphi = 0 \ldots 2\pi$$

$$\int \vec{A} \cdot d\vec{s} = -2R^2 \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

$\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi$ ist ein schwieriges Integral, das Ergebnis sollte aber aus der Wechselstromtechnik bekannt sein. Ansonsten kann in einer Integraltabelle (Bronstein) nachgeschlagen werden.

$$\begin{aligned} \int \vec{A} \cdot d\vec{s} &= -\, 2R^2 \left[\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right]_0^{2\pi} \\ &= -\, 2R^2 \pi \\ &= -\, 2a^2 \, \pi \end{aligned}$$

b) Rotation:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{A} &= \vec{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \\ &= -2 \, \vec{e}_z \end{aligned}$$

Wie in Aufgabe 1 gelernt, sollte $\operatorname{rot} \vec{A}$ nicht unbedingt in Zylinderkoordinaten berechnet werden.

c) $\int \operatorname{rot} \vec{A} \, d\vec{f}$

Das Flächenelement des Kreises zeigt in z-Richtung. $d\vec{f} = \vec{e}_z \, R \, dR \, d\varphi$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} -2\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \, R \, dR \, d\varphi &= -2 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} R \, dR \, d\varphi \\ &= -2 \left[\varphi \right]_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} R \, dR \\ &= -4\pi \left[\frac{1}{2} R^2 \right]_0^{a} \\ &= -2\pi \, a^2 \end{aligned}$$

Es geht auch noch einfacher:
$\operatorname{rot}\vec{A} = -2\,\vec{e}_z = \text{const}$ und senkrecht zur Kreisfläche in der xy-Ebene.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \int \operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{f} &= -2\cdot \text{Flächeninhalt des Kreises}\\ &= -2\pi\, a^2\end{aligned}$$

Dies bestätigt den den Stokesschen Satz:

$$\int \operatorname{rot}\vec{A}\, d\vec{f} = \oint \vec{A}\cdot d\vec{s}$$

3. Aufgabe (*)

a)

$$\begin{aligned}\vec{A} = \operatorname{grad}\phi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{pmatrix} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{e}_z\\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y \\ 0\end{pmatrix} = 2xy^2\,\vec{e}_x + 2x^2y\,\vec{e}_y\end{aligned}$$

b) $\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$

A_z ist gleich 0 und $A_{x,y}$ hängt nicht von z ab, also ist

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = 0\cdot\vec{e}_x + 0\cdot\vec{e}_y + (4xy - 4xy)\,\vec{e}_z = 0$$

Die Rotation verschwindet bei beliebigen Gradientenfeldern.

$$\boxed{\text{rot grad}\,\Psi \equiv 0}$$

Beweis Skript Kapitel 1.3

c) $\vec{A}$ in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}A_R &= A_x\cos\varphi + A_y\ sin\varphi\\ &= 2xy^2\cos\varphi + 2x^2y\ sin\varphi\\ &= 2R^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi + 2R^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi\\ &= 4R^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_\varphi &= A_x \sin\varphi + A_y\ cos\varphi \\
&= -2xy^2 \sin\varphi + 2x^2 y\ cos\varphi \\
&= -2R^3 \cos\varphi \sin^3\varphi + 2R^3 \cos^3\varphi \sin\varphi \\
&= 2R^3 \cos\varphi \sin\varphi(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \vec{A} = A_R\, \vec{e}_R + A_\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

$\vec{A}$ hat keine z-Komponente. Somit tragen die Stirnflächen des Zylinders nichts zum Integral bei ($\vec{A} \cdot \vec{e}_z = 0$).

Zur Integration über den Zylindermantel wird das Flächenelement des Zylinders in R-Richtung benötigt.

$$d\vec{f} = \vec{e}_R\, R\, d\varphi\, dz$$

$$\int \vec{A}\, d\vec{f} = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} (A_R \vec{e}_R + A_\varphi \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_R\, R\, dz\, d\varphi$$

Für die Punktprodukte zwischen den Einheitsvektoren gilt:

$$\vec{e}_R \cdot \vec{e}_R = 1, \qquad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_R = 0$$

$$
\begin{aligned}
\int \vec{A}\, d\vec{f} &= \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \underbrace{A_R\, R}_{\text{unabhängig von } z}\, dz\, d\varphi \\
&= \ell \int\limits_0^{2\pi} 4R^3 R \cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi \\
&= 4R^4 \ell \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi\ \sin^2\varphi\, d\varphi
\end{aligned}
$$

Mit Integraltabelle

$$
\begin{aligned}
\int \vec{A}\, d\vec{f} &= 4\, R^4 \ell \left[\frac{\varphi}{8} - \frac{1}{32} \sin(4\varphi) \right]_0^{2\pi} \\
&= \pi \ell R^4 \\
&= \pi \ell a^4
\end{aligned}
$$

Alternativ kann das Oberflächenintegral auch mit dem Gaußchen Satz berechnet werden.

$$\int \mathrm{div}\vec{A}\, dv = \int \vec{A}\, d\vec{f}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\vec{A} &= 2y^2 + 2x^2 && \text{(in Zylinderkoordinaten umwandeln)}\\
&= 2R^2 sin^2\varphi + 2R^2\cos^2\varphi\\
&= 2R^2\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1}\\
&= 2R^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{div}\vec{A}\,dv &= \int\limits_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^a 2R^3 dR d\varphi\,dz\\
&= 4\pi\ell\int\limits_0^a R^3 dR\\
&= 4\pi\ell\left[\frac{1}{4}R^4\right]_0^a\\
&= \pi\ell a^4
\end{aligned}
$$

4. Aufgabe (**)

a) Rotation in Kugelkoordinaten (Skript Kapitel 1.5.4)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\,\vec{A} = \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}&\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\varphi\sin\vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right]\\
+\vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}&\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\\
+\vec{e}_\varphi\frac{1}{r}&\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right]
\end{aligned}
$$

Es gilt: $\quad \dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} = 0, \qquad \dfrac{\partial A_r}{\partial\vartheta} = 0, \qquad A_\vartheta = 0.$

$$
\begin{aligned}
\vec{B} := \mathrm{rot}\,\vec{A} &= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(2\sin\vartheta)\right] + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}(2r)\right]\\
&= \vec{e}_r\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[2\cos\vartheta\right] - \vec{e}_\vartheta\frac{2}{r}\\
&= \vec{e}_r\frac{2}{r\tan\vartheta} - \vec{e}_\vartheta\frac{2}{r}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{A}) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{2}{\tan\vartheta}\right) - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{2}{r}\sin\vartheta\right)\\
&= \frac{1}{r^2}\frac{2}{\tan\vartheta} - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{2}{r}\cos\vartheta\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Die Divergenz einer Rotation ist immer null (Beweis: Skript Kapitel 1.3).

$$\boxed{\text{div rot}\,\vec{A} \equiv 0}$$

$\Rightarrow$ Das Volumenintegral über die Kugel ist 0.
$\Rightarrow$ Das Oberflächenintegral ist 0.

c) Integrationsweg verläuft in φ-Richtung (in Kugelkoordinaten).
Linienelement in φ-Richtung: $d\vec{s} = \vec{e}_\varphi\, r\, \sin\vartheta\, d\varphi$

$$\int \vec{A}\, d\vec{s} = \int (r\,\vec{e}_r + 2\,\vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_\varphi\, r\, \sin\vartheta\, d\varphi$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0, \qquad \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = 1$$

$$= \int_0^{2\pi} 2r \sin\vartheta\, d\varphi$$

$$= 4\pi r \sin\vartheta$$

Für die xy-Ebene gilt $\quad \vartheta = \frac{\pi}{2}; \quad$ außerdem ist $r = a$

$$\Rightarrow \int \vec{A}\, d\vec{s} = 4\,\pi\, a$$

Alternative Berechnung mit dem Stokesschen Satz:

$$\int \text{rot}\vec{A}\, d\vec{f} = \int \vec{A}\, d\vec{s}$$

Nach dem Satz von Stoke kann man über jede Fläche integrieren, die von dem ursprünglichen Integrationsweg begrenzt wird. Also hier die obere oder untere Hemisphäre oder die Kreisfläche (Scheibe) in der xy-Ebene mit Radius a. Dabei ist die Orientierung des Flächenelements durch Umlaufsinn des ursprünglichen Integrationswegs bestimmt.

Berechnung mit Scheibe ($\vartheta = \frac{\pi}{2} = \text{const}$):

$$d\vec{f} = \underbrace{(-1)}_{Orientierung} \cdot \vec{e}_\vartheta\, r\, \underbrace{sin\vartheta}_{=1}\, dr d\varphi$$

$$\int \mathrm{rot}\vec{A}\,d\vec{f} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\left(\frac{2}{r\tan\vartheta}\,\vec{e}_r - \frac{2}{r}\,\vec{e}_\vartheta\right)\cdot\vec{e}_\vartheta\,r\,drd\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{2}{r}\underbrace{\vec{e}_\vartheta\vec{e}_\vartheta}_{1}\,r\,drd\varphi$$
$$= 4\pi\int_0^{a} 1\,dR$$
$$= 4\pi a$$

Zusatz:

Es wird nun noch die Berechnung der Oberflächenintegrals nach Stokes mit Zylinderkoordinaten gezeigt. Dies bietet hier keinen rechnerischen Vorteil; soll jedoch zeigen, dass es unerheblich ist, welches Koordinatensystem man benutzt.

Transformation von $\vec{B}$ in Zylinderkoordinaten:

Komponenten:

$$\begin{aligned}
A_R &= A_r\sin\vartheta + A_\vartheta\cos\vartheta\\
&= \frac{2}{r\tan\vartheta}\sin\vartheta - \frac{2}{r}\cos\vartheta\\
&= 0\\
A_\varphi &= A_\varphi = 0\\
A_z &= A_r\cos\vartheta - A_\vartheta\sin\vartheta\\
&= \frac{2}{r\tan\vartheta}\cos\vartheta + \frac{2}{r}\sin\vartheta\\
&= \frac{2\cos^2\vartheta}{r\sin\vartheta} + \frac{2}{r}\sin\vartheta\\
&= \frac{2}{r\sin\vartheta}\left(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\right)\\
&= \frac{2}{r\sin\vartheta}
\end{aligned}$$

Variablen:

$$r = \sqrt{R^2+z^2} \qquad \vartheta = \arctan\frac{R}{z} \qquad \text{Es gilt: } \sin\arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$A_z = 2/\left(\sin\left(\arctan\frac{R}{z}\right)\sqrt{R^2+z^2}\right) = \frac{2\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}}{\frac{R}{z}\sqrt{R^2+z^2}} = \frac{2}{R}$$

Integriert wird über eine Kreisfläche in der xy-Ebene $\Rightarrow z = 0$.

$$\Rightarrow A_z = \frac{2}{R}$$

Flächenelement in z-Richtung in Zylinderkoordinaten: $d\vec{f} = \vec{e}_z R dR d\varphi$

$$\Rightarrow \int \vec{A} d\vec{f} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{2}{R} \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{1} R dR d\varphi$$

$$= 4\pi \int_0^a 1 dR$$

$$= 4\pi a$$