Karlsruher Institut für Technologie

Elektrotechnisches Institut

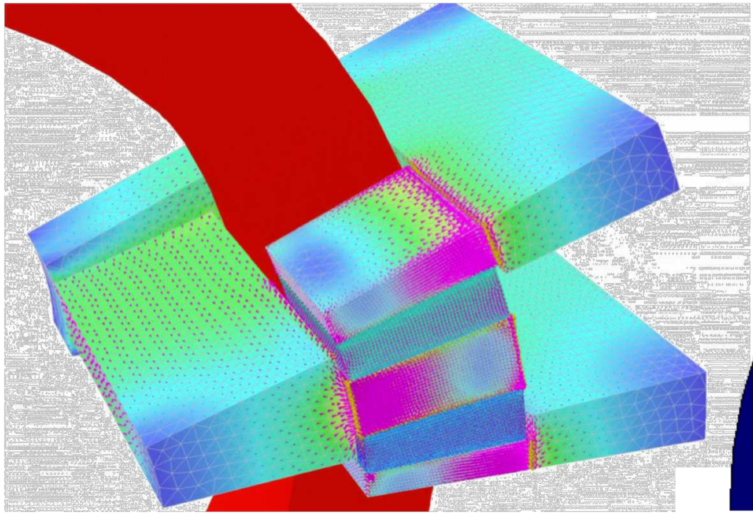
Vorlesung

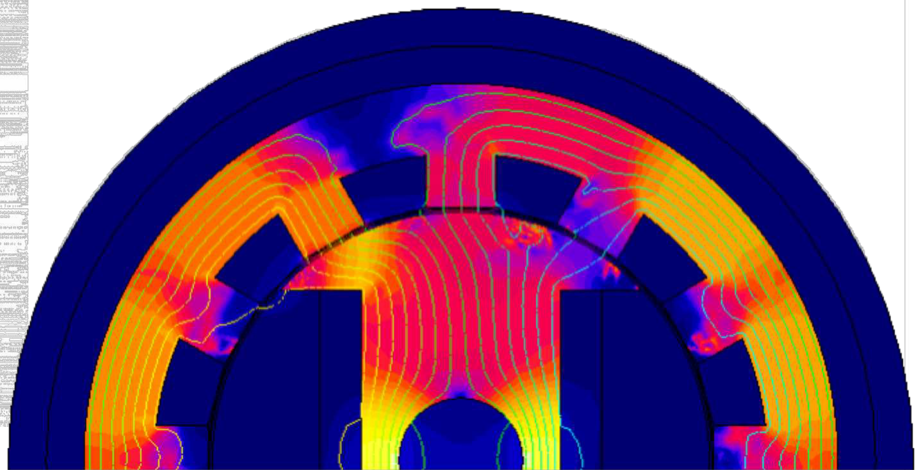
Elektrische und magnetische Felder (EMF)

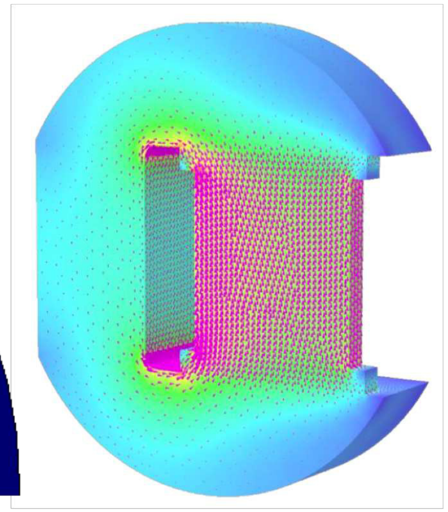
SS 2019

Kapitel 1: Mathematische und physikalische Grundlagen

Elektrotechnisches Institut (ETI)







Gliederung

1. **Größen, Einheiten und Schreibweisen**
2. **Ableitungsregeln**
3. **Skalarfelder und Vektorfelder**
4. **Integrale in der Feldtheorie**
5. **Differentialoperatoren in der Feldtheorie**
6. **Integralsätze (Gaußscher Satz, Stokescher Satz)**
7. **Koordinatensysteme (Kartesisch, Zylinder, Kugel)**

Richtige Schreibweise (schon seit über 20 Jahren gemäß DIN 461, DIN 1313 und EN ISO 80000-1):

U = 5 V	U ist das **Symbol** der Größe, immer **kursiv** in **Times Roman** geschrieben 5 ist die Maßzahl, der **Wert** der Größe V ist die Maßeinheit, die **Einheit** der Größe (**Arial**, **gerade gesetzt**) **Indices** werden ebenfalls **gerade in Arial** gesetzt, z.B. U_0 = 5 V
[U] = V	[] heißt: „**Einheit von...**“, also hier: „Die Einheit von U ist Volt“
dim U = V	Alternative Schreibweise
U in Volt	Alternative Schreibweise
U / V	Alternative Schreibweise
{U} = 5	{} heißt: „**Wert von ...**“, also hier: „Der Wert von U ist 5“
U = {U} · [U]	Größe = Zahlenwert · Einheit

Quelle: https://karriere.rohde-schwarz.de/fileadmin/customer/downloads/PDF/Der_korrekte_Umgang_mit_Groessen_Einheiten_und_Gleichungen_bro_de_01.pdf

Falsche Schreibweise: x [mm] ➞ „Die Einheit von mm ist ... ????“
(aber häufig zu sehen)
Richtig wäre: **x in mm** oder auch **x / mm**

SI-Basiseinheiten
(Système international d'unités)

Basisgröße	Einheit	Größen-symbol (exemplarisch)	Einheiten-zeichen
Länge	Meter	ℓ	m
Masse	Kilogramm	m	kg
Zeit	Sekunde	t	s
Stromstärke	Ampere	I	A
Temperatur	Kelvin	T, ϑ	K
Stoffmenge	Mol		mol
Lichtstärke	Candela		cd

Vorsätze für Maßeinheiten
(SI-Präfixe)

a	Atto	10^{-18}
f	Femto	10^{-15}
p	Piko	10^{-12}
n	Nano	10^{-9}
µ	Mikro	10^{-6}
m	Milli	10^{-3}
c	Zenti	10^{-2}
d	Dezi	10^{-1}
-		
h	Hekto	10^{2}
k	Kilo	10^{3}
M	Mega	10^{6}
G	Giga	10^{9}
T	Tera	10^{12}
P	Peta	10^{15}
E	Exa	10^{18}

1. Größen und Einheiten III

Abgeleitete Größe	**Einheit**	**Größensymbol (exemplarisch)**	**Einheiten-zeichen**
Leistung	Watt	P	W
Arbeit, Energie, Wärmemenge	Joule	W	J = W·s W·h = 3600 W·s
Energiedichte		w	$\mathrm{J/m^3}$
Kraft	Newton	F	$\mathrm{N = kg \cdot m/s^2}$
Drehmoment		M	N·m
Frequenz	Hertz	f	1/s

1. Größen und Einheiten IV

Abgeleitete Größe	Einheit	Größensymbol (exemplarisch)	Einheiten-zeichen
Spannung	Volt	U	V
Stromdichte		J	A/m^2
Elektrischer Widerstand	Ohm	R	Ω = V/A
Elektrischer Leitwert	Siemens	G	S = 1/Ω = A/V
Elektrische Leitfähigkeit		γ	Sm/m^2 = S/m
Elektrische Ladung (elektrischer Fluss)	Coulomb	Q	C = A·s
Raumladungsdichte		ρ	A·s/m^3
Flächenladungsdichte		σ	A·s/m^2
Elektrische Feldstärke		E	V/m = N/C
Verschiebungsdichte (elektrische Flussdichte)		D	A·s/m^2
Elektrisches Potential	Volt	Φ	V
Elektrische Kapazität	Farad	C	F = A·s/V

Abgeleitete Größe	Einheit	Größensymbol (exemplarisch)	Einheiten-zeichen
Magnetischer Fluss	Weber	Φ	Wb = V·s
Magnetische Flussdichte (alt: Induktion)	Tesla	B	T = V·s/m^2
Magnetische Feldstärke		H	A/m
Induktivität	Henry	L	H = V·s/A

Feldkonstanten

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

$\mu_0 \cdot \varepsilon_0 = 1 / c^2$, daraus $\varepsilon_0 = 1 / (\mu_0 \cdot c^2) = 8{,}854\ldots \cdot 10^{-12}$ (As)/(Vm)

$c = 299\,792\,468$ m/s

Material (technisch verarbeitet)	**Elektrische Leitfähigkeit γ bei 20 °C**	**Temperatur-koeffizient α_{20}**
Silber	$61 \cdot 10^6$ Sm/m²	$3{,}8 \cdot 10^{-3}$
Kupfer	**56** $\cdot 10^6$ Sm/m²	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
Gold	$45 \cdot 10^6$ Sm/m²	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	**33** $\cdot 10^6$ Sm/m²	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$
Elektroblech (4% Si)	$9 \cdot 10^6$ Sm/m²	$0{,}9 \cdot 10^{-3}$

Alternative Angabe statt Leitfähigkeit: Spezifischer Widerstand $\rho = 1 / \gamma$ mit $[\rho] = \Omega\text{m}^2/\text{m}$

Bestimmung der Leitfähigkeit über ein Drahtstück der Länge ℓ mit Querschnitt A: $\gamma = \ell / (R \cdot A)$
R = Elektrischer Widerstand

Änderung des elektrischen Widerstandes mit der Temperatur ϑ: $\boxed{R_\vartheta = R_{20} \cdot \left(1 + \alpha_{20} \cdot \Delta\vartheta_{20}\right)}$

Für Kupfer gilt: Pro 10 °C Temperaturerhöhung steigt der elektrische Widerstand um rund 4%.

1. Genitiv-S

In der englischen Sprache wird das Genitiv-S mit einem Apostroph abgetrennt,
in der deutschen Sprache <u>nicht</u>.

Richtig:

Kathy's Barber Shop, McDonald's — Englische Sprache – Genitiv-S mit Apostroph

Martinas Friseursalon, Andreas tolle Bude — Deutsche Sprache – Genitiv-S ohne Apostroph

Falsch (➞ Deppenapostroph):

Martina's Friseursalon, Ende des Leben's ➞ **Legasthenie 1. Grades** – Genitiv-S wird nicht getrennt

Foto's zum Mitnehmen, Unit's Querdenker ➞ **Legasthenie 2. Grades** – Ein Plural-S wird niemals abgetrennt, noch nicht einmal im Englischen

Bildquelle: www.apostrophitis.de

➞ **Legasthenie 3. Grades** – Zerteilung eines Wortes, falsche Großschreibung, unvollständiger Satz, ...

Eine weitere korrekte Verwendung des Apostrophs ist die Kombination von zwei Wörtern:
Geht es Dir gut? ➞ Geht's Dir gut?
Martina's Friseursalon ➞ Martina es Friseursalon ???

2. Differentiation

Linearität	$\frac{d}{dx}\left(a\cdot f(x)+b\cdot g(x)\right)=a\cdot f'(x)+b\cdot g'(x)$
Produktregel	$\frac{d}{dx}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$
Kettenregel	$\frac{d}{dx}f(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$
Partielle Ableitung	$\frac{\partial}{\partial x}f\left(x,y,z\right)=\frac{d}{dx}f\left(x,const,const\right)$

Bei der partiellen Ableitung werden alle anderen Variablen wie Konstanten behandelt. Die partielle Ableitung entspricht anschaulich der Steigung in eine Raumrichtung.

Beispiele zur partiellen Ableitung

Gegeben sei folgende Funktion: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$

Die partiellen Ableitungen sind:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{d}{dx} f(x, const, const) = 2x + 2yz$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \frac{d}{dy} f(const, y, const) = 2y + 2xz$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{d}{dz} f(const, const, z) = 2z + 2xy$$

Ein Beispiel mit Kettenregel: $f(x,y,z) = 4z \cdot \sin(2x + 3y)$

Substitution:
u=2x+3y
$d/du\ k \cdot \sin(u) = k \cdot \cos(u)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) = \frac{d}{dx} f(x, const, const) = 4z \cdot \cos(2x + 3y) \cdot 2$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y,z) = \frac{d}{dy} f(const, y, const) = 4z \cdot \cos(2x + 3y) \cdot 3$$

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z) = \frac{d}{dz} f(const, const, z) = 4 \cdot \sin(2x + 3y)$$

3. Skalarfelder und Vektorfelder I

Skalarfelder

Luftdruck	$p(x,y,z)$
Temperatur	$\vartheta(x,y,z)$
Elektrisches Potenzial	$\Phi(x,y,z)$
Raumladungsdichte	$\rho(x,y,z)$

Diskrete Beschreibung

x in mm	y in mm	z in mm	Φ in V
1	0	0	0,1
0	1	0	0,2
0	0	1	0,2
1	1	0	0,3

Analytische Beschreibung

$$\Phi(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Phi(\vec{r})$$

Skalarfeld

Ortsvektor

Vektorfelder

Luft-/Wasserströmung $\vec{v}(x,y,z)$

Vektorfelder der Elektrodynamik $\vec{E},\vec{D},\vec{P},\vec{H},\vec{B},\vec{M},\vec{J}$

$$\vec{E}(\vec{r}) \longrightarrow \vec{E} = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Vektorfeld Ortsvektor

Diskrete Beschreibung

x in mm	y in mm	z in mm	E_x in V/m	E_y in V/m	E_z in V/m
1	0	0	10	10	0
0	1	0	20	10	0
0	0	1	30	10	0
1	1	0	40	10	0

Komponenten des Ortsvektors | Komponenten des Vektorfeldes

Analytische Beschreibung

$$E_x = 0; \; E_y = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}; \; E_z = 0$$

Vektorfeld durch 6 Größen gekennzeichnet:
3 Größen für den Ort
3 Größen für den Wert in den drei Richtungen

Skalarprodukt

Zwei Vektoren wird eine Zahl (Skalar) zugeordnet

(inneres Produkt, Punktprodukt)

Beispiel: $\vec{F} \bullet \vec{s} = W \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = F_x \cdot s_x + F_y \cdot s_y + F_z \cdot s_z$

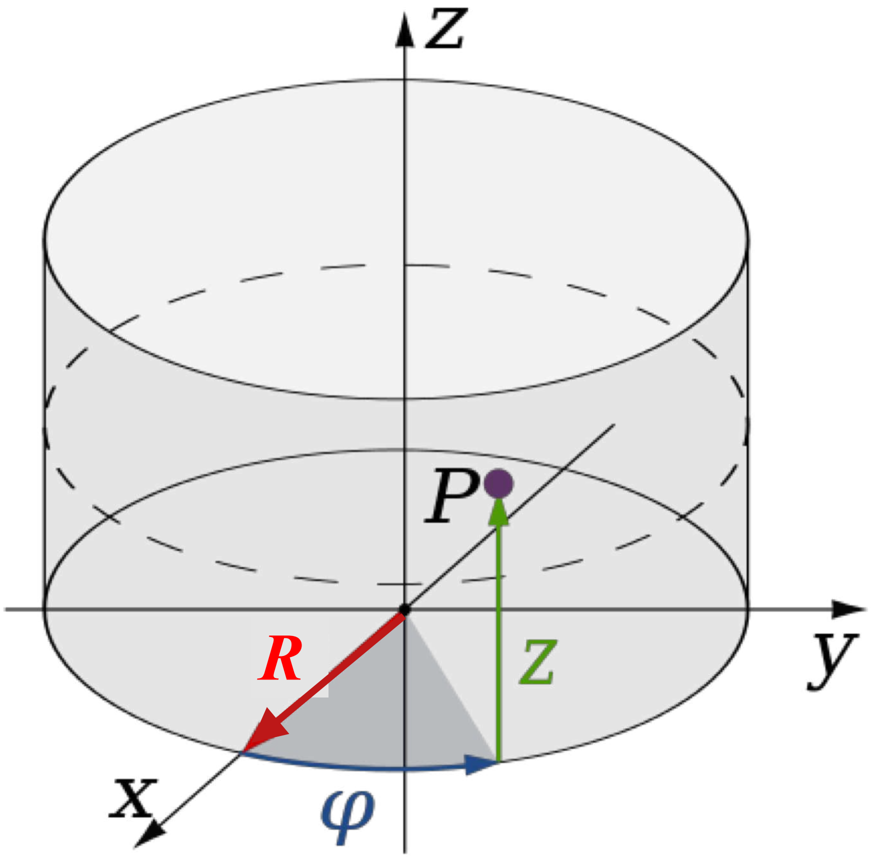
Vektorprodukt

Zwei Vektoren wird wieder ein Vektor zugeordnet

(Kreuzprodukt, vektorielles Produkt)

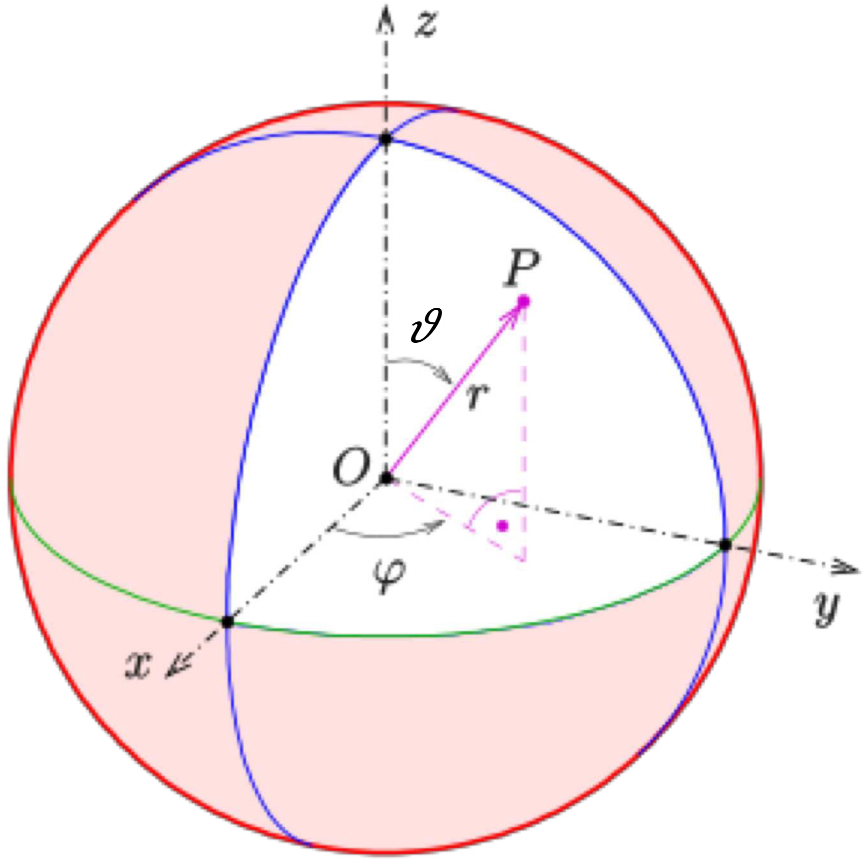
Beispiel: $i \cdot \left(\vec{l} \times \vec{B}\right) = \vec{F} \quad \rightarrow \quad i \cdot \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x = l_y B_z - l_z B_y \\ F_y = l_z B_x - l_x B_z \\ F_z = l_x B_y - l_y B_x \end{pmatrix}$

Zylinderkoordinaten



(R, φ, z)

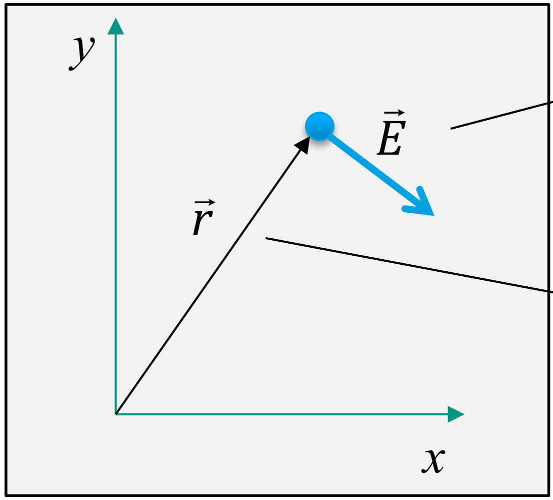
Kugelkoordinaten



(r, ϑ, φ)

Quelle: Wikipedia

Ortsvektor und Vektorfeld



Vektor des Vektorfeldes:
- Länge in V/m
- Richtung (Winkel) im Raum

Ortsvektor:
- Länge in m zum Raumpunkt
- Richtung (Winkel) zum Raumpunkt

Kartesische Koordinaten

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(x,y,z)\cdot\vec{e}_x + E_y(x,y,z)\cdot\vec{e}_y + E_z(x,y,z)\cdot\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = x\cdot\vec{e}_x + y\cdot\vec{e}_y + z\cdot\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = E_x\cdot\vec{e}_x + E_y\cdot\vec{e}_y + E_z\cdot\vec{e}_z$$

Zylinderkoordinaten

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\vartheta,z)\cdot\vec{e}_r + E_\vartheta(r,\vartheta,z)\cdot\vec{e}_\vartheta + E_z(r,\vartheta,z)\cdot\vec{e}_z$$

$$\vec{r} = r\cdot\vec{e}_r + \vartheta\cdot\vec{e}_\vartheta + z\cdot\vec{e}_z$$

$$\vec{E} = E_r\cdot\vec{e}_r + E_\vartheta\cdot\vec{e}_\vartheta + E_z\cdot\vec{e}_z$$

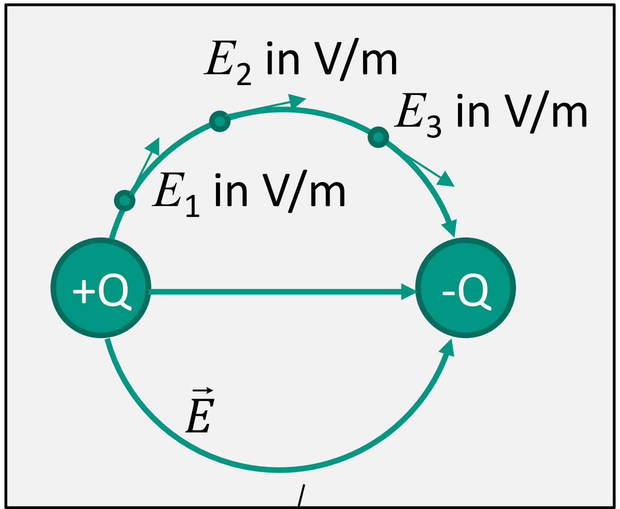
Kugelkoordinaten

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r,\vartheta,\varphi)\cdot\vec{e}_r + E_\vartheta(r,\vartheta,\varphi)\cdot\vec{e}_\vartheta + E_\varphi(r,\vartheta,\varphi)\cdot\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{r} = r\cdot\vec{e}_r + \vartheta\cdot\vec{e}_\vartheta + \varphi\cdot\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E} = E_r\cdot\vec{e}_r + E_\vartheta\cdot\vec{e}_\vartheta + E_\varphi\cdot\vec{e}_\varphi$$

Gibt es krumme Vektoren?



$\vec{E}$ ist <u>nicht</u> eine krumme Linie, die bei +Q beginnt und bei –Q endet.

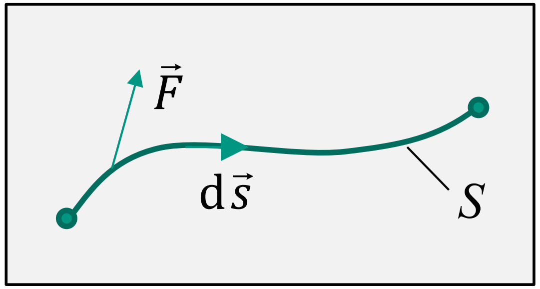
$\vec{E}$ ist vielmehr ein Vektorfeld:
An jeder Stelle im Raum, gekennzeichnet durch einen Ortsvektor $\vec{r}$, gibt es einen elektrischen Feldvektor $\vec{E}_i\left(\vec{r}_i\right)$ der individuellen Länge E_i in V/m und der Richtung $\vec{e}_i$:

$$\vec{E}_i\left(\vec{r}_i\right) = E_i \cdot \vec{e}_i$$

Die Krümmung der Feldlinien in der Zeichnung entsteht aus der Hintereinanderzeichnung der Folge von Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ an den Orten $\vec{r}$.

Wegintegral

z.B. Energie = Kraft · Weg $W = \int_S \vec{F} \bullet d\vec{s}$ S = Strecke



z.B. $\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y$

$d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x$

damit $\int_S \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_S \left(F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y\right) \bullet \left(dx \cdot \vec{e}_x\right)$

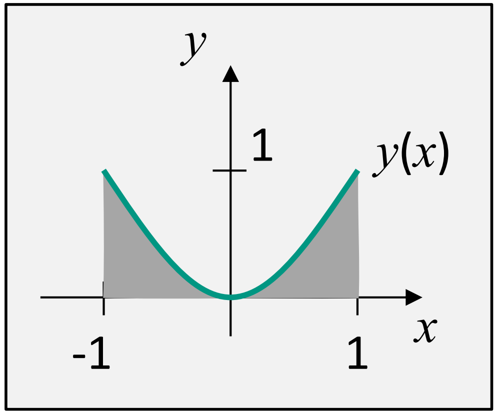
Sonderfall F = const.:

$$\int_S \vec{F} \bullet d\vec{s} == F_x \cdot S$$

4. Integrale: Linien, Flächen, Volumen II

Wegintegral

Einfaches Integral



Fläche unter der Kurve

Beispiel

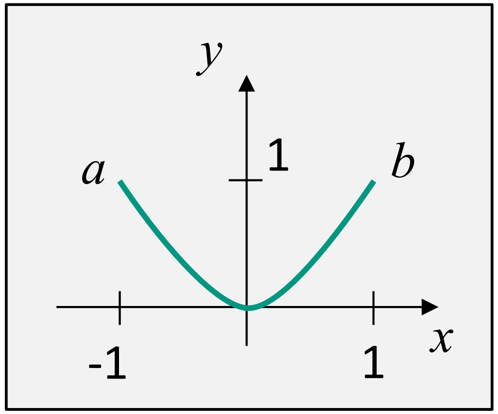
$$y(x) = x^2$$

$$\int y(x)\,dx = \int_{y=-1}^{y=1} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\big(1-(-1)\big) = \frac{2}{3}$$

Kurvenintegral 1. Art

f ist ein Skalar



Wegintegral einer Funktion $f(x,y)$

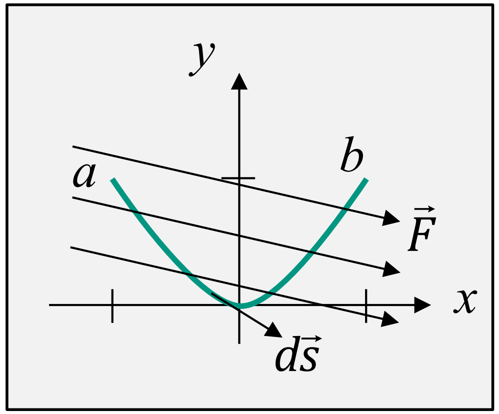
(Linien-, Weg- oder Konturintegral)

$$\boxed{\int_\gamma f \cdot ds = \int_a^b f\big(\vec{\gamma}(t)\big)\cdot\left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right|\cdot dt}$$

t ist eine Laufvariable, <u>nicht</u> die Zeit!

Kurvenintegral 2. Art

$\vec{F}$ ist ein Vektorfeld



Wegintegral eines

Vektorfeldes $\vec{F}(x,y)$

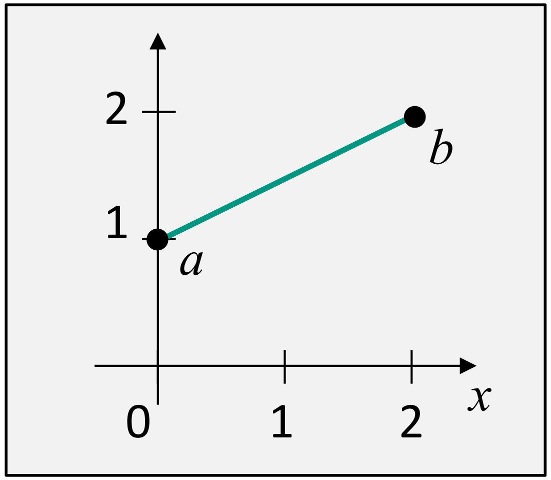
$$\boxed{\int_\gamma \vec{F}\bullet d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}\big(\vec{\gamma}(t)\big)\bullet\dot{\vec{\gamma}}(t)\cdot dt}$$

Hierbei muss das Skalarprodukt von $\vec{F}\big(\vec{\gamma}(t)\big)$ und $\dot{\vec{\gamma}}(t)$ gebildet werden.

Wegintegral

Beispiel Kurvenintegral 1. Art
(Weg in einem konstanten Skalarfeld)

$$\boxed{\int\limits_{\gamma} f \cdot ds = \int\limits_a^b f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \cdot dt}$$



Die Skalarfunktion sei konstant: $f = 1 = const.$

Der Weg als Funktion von t ist: $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 + t/2 \end{pmatrix}$

Ableitung: $\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Betrag: $\left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| = \sqrt{1^2 + (1/2)^2} = \sqrt{5/4}$

Wegintegral: $\int\limits_a^b f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \cdot dt = \int\limits_{t=0}^{t=2} 1 \cdot \sqrt{5/4} \cdot dt = \sqrt{5/4} \cdot t\Big|_0^2 = 2 \cdot \sqrt{5/4} = \sqrt{5}$

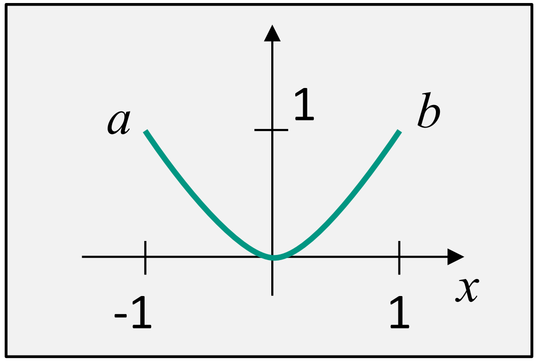
Gegenrechnung mit Satz von Pythagoras: $s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

q.e.d.

Wegintegral

Beispiel Kurvenintegral 1. Art
(Weg in einem veränderlichen Skalarfeld)

$$\int_\gamma f \cdot ds = \int_a^b f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \cdot dt$$



Wanderung entlang eines parabel-förmigen Weges auf einer von links nach rechts ansteigenden Ebene

Die Skalarfunktion steigt mit t: (von links nach rechts) $\quad f = t + 1$

Der Weg als Funktion von t ist: $\quad \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

Ableitung: $\quad \dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

Betrag: $\quad \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| = \sqrt{1^2 + 4t^2}$

Wegintegral: $\quad \int_a^b f\left(\vec{\gamma}(t)\right) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| \cdot dt = \int_{t=-1}^{t=1} (t+1) \cdot \sqrt{1+4t^2} \cdot dt$

Stammfunktion: $\quad \int (t+1) \cdot \sqrt{1+4t^2} \cdot dt = \frac{1}{12}\left[4t^2 \cdot X + 6t \cdot X + X - 3\ln\left(X - 2t\right)\right]$

mit der Abkürzung: $\quad X = \sqrt{1+4t^2}$

$$\int_{t=-1}^{t=1} t \cdot \sqrt{1+4t^2} \cdot dt = \frac{1}{12}\left[4t^2 \cdot \sqrt{5} + 6t \cdot \sqrt{5} + \sqrt{5} - 3\ln\left(\sqrt{5} - 2t\right)\right]_{-1}^{1} \cong 2{,}96$$

Lösung:

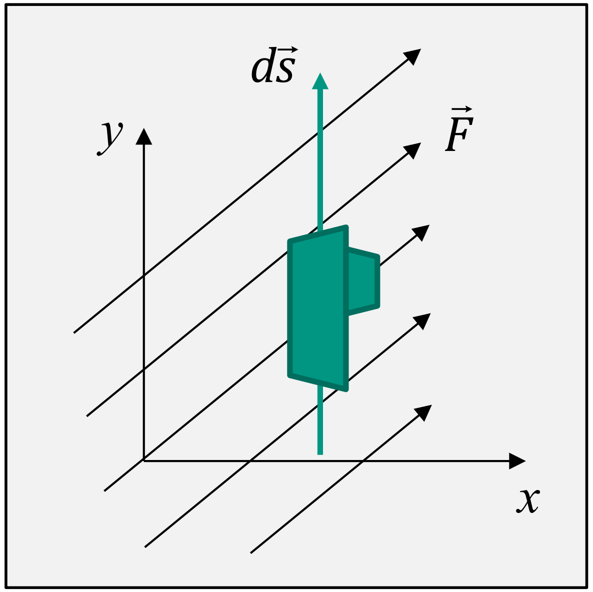
Wegintegral

Beispiel Kurvenintegral 2. Art
(Weg in einem Vektorfeld)

$$\boxed{\int_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}\left(\vec{\gamma}(t)\right) \bullet \dot{\vec{\gamma}}(t) \cdot dt}$$

$$\int_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_\gamma \begin{pmatrix} F_x\left(x(t), y(t), z(t)\right) \\ F_y\left(x(t), y(t), z(t)\right) \\ F_z\left(x(t), y(t), z(t)\right) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} dx(t) \\ dy(t) \\ dz(t) \end{pmatrix} = \int_t F_x(t) \cdot d\dot{x}(t) \cdot dt + \int_t F_y(t) \cdot d\dot{y}(t) \cdot dt + \int_t F_z(t) \cdot d\dot{z}(t) \cdot dt$$

Beispiel: Schiff mit konstantem Seitenwind



$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Konstante Kraft in diagonaler Richtung, keine Abhängigkeit vom Ort

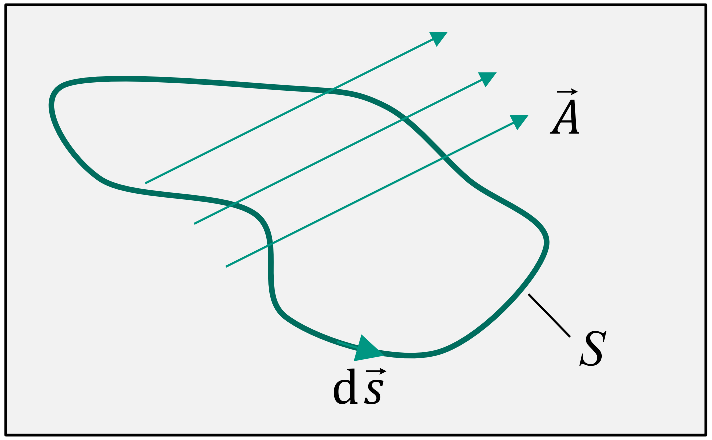
$$d\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Schiff fährt senkrecht nach oben

$$d\dot{\vec{s}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

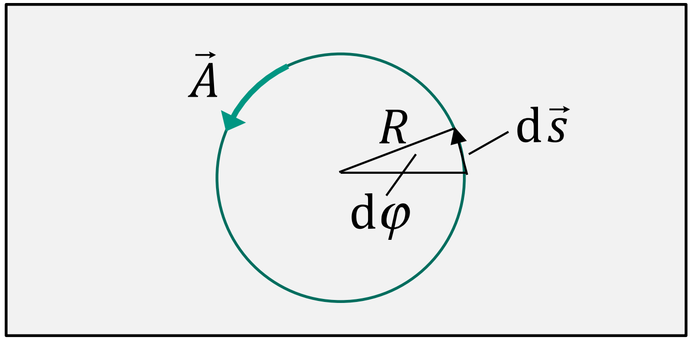
$$\int_\gamma \vec{F} \bullet d\vec{s} = \int_t \vec{F}(t) \bullet d\dot{\vec{s}}(t) \cdot dt = \int_t (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1) dt = t$$

Umlaufintegral (geschlossenes Wegintegral)



Wegintegral über geschlossene Schleife $\oint\limits_s \vec{A} \bullet d\vec{s}$

Beispiel: $\vec{A}$ sei kreisförmig mit Radius R und entlang des Kreises konstant.



Dann gilt: $d\vec{s} = R \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$

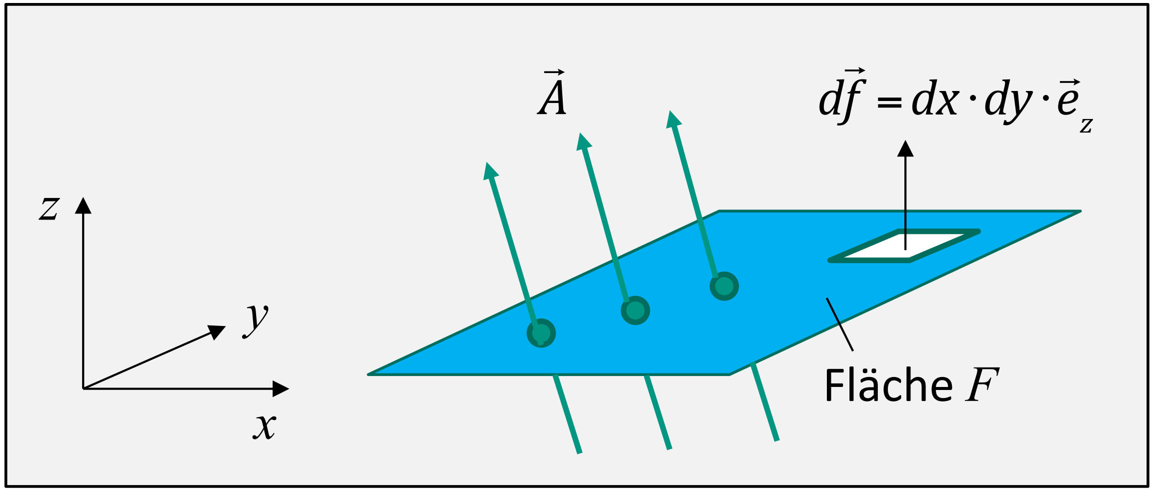
Und: $\vec{A} = A_\varphi(R) \cdot \vec{e}_\varphi$

Damit:

$$\oint\limits_s \vec{A} \bullet d\vec{s} = \oint\limits_s \left(A_\varphi(R) \cdot \vec{e}_\varphi\right) \bullet \left(R \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi\right)$$

$$= \int_0^{2\pi} A_\varphi(R) \cdot R \cdot d\varphi = A_\varphi(R) \cdot \int_0^{2\pi} R \cdot d\varphi = A_\varphi(R) \cdot 2\pi R$$

Flächenintegral



$$\vec{A} = A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z$$

Frage: Wie groß ist die Summe der senkrechten Komponente von A durch F ?

$$\iint_F \vec{A} \bullet d\vec{f} \quad \text{Flächenintegral}$$

$$= \iint_F \left(A_x \cdot \vec{e}_x + A_y \cdot \vec{e}_y + A_z \cdot \vec{e}_z\right) \cdot \left(dx \cdot dy \cdot \vec{e}_z\right)$$

$$= \iint_F A_z \cdot dx \cdot dy = A_z \cdot F$$

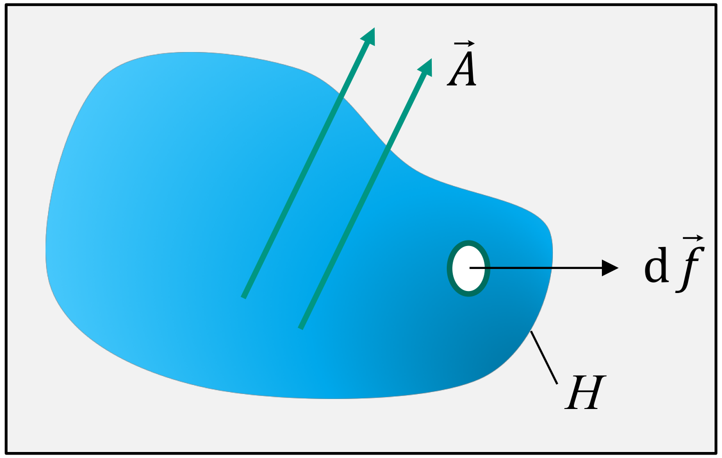
Für den Spezialfall A = const.

Allgemein gilt:

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = 0$$

$$\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1$$

Hüllflächenintegral

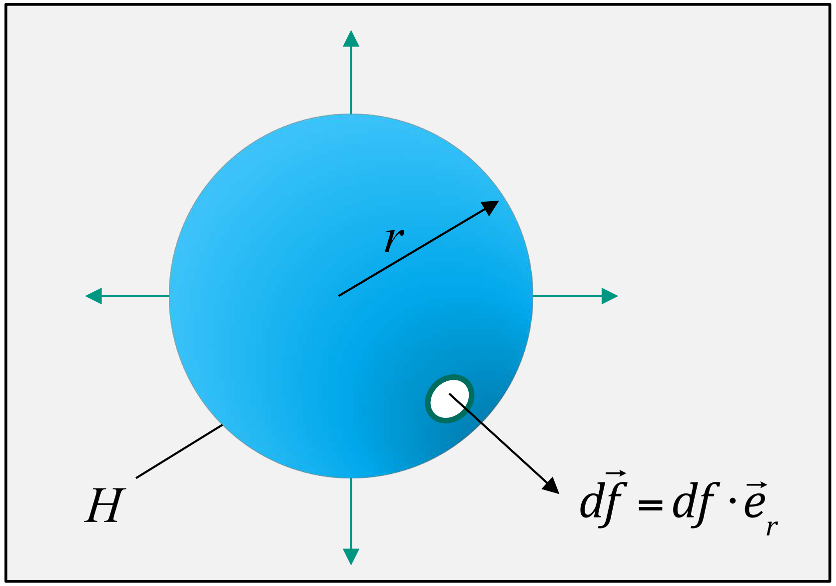


$\mathrm{d}\vec{f}$ senkrecht auf H
zeigt nach außen

Integral über eine geschlossene Hüllfläche

$$\oint\!\!\!\oint_H \vec{A} \bullet d\vec{f}$$

Beispiel: Kugel mit radialsymmetrischem Feld $\vec{A} = A_r(r) \cdot \vec{e}_r$



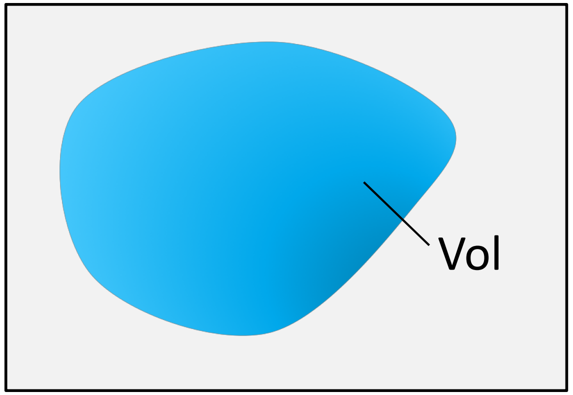
$$\oint\!\!\!\oint_H \left(A_r(r) \cdot \vec{e}_r\right) \cdot \left(df \cdot \vec{e}_r\right)$$

$$= \oint\!\!\!\oint_H \left(A_r(r) \cdot \vec{e}_r\right) \cdot \left(r^2 \cdot \sin\delta \cdot d\delta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_r\right) \qquad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1$$

$$= A_r(r) \cdot \oint\!\!\!\oint_H r^2 \cdot \sin\delta \cdot d\delta \cdot d\varphi$$

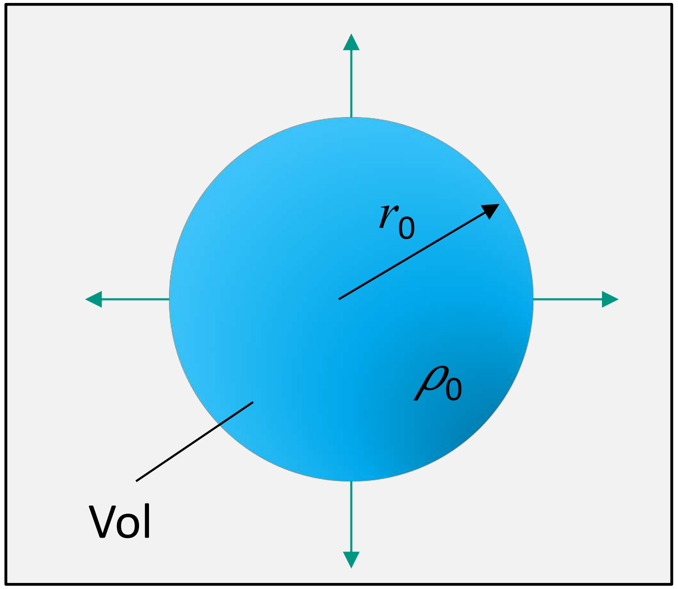
$$= A_r(r) \cdot 4\pi r^2$$

Volumenintegral



$$Q = \iiint \rho(x,y,z) \cdot dv = \iiint \rho(x,y,z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Beispiel: Kugel mit Radius r_0 und konstanter Ladungsdichte ρ_0



$$\iiint \rho(\vec{r}) \cdot dv = \iiint \rho_0 \cdot r^2 \cdot \sin\delta \cdot dr \cdot d\delta \cdot d\varphi$$

$$= \rho_0 \iiint r^2 \cdot \sin\delta \cdot dr \cdot d\delta \cdot d\varphi = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r_0^3$$

Gradient

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\vec{e}_z$$

Φ ist ein Skalarfeld
grad Φ ist ein Vektorfeld

$$d\Phi = \operatorname{grad}\Phi \cdot d\vec{r}$$

grad Φ gibt an, wie stark sich ein Skalarfeld räumlich ändert (Steigung).
Er zeigt in die Richtung der stärksten Änderung.

Divergenz

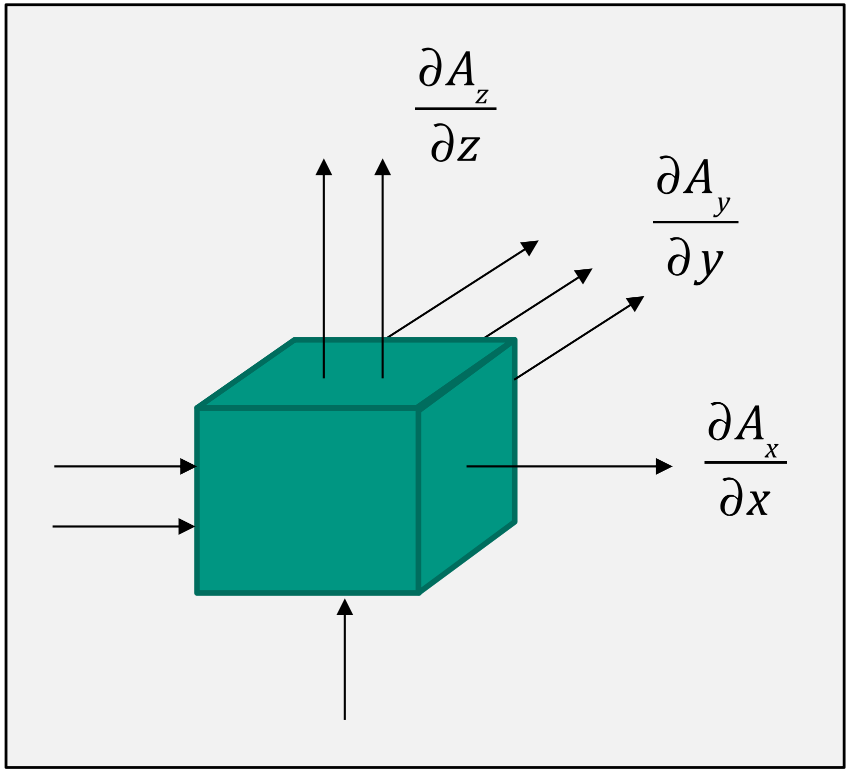
$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$\vec{A}$ ist ein Vektorfeld
$\operatorname{div}\vec{A}$ ist ein Skalarfeld

$\operatorname{div}\vec{A}$ gibt die Dichte der Quellen in einem Vektorfeld an.

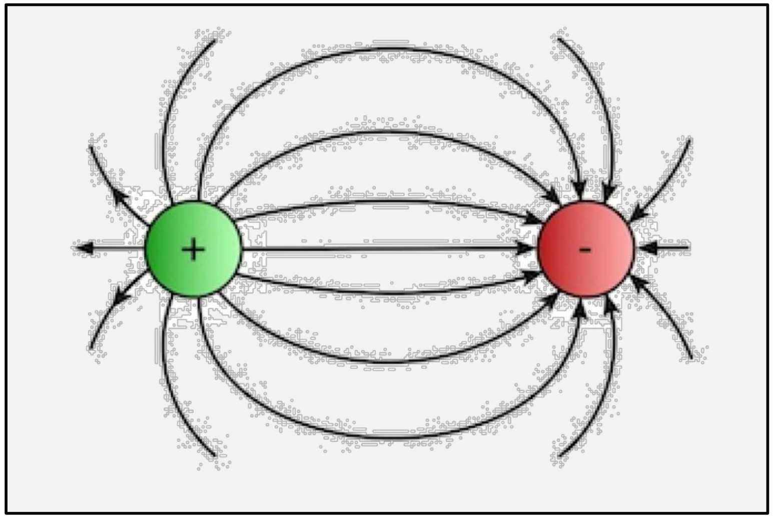
$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{v \to 0} \frac{1}{V} \cdot \oiint_s \vec{A} \bullet d\vec{s}$$

globale, integrale Bilanz

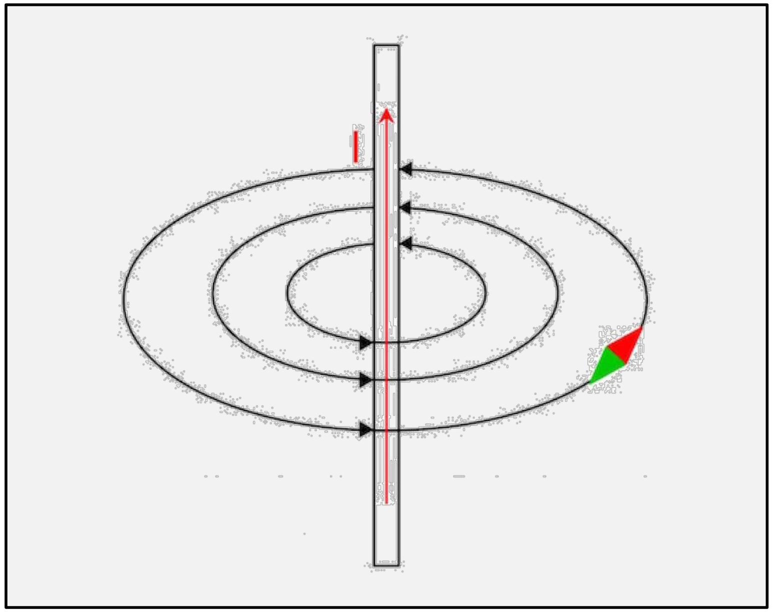


Quellenfelder und Wirbelfelder

Die **Divergenz** ist Ursache für **Quellenfelder**: Feldlinien haben einen Anfang (Quelle) und ein Ende (Senke).
Das gilt beispielsweise für elektrostatische Felder zweier Punktladungen.



Vektorfelder mit geschlossenen Feldlinien, sogenannte **Wirbelfelder**, haben hingegen zwar eine Richtung, aber keinen Anfang und kein Ende. Ihre Divergenz ist Null.
Das gilt beispielsweise für alle Magnetfelder.
Die Wirbeldichte oder **Rotation** ist die Ursache für Wirbelfelder. Das kann beispielsweise der Strom in einem Draht sein.



Rotation

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{e}_x+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{e}_y+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten

$\vec{A}$ ist ein Vektorfeld
$\operatorname{rot}\vec{A}$ ist ein Vektorfeld

$\operatorname{rot}\vec{A}$ gibt die Dichte von Wirbelursachen an
und zeigt in die Normalrichtung der Fläche
mit dem stärksten Wirbel

$$n\cdot\operatorname{rot}\vec{A}=\lim_{v\to 0}\frac{1}{f}\cdot\oint_{\partial f}\vec{A}\bullet d\vec{s}$$

Umlaufintegral über den
Rand der Fläche f

Nabla-Operator (Vektoroperation)

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{e}_z$$ in kartesischen Koordinaten

$\mathrm{grad}\,\Phi = \vec{\nabla}\cdot\Phi$	Produkt von Skalar mit Vektor	➞ Der Gradient erzeugt einen Vektor
$\mathrm{div}\,\vec{D} = \vec{\nabla}\bullet\vec{D}$	Skalarprodukt von Vektor mit Vektor	➞ Die Divergenz erzeugt einen Skalar
$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$	Kreuzprodukt von Vektor mit Vektor	➞ Die Rotation erzeugt einen Vektor

Laplace-Operator (Skalaroperation)

$$\Delta = \vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ in kartesischen Koordinaten

$$\mathrm{div}\left(\mathrm{grad}\,\Phi\right) = \Delta\cdot\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Φ ist ein Skalarfeld
$\Delta\cdot\Phi$ ist ein Skalarfeld

Der Laplace-Operator gibt die Krümmung eines Skalarfeldes an

Rechenregeln

$$\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad}\Phi\right)=0$$

Lässt sich ein Vektorfeld als Gradient einer Potentialfunktion darstellen, so hat es keine Wirbel.

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)=0$$

Lässt sich ein Vektorfeld als Rotation eines Vektorfeldes darstellen, so hat es keine Quellen.

$$\operatorname{div}(\Phi\cdot\vec{A})=\vec{A}\cdot\operatorname{grad}\Phi+\Phi\cdot\operatorname{div}\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}\left(\Phi\cdot\vec{A}\right)=\Phi\cdot\operatorname{rot}\vec{A}+\left(\operatorname{grad}\Phi\right)\times\vec{A}$$

$$\Delta\cdot\vec{A}=\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A}\right)-\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)$$

Laplace-Operator für ein Vektorfeld

$$\Delta\cdot\vec{A}=\begin{bmatrix}\Delta\cdot A_x\\ \Delta\cdot A_y\\ \Delta\cdot A_z\end{bmatrix}=\Delta\cdot A_x\cdot\vec{e}_x+\Delta\cdot A_y\cdot\vec{e}_y+\Delta\cdot A_z\cdot\vec{e}_z$$

In kartesischen Koordinaten

Ergänzungsfolie

Beweis $\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad}\Phi\right)=0$ Differenzialvariante

Abkürzung $\operatorname{grad}\Phi=\vec{V}\rightarrow V_x=\frac{\partial\Phi}{\partial x};\quad V_y=\frac{\partial\Phi}{\partial y};\quad V_z=\frac{\partial\Phi}{\partial z}$

Damit:

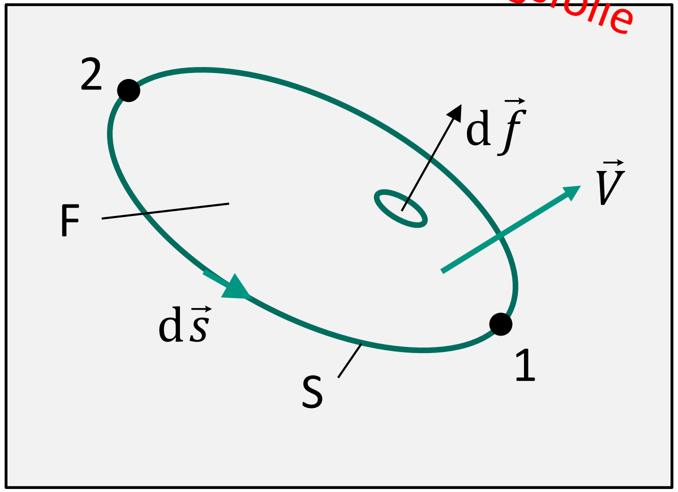
$$\operatorname{rot}\vec{V}=\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{e}_x+\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{e}_y+\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{e}_z$$

$$=\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial y}\right)\cdot\vec{e}_x+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}\right)\cdot\vec{e}_y+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}\right)\cdot\vec{e}_z$$

$=0$ q.e.d.

Ergänzungsfolie

Beweis $\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\,\Phi\right)=0$ Integralvariante



Abkürzung $\mathrm{grad}\,\Phi=\vec{V}$

Damit:

$$\iint_F \mathrm{rot}\,\vec{V}\bullet d\vec{f} \overset{Stokes}{=} \oint_S \vec{V}\bullet d\vec{s}$$

Satz von Stokes
siehe nächster Abschnitt

$$=\oint_S \mathrm{grad}\,\Phi\bullet d\vec{s}$$

$$=\int_1^2 \mathrm{grad}\,\Phi\bullet d\vec{s}+\int_2^1 \mathrm{grad}\,\Phi\bullet d\vec{s}$$

$$=\int_1^2 \mathrm{grad}\,\Phi\bullet d\vec{s}-\int_2^2 \mathrm{grad}\,\Phi\bullet d\vec{s}$$ siehe Folie 15

$$=\int_1^2 d\Phi-\int_1^2 d\Phi$$

$$=0$$ q.e.d.

Ergänzungsfolie

Beweis $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right)=0$ Differenzialvariante

Abkürzung $\operatorname{rot}\vec{A}=\vec{V}\rightarrow V_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z};\quad V_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x};\quad V_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$

Damit:

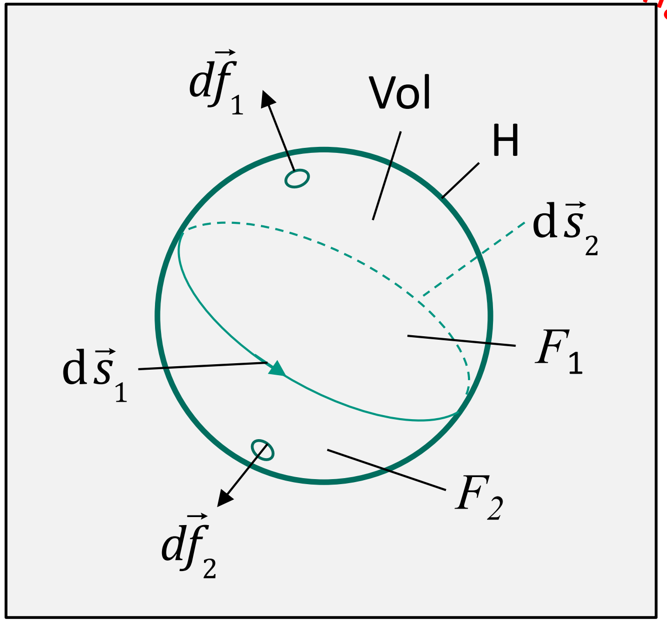
$$\operatorname{div}\vec{V}=\frac{\partial V_x}{x}+\frac{\partial V_y}{y}+\frac{\partial V_z}{z}$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}\right)$$

$=0$ q.e.d.

Ergänzungsfolie

Beweis $\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=0$ Integralvariante



Abkürzung $\mathrm{rot}\,\vec{A}=\vec{V}$

Damit:

$$\iiint_{Vol} \mathrm{div}\,\vec{V}\cdot dv \overset{Gauß}{=} \oint\!\!\oint_{H} \vec{V}\bullet d\vec{f}$$

$$= \iint_{F_1} \mathrm{rot}\,\vec{A}\bullet d\vec{f} + \iint_{F_1} \mathrm{rot}\,\vec{A}\bullet d\vec{f}$$

$$\overset{Stokes}{=} \oint_{S_1} \vec{A}\bullet d\vec{s}_1 + \oint_{S_2} \vec{A}\bullet d\vec{s}_2$$

$$= \oint_{S_1} \vec{A}\bullet d\vec{s}_1 + \oint_{S_1} \vec{A}\bullet\left(-d\vec{s}_1\right)$$

Umlaufrichtung der 2. Fläche umgedreht

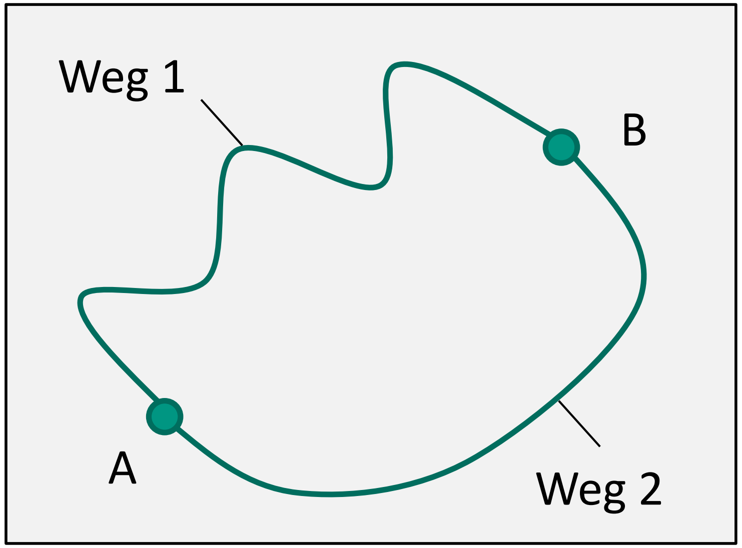
$$=0$$ q.e.d.

F_1 und F_2 sind offene, gekrümmte Flächen

Linienintegral eines Gradientenfeldes

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\vec{e}_x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\cdot\vec{e}_y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\vec{e}_z$$

$$\boxed{\int_A^B (\operatorname{grad}\Phi)\bullet d\vec{s} = \Phi(B) - \Phi(A)}$$



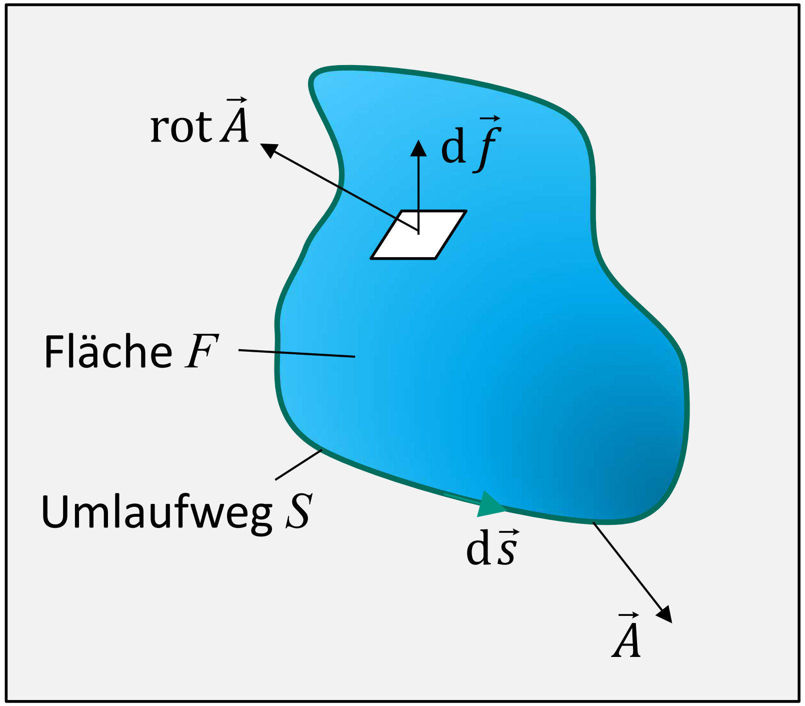
Das Wegintegral über den Gradienten eines Skalarfeldes
vom Punkt A zum Punkt B ist gleich der Differenz der Werte
der Potentialfunktion an den beiden Punkten A und B
unabhängig vom Verlauf des Integrationswegs zwischen den Punkten.

Umlaufintegral eines Vektorfeldes (Stokesscher Satz)

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\cdot\vec{e}_z$$

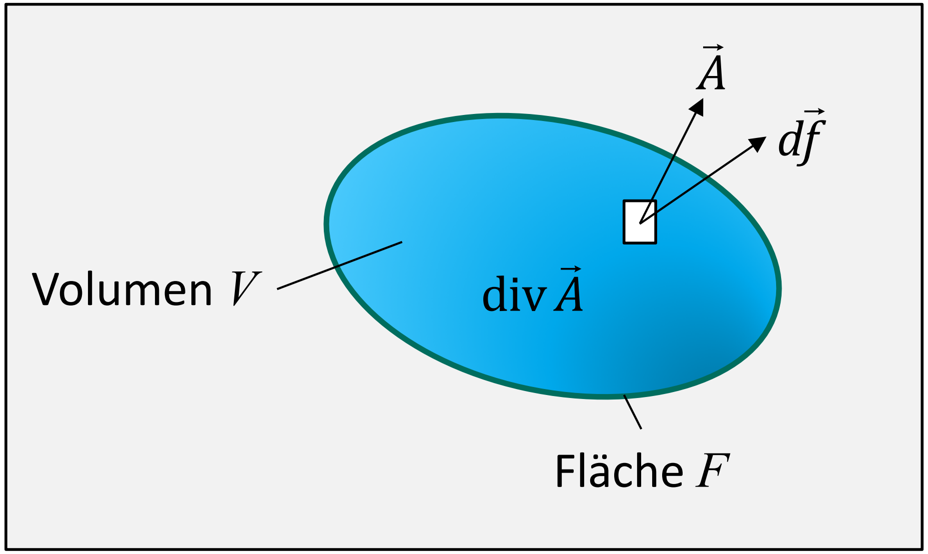
$$\boxed{\iint_F \operatorname{rot}\vec{A}\bullet d\vec{f} = \oint_S \vec{A}\bullet d\vec{s}}$$

Das Flächenintegral über die Komponente von rot $\vec{A}$ in Richtung der Flächennormalen ist gleich dem Linienintegral längs des Randes der Fläche über die Komponenten von $\vec{A}$ in Richtung der Linienelemente.



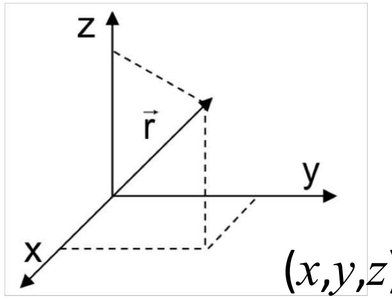
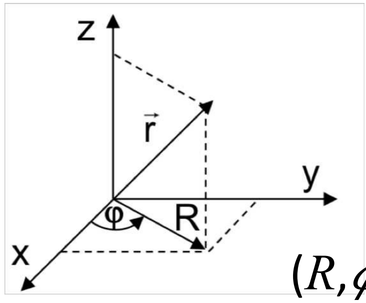
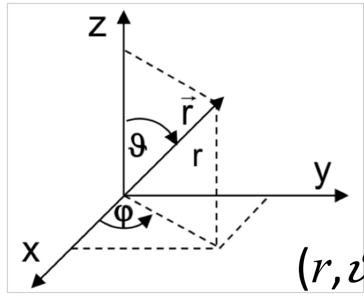
Hüllflächenintegral eines Vektorfeldes (Gaußscher Satz)

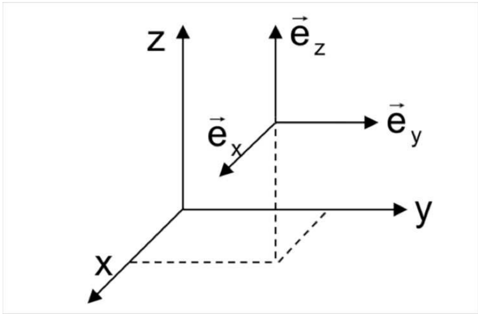
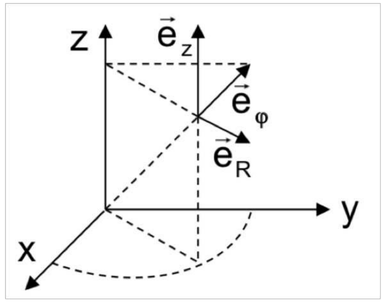
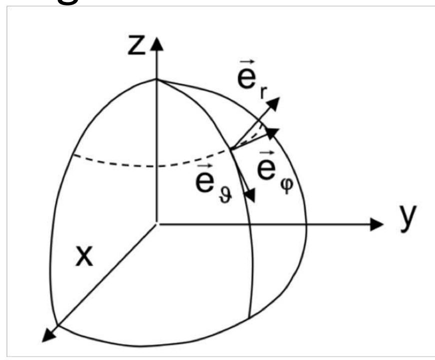
$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$



$$\boxed{\iiint_V \operatorname{div}\vec{A}\cdot dv = \oiint_F \vec{A}\bullet d\vec{f}}$$

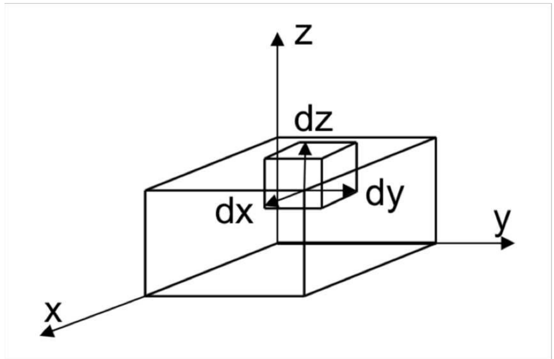
Das Volumenintegral über die Divergenz eines Vektorfeldes ist gleich dem Flächenintegral des Vektorfeldes über die geschlossene Oberfläche seines Volumens.

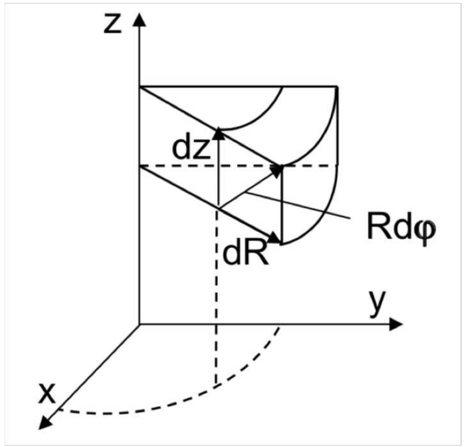
Kartesische Koordinaten		Zylinderkoordinaten		Kugelkoordinaten
 (x,y,z)		 (R,φ,z)		 (r,ϑ,φ)
x	=	$R\cdot\cos\varphi$	=	$r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi$
y	=	$R\cdot\sin\varphi$	=	$r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$
z	=	z	=	$r\cdot\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	=	R	=	$r\cdot\sin\vartheta$
$\arctan\frac{y}{x}$	=	φ	=	φ
z	=	z	=	$r\cdot\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	=	$\sqrt{R^2+z^2}$	=	r
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	=	$\arctan\frac{R}{z}$	=	ϑ
$\arctan\frac{y}{x}$	=	φ	=	φ

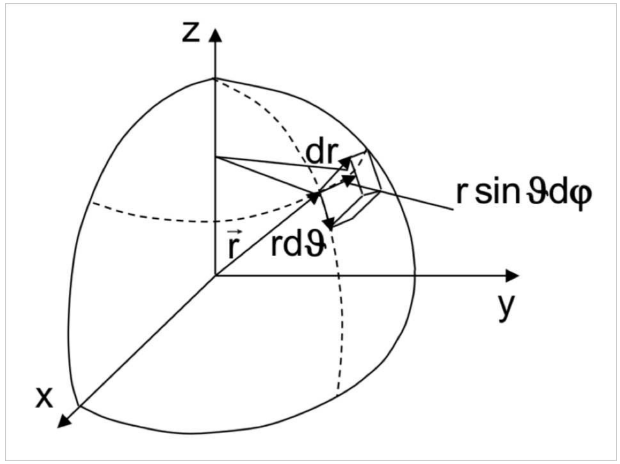
Kartesische Koordinaten		Zylinderkoordinaten		Kugelkoordinaten
				
$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$		$A_R \vec{e}_R + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$		$A_r e_r + A_\vartheta e_\vartheta + A_\varphi e_\varphi$
A_x	=	$A_r \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$	=	$A_r \sin\vartheta \cos\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$
A_y	=	$A_r \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$	=	$A_r \sin\vartheta \sin\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$
A_z	=	A_z	=	$A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
$A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi$	=	A_R	=	$A_r \sin\vartheta + A_\vartheta \cos\vartheta$
$-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$	=	A_φ	=	A_φ
A_z	=	A_z	=	$A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$
$A_x \sin\vartheta \cos\varphi + A_y \sin\vartheta \sin\varphi + A_z \cos\vartheta$	=	$A_r \sin\vartheta + A_z \cos\vartheta$	=	A_r
$A_x \cos\vartheta \cos\varphi + A_y \cos\vartheta \sin\varphi - A_z \sin\vartheta$	=	$A_r \cos\vartheta - A_z \sin\vartheta$	=	A_ϑ
$-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi$	=	A_φ	=	A_φ

7. Koordinatensysteme – Flächen- und Volumenelemente

Kartesische Koordinaten | Zylinderkoordinaten | Kugelkoordinaten







$$d\vec{s} = \vec{e}_x\, dx + \vec{e}_y\, dy + \vec{e}_z\, dz \;=\; \vec{e}_R \cdot dR + \vec{e}_\varphi \cdot R \cdot d\varphi + \vec{e}_z \cdot dz \;=\; \vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\vartheta \cdot r \cdot d\vartheta + \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot d\varphi$$

$$d\vec{f} = \vec{e}_x \cdot dy\,dz + \vec{e}_y \cdot dx\,dz + \vec{e}_z \cdot dx\,dy \;=\; \vec{e}_R \cdot R \cdot d\varphi\,dz + \vec{e}_\varphi \cdot dR\,dz + \vec{e}_z \cdot R \cdot dR\,d\varphi \;=\; \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta\,d\varphi + \vec{e}_\vartheta \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot dr\,d\varphi + \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot dr\,d\vartheta$$

$$dv = dx\,dy\,dz \;=\; R \cdot dR\,d\varphi\,dz \;=\; r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot dr\,d\vartheta\,d\varphi$$

7. Koordinatensysteme – Differentialoperatoren

Kartesische Koordinaten		Zylinderkoordinaten		Kugelkoordinaten
$\operatorname{grad}\Phi = \vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	=	$\vec{e}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	=	$\vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$
$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	=	$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(R\cdot A_r\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	=	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot A_r\right) + \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta\cdot\sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$
$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$	=	$\vec{e}_x\left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\cdot A_\varphi\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}\right)$	=	$\vec{e}_x \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\varphi\cdot\sin\vartheta\right) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot A_\varphi\right)\right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot A_\vartheta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)$
$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	=	$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	=	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$