

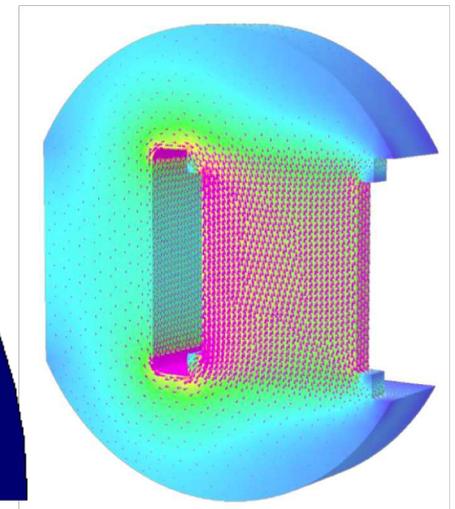
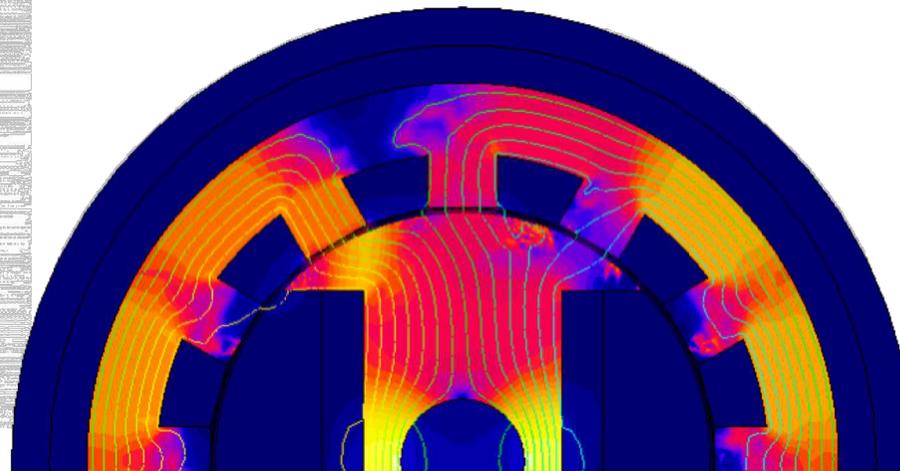
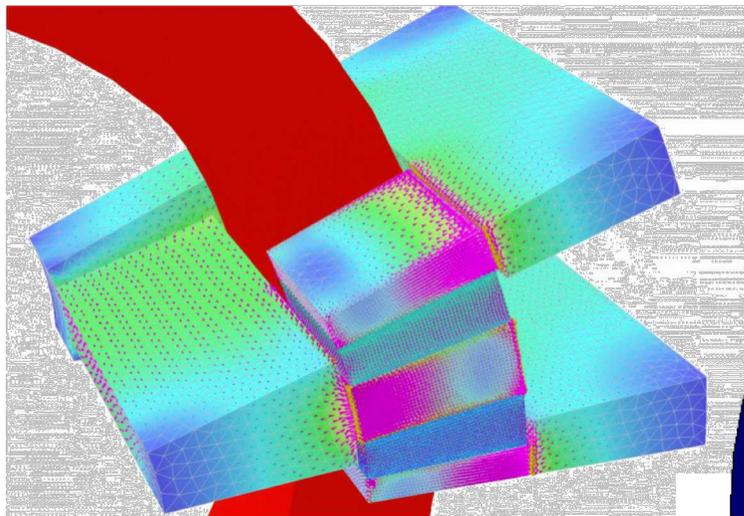
Vorlesung

Elektrische und magnetische Felder (EMF)

SS 2019

Kapitel 3: Elektrostatik

Elektrotechnisches Institut (ETI)



Gliederung

1. **Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen**
2. **Satz von Hüllenfluss und Symmetrie**
3. **Übergänge an Grenzflächen**
4. **Potentialfunktion**
5. **Elektrische Feldenergie**
6. **Kapazität**
7. **Kapazität bei Anwesenheit von Influenzladungen**
8. **Zusammenfassung**

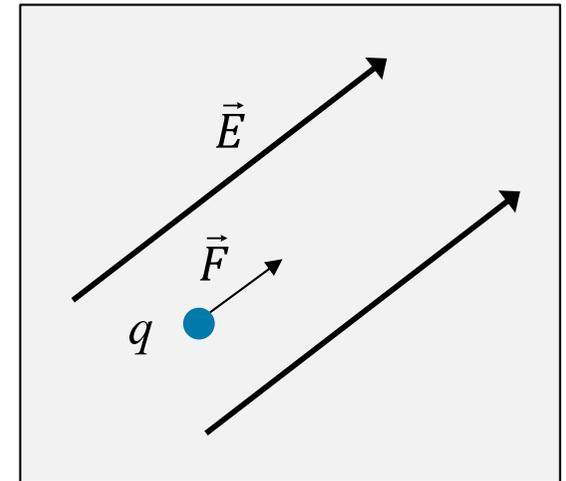
1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen I

Elektrische Feldstärke E definiert über Kraft F auf Probeladung q :
(Coulombsches Gesetz, 1785)

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

$$[\vec{E}] = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{\text{J}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Die Richtung der Feldlinien gibt die Krafrichtung auf positive Testladungen an. Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für den Betrag der Feldstärke.

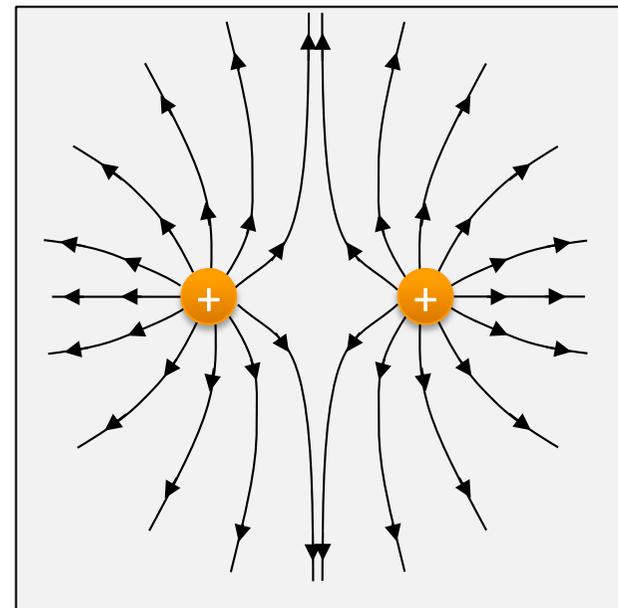
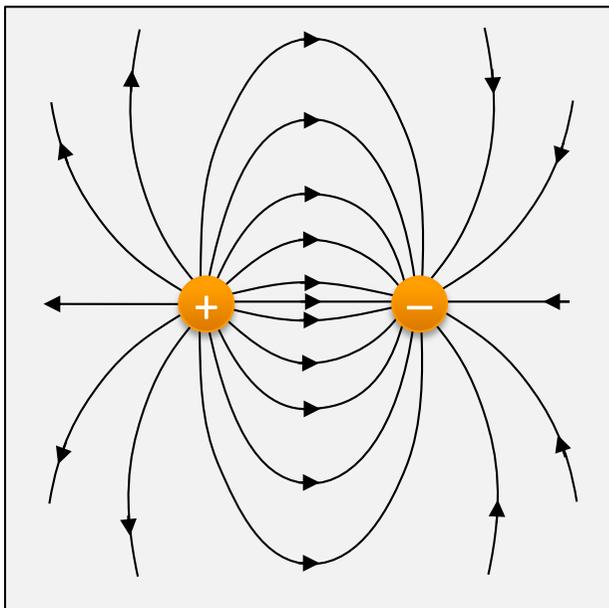
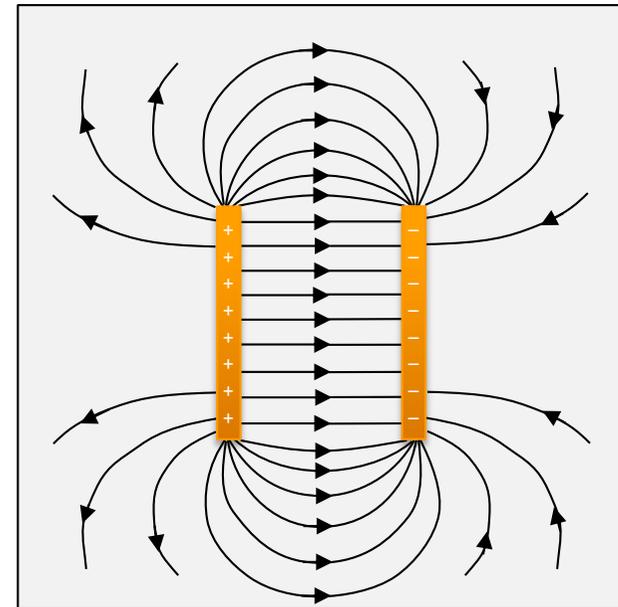
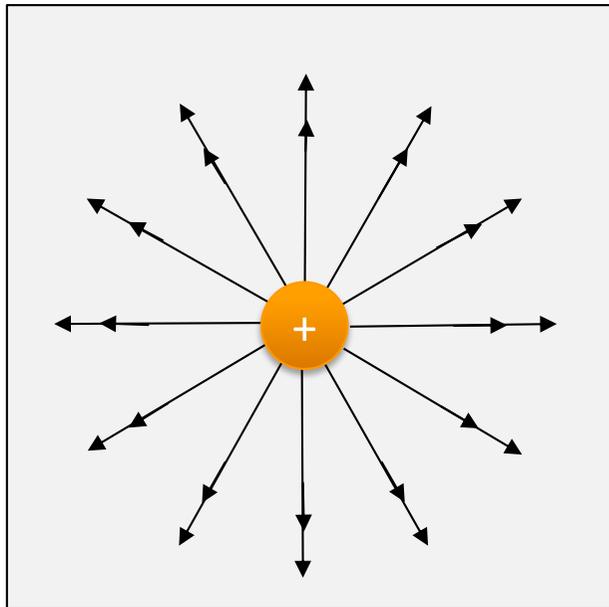


Elektrische Feldstärke E erzeugt durch alle Ladungen Q bzw. Raumladungsdichte ρ_{ges} im Raum:

Maxwell:
$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{ges}}{\epsilon_0} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$$

Superpositionsprinzip: Felder jeder einzelnen Ladung individuell berechnen, dann alle addieren.
Achtung: Gilt nur bei Linearität, d.h. keine Sättigungseffekte

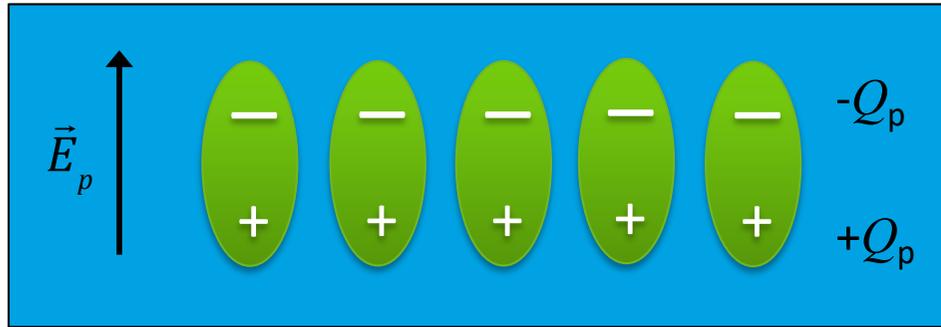
1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen II



1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen III

Materialeffekte: Elektrische Polarisation P

Makroskopisch
gemittelt über
molekulare Effekte



In Molekülen gebundene,
separierte Ladungen,
quasineutral

Elektrisches Polarisationsfeld \vec{E}_p , hervorgerufen durch
Ladungstrennung/-verschiebung innerhalb der Moleküle

Definition der elektrischen Polarisation:

$$\vec{P} = -\epsilon_0 \cdot \vec{E}_p$$

$$[\vec{P}] = \frac{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{m}}{\text{m}^3} = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$

1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen IV

Die Überlagerung

- des durch freie Ladungen Q erzeugten Feldes \vec{E}_Q
 - und des durch Ladungsverschiebung in Molekülen erzeugten Polarisationsfeldes \vec{E}_p bzw. \vec{P}
- liefert ein effektives Gesamtfeld \vec{E} :

$$\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_p$$

Ersetzen von \vec{E}_p durch $-\vec{P} / \epsilon_0$ und Multiplikation mit ϵ_0 liefert

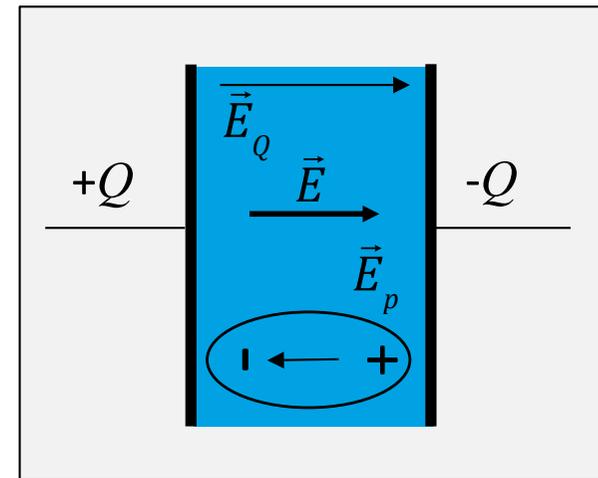
$$\epsilon_0 \vec{E}_Q = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

Mit der Definition der **Verschiebungsdichte** \vec{D} (auch: elektrische Flussdichte)

$$\vec{D} \stackrel{Def}{=} \epsilon_0 \cdot \vec{E}_Q$$

Ergibt sich die bekannte Materialgleichung

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \quad \left[\vec{D} \right] = \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$$



1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen V

Ausgangsgleichung: $\vec{E} = \vec{E}_Q + \vec{E}_p$

Wenn das Polarisationsfeld \vec{E}_p linear proportional zum elektrischen Gesamtfeld \vec{E} ist

$$\vec{E}_p = -\chi_{el} \cdot \vec{E} \quad (\text{Richtung entgegengesetzt zu } \vec{E}) \quad \chi_{el}: \text{elektrische Suszeptibilität}$$

so erhält man durch Einsetzen: $\vec{E} = \vec{E}_Q - \chi_{el} \cdot \vec{E}$

Umformen führt auf: $\vec{E}_Q = (1 + \chi_{el}) \cdot \vec{E}$

Die relative Dielektrizitätszahl des Materials ϵ_r wird definiert als: $\epsilon_r \stackrel{\text{Def}}{=} (1 + \chi_{el})$

Somit ergibt sich $\vec{E}_Q = \epsilon_r \cdot \vec{E}$

Mit der bekannten Definition für die Verschiebungsdichte $\vec{D} \stackrel{\text{Def}}{=} \epsilon_0 \cdot \vec{E}_Q$

erhält man die übliche Schreibweise: $\boxed{\vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}}$

1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen VI

$$\boxed{\operatorname{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E}) = \rho_{ges}}$$

Allgemein gültige Maxwell-Gleichung unter Berücksichtigung aller, also der freien und der in dielektrischen Molekülen gebundenen Ladungen.

$$\left. \begin{aligned} \rho_{ges} &= \rho_{\text{frei}} + \rho_{\text{gebunden}} \\ \vec{E} &= \vec{E}_Q + \vec{E}_p \end{aligned} \right\} \text{Superpositionsprinzip}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E}_Q) = \rho}$$

Es genügt also die Kenntnis der Verteilung der freien Ladungen zur Berechnung des elektrischen Feldes

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\epsilon_0 \cdot \vec{E}_p) = \rho_p \quad \text{Problem: } \rho_p \text{ unbekannt}$$

Aber im Fall linearer Materialgleichungen gilt:

$$\vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_0 \vec{E}_Q = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \vec{E}_Q / \epsilon_r}$$

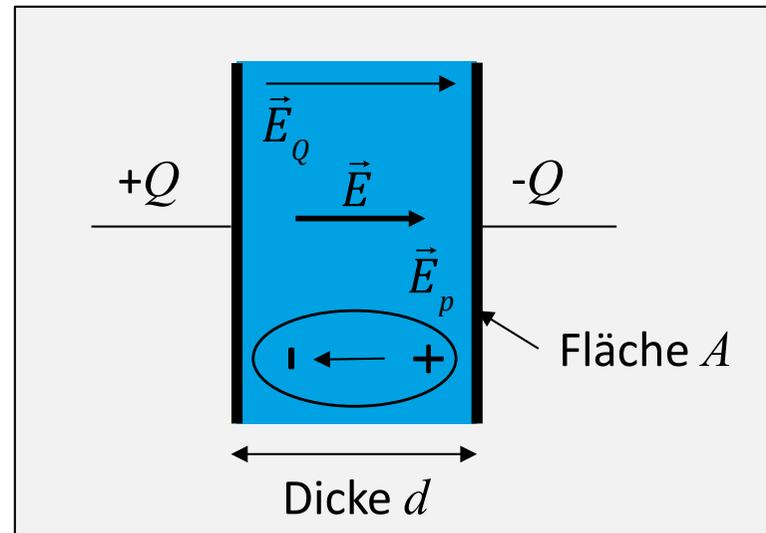
Traditionelle Schreibweise:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}}$$

Berechnung der relativen Dielektrizitätskonstanten

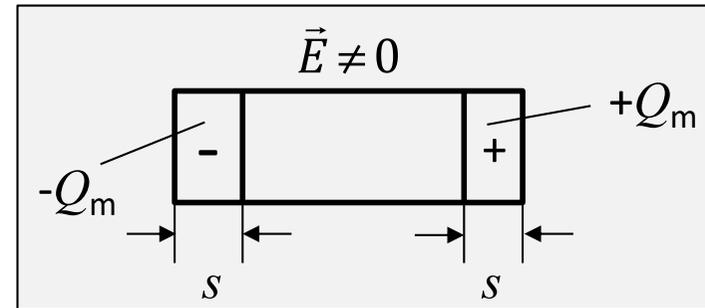
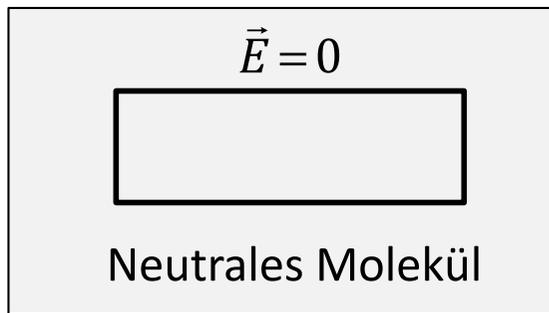
Im Inneren des Kondensators sind Moleküle mit polarisierbaren Elektronenorbitalen mit der Dichte von N Molekülen pro Volumeneinheit statistisch verteilt.



Jedes dieser Moleküle erzeugt einen kleinen Beitrag zum Gesamtpolarisationsfeld \vec{E}_p aller Moleküle.

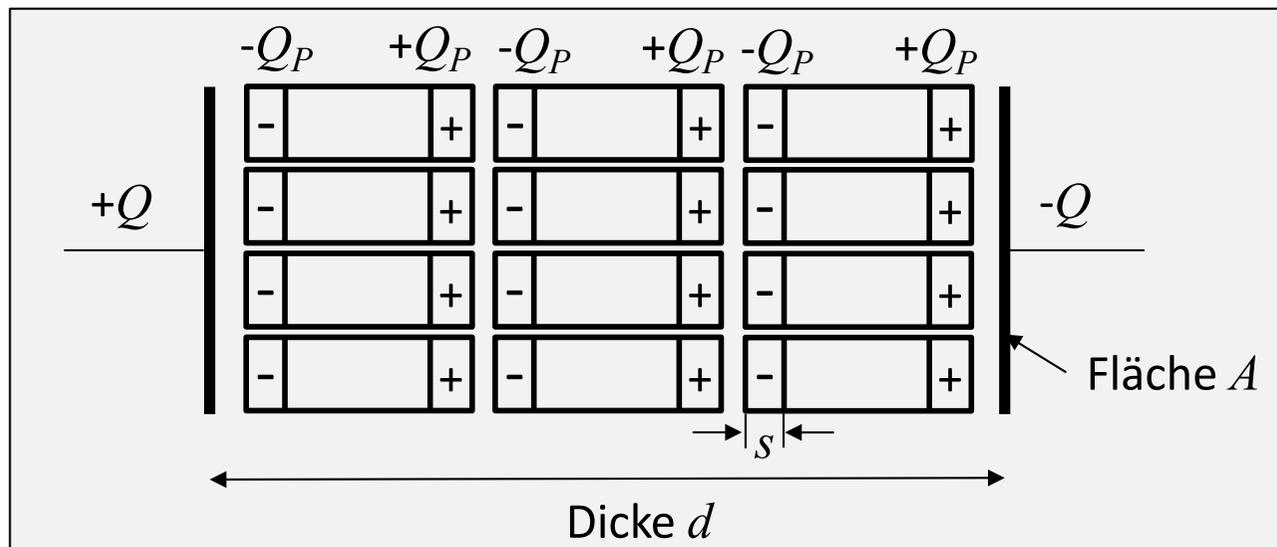
Das elektrische Feld erzeugt in jedem der Moleküle eine kleine Ladungstrennung, weg vom neutralen Gleichgewicht, um die Distanz s .

1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen VIII



Der Ladungsüberschuss am Molekül $+Q_m$ und $-Q_m$ ist gegeben durch die Raumladungsdichte der Elektronen ρ_- , durch die mittlere Querschnittsfläche des Moleküls A_m und durch die Länge s der Ladungstrennung: $-Q_m = \rho_- \cdot A_m \cdot s$

Zur einfacheren Berechnung des gemittelten Gesamtfeldes E_p wird als Idealisierung angenommen, dass die Moleküle in zu den Kondensatorplatten parallel ausgerichteten Schichten angeordnet sind.



In Dielektrika kommt der durch Umorientierung von ortsfesten, elektrisch geladenen Dipolen zu Polarisation. Solche Materialien leiten den elektrischen Fluss um den Faktor ϵ_r besser als der leere Raum.

1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen IX

Die gesamte Polarisationsladung Q_p ist die Summe der molekularen Teilladungen Q_m über die gesamte Querschnittsfläche A

$$Q_p = \sum Q_m = \rho \cdot A \cdot s = N \cdot q_e \cdot A \cdot s$$

N ist die Dichte der Moleküle, also die Anzahl pro Volumen
 $A \cdot s$ ist das Volumen der einen Ladungsschicht am Rand

Das elektrische Polarisationsfeld E_p ergibt sich aus der gemittelten Ladungstrennung $+Q_p$ und $-Q_p$ aller Elementarladungen q_e der Elektronen

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q_p}{A} \cdot \vec{e}_x$$

Die Auslenkung s der Ladungen ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht des an q_e angreifenden E -Feldes und der innermolekularen Rückstellkraft, welche in erster Näherung linear mit einer Rückstellkonstante r (analog der mechanischen Federkonstante) beschrieben werden kann

$$\vec{F} = q_e \cdot \vec{E} = r \cdot \vec{s} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{s}| = \frac{q_e \cdot E}{r}$$

Damit ergibt sich für E_p

$$\vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q_p}{A} \cdot \vec{e}_x = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{N \cdot q_e \cdot A \cdot s}{A} \cdot \vec{e}_x = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot N \cdot q_e \cdot \frac{q_e \cdot E}{r} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{E}_p = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{N \cdot q_e^2}{r} \cdot \vec{E}}$$

1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen X

Das Gesamtfeld E setzt sich also aus der Überlagerung des durch die Ladungen auf den Elektroden des Kondensators hervorgerufenen E_Q sowie dem über alle Moleküle gemittelten E_p zusammen

$$\vec{E} = \vec{E}_Q - \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{N \cdot q_e^2}{r} \cdot \vec{E}$$

Daraus ergibt sich

$$\vec{E}_Q = \left(1 + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{N \cdot q_e^2}{r} \right) \cdot \vec{E}$$

Und schließlich mit der Definition von $\vec{D} \stackrel{Def}{=} \epsilon_0 \cdot \vec{E}_Q$

$$\vec{D} = \left(1 + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{N \cdot q_e^2}{r} \right) \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\epsilon_r = 1 + \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{N \cdot q_e^2}{r}}$$

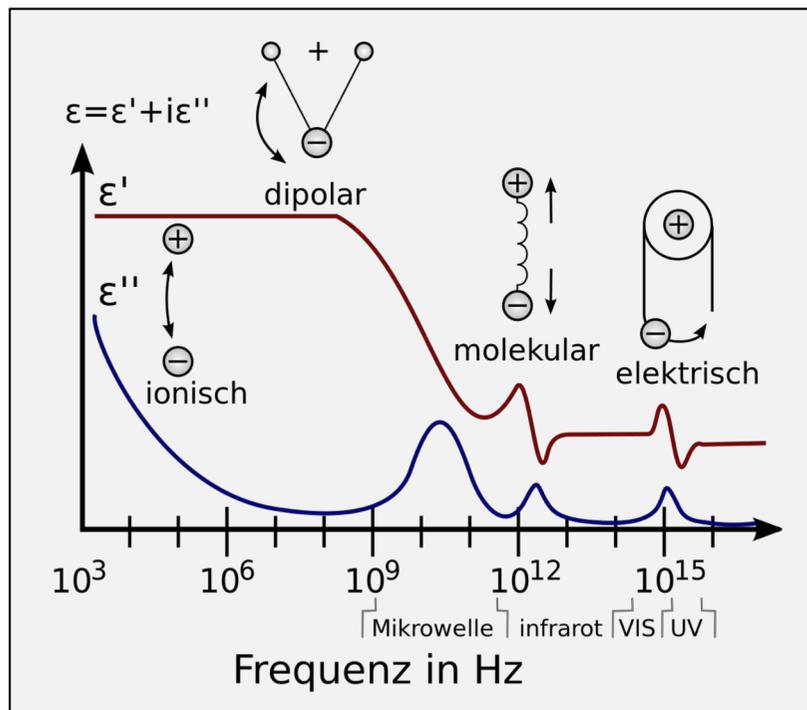
Die relative Dielektrizitätskonstante hängt also nur von der Dichte N der Moleküle und von deren Rückstellkonstanten r ab.

Diese stark vereinfachte Modellvorstellung ist zur Beschreibung der in praktischen Anwendungen wichtigen und messbaren Effekte vollkommen ausreichend.

1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen XI

Im Allgemeinen ist die relative Dielektrizitätskonstante (Permittivität) ein Tensor, d.h. eine Matrix, durch die nicht nur der Betrag, sondern auch die Richtung von D dreidimensional gegenüber E verändert wird. Vereinfacht lässt sich die Permittivität als komplexe Zahl darstellen (dann nur zweidimensionale Richtungsänderung).

Außerdem ist ϵ_r bei vielen Stoffen frequenzabhängig. Beispiel Wasser: ϵ_r ca. 80 bei niedrigen Frequenzen, ca. 5 bei hohen Frequenzen (GHz-Bereich). Im Vakuum (Luft) ist $\epsilon_r = 1$.



Verlauf der komplexwertigen relativen Permittivität über einen weiten Frequenzbereich, aufgespalten in Real- (rot) und Imaginärteil (blau) mit symbolischer Darstellung der verschiedenen Ursachen wie der Relaxation und bei höheren Frequenzen der atomaren und elektronischen Resonanzen.

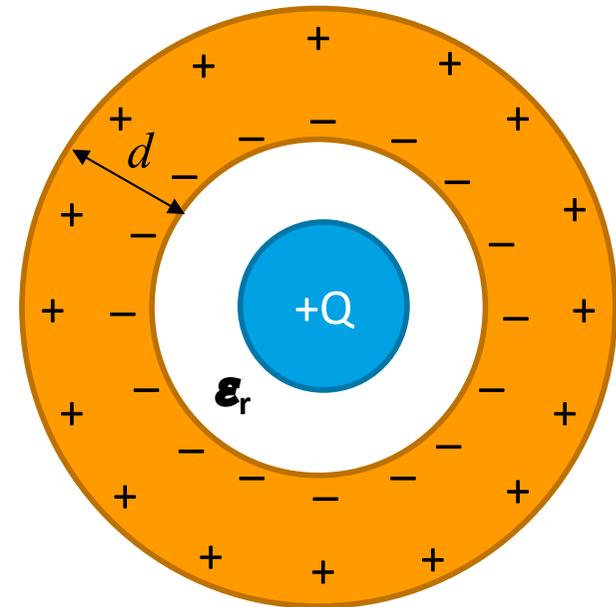
Quelle: Prof. Kenneth A. Mauritz derivative work: Cepheiden (talk) - Dielectric_responses.png

Kunstglimmer (Handelsname „Mikanit“) wird gerne als Isolator eingesetzt und hat etwa $\epsilon_r = 6$.

1. Feldstärke, Verschiebungsdichte, Materialgleichungen XII

Anschauliche Erklärung von **Elektrischer Feldstärke \vec{E}**
und **Elektrischer Verschiebungsdichte \vec{D}**

Im Beispiel rechts ist eine Punktladung $+Q$ gegeben, die auf einer Kugel (Nichtleiter) gleichmäßig verteilt ist. Darum herum befindet sich eine leitfähige Hohlkugel. In dieser Hohlkugel findet eine Ladungsverschiebung statt. Die Ladungsverschiebung ist völlig unabhängig vom ϵ_r des Zwischenraums zwischen den Kugeln.



Die **elektrische Verschiebungsdichte \vec{D}** entspricht der Oberflächenladungsdichte der Hohlkugel $[D] = C/m^2$. Für $d \rightarrow 0$ gilt $\sigma_{\text{innen}} = \sigma_{\text{außen}}$. Sie ist damit direkt mit der **Ursache** der Ladungen verknüpft, welche das Feld erzeugen.

Die **elektrische Feldstärke \vec{E}** ist dagegen mit der **Wirkung** des Feldes verknüpft, denn sie wird über die Kraft definiert, welche das Feld auf eine Probeladung ausübt: $\vec{E} = \vec{F}/q$
 $[E] = N/C$

2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie I

Erzeugung der Verschiebungsdichte D durch Raumladungsdichte ρ

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho(x, y, z)$$

Berechnungsmethode für D im Falle einfacher Symmetrien

$$\iiint_{\text{Vol}} \text{div } \vec{D} \cdot d\vec{v} = \iiint_{\text{Vol}} \rho \cdot dv$$

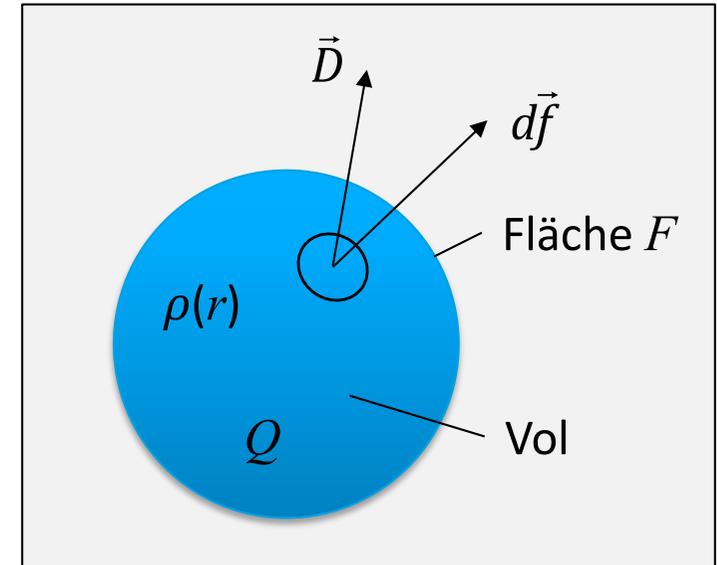
Mathematisch äquivalente Darstellung

Satz von Gauß

$$\oiint_F \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{\text{Vol}} \rho \cdot dv$$

„Satz vom Hüllenfluss“

Gesamte Ladung Q im Volumen



Kugelförmiger Nichtleiter mit Raumladungsdichte $\rho(r)$

Wichtig für die praktische Nutzung:

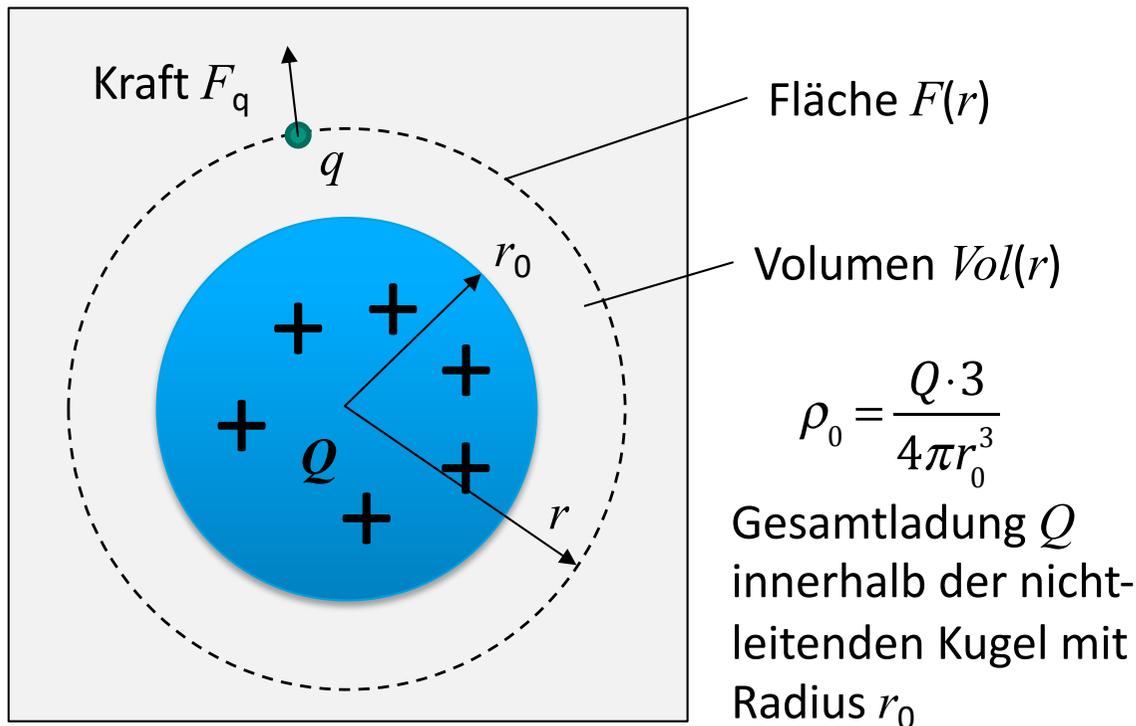
- 1) Wahl eines geeigneten Koordinatensystems
- 2) Wahl einer geschlossenen Integrationsfläche

2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie II

Kugelsymmetrische Ladungsverteilung: Kugelkoordinaten

Symmetrie von Kugel und Ladungsverteilung

$$\rightarrow \vec{D} = D_r(r) \cdot \vec{e}_r \quad \text{konstant auf Hüllfläche}$$



$$\text{Kugelsymmetrie: } \rho(r, \vartheta, \varphi) = \rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } r \leq r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

Berechnung Außenfeld für $r > r_0$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \rightarrow \iiint_{Vol} \text{div } \vec{D} \cdot dv = \iiint_{Vol} \rho \cdot dv$$

$$\oiint_{F(r)} \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{Vol(r)} \rho \cdot dv \Rightarrow D_r \cdot 4\pi r^2 = Q$$

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2} ; D_\vartheta = 0 ; D_\varphi = 0$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2}$$

$$\vec{F}_q = q \cdot \vec{E} \Rightarrow F_{qr} = q \frac{Q}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2}$$

Folgerung der Kraftgleichung
aus den Maxwell-Gleichungen

2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie III

Berechnung Innenfeld für $r < r_0$

$$\rho(r) = \rho_0 = \text{const.} \quad r < r_0$$

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{Vol} \rho \cdot dv$$

$$D_r \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \vec{e}_r \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi}_{4\pi} = \rho_0 \cdot \int_0^r \underbrace{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi}_{4\pi} dr$$

$$D_r \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \quad \Rightarrow \quad D_r(r) = \frac{\rho_0}{3} r$$

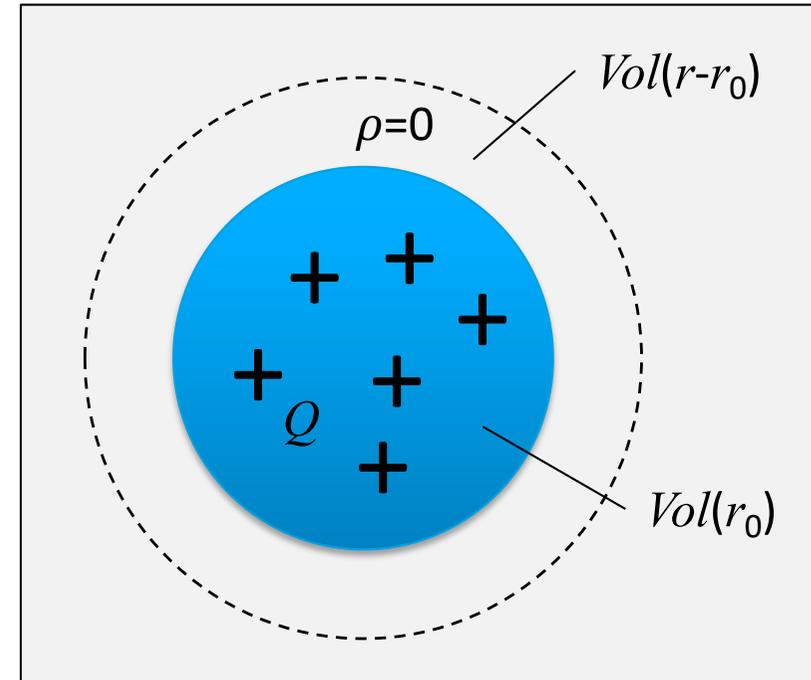
Kugelfläche

Kugelvolumen

2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie IV

Berechnung Außenfeld für $r > r_0$

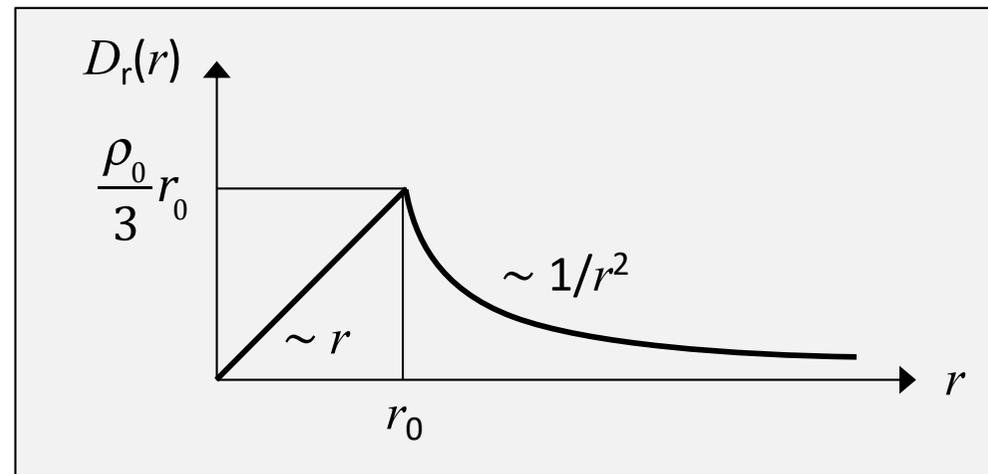
$$\begin{aligned}
 & \iiint_{Vol(r)} \rho \cdot dv \\
 &= \iiint_{Vol(r_0)} \rho \cdot dv + \iiint_{Vol(r-r_0)} \rho \cdot dv \\
 &= \rho_0 \cdot \iiint_{Vol(r_0)} dv + 0 \cdot \iiint_{Vol(r-r_0)} dv \\
 &= \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3 \\
 &= Q
 \end{aligned}$$



$$D_r \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r_0^3$$

└ variabel
└ fest

$$D_r(r) = \frac{\rho_0 r_0^3}{3 r^2}$$



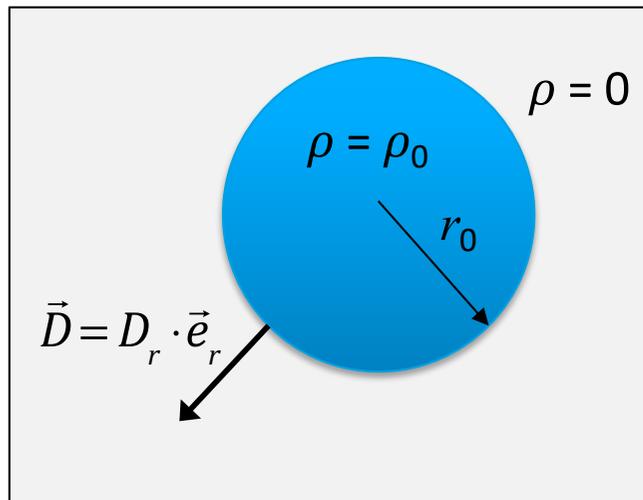
2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie V

Umkehrung: Berechnung von $\rho(r)$ aus gegebenem $D_r(r)$

Innen $r < r_0$

$$\vec{D} = D_r \cdot \vec{e}_r = \frac{\rho_0}{3} \cdot r \cdot \vec{e}_r$$

Nur r -Komponente



$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot D_r) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot r \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot \frac{\partial r^3}{\partial r} \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\rho_0}{3} \cdot 3r^2 \\ &= \rho_0 \end{aligned}$$

Divergenz in Kugelkoordinaten

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho} \quad \text{q.e.d}$$

Außen $r > r_0$

$$\vec{D} = D_r \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

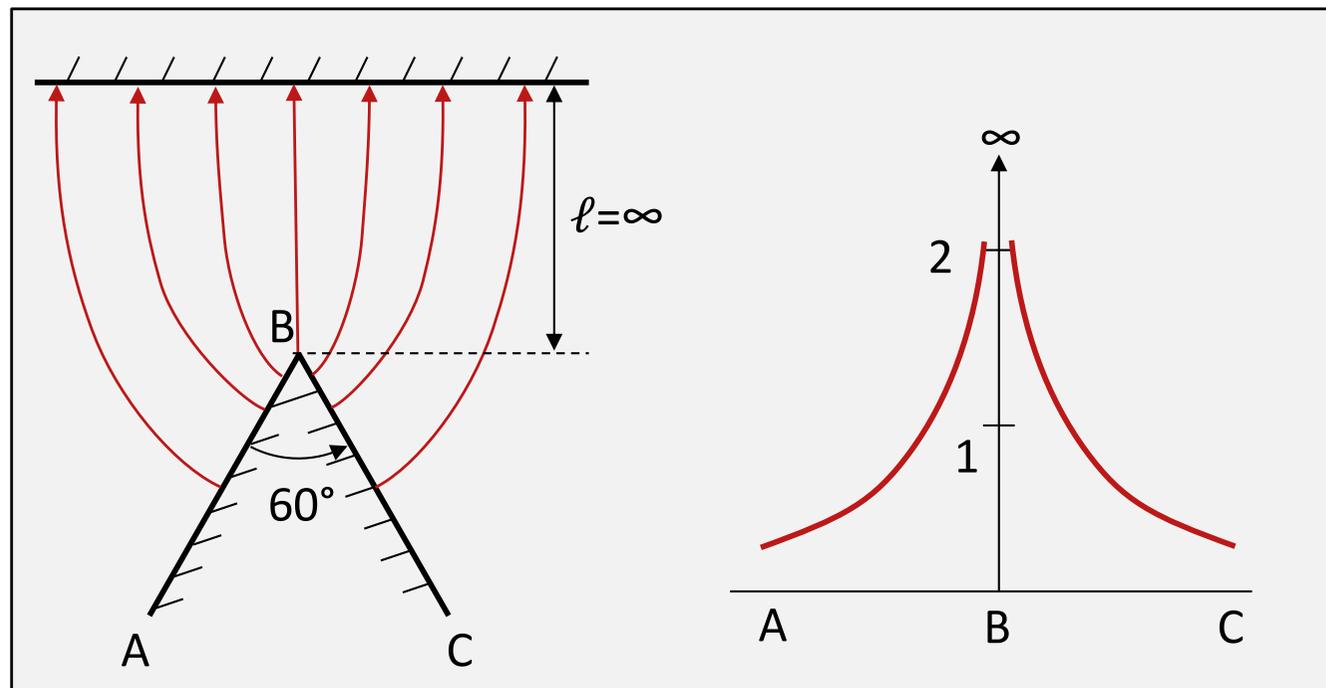
$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{D} = 0} \quad \text{q.e.d}$$

2. Satz von Hüllenfluss und Symmetrie VI

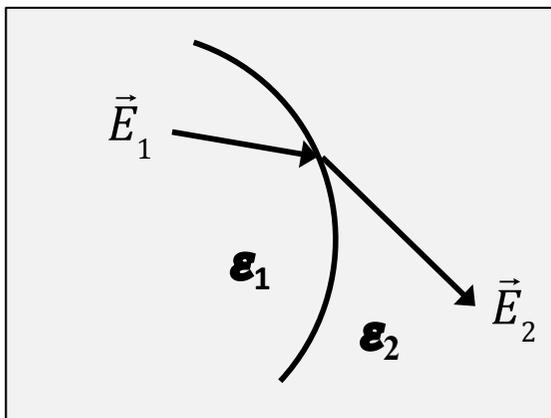
$$\vec{D} = D_r \cdot \vec{e}_r = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \vec{e}_r \quad \text{an der Oberfläche der Kugel ist } r = r_0$$

→ Bei gegebener Ladung Q wird das Feld an der Oberfläche um so höher, je kleiner r_0 ist.

Auch an Spitzen, Ecken und Kanten verdichtet sich das elektrische Feld → Spitzenwirkung. Dieser Effekt tritt bei allen elektrisch geladenen Strukturen mit spitzen Winkeln und auch bei dünnen Leitern auf. Er kann zu Durchschlägen in der Luft führen (Koronaentladung, Spitzenentladung, Elmsfeuer, Knistern und Brummen von Hochspannungsleitungen).



3. Übergänge an Grenzflächen I



Isolatoren
Optische Linsen

Berechnung der Tangentialkomponenten

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

nach Maxwell

$$\iint_F \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -\frac{d}{dt} \iint_{\Delta h \rightarrow 0} \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{E}_i = E_{ti} \cdot \vec{e}_t + E_{ni} \cdot \vec{e}_n \quad i=1,2$$

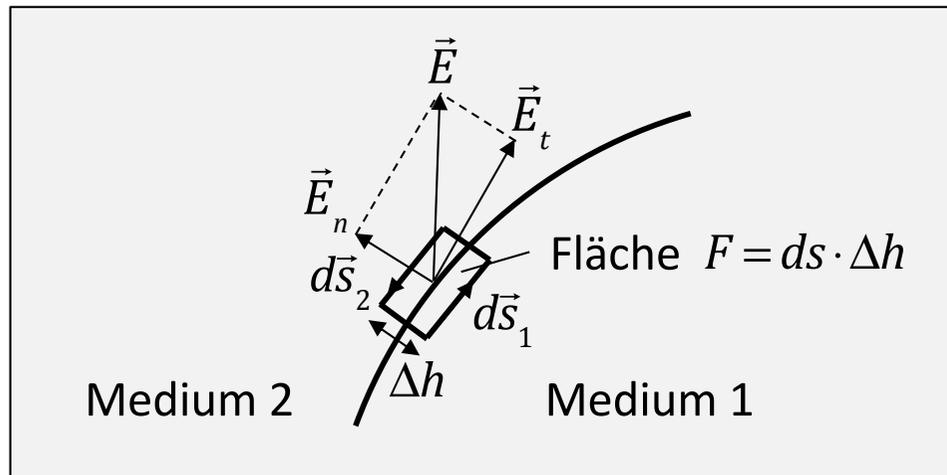
$$d\vec{s}_1 = ds \cdot \vec{e}_t \quad \text{Wegelemente } d\vec{s}_i$$

$$d\vec{s}_2 = ds \cdot (-\vec{e}_t)$$

$$\rightarrow \vec{E}_1 \cdot d\vec{s}_1 = (E_{t1} \cdot \vec{e}_t + E_{n1} \cdot \vec{e}_n) \cdot ds \cdot \vec{e}_t = E_{t1} \cdot ds$$

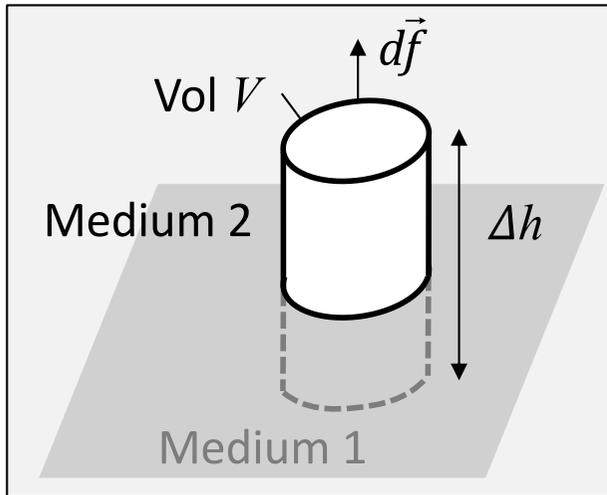
$$\rightarrow \vec{E}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -E_{t2} \cdot ds$$

$$\rightarrow E_{t1} \cdot ds - E_{t2} \cdot ds = 0 \rightarrow \boxed{E_{t1} = E_{t2}}$$



Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke ist an Grenzflächen stetig.

3. Übergänge an Grenzflächen II



Berechnung der Normalkomponenten

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad \iiint \operatorname{div} \vec{D} \cdot d\vec{v} = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint \rho \cdot d\vec{v}$$

nach Maxwell

Volumen $V = df \cdot \Delta h$ wird durch Grenzfläche durchdrungen.
 Boden- und Deckelflächen df stehen senkrecht auf der Grenzfläche.
 Höhe Δh mit Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{D}_i = D_{ti} \cdot \vec{e}_t + D_{ni} \cdot \vec{e}_n \quad i = 1, 2$$

Oberflächenelemente df :

$$\text{Oben: } d\vec{f} = df \cdot \vec{e}_n$$

$$\text{Unten: } d\vec{f} = df \cdot (-\vec{e}_n)$$

$$\text{Rand: } \Delta h \rightarrow 0 \rightarrow F_{\text{Rand}} = 0$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{f} = D_{n2} \cdot df - D_{n1} \cdot df + 0 = \iiint_{\text{Vol}} \rho \cdot \Delta h \cdot df = \iint \sigma \cdot df \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_{n2} - D_{n1} = \sigma}$$

Freie Oberflächenladungsdichte

Die Normalkomponente der elektrischen Verschiebungsdichte macht an der Grenzfläche einen Sprung gleich der freien Grenzladungsdichte. Sie ist stetig, wenn $\sigma = 0$.

3. Übergänge an Grenzflächen III

$$D_{n2} = D_{n1} + \sigma$$

$$\text{Voraussetzung } \vec{D} = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r2} \cdot E_{n2} = \epsilon_0 \cdot \epsilon_{r1} \cdot E_{n1} + \sigma$$

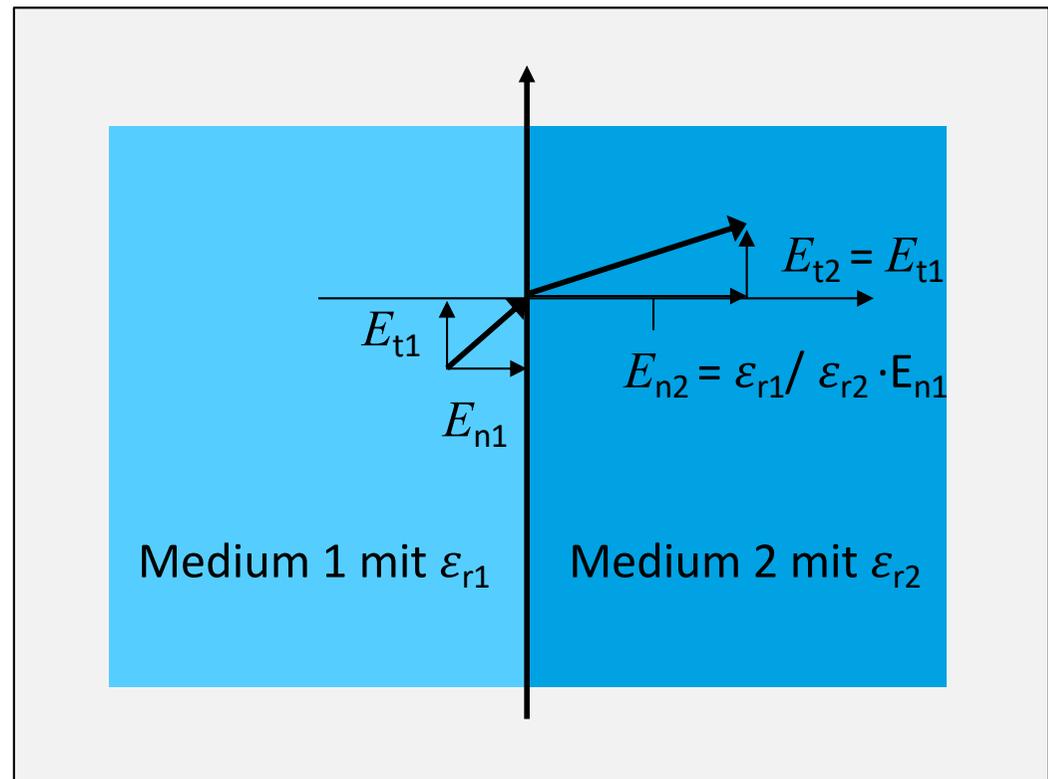
$$E_{n2} = \frac{\sigma / \epsilon_0}{\epsilon_{r2}} + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \cdot E_{n1}$$

$$\text{Außerdem gilt } E_{t2} = E_{t1}$$

Falls $\sigma = 0$, so folgt

$$E_{n2} = \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} \cdot E_{n1}$$

Richtung und Stärke von E ändern sich an Sprüngen der Dielektrizitätskonstanten.

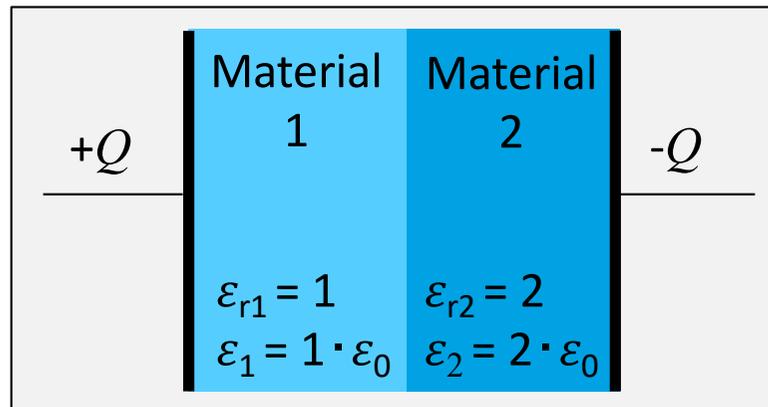


3. Übergänge an Grenzflächen IV

Die elektrische Verschiebungsdichte D beginnt bei positiven Ladungen und endet an negativen Ladungen, allerdings nur an echten Ladungen, also nicht an Polarisationsladungen.

Die elektrische Feldstärke E hingegen beginnt und endet auch an Polarisationsladungen.

Beispiel Plattenkondensator mit zwei Materialien



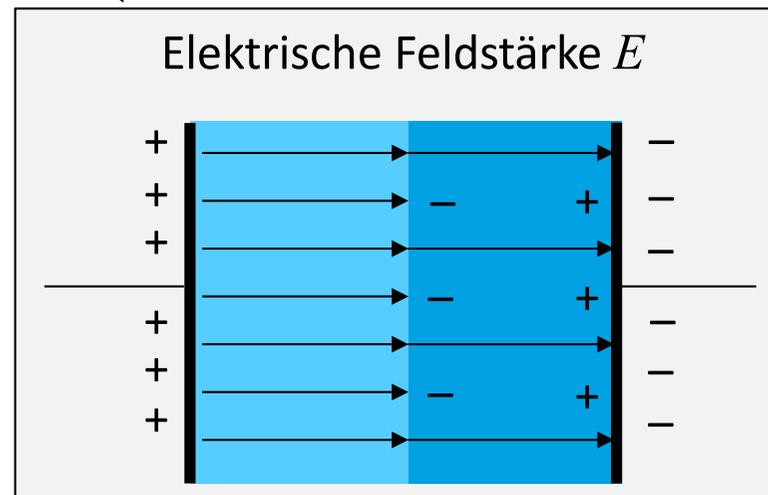
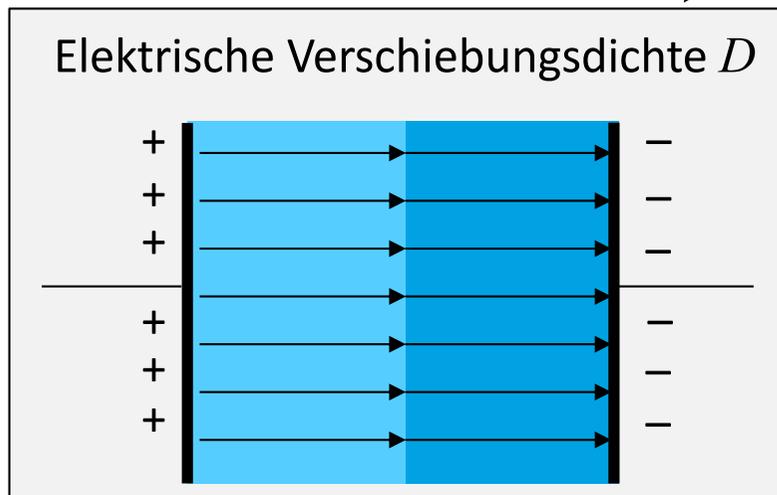
$$E_1 = D_{n1} / \epsilon_1$$

$$E_2 = D_{n2} / \epsilon_2 = E_1/2$$

$$U = E_1 \cdot d/2 + E_2 \cdot d/2$$

Das resultierende Feld E ist also im Dielektrikum immer kleiner als im Vakuum.

Die Verschiebungsdichte D ist hingegen unabhängig von ϵ_r gleich.



3. Übergänge an Grenzflächen V

Bei geschichteten Isoliermaterialien ziehen daher diejenigen mit kleinem ε_r die höchsten Feldstärken E an sich und damit die größte elektrische Beanspruchung.

Das ist insbesondere bei eingeschlossenen Luftblasen kritisch

(→ Durchschlag / Teilentladung, Glimmerscheinung → nach einiger Zeit Materialermüdung).

Es gibt Materialien, z.B. Glimmer, die dauerhaft Teilentladungen standhalten.

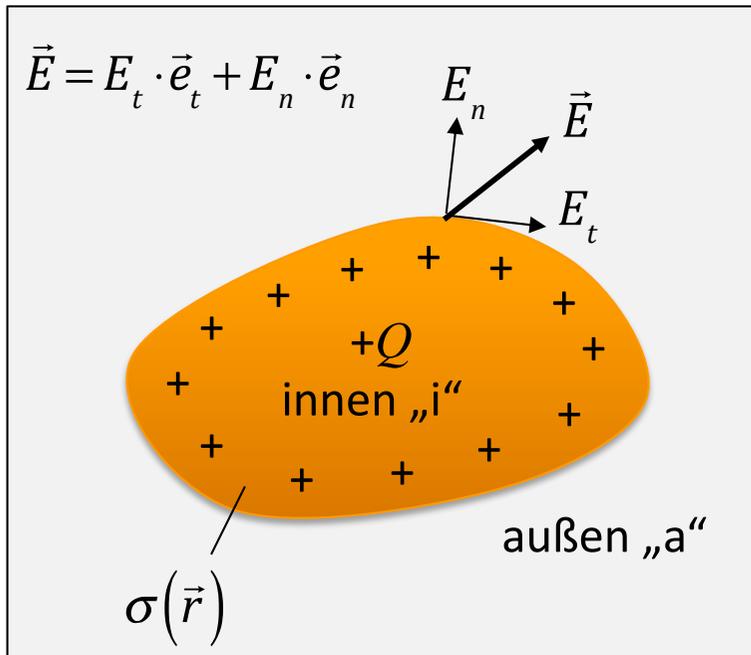
Andere Materialien, z.B. Harze und Lacke, schmelzen bei Teilentladungen in Luftbläschen lokal auf, so dass die Blase immer größer wird und es nach kurzer Zeit zum Ausfall kommt.

Dielektrische Festigkeit (Durchschlagsfestigkeit)	Luft	ca. $E_{\max} = 30$ kV/cm
	Öl	ca. $E_{\max} = 150$ kV/cm
	Papier	ca. $E_{\max} = 150$ kV/cm
	Glimmer (Mikanit)	ca. $E_{\max} = 2000$ kV/cm

Tatsächlich ist die Durchschlagfestigkeit von Gasen (Luft, Stickstoff, Wasserstoff, Helium, ...) stark nichtlinear vom Gasdruck (Aufstellhöhe) und vom Elektrodenabstand abhängig (→ **Paschen-Gesetz**, 1889).

3. Übergänge an Grenzflächen VI

Felder an Leiteroberflächen



Stetigkeit der Tangentialkomponenten:

$$E_{ti} = E_{ta}$$

$$E_i = 0 \rightarrow E_{ti} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{E_{ta} = 0}$$

Stetigkeit der Normalkomponenten:

$$D_{na} - D_{ni} = \sigma$$

$$\epsilon_{ra} \cdot \epsilon_0 \cdot E_{na} - \epsilon_{ri} \cdot \epsilon_0 \cdot E_{ni} = \sigma$$

$$E_{na} = \frac{\sigma}{\epsilon_{ra} \cdot \epsilon_0}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{E}_a = \frac{\sigma}{\epsilon_{ra} \cdot \epsilon_0} \cdot \vec{e}_n}$$

Das Außenfeld steht immer senkrecht auf der Metalloberfläche.

Ortsabhängige
Flächenladungsdichte

$$\boxed{\vec{E}_i = 0}$$

da $\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}_i$ und $\vec{J} = 0$

4. Potentialfunktion I

Definition $\vec{E} = -\text{grad}\Phi$ Potentialfunktion $[\Phi] = \text{Volt}$

$$E_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Das mathematische Skalarfeld $\Phi(\vec{r})$, auch Potentialfunktion genannt, beschreibt vollständig das reale physikalische elektrische Feld \vec{E} .

Das Potential Φ selbst bewirkt keine messbaren Kräfte.

Der Nullpunkt (Bezugspotential, Erdung) ist durch eine beliebige Konstante C wählbar, ohne das vom Potential beschriebene elektrische Feld zu verändern. Die Potentialfunktion ist also nicht eindeutig bestimmt:

$$\vec{E}_1 = -\text{grad}\Phi_0(\vec{r})$$

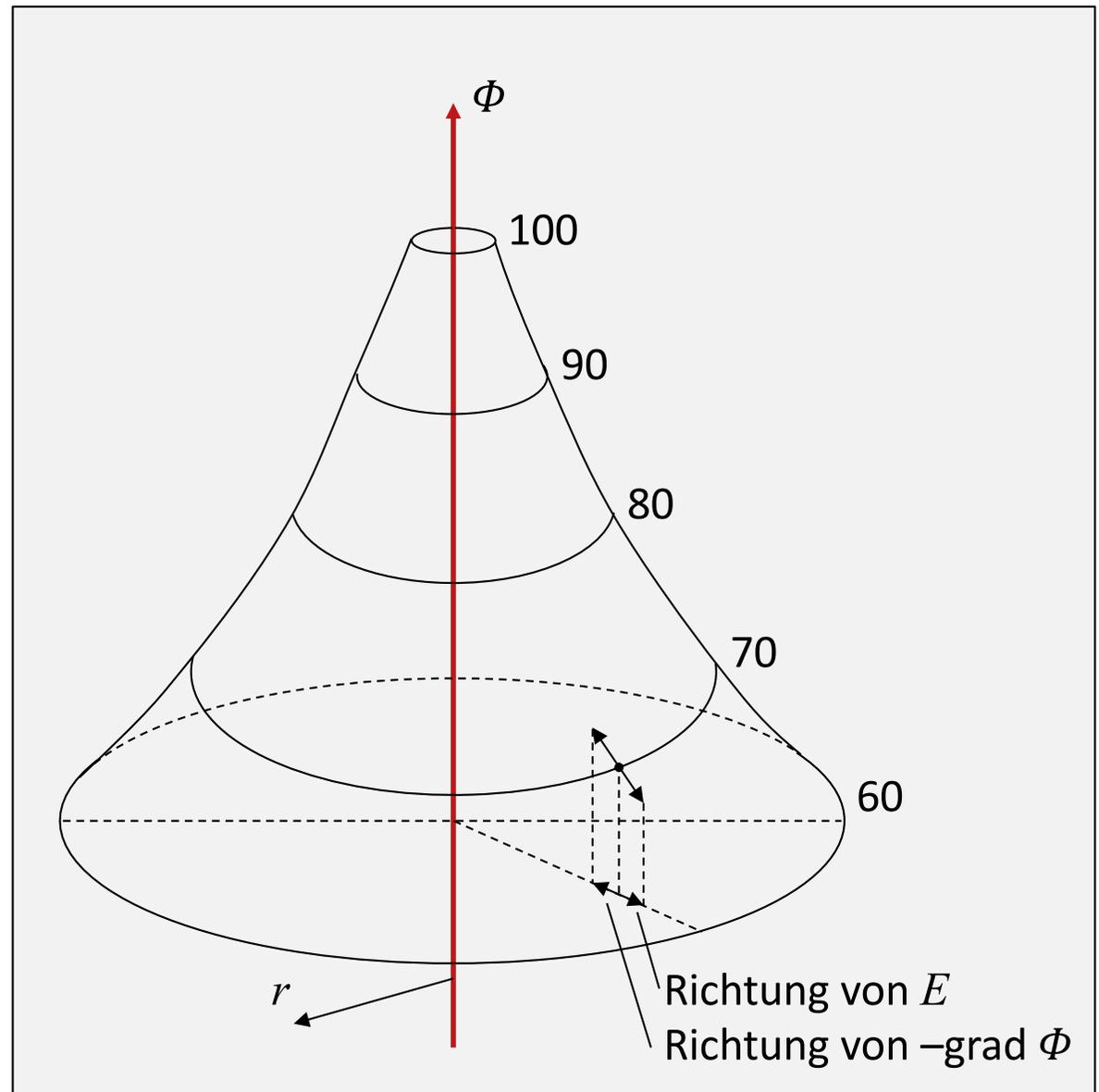
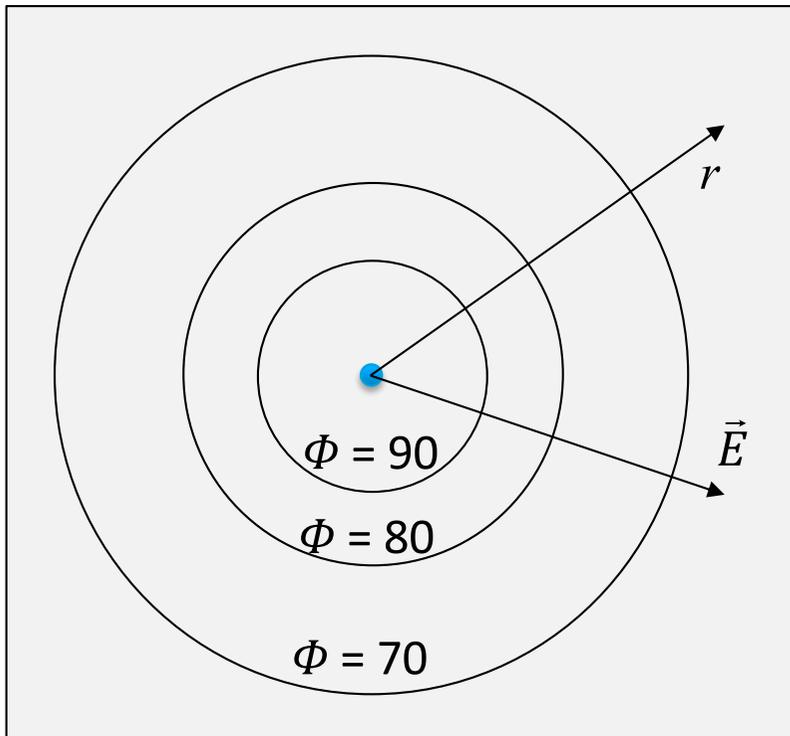
$$\vec{E}_2 = -\text{grad}(\Phi_0(\vec{r}) + C)$$

$$= -\text{grad}\Phi_0(\vec{r}) - \text{grad}C \quad \rightarrow \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

4. Potentialfunktion II

Beispiel Linienladung Q/ℓ

$$\vec{E} = \frac{Q/\ell}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} \cdot \vec{e}_r \quad (\text{ohne Beweis})$$



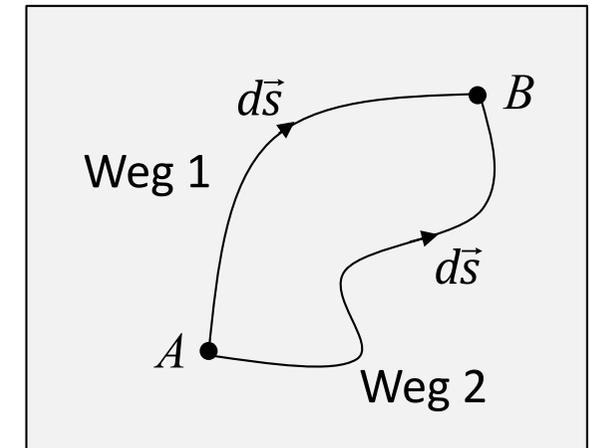
4. Potentialfunktion III

Die Einführung der mathematischen Hilfsgröße des Potentials

erlaubt eine einfache Berechnung des Wegeintegrals: $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Integralsatz der Mathematik:

Das Wegintegral über den Gradienten eines Skalarfeldes vom Punkt A zum Punkt B ist gleich der Differenz der Werte der Potentialfunktion an den Punkten B und A – unabhängig vom integrierten Weg zwischen den Punkten.



$$\Phi(B) - \Phi(A) = \int_A^B \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s}$$

Damit wird

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

$$U_{BA} = \Phi(B) - \Phi(A) = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Wichtig ist nur die Potentialdifferenz an den Orten 1 und 2, nicht der Verlauf der Potentialfunktion zwischen ihnen. **Das Potential ist wegunabhängig.**

Die elektrische Spannung U_{BA} eines Punktes B gegenüber einem Punkt A ergibt sich aus der Differenz der Potentiale in diesen Punkten.

4. Potentialfunktion IV

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \Phi(\vec{r})$$

Differentielle Darstellung

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } \Phi \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{s}$$

$$\text{es ist } d\vec{s} = dx \cdot \vec{e}_x + dy \cdot \vec{e}_y + dz \cdot \vec{e}_z$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right)$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\Phi = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

$$-\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

Integrale Darstellung

4. Potentialfunktion V

Arbeit im elektrischen Feld

Welche Energie wird benötigt, um eine Probeladung Q' vom Ort 1 zum Ort 2 zu bewegen?

$$\vec{F} = Q' \cdot \vec{E} \quad \Longrightarrow \quad \Delta W_e = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q' \cdot \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q' \cdot \left(\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) \right)$$

ΔW_e hängt nur von r_1 und r_2 ab, nicht aber von der Wahl des Weges dazwischen.
Es wird keine Energie auf Wegen entlang von Äquipotentiallinien verbraucht.

$\Longrightarrow Q' \cdot \Phi(\vec{r})$ Nennt man die potentielle Energie einer Ladung Q' am Ort r

Physikalische Bedeutung hat
aber nur die Potentialdifferenz
zwischen zwei Orten 1 und 2



Der Nullpunkt für Φ ist ja willkürlich
 $\text{grad}(\Phi + C) = \text{grad} \Phi$

Die für die Bewegung eines Körpers mit der Ladung Q' von r_1 nach r_2 erforderliche Energie W_{12} ist gleich dem Produkt aus der Ladung des Körpers und der zwischen den beiden Punkten liegenden Spannung U_{21} , also: $W_{12} = Q' \cdot U_{21}$

4. Potentialfunktion VI

Äquipotentialflächen

$$\Phi(\vec{r}) = \text{const.}$$

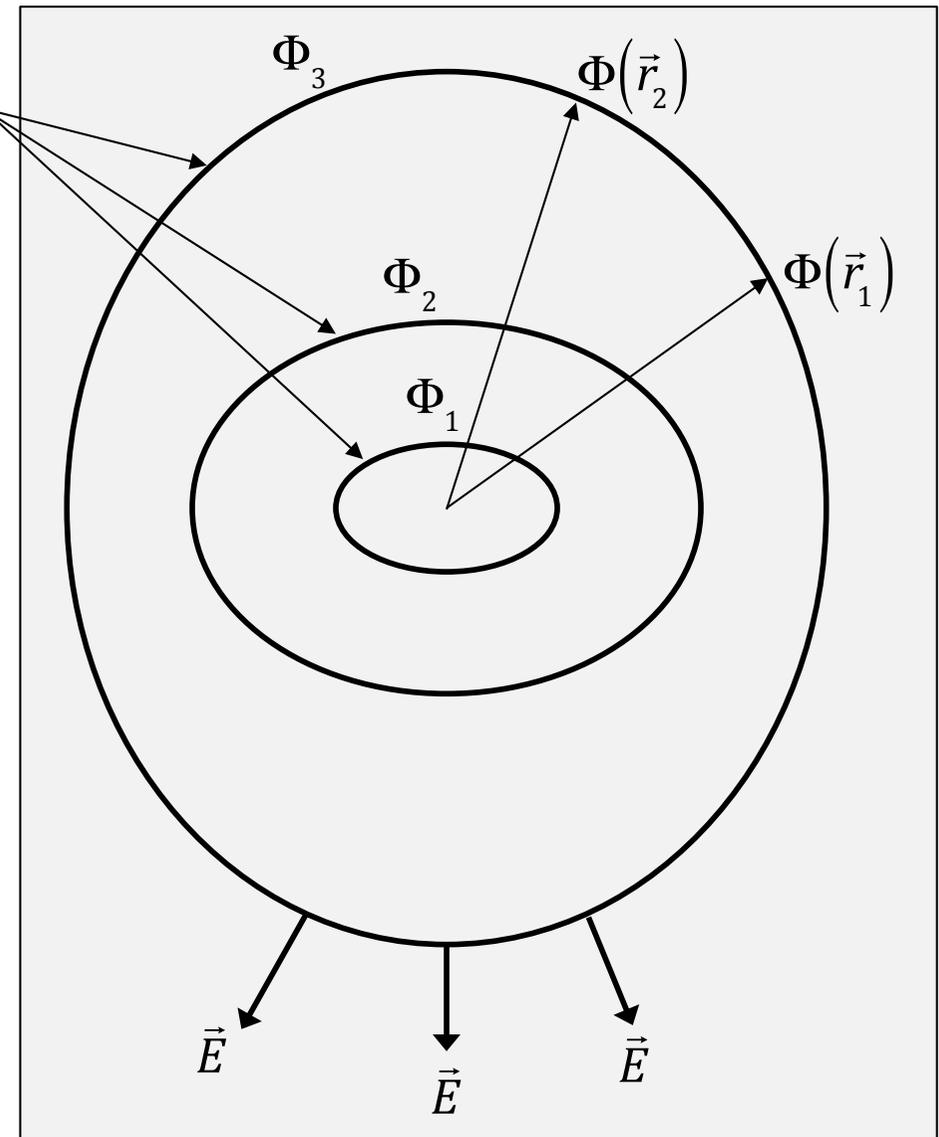
Definition von Äquipotentialflächen

$$\Phi(\vec{r}_2) = \Phi(\vec{r}_1) = \Phi_3$$

$$\Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1) = 0 \rightarrow - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

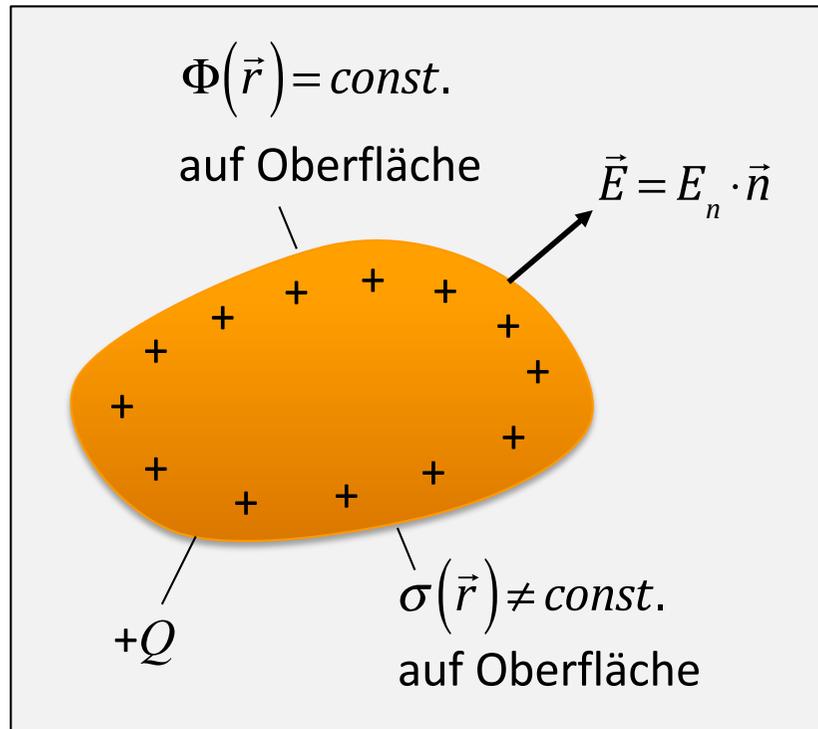
$$\Rightarrow d\vec{s} \perp \vec{E}$$

Äquipotentialflächen stehen senkrecht auf den Feldvektoren des elektrischen Feldes.



4. Potentialfunktion VII

Potentiale an Leiteroberflächen



An Oberflächen gilt:

$E_t = 0$ es gibt keine Tangentialkomponenten

→ $\Phi = const.$

Oberfläche ist Äquipotentialfläche

→ $\vec{E} = E_n \cdot \vec{n}$

Das elektrische Feld (die elektrischen Feldlinien) steht immer senkrecht auf der Oberfläche von Leitern.

4.1 Eine Punktladung I

Gegeben sei eine Punktladung bei $r = 0$

Berechnung von $\Phi(\vec{r})$ aus bekanntem $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}\Phi(r) - \Phi(\infty) &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^r (E_r \cdot \vec{e}_r) \cdot (dr \cdot \vec{e}_r) = - \int_{\infty}^r \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r'^2} dr' \\ &= - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \left[-1 \cdot \frac{1}{r'} \right]_{\infty}^r \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r}\end{aligned}$$

(siehe 17)

Willkürliche, aber praktische Festlegung: $\Phi(\infty) = 0$

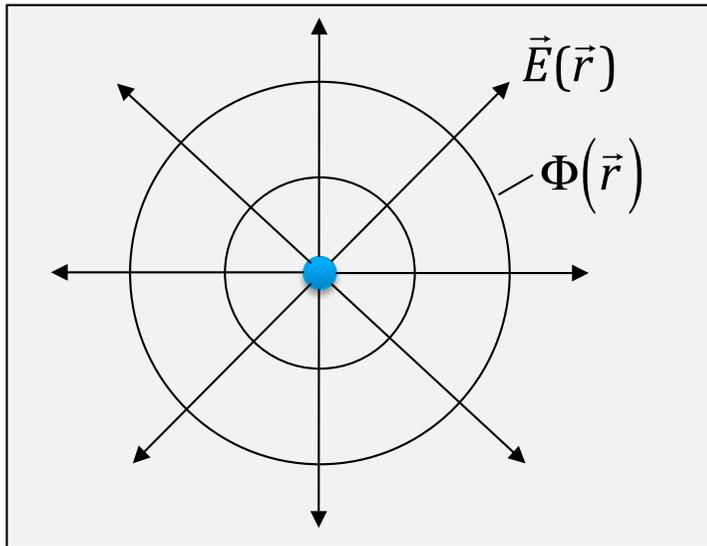
$$\Rightarrow \boxed{\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r}}$$

Coulombpotential einer Punktladung

$Q' \cdot \Phi(\vec{r})$: Potentielle Energie einer Probeladung Q' im Feld der erzeugenden Ladung Q (Arbeit, um aus dem Unendlichen an den Ort r zu kommen)

4.1 Eine Punktladung II

Umkehrung: Berechnung von $\vec{E}(\vec{r})$ aus bekanntem $\Phi(\vec{r})$:



Äquipotentialflächen sind hier
Kugelschalen um Q

Kugelsymmetrie

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r} \quad \text{Kugelkoordinaten}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi$$

$$= -\vec{e}_r \cdot \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} - \vec{e}_\vartheta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\Phi(r)}{\partial\vartheta} - \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial\Phi(r)}{\partial\varphi}$$

$$= + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

4.1 Eine Punktladung III

Welche Energie ist nötig, um die Probeladung Q' von r_1 nach r_2 im Feld einer Punktladung zu bringen?

$$\vec{F} = Q' \cdot \vec{E} \rightarrow \Delta W = \int_{\vec{r}_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = Q' \cdot \int_{\vec{r}_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Delta W = Q' \cdot \left(\Phi(\vec{r}_1) - \Phi(\vec{r}_2) \right)$$

Es genügt die Kenntnis nur von $\Phi(r_1)$ und $\Phi(r_2)$

Potentialdifferenz

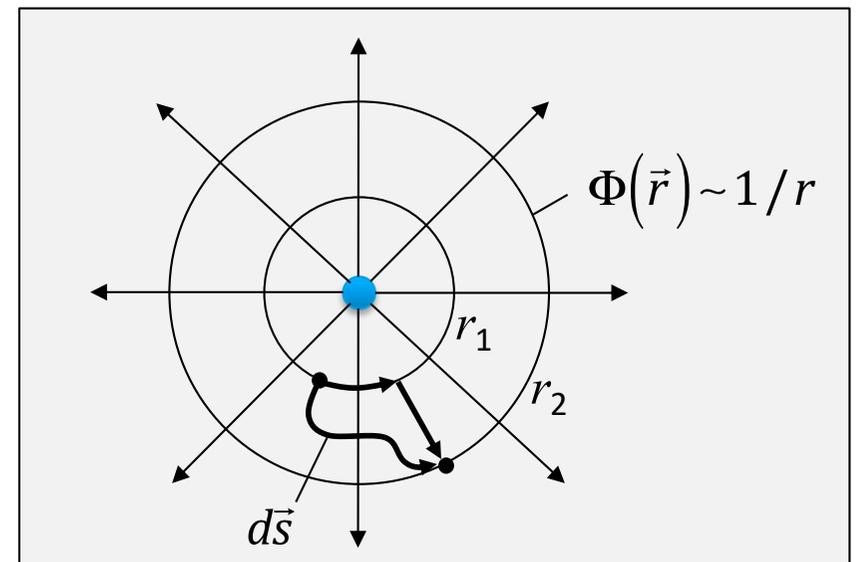
Beweis:

$$\int_{\vec{r}_1}^{r_2} \left(E_r(r) \cdot \vec{e}_r \right) \cdot d\vec{s}$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{r_2} \left(E_r(r) \cdot \vec{e}_r \right) \cdot \left(\vec{e}_r \cdot dr + \vec{e}_\vartheta \cdot r \cdot d\vartheta + \vec{e}_\varphi \cdot r \cdot \sin\vartheta \cdot d\vartheta \right)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \cdot dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

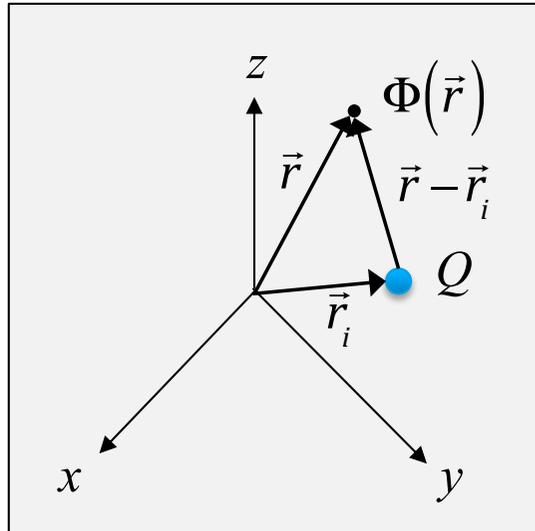
$$= \Phi(r_1) - \Phi(r_2)$$



4.2 Viele Punktladungen I

Potentialfunktion einer Punktladung außerhalb des Ursprungs bei r_i

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$



Potentialfunktion von n Punktladungen

Allgemein gilt:

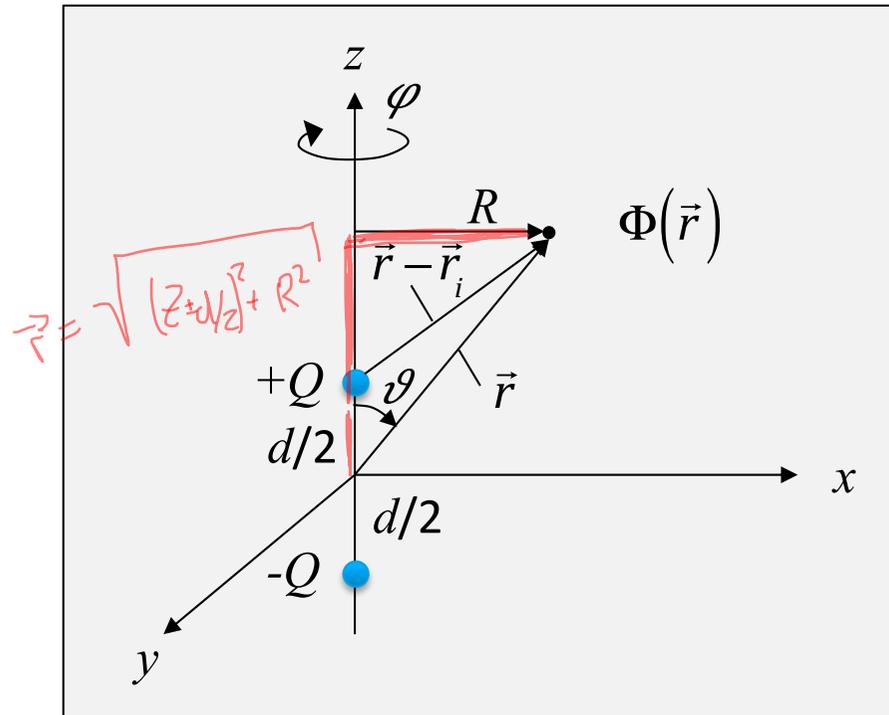
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Man beachte das Vorzeichen der Q_i

4.3 Elektrischer Dipol I

Ein elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Punktladungen $(+Q, -Q)$ im Abstand d mit $Q_{\text{ges}} = +Q - Q = 0$

$$|\vec{r} - \vec{r}_i| = \sqrt{\left(z \pm \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}$$



$$\Phi(R, \varphi, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \left(\frac{+Q \cdot 1}{\sqrt{\left(z - \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} - \frac{-Q \cdot 1}{\sqrt{\left(z + \frac{d}{2}\right)^2 + R^2}} \right)$$

Das Potential eines Dipols ist zylindersymmetrisch, also nicht abhängig von φ .

4.3 Elektrischer Dipol II

Betrachtung aus großer Entfernung

$$\frac{1}{\sqrt{(z-d/2)^2 + R^2}} = \frac{1}{\sqrt{(z^2 - z \cdot d + d^2/4) + R^2}} \stackrel{z^2 + R^2}{\cong} \frac{1}{\sqrt{r^2 - z \cdot d}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z \cdot d}{r^2}}}$$

Reihenentwicklung: $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

damit Näherung:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{z \cdot d}{r^2}}} \cong \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} \right)$$

Reihenentwicklung nach zwei Termen abgebrochen

und entsprechend:

$$\frac{1}{\sqrt{(z-d/2)^2 + R^2}} \cong \frac{1}{r} \cdot \left(1 - \frac{z \cdot d}{2r^2} \right)$$

Übergang auf Kugelkoordinaten:

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} - 1 + \frac{z \cdot d}{2r^2} \right) = \frac{Q \cdot z \cdot d}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 \cdot r^3}$$

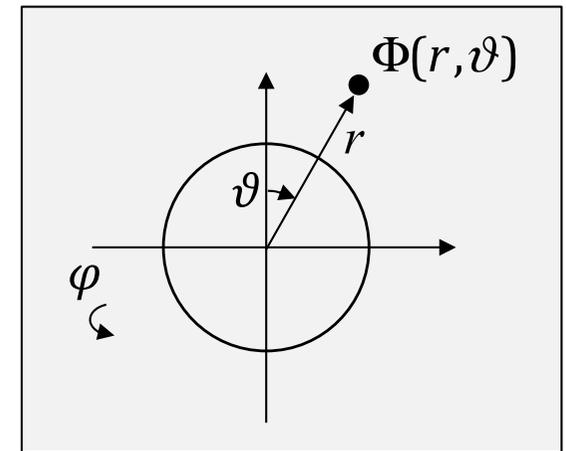
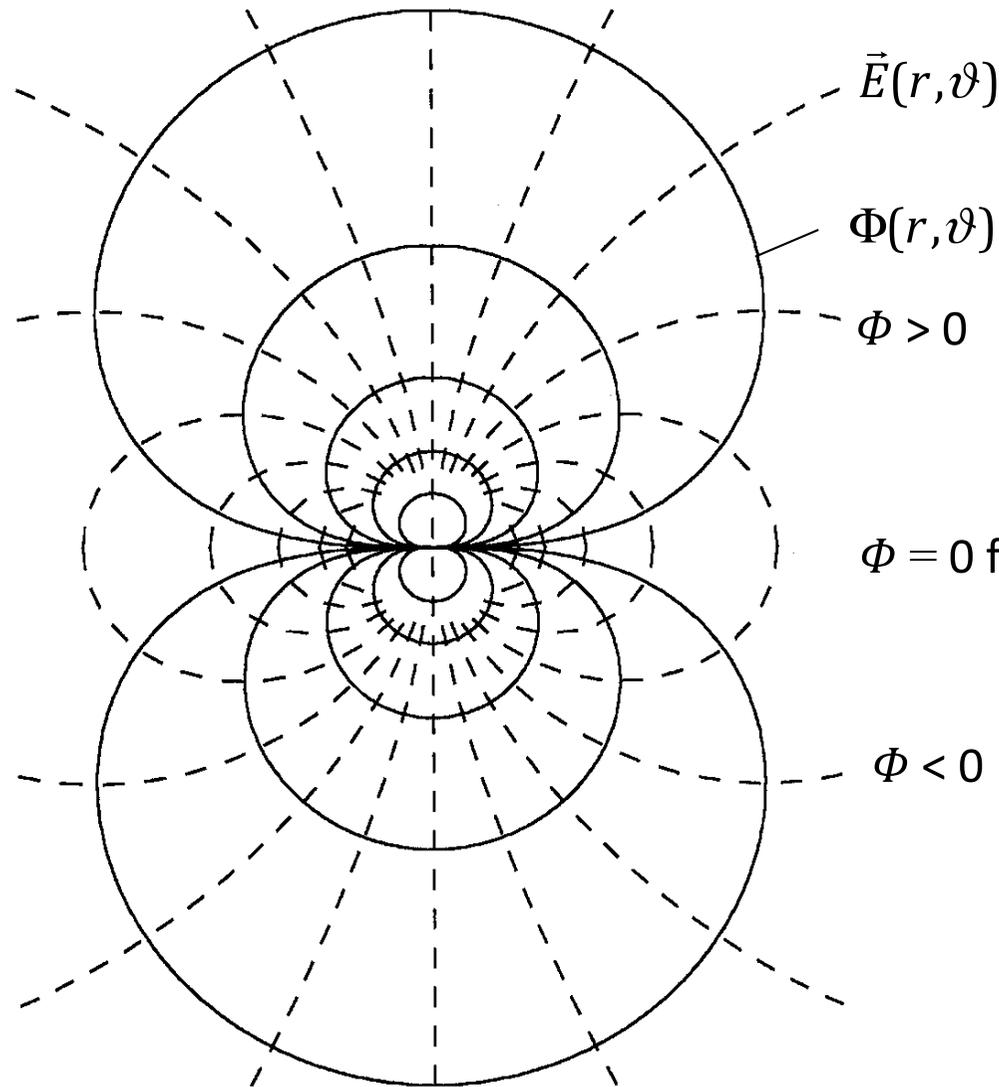
mit $z = r \cdot \cos \vartheta$

folgt als Endresultat:

$$\Phi(r, \delta) = \frac{Q \cdot d \cdot \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 \cdot r^2}$$

4.3 Elektrischer Dipol III

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &\sim 1/r^3 \\ \Phi &\sim 1/r^2 \end{aligned} \right\} \text{für } \vartheta = 0$$



Symmetrie in φ

4.3 Elektrischer Dipol IV

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

Kugelkoordinaten

$$\vec{E} = -\text{grad} \Phi$$

$$\begin{aligned} &= -\vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \\ &= -\vec{e}_r \left[\frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \cos \vartheta \cdot \left(-\frac{2}{r^3} \right) \right] \\ &\quad - \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \left[\frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (-\sin \vartheta) \right] \\ &\quad - \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\cos \vartheta}{r^2} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\vec{E}(r, \vartheta) = 2 \frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{\cos \vartheta}{r^3} \cdot \vec{e}_r + \frac{Q \cdot d}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^3} \cdot \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi$$

4.4 Coulomb Integral I

$$\Phi_i(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Eine Punktladung Q_i an der Stelle r_i

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

Gesamtwirkung aller N Punktladungen Q_i

Übergang zum Kontinuum: Viele Punktladungen, gleichmäßig fein verteilt

→ Ladung ΔQ_i im kleinen Volumenelement Δv_i an der Stelle r_i

$$\Delta Q_i = \rho(\vec{r}_i) \cdot \Delta v_i$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\rho(\vec{r}_i) \cdot \Delta v_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv'$$

Coulomb-Integral

4.4 Coulomb Integral II

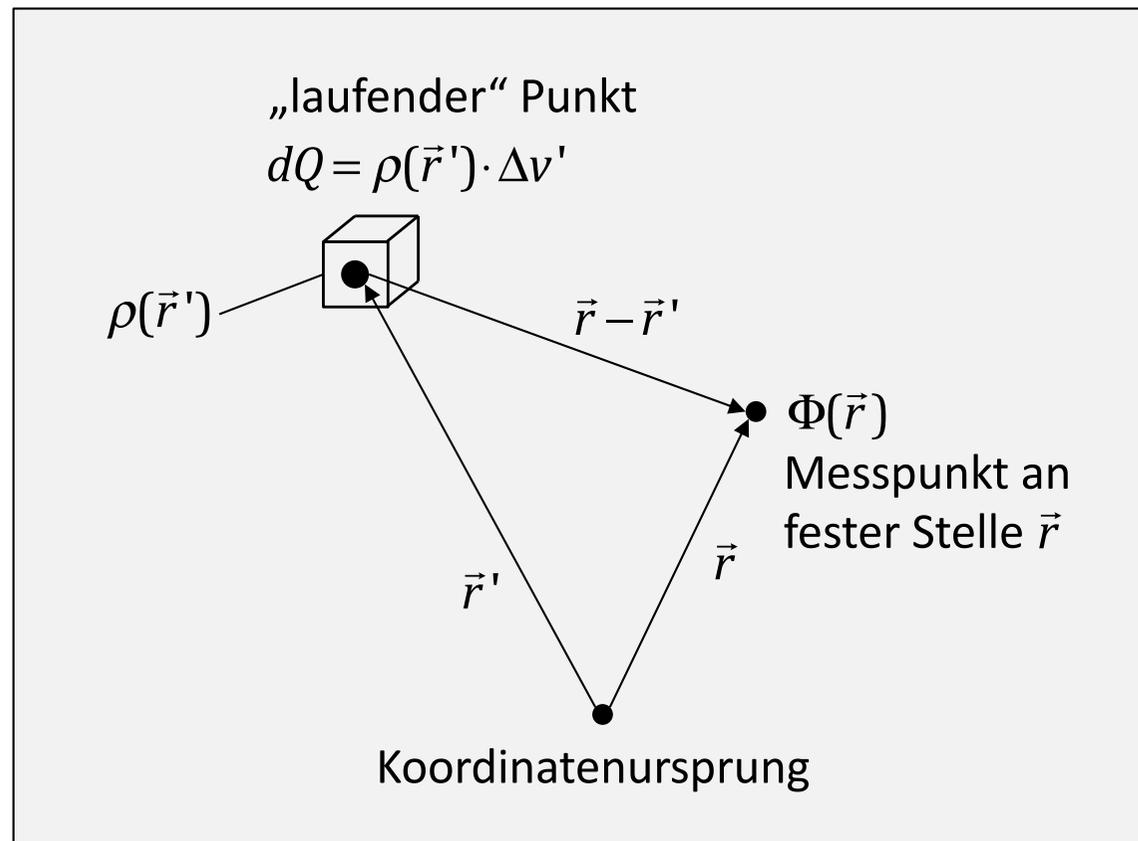
$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \cdot \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv'$$

Coulomb-Integral

Methode zur Berechnung des Potentials Φ bei gegebener Raumladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$

Summation über alle $\rho(\vec{r}') \cdot \Delta v'$

→ Integration über den gesamten Raum mit laufender Koordinate \vec{r}'



4.4 Coulomb Integral III

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_r \epsilon_0} \cdot \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv' \quad \text{und} \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}_{(\vec{r})} \Phi(\vec{r})$$

numerische Differentiation ist immer kritisch, da kleinste Fehler (Rauschen) zu großen Ausschlägen führen!

Abhilfe: Direkte, analytische Differentiation

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) &= -\text{grad}_{(\vec{r})} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint_{vol} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv' \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint_{vol} \left[\text{grad}_{(\vec{r})} \left(\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dv' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint_{vol} \left[\left(\text{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \cdot \rho(\vec{r}') + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \cancel{\text{grad}_{(\vec{r})} \rho(\vec{r}')} \right] dv' \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint_{vol} \left[-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') \right] dv' \end{aligned}$$

Da r und r' unabhängig sind, können die Operationen vertauscht werden.

Raumladung gleichmäßig verteilt, also ist der Gradient Null.

4.4 Coulomb Integral IV

Nebenrechnung

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (x - x') \cdot \vec{e}_x + (y - y') \cdot \vec{e}_y + (z - z') \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = ?$$

$$= \vec{e}_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} + \vec{e}_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\dots}} + \vec{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\dots}}$$

$$= \vec{e}_x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} + \vec{e}_y \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(y - y')}{\sqrt{\dots}^3} + \vec{e}_z \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2(z - z')}{\sqrt{\dots}^3}$$

$$= -\vec{e}_x \cdot \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} - \vec{e}_y \cdot \frac{(y - y')}{\sqrt{\dots}^3} - \vec{e}_z \cdot \frac{(z - z')}{\sqrt{\dots}^3}$$

$$= -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{q.e.d.}$$

4.4 Coulomb Integral V

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint \frac{\rho(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

In kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{E}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint \frac{\rho(x', y', z') \cdot (x - x') dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} \cdot \vec{e}_x \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint \frac{\rho(x', y', z') \cdot (y - y') dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} \cdot \vec{e}_y \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \iiint \frac{\rho(x', y', z') \cdot (z - z') dy' dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Keine numerische Differentiation mehr nötig.
Numerische Integration ist problemlos.

4. Potentialfunktion – Zusammenfassung

$\boxed{\text{div } \vec{D} = \rho}$
→ Gauß
 $\oint\oint_{\text{H\u00fclle}} \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint_{\text{Volumen}} \rho \cdot dv$
Wenn ρ gegeben und Symmetrie
→ Satz vom H\u00fclfluss
→ \vec{D} \vec{E}

$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}}$
↙
 $E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2}$
Feld einer Punktladung

Maxwell
 $-\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 d\Phi$
→
 $\Phi_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$
Potential einer Punktladung am Ort r_i

Def. Potential

Viele Punktladungen, \u00dcbergang zum Kontinuum

$$d\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Vorgehensweise bei beliebigem $\rho(r)$ und beliebiger Geometrie:

$$\rho(\vec{r}) \rightarrow \Phi(\vec{r}) \rightarrow E(\vec{r}) = -\text{grad } \Phi(\vec{r})$$

$\boxed{\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r} \iiint \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'}$
Coulomb-Integral

5.1 Energiedichte I

Das elektrische Feld im Raum trägt an seinem jeweiligen Ort eine gespeicherte Energiedichte, welche proportional zum Quadrat der Feldstärke ist.

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$
$$W_e = \iiint_{\text{Volumen}} w_e \cdot dv$$

Energie

Energiedichte des elektrischen Feldes

Gesamte elektrische Feldenergie im Volumen V

Energie Dichte = örtlich

Wenn $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$ gilt, dann folgt:

$$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

$$[w_e] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3}$$

Physikalische Einheit der Energiedichte

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$$

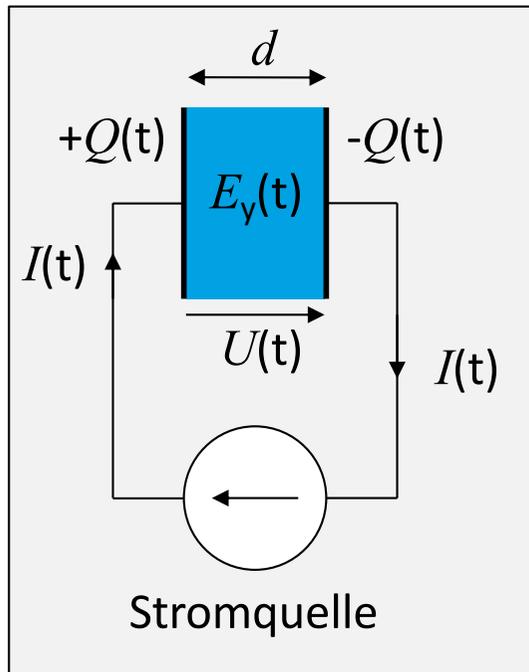
$$1 \text{ kWh} = 3,6 \text{ MJ}$$

Energie (Arbeit) = Leistung · Zeit

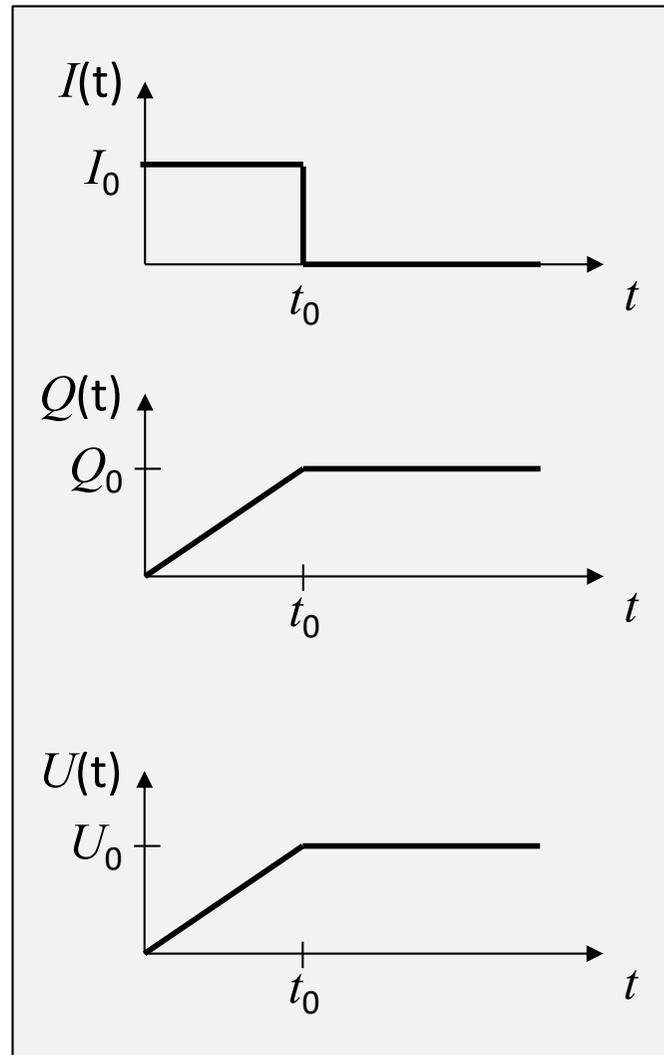
kWh = typische Einheit für elektrische Energie
(Kraftwerke, Elektromobilität, ...)

5.1 Energiedichte II

Veranschaulichung: Langsames Aufladen eines Plattenkondensators ($\epsilon_r=1$)



Die Stromquelle wird bei $t = t_0$ abgeschaltet.



$$I(t) = \begin{cases} I_0 & ; 0 < t < t_0 \\ 0 & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

$$Q(t) = \begin{cases} I_0 \cdot t & ; 0 < t < t_0 \\ Q_0 = I_0 \cdot t_0 & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} \cdot I_0 \cdot t & ; 0 < t < t_0 \\ \frac{1}{\epsilon_0} \frac{d}{A} \cdot I_0 \cdot t_0 & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

5.1 Energiedichte III

Aufgenommene elektrische Leistung aus Sicht der Stromquelle

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{A} \cdot I_0^2 \cdot t & ; 0 < t < t_0 \\ 0 & ; t \geq t_0 \end{cases}$$

Aufgenommene elektrische Energie nach Aufladung, also $t \geq t_0$:

$$W_{UI} = \int_0^{t_0} P(t) \cdot dt = \int_0^{t_0} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{A} \cdot I_0^2 \cdot t \cdot dt = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{A} \cdot I_0^2 \cdot t_0^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{d}{A} \cdot Q_0^2$$

$$E_{y0} = E_y(t_0) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q_0}{A} \quad \rightarrow \quad Q_0 = \varepsilon_0 \cdot A \cdot E_{y0} \quad \rightarrow \quad \boxed{W_{UI} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E_{y0} \cdot A \cdot d}$$

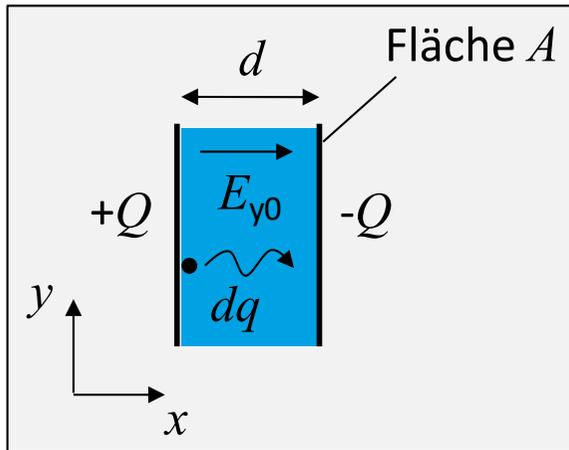
Aufgebaute elektrische Feldenergie nach der Aufladung: $W_e = \int w_e \cdot dv$

E_y ist im Kondensator räumlich konstant. Volumen $A \cdot d \rightarrow W_e = w_e \cdot A \cdot d$

Energieerhaltung: $W_e = W_{UI} \rightarrow w_e \cdot A \cdot d = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E_{y0} \cdot A \cdot d \rightarrow \boxed{w_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E_{y0}^2}$ Elektrische Feldenergie

5.1 Energiedichte IV

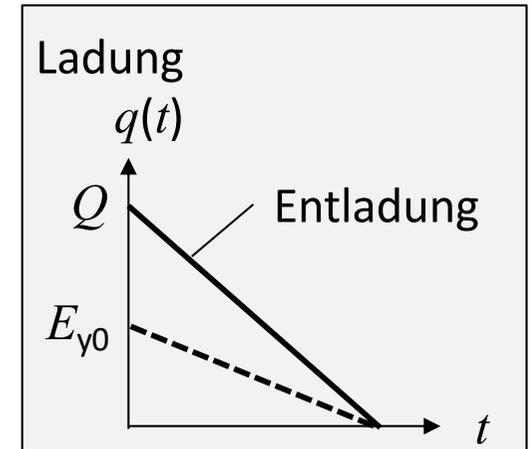
Allmähliche Selbstentladung eines Kondensators



Ladung dq wird von + nach – Platte gebracht
Entladung in kleinsten Portionen

$$dF_y = dq \cdot E_y \quad \text{Kraft auf Ladung } dq$$

$$dW = dq \cdot E_y \cdot s \quad \text{Die dem Feld } E_y \text{ entnommene Arbeit, z.B. kinetische Energie, Joulsche Wärme}$$



Freigesetzte Energie zur vollständigen Entladung

$$W = \int_0^Q dW = \int_0^Q E_y(q) \cdot s \cdot dq$$

$$= \int_0^Q \frac{q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot d \cdot dq = \frac{d}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot \frac{1}{2} q^2 \Big|_0^Q \quad \text{innen kein Dielektrikum } (\epsilon_r=1)$$

$$= \frac{d}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot \frac{1}{2} (\epsilon_0 \cdot A \cdot E_{y0})^2$$

$$\rightarrow W = d \cdot A \cdot \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_{y0}^2$$

$$\rightarrow w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_{y0}^2$$

freigesetzte Energie
bzw. Energiedichte

es war: $D_{y0}(Q) = \sigma = Q / A$

$$\rightarrow E_{y0}(Q) = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A}$$

$$\rightarrow E_y(q) = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot A}$$

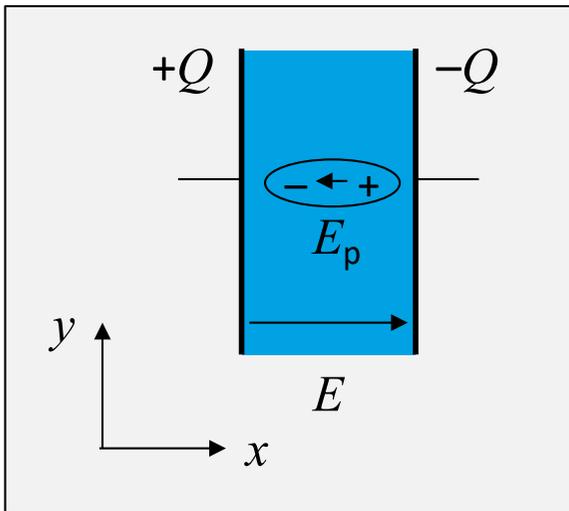
5.1 Energiedichte V

Einfluss eines Dielektrikums

Die gespeicherte Feldenergiedichte des elektrischen Feldes ist $w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E^2$

Warum ist die gesamte Energiedichte $w_{eges} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E_Q \cdot E > w_e$?

Antwort: Es besteht ein zusätzlich gespeicherter Energieinhalt in den Molekülen, hervorgerufen von der elektrostatischen Rückstellkraft der getrennten Ladungen.



Kraftgleichgewicht im Molekül: $\vec{F} = q_e \cdot \vec{E} = r \cdot \vec{s}$

Hier ist r die elektrostatische Rückstell-Konstante proportional zur Auslenkung der Ladungen im Molekül

Auslenkung Elektronen durch E : $\vec{s} = q_e \cdot \vec{E} / r$

Gespeicherte Energie pro Molekül: $W_{pm} = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s}' = \int_0^s r \vec{s}' \cdot d\vec{s}' = \frac{1}{2} r \cdot s^2 = \frac{1}{2} r \cdot (q_e \cdot E / r)^2$

5.1 Energiedichte VI

Gespeicherte Energie pro Molekül: $W_{pm} = \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{r} E^2$

Bei N Molekülen pro Volumeneinheit ist die gespeicherte Energiedichte $w_p = N \cdot W_{pm} = N \cdot \frac{1}{2} \frac{q_e^2}{r} E^2$

Die gesamte Energiedichte w_{eges} ist die Summe der reinen Feldenergiedichte w_e und der in den Molekülen gespeicherten elektrostatischen Energiedichte w_p

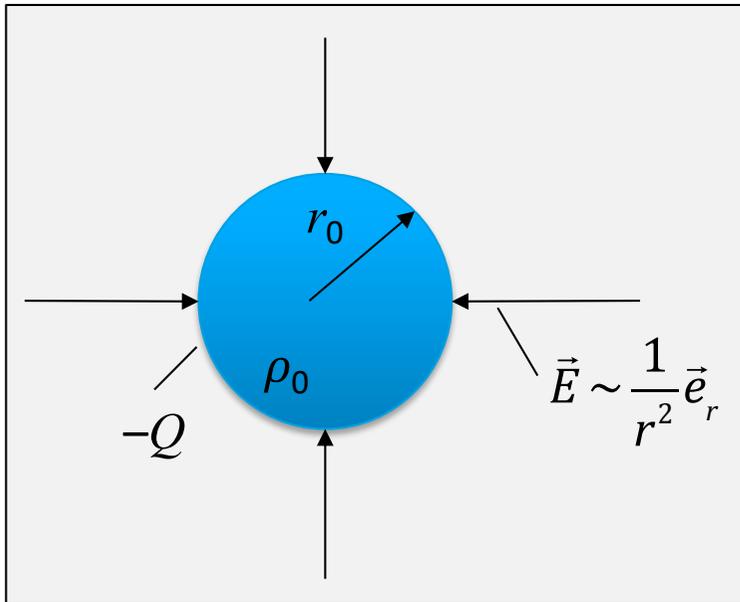
$$w_{eges} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2 + \frac{1}{2} \frac{N \cdot q_e^2}{r} E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{N \cdot q_e^2}{\varepsilon_0 \cdot r} \right)}_{\varepsilon_r} \cdot E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot E^2$$

Somit ergibt sich schließlich:

$$w_{eges} = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

Hier versteckt sich in D bzw. ε_r die zusätzlich in den Molekülen gespeicherte Energie der elektrostatischen Rückstellkraft.

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel I



Gesamtfeldenergie = Feldenergie innen + Feldenergie außen

$$(r \leq r_0)$$

$$(r > r_0)$$

$$W_e = \int_{r \leq r_0} w_{ei} \cdot dv + \int_{r > r_0} w_{ea} \cdot dv$$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{f} = \iiint \rho_0 \cdot dv \quad \text{Maxwell}$$

$$\rightarrow D_r \cdot 4\pi r^2 = \rho_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q \frac{r^3}{r_0^3} \quad \text{mit} \quad \rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

$$\rightarrow \text{innen} \quad E_{ri} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{r}{r_0^3}$$

$$\rightarrow \text{außen} \quad E_{ra} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}$$

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel II

Berechnung der Feldenergie im Inneren

$$W_{ei} = \iiint_{r \leq r_0} w_{ei} = \iiint_{r \leq r_0} \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E_{ri}^2 dv$$

mit $E_{ri} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \frac{r}{r_0^3}$

$$\rightarrow W_{ei} = \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} \varepsilon \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon)^2} \frac{r^2}{r_0^6} \cdot r^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon)^2} 2 \cdot 2\pi \int_0^{r_0} \frac{r^4}{r_0^6} dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{r^5}{r_0^6} \Big|_0^{r_0} \quad \rightarrow \quad \boxed{W_{ei} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{5} \frac{1}{r_0}}$$

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel III

Berechnung der Feldenergie im Äußeren

$$W_{ea} = \iiint_{r>r_0} \frac{1}{2} \varepsilon \cdot E_{ra}^2 dv$$

mit $E_{ra} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$

$$\rightarrow W_{ea} = \int_{r_0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \varepsilon \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon)^2 r^4} \cdot r^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta d\varphi dr$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon \frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon)^2} 2 \cdot 2\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^2} dr$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{-1}{r} \Big|_{r_0}^{\infty} \quad \rightarrow \quad \boxed{W_{ea} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_0}}$$

$$\boxed{W_{ges} = W_{ei} + W_{ea} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{5} + 1 \right)}$$

unabhängig vom Vorzeichen von Q
proportional zu $1/r_0$

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel IV

Beispiel: Größe eines Elektrons

Es war:
$$W_{ges} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_0}$$

Relativitätstheorie
$$W_{eges} = m_{el} \cdot c^2$$

→
$$m_{el} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_0 c^2}$$

Massenbeitrag des elektrischen Feldes

Überlegung:

Ein Elektron hat bekanntlich eine Masse von $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg.

Welchem Radius r_0 entspricht diese Masse?

$$r_0 = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{m_{el} \cdot c^2}$$

$$q_e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$$

$$\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\rightarrow r_0 = 1,7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Widerspruch zu Streu-Experimenten:

Die De-Broglie-Wellenlänge eines

Elektrons ist $\lambda = 1,9 \cdot 10^{-11}$ m

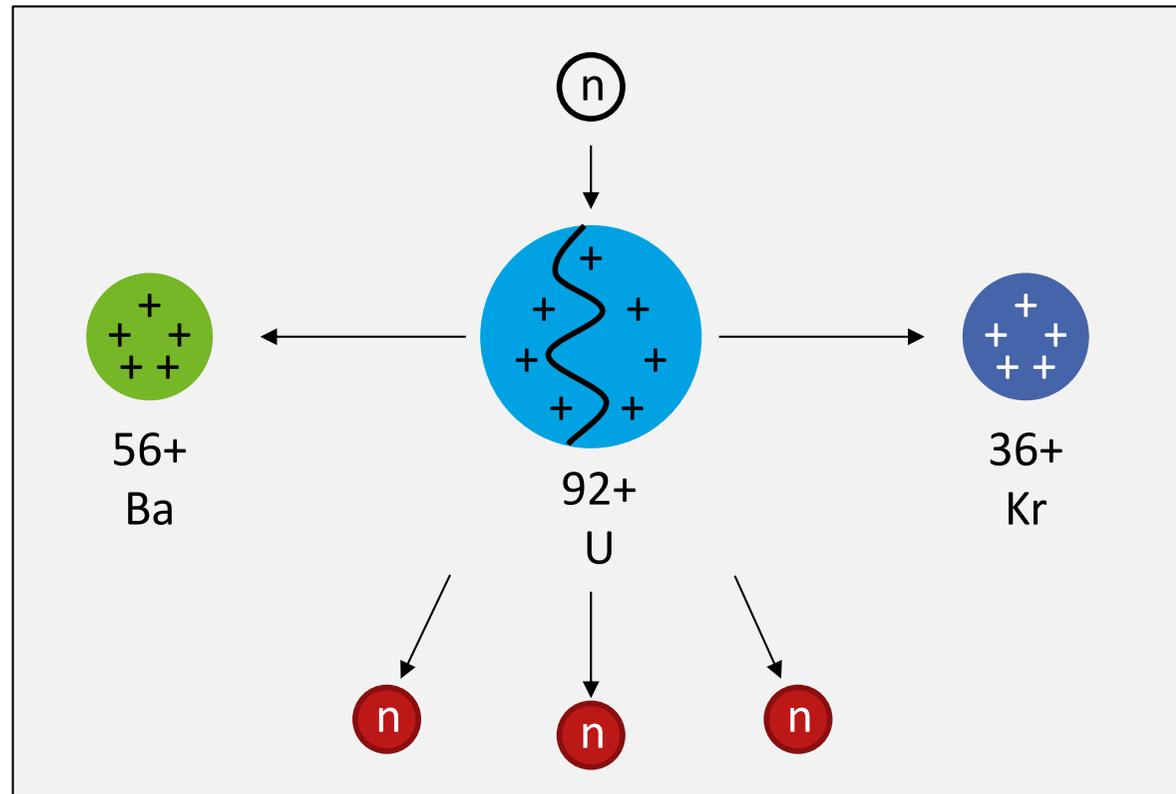
→ hier versagt die klassische Physik!

→ Welle-Teilchen-Dualismus!

→ Das Elektron ist ein Quantenobjekt!

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel V

**Beispiel:
Uranspaltung U-235**



Freigesetzte Energie:

1 Spaltung U-235 $\rightarrow 200 \text{ MeV} = 200 \cdot 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ Joule (Ws)}$

Atommasse U-235 $= 235 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

1 kg U-235 $\rightarrow E_{\text{kin}} = 23 \cdot 10^6 \text{ kWh}$

entspricht 1 Mio. PKW-km in einem Elektroauto
oder rund 20.000 t TNT Sprengstoff

5.2 Feldenergie einer geladenen Kugel VI

$$W_{ges} = \frac{3 Q^2}{54\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_0}$$

$$Q_U = 92 q_e$$

$$Q_{Ba} = 56 q_e$$

$$Q_{Kr} = 36 q_e$$

$$r_U \cong 1 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

$$r_{Ba} \cong 0,85 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

$$r_{Kr} \cong 0,73 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

$$\text{Näherungsweise } r_U \cong r_{Ba} \cong r_{Kr}$$

$$W_{eU} = W_{eBa} + W_{eKr} + E_{Kin}$$

$$E_{kin} = \frac{3 q_e^2}{54\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_U} (92^2 - 56^2 - 36^2)$$

→ $E_{kin} \cong 5,6 \cdot 10^{-11}$ Joule nach Maxwell-Gleichungen

$E_{kin} \cong 200 \text{ MeV} = 3,2 \cdot 10^{-11}$ Joule nach Experiment

→ Das elektrische Feld im Urkern ist die wesentliche Quelle für die Kernenergie

5.3 Feldenergie von Anordnungen metallischer geladener Leiter I

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \vec{E} \cdot \vec{D} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \iiint \text{grad } \Phi \cdot \vec{D} dv$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \iiint \text{div}(\Phi \cdot \vec{D}) dv - \iiint \Phi \cdot \text{div} \vec{D} dv \right\} \quad \text{mit} \quad \text{div}(\Phi \cdot \vec{D}) = \Phi \cdot \text{div} \vec{D} + \text{grad } \Phi \cdot \vec{D} \quad (\text{Mathe})$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \oint_F \Phi \cdot \vec{D} d\vec{f} - \iiint \Phi \cdot \rho dv \right\} \quad \text{mit} \quad \text{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{Maxwell})$$

In metallischen Leitern ist $\oint_F \Phi \cdot \vec{D} d\vec{f} = 0$, weil innerhalb des Leiters kein Feld vorhanden ist ($E_i = 0$).
Somit:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \Phi \cdot \rho dv$$

Feldenergie im gesamten Raum,
dargestellt durch Potential und
Raumladungsdichte.

Das Integral über den Raum wird nur benötigt, wenn auch Raumladungen vorhanden sind.

5.3 Feldenergie von Anordnungen metallischer geladener Leiter II

In metallischen Leitern:

→ $\rho_{\text{innen}} = 0$ aber Flächenladungsdichte auf der Metall-Oberfläche

→ $\Phi = \text{const.}$ auf der Metall-Oberfläche

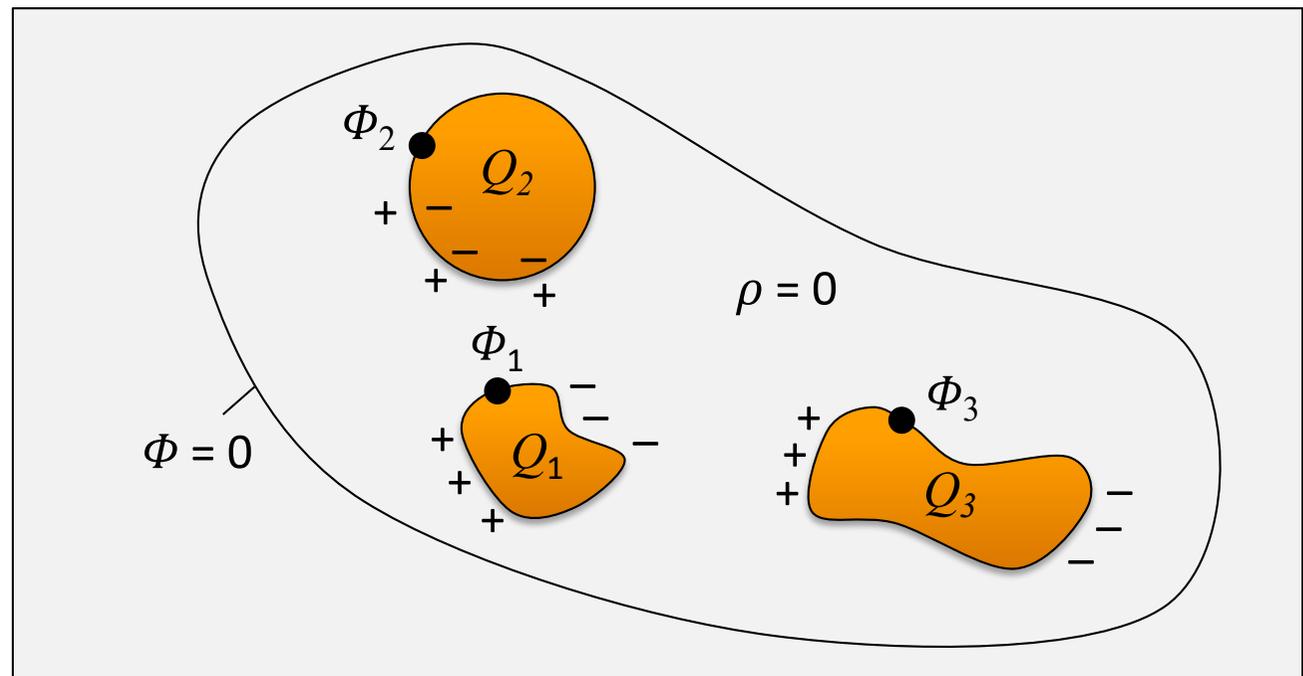
$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \Phi \cdot \rho \, dv$$

Bei N Leitern gilt: da $\rho = 0$ außerhalb der Leiter, Integration nur in Leitern

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \iiint \Phi_k \cdot \rho_k \, dv \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k \cdot \iiint \rho_k \, dv \end{aligned}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k \cdot Q_k$$

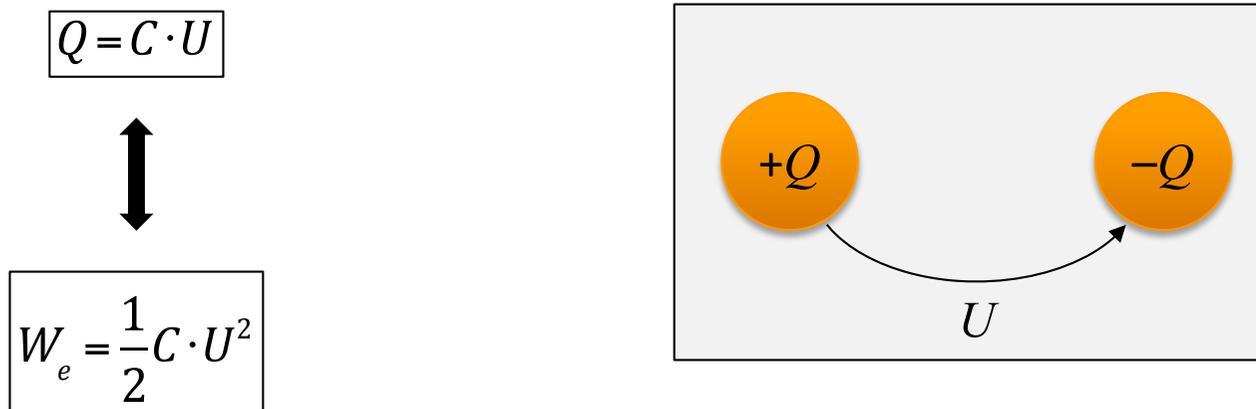
Man setzt üblicherweise
 $\Phi = 0$ im Unendlichen



6. Kapazität I

In der Elektrodynamik gibt es zwei Beziehungen von Größen, die durch die gleiche Proportionalitätskonstante C verbunden sind:

- Die Ladung Q mit der Potentialdifferenz bzw. der Spannung U
- Die elektrische Feldenergie mit der Potentialdifferenz bzw. der Spannung U



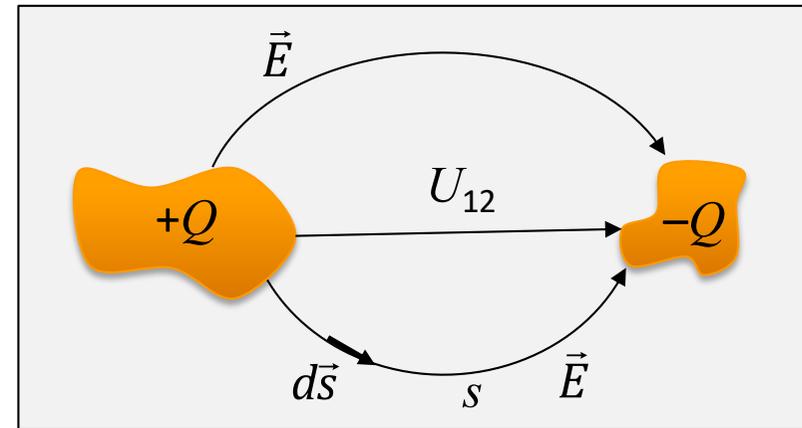
Diese gemeinsame Proportionalitätskonstante C heißt *Kapazität*

Der Ladungsbegriff Q wird nun erweitert und allgemein zum **Verschiebungsfluss**, also zum elektrischen Fluss im Raum. Die Verschiebungsdichte D im Raum ist dann gegeben aus $D = dQ / dA$

6. Kapazität II

Definition der Kapazität C :

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| = \left| \frac{\oiint \epsilon \vec{E} d\vec{f}}{\int_S \vec{E} d\vec{s}} \right|$$

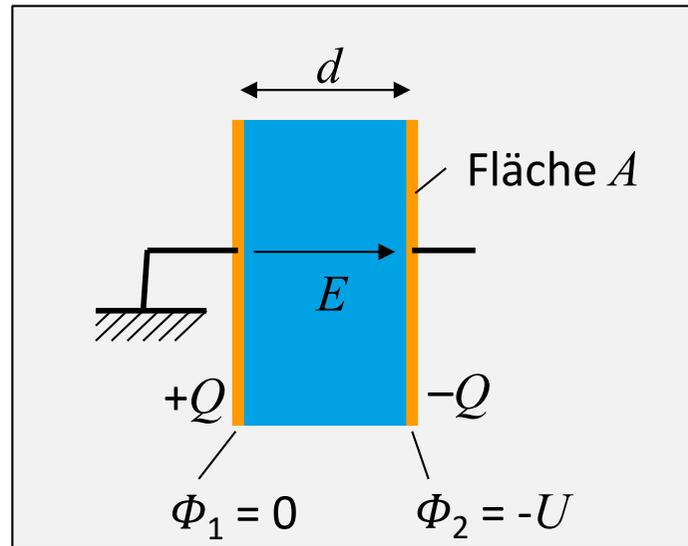


Die Kapazität ist nur abhängig von der Geometrie, sie ist unabhängig von E .

Berechnung von C

- Suche E als Funktion von Q
- Berechne $\Phi_2 - \Phi_1 = U_{12}$ aus E als Funktion von Q
- Dividieren Q durch U_{12}
- Voraussetzung: Gleich starke, entgegengesetzte Ladungen $+Q - Q = 0$

6.1 Kapazität eines Plattenkondensators



$$\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s} = -E \cdot d$$

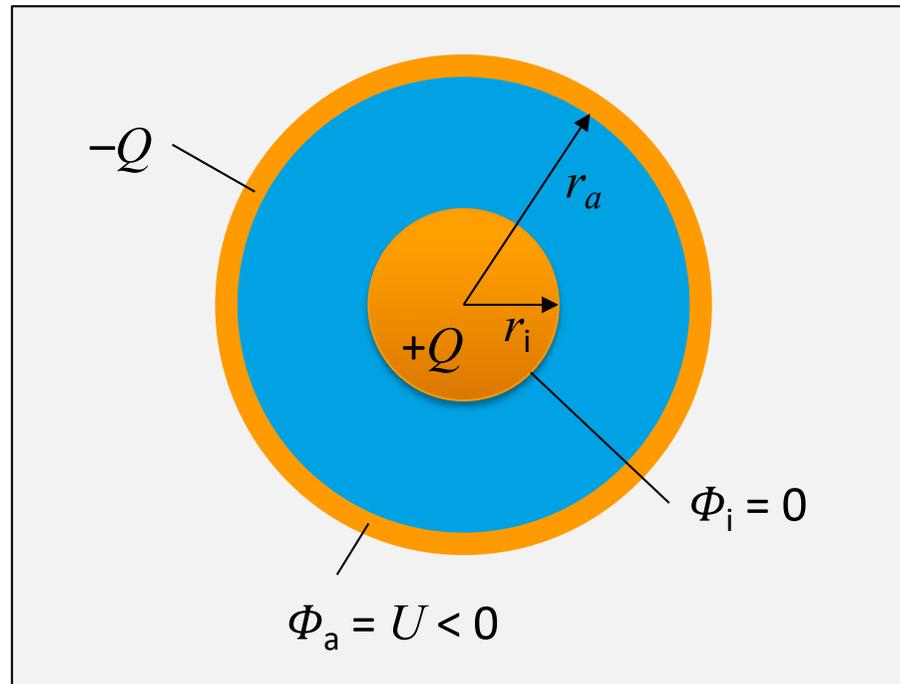
$$\sigma = \frac{Q}{A} = D = \varepsilon \cdot E \quad \begin{array}{l} \text{Flächenladungsdichte } \sigma \\ \text{Verschiebungsdichte } D \end{array}$$

$$E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A} \quad \rightarrow \quad U = \frac{-Q}{\varepsilon \cdot A} \cdot d$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| \rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}}$$

Hier ist Q der Verschiebungsfluss im Raum (Dielektrikum, blau) zwischen den Elektroden, der von der Ladung $+Q$ auf der linken Elektrode zur Ladung $-Q$ der rechten Elektrode fließt: $Q = +Q$

6.2 Kapazität eines Kugelkondensators

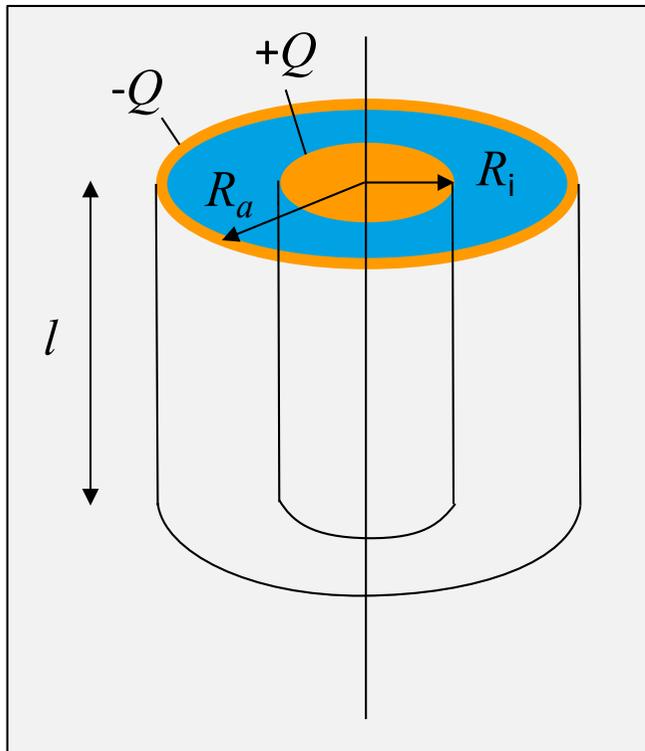


$$\Phi_a - \Phi_i = - \int_{r_i}^{r_a} \vec{E} d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_a} \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} dr = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_{r_i}^{r_a} \frac{1}{r^2} dr$$

$$U = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right)_{r_i}^{r_a} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a}}$$

6.3 Kapazität eines Zylinderkondensators



$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \rightarrow \iiint \operatorname{div} \vec{D} dv = \iiint \rho dv \rightarrow \iint \vec{D} d\vec{f} = Q$$

$$\text{Symmetrie: } \vec{D} = D_R \vec{e}_R \rightarrow D_R \cdot l \cdot 2\pi \cdot R = Q \quad \text{für } l \gg R_a$$

$$\rightarrow \varepsilon \cdot E_R \cdot l \cdot 2\pi \cdot R = Q$$

$$\rightarrow E_R = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \frac{1}{R}$$

$$\Phi_a - \Phi_i = - \int_{R_i}^{R_a} \vec{E} d\vec{s} = - \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \ln R \Big|_{R_i}^{R_a}$$

$$\rightarrow \Delta\Phi = - \frac{Q}{2\pi\varepsilon l} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i} = U$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| \rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{R_a}{R_i}}}$$

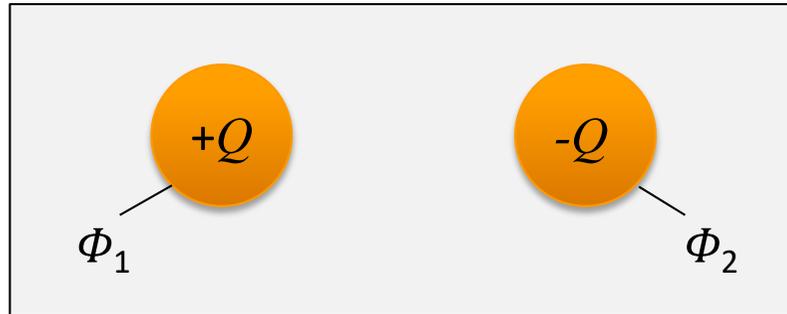
Kapazität des
Zylinderkondensators

$$\boxed{\frac{C}{l} = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{R_a}{R_i}}}$$

Kapazität pro Länge
eines Koaxialleiters

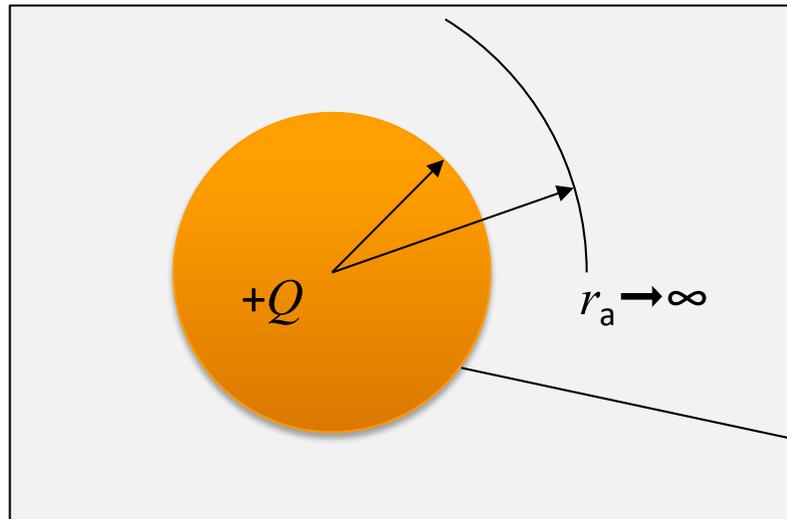
6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter I

Bisher zwei Leiter



$$Q = C \cdot U = C \cdot (\Phi_2 - \Phi_1)$$

Jetzt ein Leiter



Potential an Kugeloberfläche $\Phi(r_i)$:

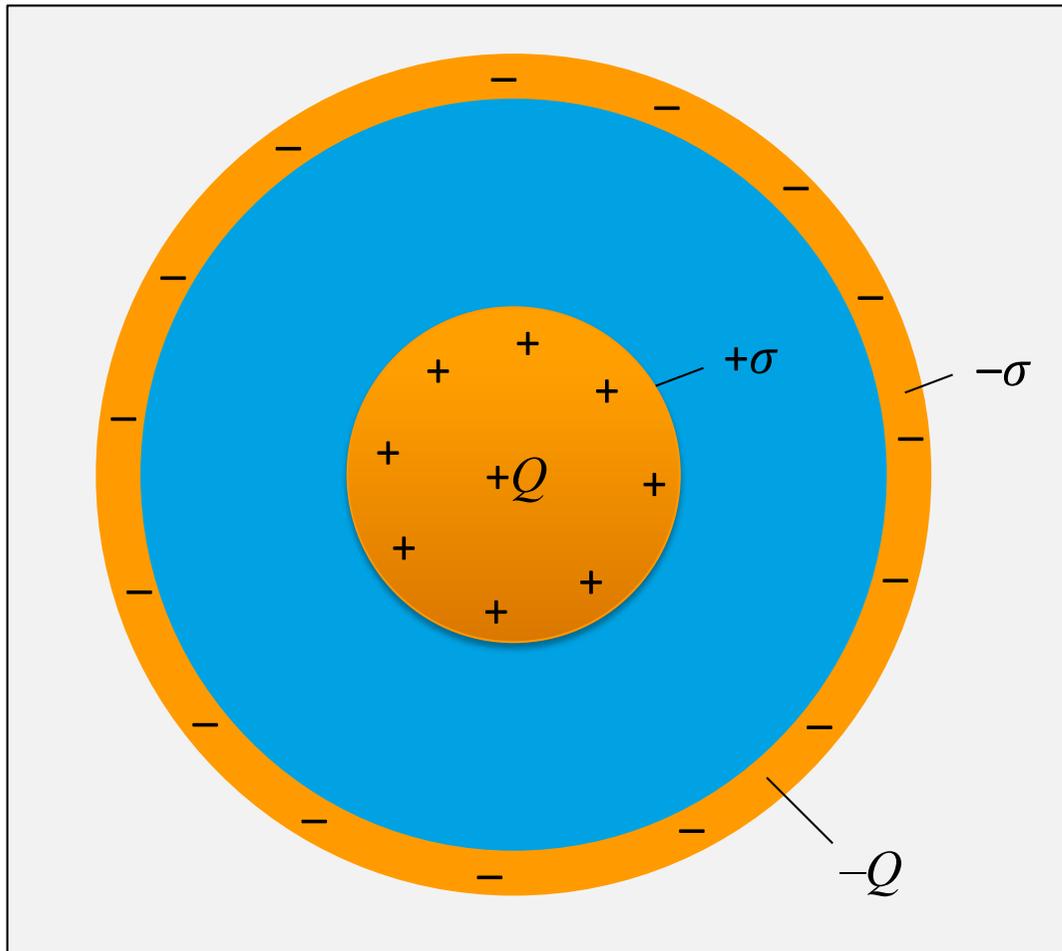
$$\Phi(r_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r_i}$$

Die Kapazität C ist die Proportionalitätskonstante für den Zusammenhang zwischen Ladung und Potential:

$$Q = C \cdot \Phi(r_i) \rightarrow C = \frac{Q}{\Phi(r_i)} = 4\pi\epsilon r_i$$

Symmetrische Ladungsverteilung

z.B. Platten-, Koax- oder Kugelkondensatoren



Ladungen gleichmäßig
auf Oberfläche verteilt

$$\sigma = \text{const.}$$

Symmetrische Anordnung

→ Satz vom Hüllfluss nutzbar

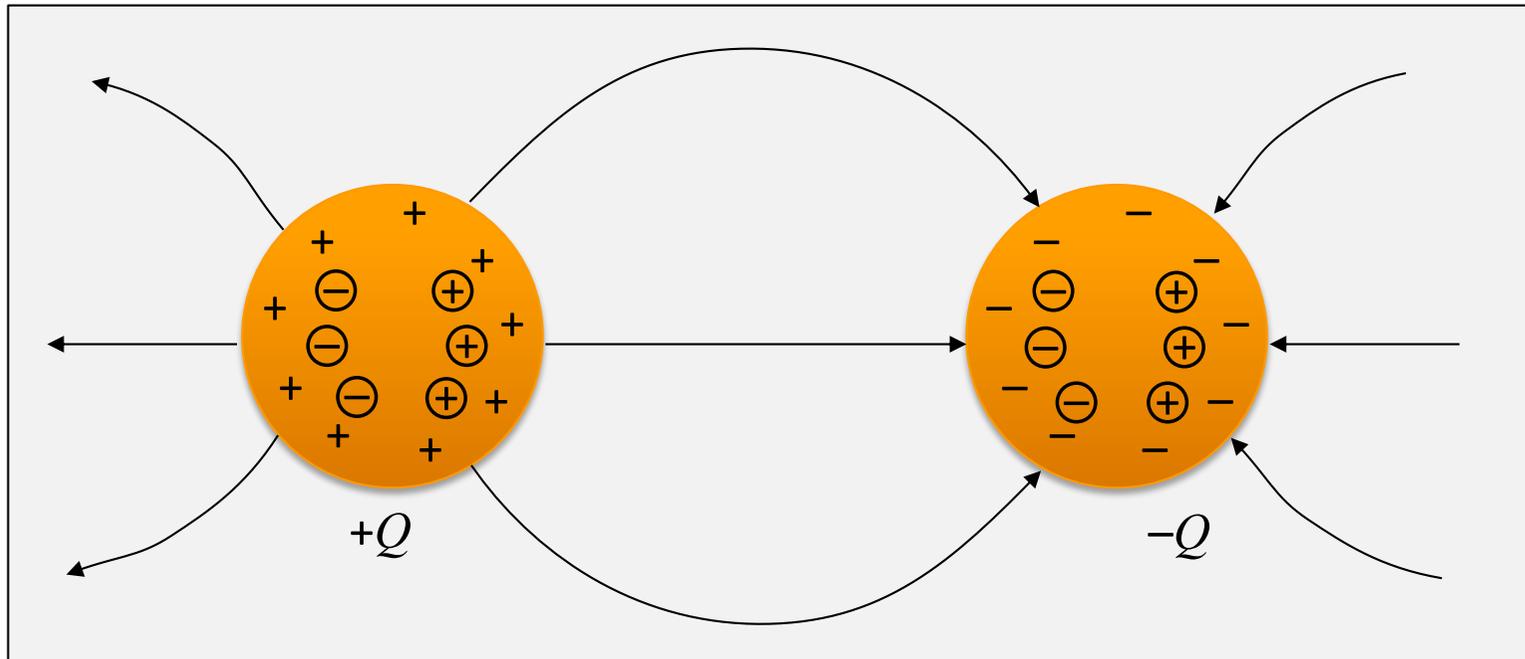
$$\oiint \varepsilon \vec{E} \cdot d\vec{f} = Q$$

Berechnung von $E = E(Q)$

$$\Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$C = \left| \frac{Q}{\Phi_2 - \Phi_1} \right|$$

Unsymmetrische Ladungsverteilung durch Influenzladungen



Aufgabe: Berechnung von Φ aus gegebenem Q

- $\sigma = ? \neq \text{const.}$ „Influenzladungen“ ; KEINE Symmetrie

→ Satz vom Hüllenfluss oder Coulomb-Integral NICHT nutzbar

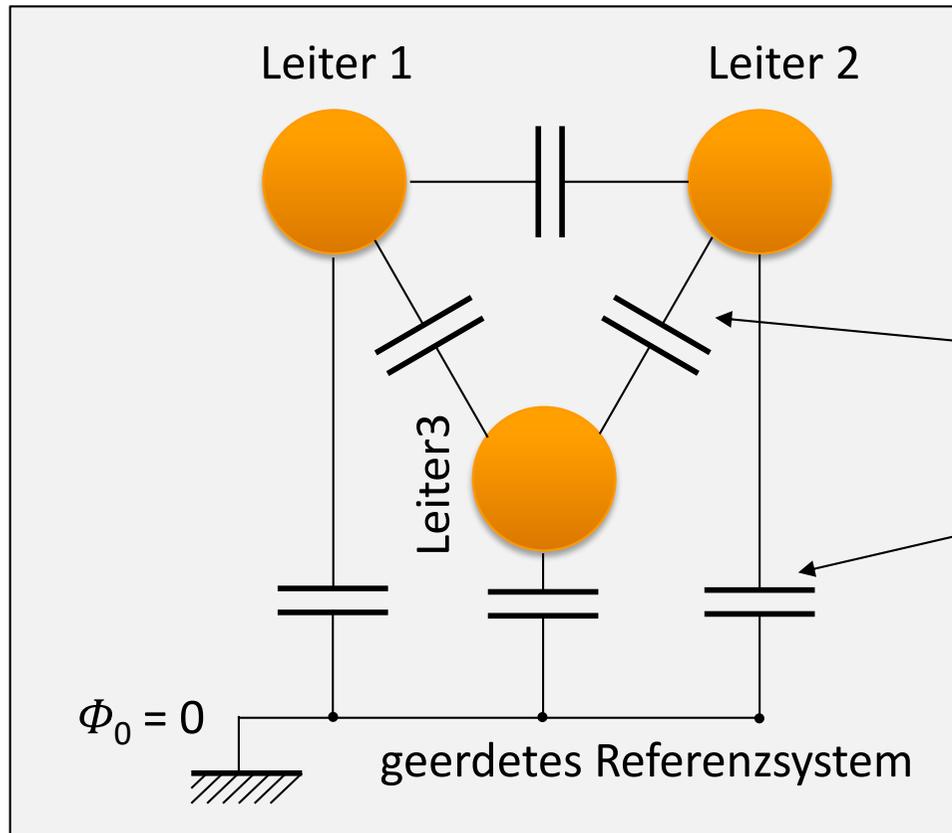
+ Feldlinien senkrecht zur Oberfläche

+ $\Phi = \text{const.}$ auf Metalloberflächen (Äquipotential-Flächen)

→ Methode der Laplace-Gleichung möglich (siehe Abschnitt 7.1)

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter IV

Kapazität dreier Leiter (z.B. Hochspannungsleitungen)

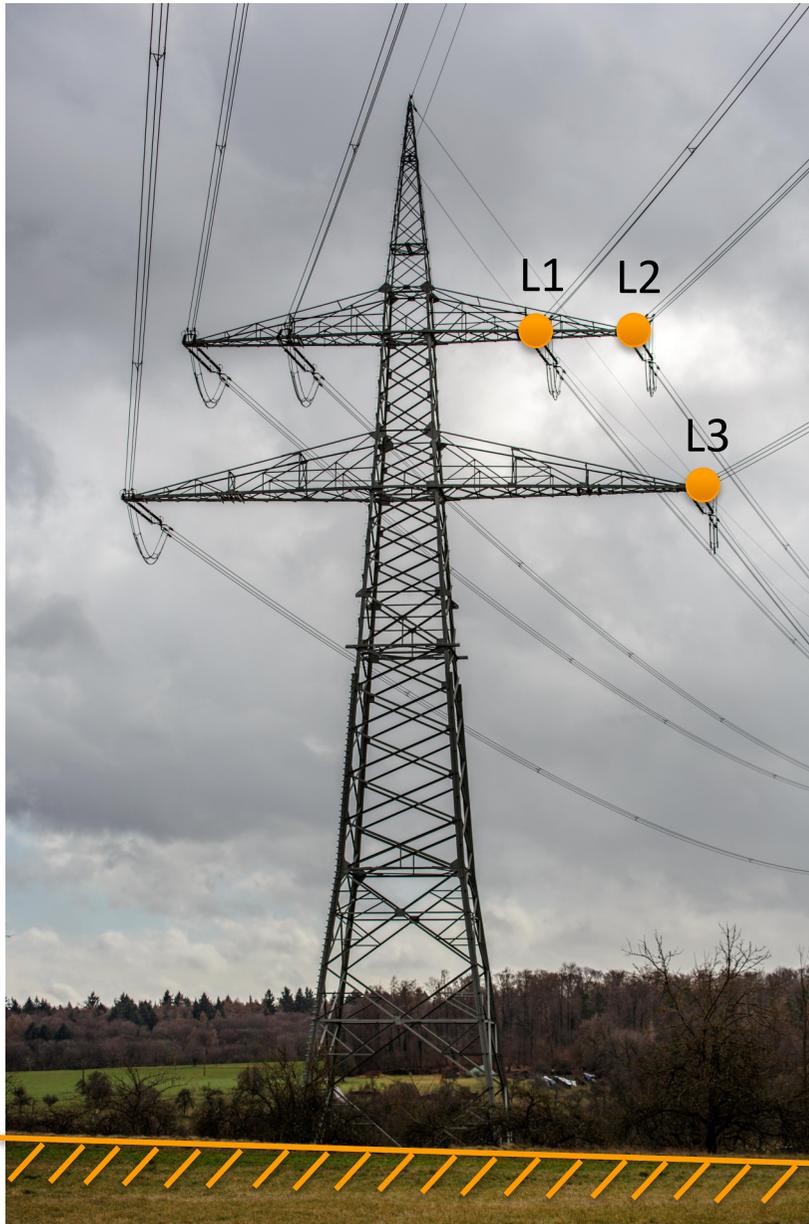


Gesucht:

Teilkapazitäten der Leitungen untereinander

Teilkapazitäten gegen Erde

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter V



Neutral
(Erde)

$$U_{L1N} = \sqrt{2} \cdot U_{eff} / \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t)$$
$$U_{L2N} = \sqrt{2} \cdot U_{eff} / \sqrt{3} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right)$$
$$U_{L3N} = \sqrt{2} \cdot U_{eff} / \sqrt{3} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\omega = 2\pi \cdot f$$
$$f = 50 \text{ Hz}$$

Zum Beispiel $U_{eff} = 380 \text{ kV}$, $t = 0$

$$\rightarrow U_{L1N} = +310 \text{ kV}$$

$$U_{L2N} = +269 \text{ kV}$$

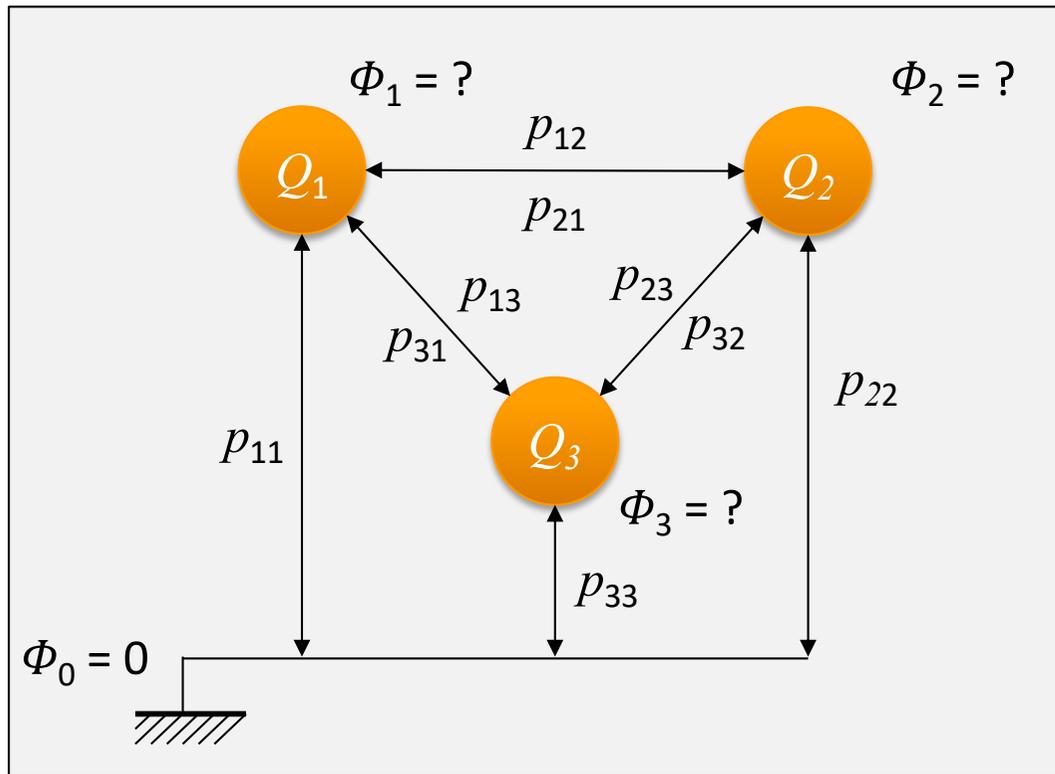
$$U_{L3N} = -269 \text{ kV}$$

Faktor $\sqrt{2}$ zur Umrechnung von Effektivwert auf Spitzenwert. Faktor $\sqrt{3}$ zur Umrechnung der verketteten Spannung (Leiter-Leiter) auf Sternpunktspannung (Leiter-Erde).

Bei längeren Leitungen werden die Positionen der Leiter mehrfach getauscht (Verdrillmast), damit im Mittel gleiche Kapazitäten aller Leiter untereinander und gegen Erde (N) entstehen. Das vermindert die Übertragungsverluste durch den Blindstrom (kapazitiver Ableitstrom gegen Erde).

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter VI

Lösung der Aufgabenstellung mittels **Potentialkoeffizienten**



Fragestellung wie bisher:

$Q_i =$ vorgegeben

$\Phi_k =$ gesucht

Lösung mittels numerischer Methoden
(schwierig)

$$\Phi_i = \Phi_i(Q_k)$$

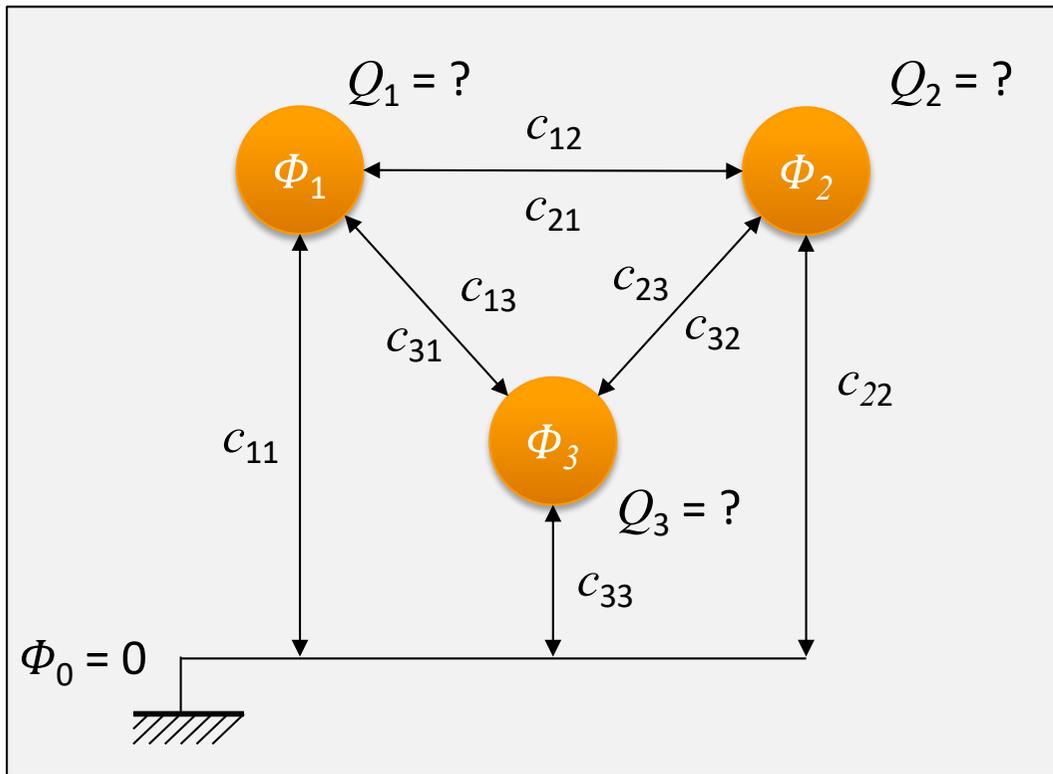
Die Lösung ist eine lineare Funktion von Q

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^3 p_{ik} Q_k$$

Potentialkoeffizienten p_{ik}

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter VII

Lösung der Aufgabenstellung mittels **Influenzkoeffizienten**



Fragestellung neu:

Φ_i = vorgegeben, z.B. die Spannungen
an Freileitungen

Q_k = gesucht

Lösung mittels numerischer Methoden,
siehe Abschnitt 7.1.3

$$Q_i = Q_i(\Phi_k)$$

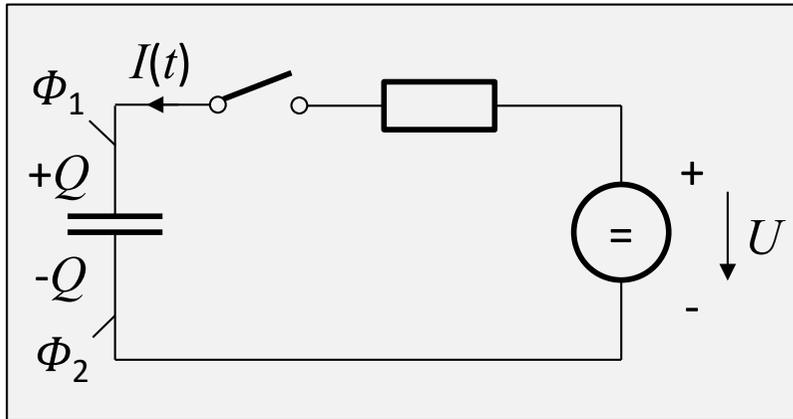
Die Lösung ist eine lineare Funktion von Φ

$$Q_i = \sum_{k=1}^3 c_{ik} \Phi_k$$

Influenzkoeffizienten c_{ik}

(Kopplungskonstanten, keine echten Kapazitäten)

Unterschied zwischen Kapazität eines Kondensators und Influenzkoeffizienten



$$Q = \int_0^T I(t) dt$$

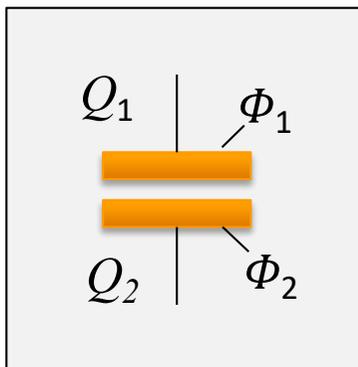
Kondensator, „echte“ Kapazität

$$Q = C \cdot (\Phi_1 - \Phi_2) = C \cdot U$$

C Kapazität

$$Q_1 = -Q_2 = Q$$

„Spezialfall“



c_{ik} Influenzkoeffizienten = „allgemeiner Fall“

$$Q_1 = c_{11} \Phi_1 + c_{12} \Phi_2$$

$$Q_2 = c_{21} \Phi_1 + c_{22} \Phi_2$$

Q_1, Q_2 beliebig

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter IX

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & c_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{Q_i = \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_k}$$

Ladungen Q_i der Leiter i
Potential Φ_k im Leiter k

c_{ik} = Influenzkoeffizienten = Kopplungskonstanten, keine echten Kapazitäten

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter X

Die Potentiale sind eine lineare Funktion der Ladungen:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{N1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{NN} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Q_N \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Phi_i = \sum_{k=1}^N p_{ik} \cdot Q_k$$

Potential Φ_i im Leiter i
Ladungen Q_k der Leiter k

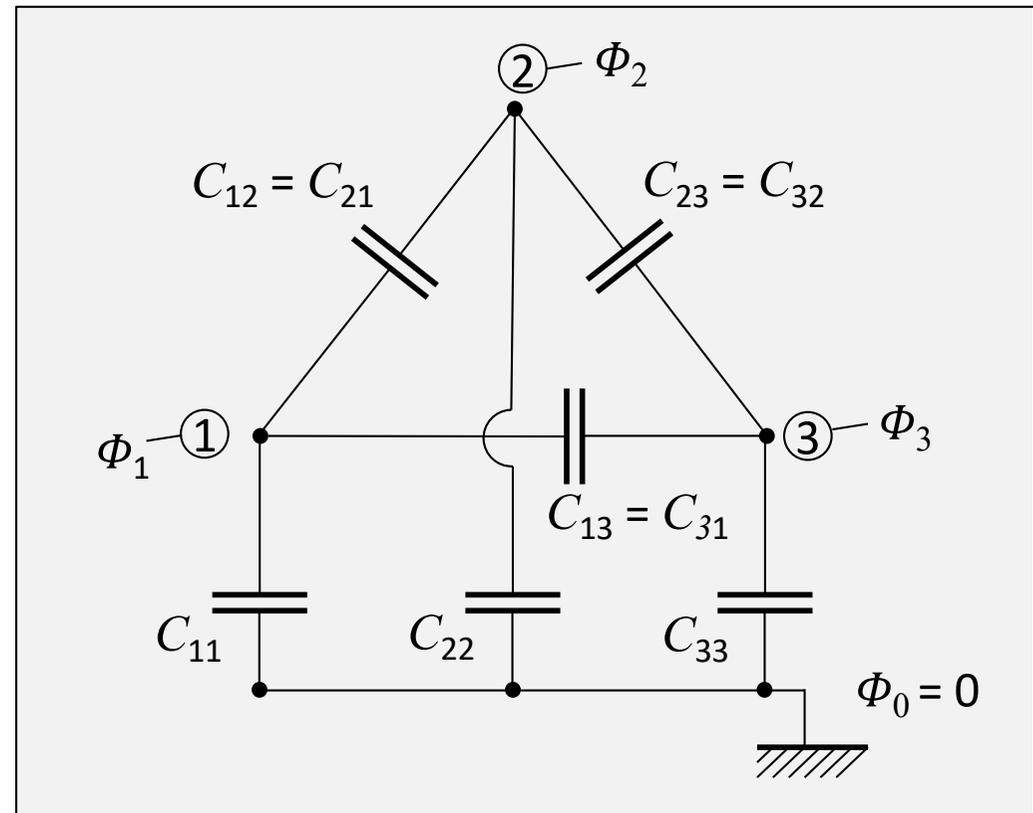
p_{ik} Potentialkoeffizienten

$\{p_{ik}\}$ ist die inverse Matrix von $\{c_{ik}\}$

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XI

Teilkapazitäten c_{ik}

Echte Teilkapazitäten sind wie beim gewöhnlichen Kapazitätsbegriff die Proportionalitätskonstanten zwischen Spannungsdifferenzen und Ladungen.



→ „erwünschte“ Darstellung:

$$Q_1 = C_{11} \Phi_1 + C_{12} (\Phi_1 - \Phi_2) + C_{13} (\Phi_1 - \Phi_3)$$

$$Q_2 = C_{21} (\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22} \Phi_2 + C_{23} (\Phi_2 - \Phi_3)$$

$$Q_3 = C_{31} (\Phi_3 - \Phi_1) + C_{32} (\Phi_3 - \Phi_2) + C_{33} \Phi_3$$

Teilkapazitäten

„erwünschte“ Darstellung
mit Teilkapazitäten C_{ij}

$$Q_1 = C_{11}\Phi_1 + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + C_{13}(\Phi_1 - \Phi_3)$$

$$Q_2 = C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1) + C_{22}\Phi_2 + C_{23}(\Phi_2 - \Phi_3)$$

$$Q_3 = C_{31}(\Phi_3 - \Phi_1) + C_{32}(\Phi_3 - \Phi_2) + C_{33}\Phi_3$$

„große“ C_{ij} =
Kapazitäten



$$Q_1 = (C_{11} + C_{12} + C_{13})\Phi_1 - C_{12}\Phi_2 - C_{13}\Phi_3$$

$$Q_2 = (C_{21} + C_{22} + C_{23})\Phi_2 - C_{21}\Phi_1 - C_{23}\Phi_3$$

$$Q_3 = (C_{31} + C_{32} + C_{33})\Phi_3 - C_{31}\Phi_1 - C_{32}\Phi_2$$

bisherige Darstellung mit
Influenzkoeffizienten c_{ij}

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{13}\Phi_3$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{23}\Phi_3$$

$$Q_3 = c_{31}\Phi_1 + c_{32}\Phi_2 + c_{33}\Phi_3$$

„kleine“ c_{ij} =
Influenzkoeffizienten
(keine Kapazitäten)

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XIII

„erwünscht“

$$Q_1 = (C_{11} + C_{12} + C_{13})\Phi_1 - C_{12}\Phi_2 - C_{13}\Phi_3$$

$$Q_2 = (C_{21} + C_{22} + C_{23})\Phi_2 - C_{21}\Phi_1 - C_{23}\Phi_3$$

$$Q_3 = (C_{31} + C_{32} + C_{33})\Phi_3 - C_{31}\Phi_1 - C_{32}\Phi_2$$

„bisher“

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2 + c_{13}\Phi_3$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2 + c_{23}\Phi_3$$

$$Q_3 = c_{31}\Phi_1 + c_{32}\Phi_2 + c_{33}\Phi_3$$

Koeffizientenvergleich:

$$C_{12} = -c_{12}$$

$$C_{13} = -c_{13}$$

$$C_{21} = -c_{21}$$

$$C_{23} = -c_{23}$$

$$C_{31} = -c_{31}$$

$$C_{32} = -c_{32}$$

$$C_{11} - c_{12} - c_{13} = c_{11} \rightarrow C_{11} = c_{11} + c_{12} + c_{13}$$

$$-c_{12} + C_{22} - c_{23} = c_{22} \rightarrow C_{22} = c_{22} + c_{21} + c_{23}$$

$$-c_{31} - c_{32} + C_{33} = c_{33} \rightarrow C_{33} = c_{33} + c_{31} + c_{32}$$

$$\rightarrow \boxed{C_{ik} = -c_{ik}}$$

und

$$\boxed{C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}}$$

wobei

$$\boxed{c_{ik} = c_{ki}}$$

Zusammenfassung

Bestimmung der Teilkapazitäten C_{ik}

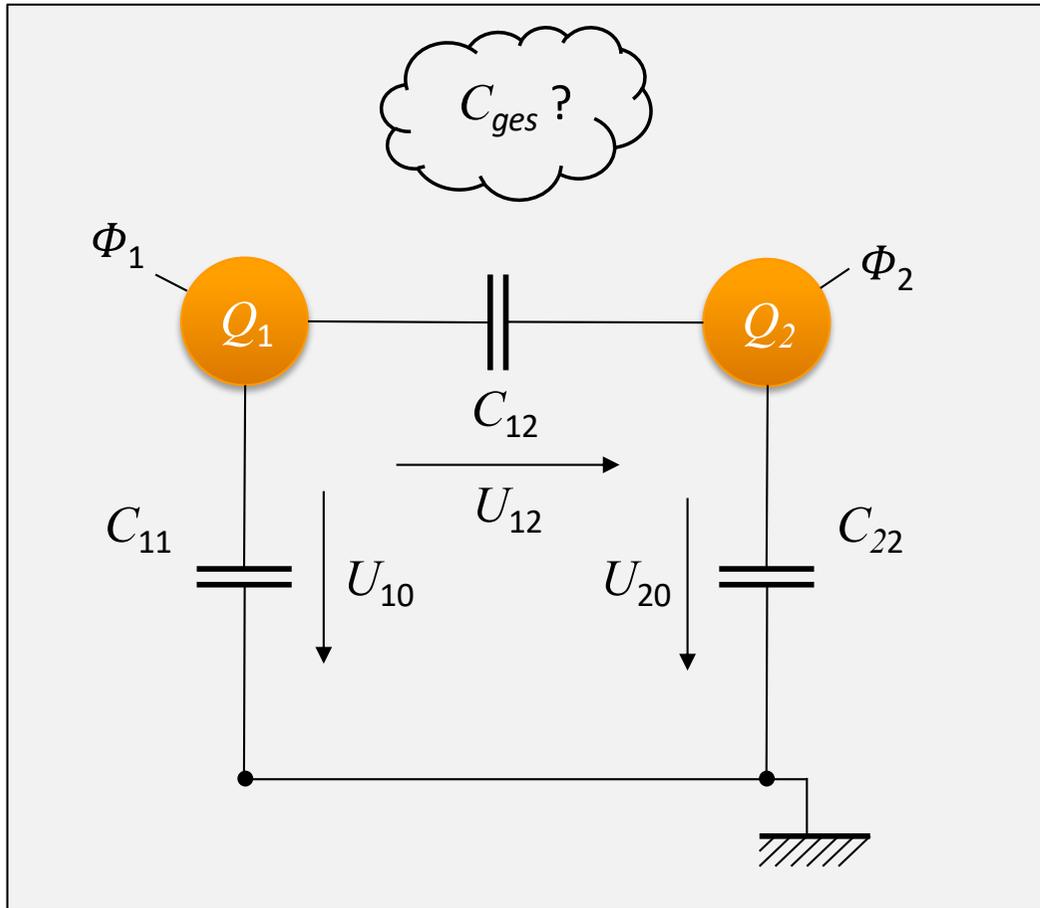
- 1) Bestimmung von Q_i als Funktion von Φ_k mittels numerischer Verfahren

$$Q_i = \{c_{ik}\} \cdot \Phi_k \quad \text{mit } \{c_{ik}\} = \text{Influenzkoeffizienten-Matrix}$$

- 2) Ermitteln der individuellen Teilkapazitäten C_{ik}

$$C_{ik} = -c_{ik}$$
$$C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}$$

Beispiel: Berechnung der Gesamtkapazität von Doppelleitern



Frage:

$\Phi_i =$ vorgegeben

$Q_k =$ gesucht

Lösung mittels numerischer Methoden, siehe Abschnitt 7.1.3

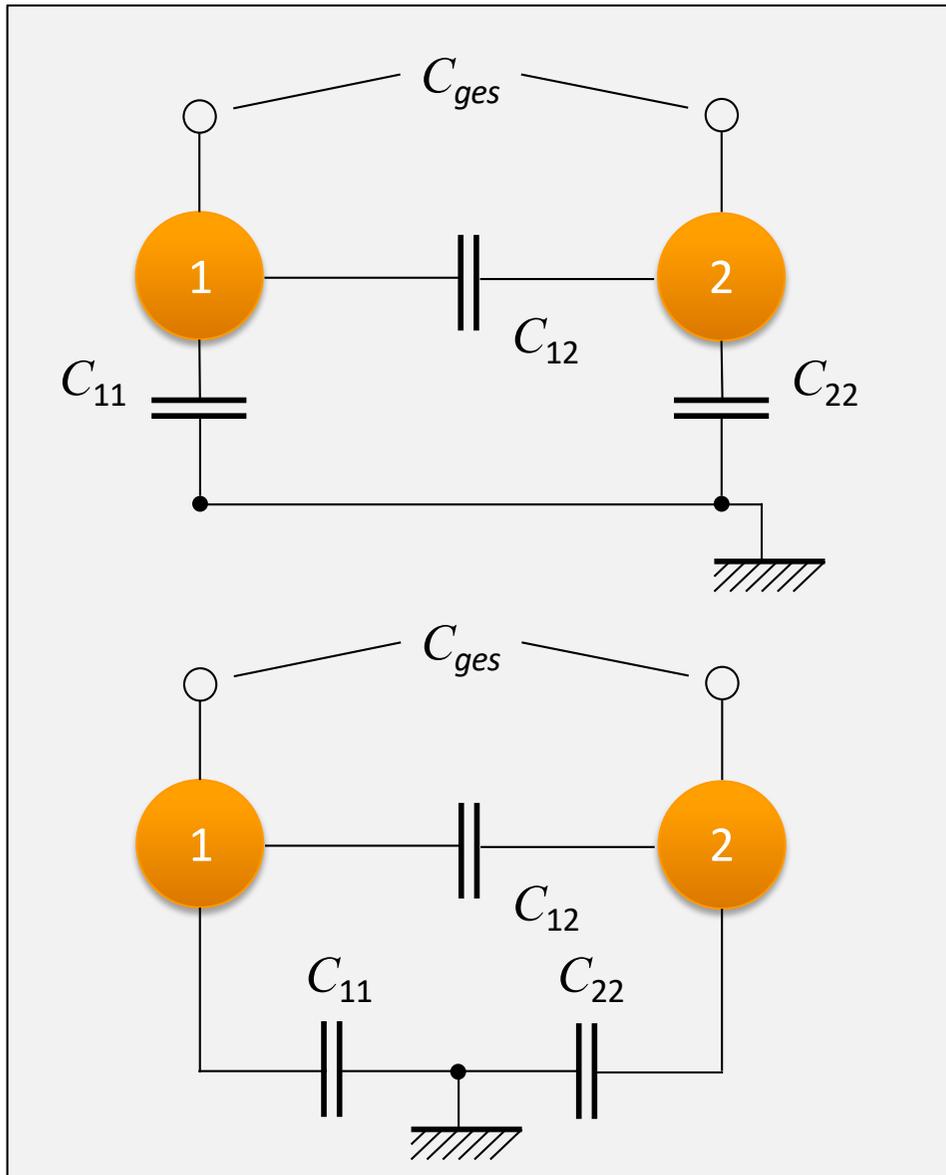
$$Q_i = Q_i(\Phi_k)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^2 c_{ik} \Phi_k$$

$c_{ik} =$ Influenzkoeffizienten

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XVI

Gesamtkapazität - Teilkapazität



Für 2 Elektroden mit $N = 2$ gilt

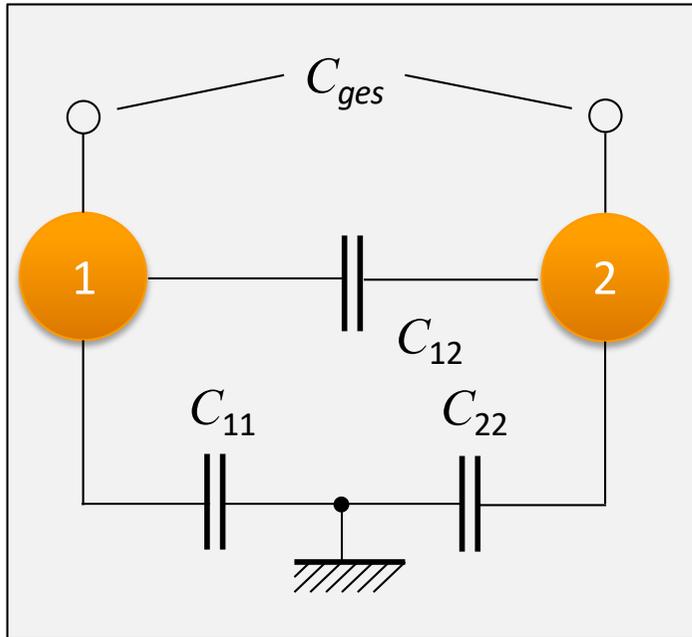
$$\begin{aligned} C_{12} &= -c_{12} \\ C_{21} &= C_{12} = -c_{21} \\ C_{11} &= c_{11} + c_{12} \\ C_{22} &= c_{22} + c_{21} \end{aligned}$$

$$C_{ges} = C_{12} + \frac{1}{\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{22}}} \rightarrow C_{ges} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}}{C_{11} + C_{22} + C_{12} + C_{21}}$$

Die effektive Kapazität C_{ges} zwischen zwei Punkten setzt sich aus den Einflüssen aller Teilkapazitäten zusammen.

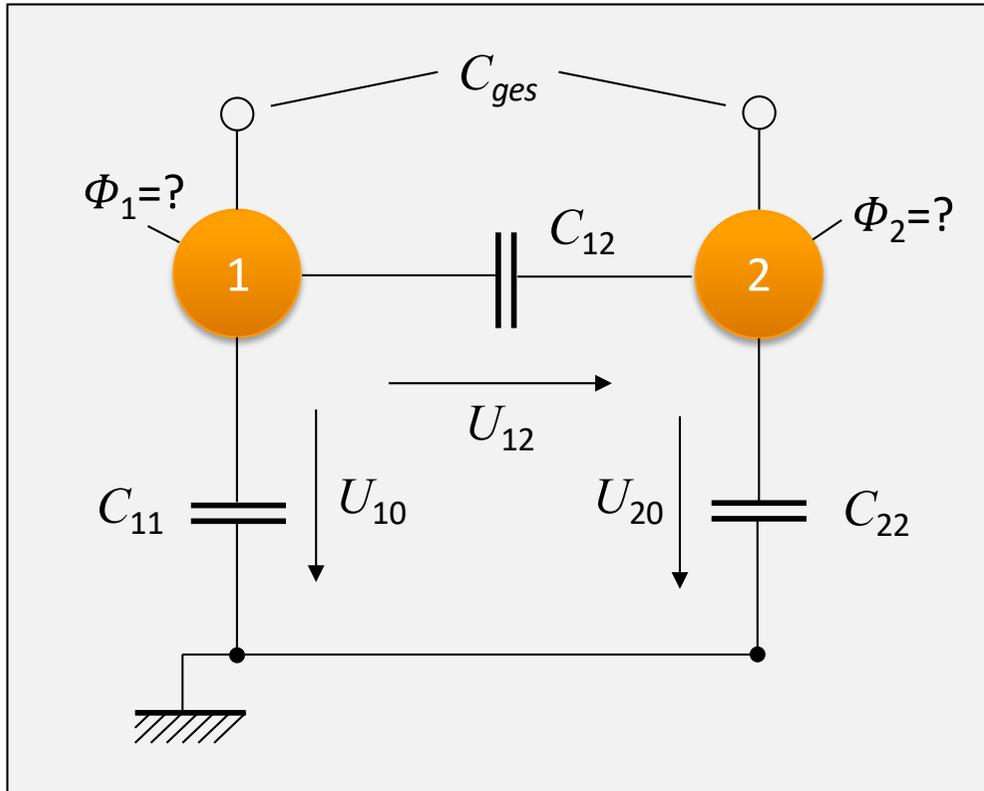
6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XVII

Beweis



$$\begin{aligned}
 C_{ges} &= C_{12} + \frac{1}{\frac{1}{C_{11}} + \frac{1}{C_{22}}} = C_{12} + \frac{C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}} = \frac{C_{11}C_{12} + C_{22}C_{12} + C_{11}C_{22}}{C_{11} + C_{22}} \\
 &= \frac{-(c_{11} + c_{12})c_{12} - (c_{22} + c_{21})c_{12} + (c_{11} + c_{12})(c_{22} + c_{21})}{c_{11} + c_{12} + c_{22} + c_{21}} \\
 &= \frac{\cancel{-c_{11}c_{12}} - c_{12}c_{12} - \cancel{c_{22}c_{12}} - \cancel{c_{21}c_{12}} + c_{11}c_{22} + \cancel{c_{11}c_{21}} + \cancel{c_{12}c_{22}} + \cancel{c_{12}c_{21}}}{c_{11} + c_{12} + c_{22} + c_{21}} \\
 &= \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{21}} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Alternative: Berechnung mittels Potentialkoeffizienten



$$C_{ij} = ?$$

$$\Phi_1 = f_1(Q_1, Q_2)$$

$$\Phi_2 = f_2(Q_1, Q_2)$$

$$\Phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2$$

$$\Phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2$$

allg.

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^2 p_{ik} Q_k$$

Potentialkoeffizienten p_{ik}

$$\{p_{ik}\} = \{c_{ik}\}^{-1}$$

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XIX

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 \\ \Phi_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2\end{aligned}$$

Hin-/Rückleiter $\rightarrow Q_1 = -Q_2 \rightarrow$

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= (p_{11} - p_{12}) Q_1 \\ \Phi_2 &= (p_{21} - p_{22}) Q_1\end{aligned}$$

Spannung $U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2$ zwischen Leiter 1 und 2

$$\begin{aligned}U_{12} &= (p_{11} - p_{12}) Q_1 - (p_{21} - p_{22}) Q_1 \\ &= (p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}) Q_1\end{aligned}$$

Matrix-Inversion: $p \rightarrow c$ siehe nächste Folie



$$C_{ges} = \left| \frac{Q_1}{U_{12}} \right| = \left| \frac{1}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} \right| = \left| \frac{c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}}{c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{21}} \right|$$

6.4 Verallgemeinerter Kapazitätsbegriff für Vielfachleiter XX

Nebenrechnung: Inversion einer 2x2 Matrix

Aus der Mathematik:
$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix}$$

Somit:

$$p_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$p_{12} = \frac{-c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$p_{21} = \frac{-c_{21}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

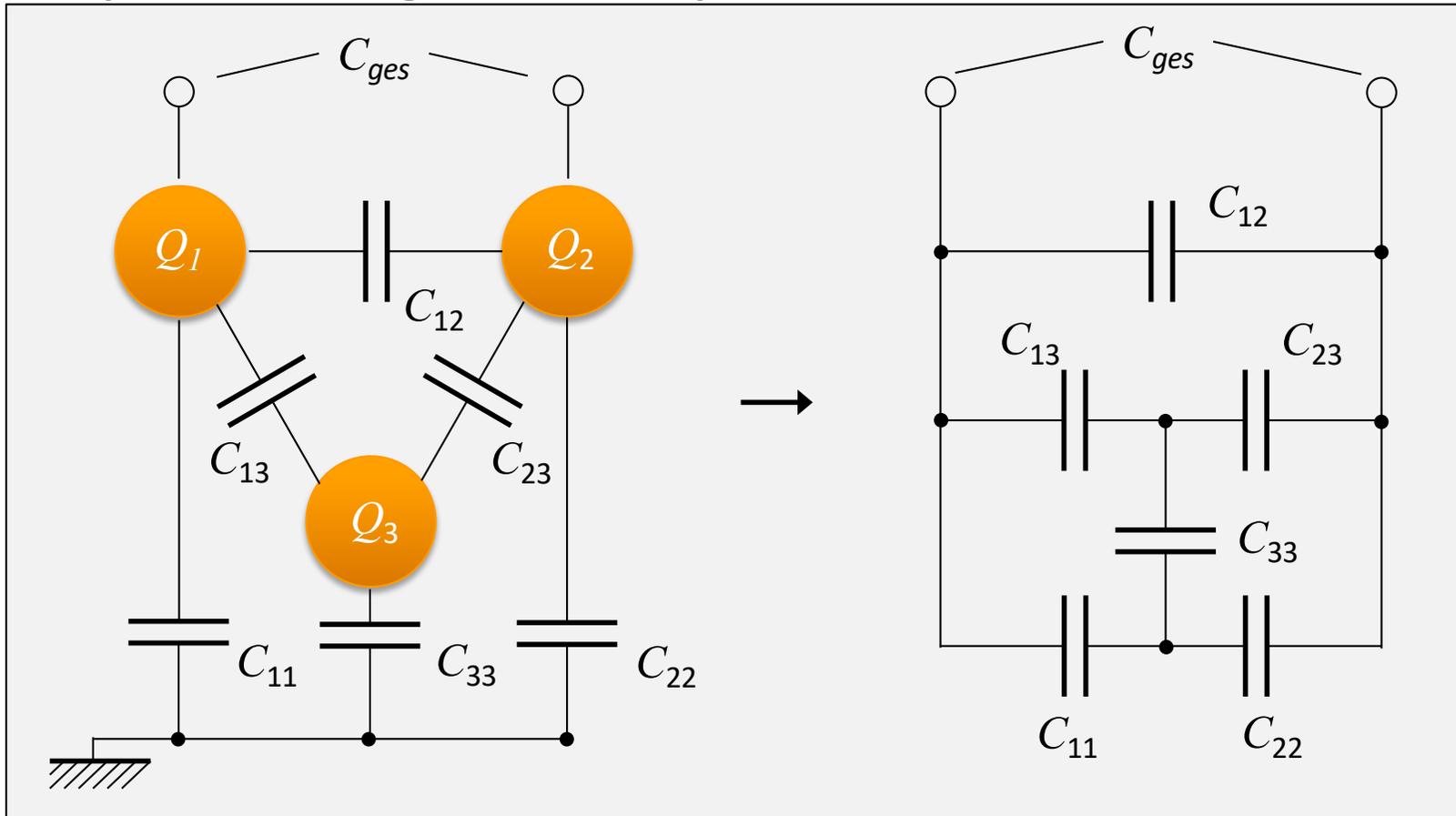
$$p_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}$$

$$\rightarrow p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21} = \frac{1}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}} \cdot (c_{22} + c_{11} + c_{12} + c_{21})$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}}{c_{11} + c_{22} + c_{12} + c_{21}} \quad \text{q.e.d.}$$

Beispiel: Berechnung der Gesamtkapazität von Dreifachleitern



1. Bestimmung $\{c_{ik}\}$
2. Teilkapazitäten $C_{ik} = -c_{ik}$ $C_{ii} = \sum_{k=1}^N c_{ik}$
3. Serien/Parallel-Schaltung $\rightarrow C_{ges}$

Alternative: Berechnung mittels Potentialkoeffizienten

$$\Phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3$$

$$\Phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3$$

$$\Phi_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3$$

Aufladung nur
der Elektroden 1

und 2: $Q_2 = -Q_1$
 $Q_3 = 0$ →

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_1 = p_{11}Q_1 - p_{12}Q_1 = (p_{11} - p_{12})Q_1 \\ \Phi_2 = p_{21}Q_1 - p_{22}Q_1 = (p_{21} - p_{22})Q_1 \\ \Phi_3 = p_{31}Q_1 - p_{32}Q_1 = (p_{31} - p_{32})Q_1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Null bei Symmetrie } p_{31} = p_{32}$$

$$U_{12} = \Phi_1 - \Phi_2 = (p_{11} - p_{12} - p_{21} + p_{22})Q_1$$

$$C = \left| \frac{Q}{U} \right| = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}$$

6.5 Zusammenhang gespeicherte Energie und Kapazität I

Bisher:

Gespeicherte Ladung

$$Q = C \cdot U$$

Jetzt:

Gespeicherte Energie

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$



$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

→ Verallgemeinerung auf viele geladene Leiter

6.5 Zusammenhang gespeicherte Energie und Kapazität II

Es war: $W_e = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \Phi_k Q_k$ mit $\Phi_i = \sum_{k=1}^N p_{ik} \cdot Q_k$ \rightarrow $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N p_{ik} \cdot Q_i \cdot Q_k$

Die Feldenergie ist eine quadratische Funktion der Ladungen.

Und: $W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \Phi_k Q_k$ mit $Q_i = \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_k$ \rightarrow $W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N c_{ik} \cdot \Phi_i \cdot \Phi_k$

Die Feldenergie ist eine quadratische Funktion der Potentiale.

Vorteil:

Das Feld muss nicht im gesamten Raum bekannt sein,
es genügt, Φ auf den Elektroden zu messen.

6.5 Zusammenhang gespeicherte Energie und Kapazität III

Berechnung Gesamtkapazität für $N = 1$

$$Q_i = c_{11} \cdot \Phi_1$$

entspricht

$$Q = C \cdot U$$

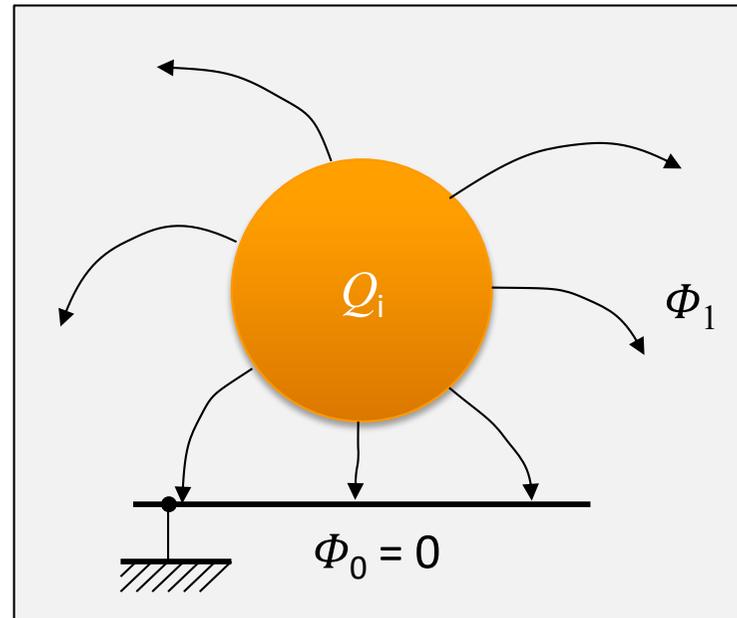
Es war für Teilkapazitäten

$$\left. \begin{aligned} C_{ik} &= -c_{ik} \\ C_{ii} &= \sum_{k=1}^N c_{ik} \end{aligned} \right\} \rightarrow C_{11} = c_{11}$$

Feldenergie des Kondensators

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \Phi_1 Q_1 \\ &= \frac{1}{2} \Phi_1 (c_{11} \Phi_1) &= \frac{1}{2} (p_{11} Q_1) Q_1 \\ &= \frac{1}{2} c_{11} \Phi_1^2 &= \frac{1}{2} c_{11}^{-1} Q_1^2 \end{aligned}$$

$$W_e = \frac{1}{2} c_{11} \Phi_1^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C_{11}}$$



entspricht

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2$$

6.5 Zusammenhang gespeicherte Energie und Kapazität IV

Berechnung Gesamtkapazität für $N = 2$

Weg zur Lösung über $\Phi = f(Q)$

$$\Phi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$

$$\Phi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

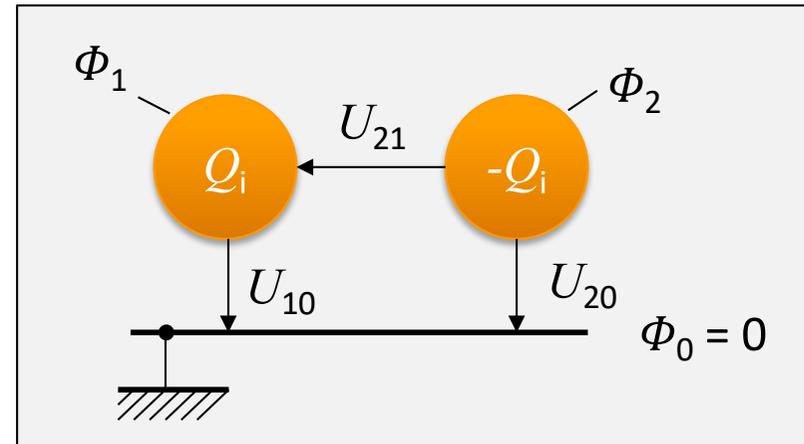
$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \Phi_k Q_k = \frac{1}{2} (\Phi_1 Q_1 + \Phi_2 Q_2)$$

$$\rightarrow W_e = \frac{1}{2} (p_{11} Q_1^2 + p_{12} Q_2 Q_1 + p_{21} Q_1 Q_2 + p_{22} Q_2^2)$$

Für Kondensator gesetzt: $Q_2 = -Q_1$

$$\begin{aligned} \rightarrow W_e &= \frac{1}{2} (p_{11} Q_1^2 + p_{12} (-Q_1) Q_1 + p_{21} Q_1 (-Q_1) + p_{22} (-Q_1) (-Q_2)) \\ &= \frac{1}{2} (p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}) Q_1^2 \quad \text{Gesamtenergie} \end{aligned}$$

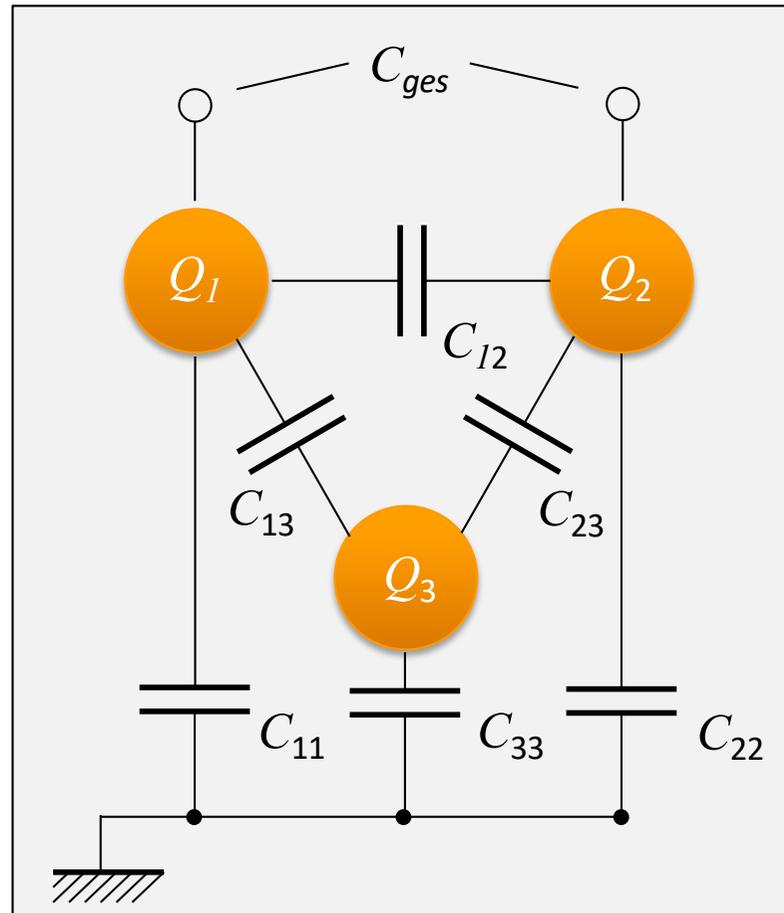
$$W_e = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{C} \rightarrow C_{ges} = \frac{1}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}$$



Gesamtkapazität

6.5 Zusammenhang gespeicherte Energie und Kapazität V

Berechnung Gesamtkapazität für $N = 3$



Berechnung der Gesamtkapazität zwischen den Elektroden 1 und 2 nun nicht über die Teilkapazitäten, sondern über die gespeicherte Energie, welche sich durch Aufladung der beiden Elektroden ergibt.

6.5 Zusammenhang gespeicherte Energie und Kapazität VI

$$\begin{array}{l|l} \Phi_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 + p_{13}Q_3 & Q_2 = -Q_1 \\ \Phi_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2 + p_{23}Q_3 & Q_3 = 0 \\ \Phi_3 = p_{31}Q_1 + p_{32}Q_2 + p_{33}Q_3 & \end{array} \quad \text{Aufladung nur der Elektroden 1 und 2}$$

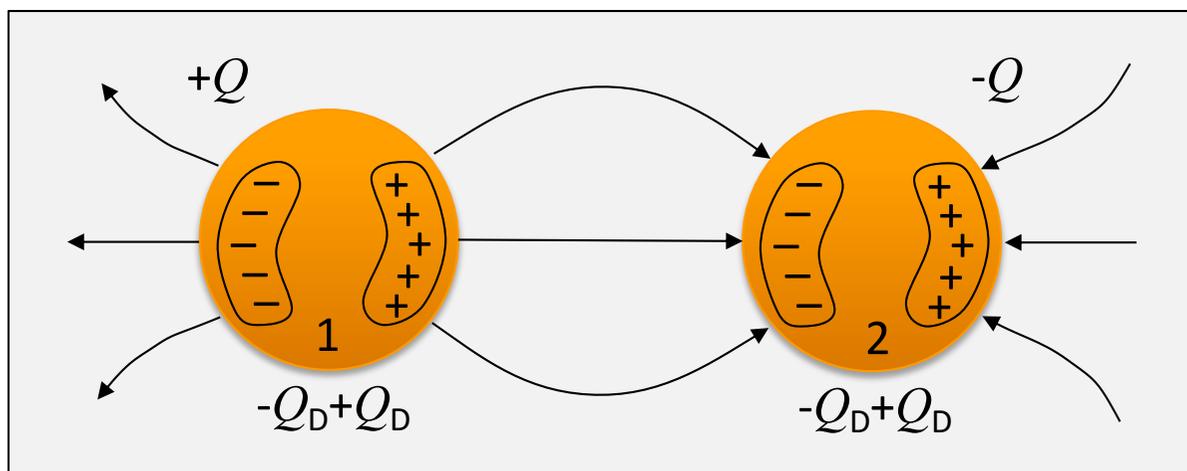
$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Phi_i Q_i = \frac{1}{2} (\Phi_1 Q_1 - \Phi_2 Q_1 + \Phi_3 \cdot 0)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \left((p_{11}Q_1 - p_{12}Q_1 + 0) \cdot Q_1 - (p_{21}Q_1 - p_{22}Q_1 + 0) \cdot Q_1 + (p_{31}Q_1 - p_{32}Q_1 + 0) \cdot 0 \right)$$

$$W_e = \frac{1}{2} (p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}) Q_1^2$$

$$\boxed{W_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_{ges}}} \quad \rightarrow \quad \boxed{C_{ges} = \frac{1}{(p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21})}}$$

7. Bestimmung der Kapazität bei Anwesenheit von Influenzladungen



Bestimmung von C schwierig mit Coulomb-Integral

$$\Phi_1(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^2 \left(\iiint \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r}_1 - \vec{r}'|} dv' \right)$$

wobei $\iiint \rho_i(\vec{r}') dv' = \begin{cases} +Q \text{ für } i=1 \\ -Q \text{ für } i=2 \end{cases}$

$$\Phi_2(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \sum_{i=1}^2 \left(\iiint \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r}_2 - \vec{r}'|} dv' \right)$$

$$U_{12} = \Phi_2 - \Phi_1$$

$$C = \left| \frac{Q}{U_{12}} \right| = ?$$

Problem

Verteilung von $\rho_i(\vec{r}')$ unbekannt

nur $\iiint \rho_i(\vec{r}') dv' = \pm Q$ bekannt

7.1.1 Herleitung von Laplace- und Poisson-Gleichung I

Voraussetzung: ε nicht ortsabhängig

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho} \quad \text{Maxwell} \quad \boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}} \quad \text{Material-Gleichung}$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \cdot \operatorname{div} \vec{E} = -\varepsilon \cdot \underbrace{\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi}_{\Delta \Phi} = \rho$$

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

Poisson-Gleichung

$$\boxed{\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

Laplace-Gleichung

$$\boxed{\Delta \Phi = 0} \quad \text{Gültig für ladungsfreie Raumgebiete } \rho = 0$$

7.1.1 Herleitung von Laplace- und Poisson-Gleichung II

Laplace – Gleichung = Partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

Lösung = skalare, zweifach stetig differenzierbare Funktion

Anwendungen:

- Elektrostatik
Berechnung des elektrischen Potentials im ladungsfreien Raum
- Gravitation
Die Berechnung der Kraft zwischen zwei Massen ist mathematisch äquivalent zur Kraft zwischen zwei Ladungen. Das Gravitationspotential kann somit wie das elektrische Potential mit der Laplace-Gleichung berechnet werden.
- Wärmeleitung
Berechnung eines stationären Temperaturgefälles
- Fluiddynamik
Berechnung laminarer Strömungen inkompressibler Fluide (z.B. Öl, Wasser)

7.1.2 Eindeutigkeitssatz, Randwertprobleme I

1. In metallischen Leitern (ohne Ströme) gilt:

$$\vec{E} = 0$$

→ $\text{grad}\Phi = 0$ → $\Phi = \text{const.}$ innerhalb und auf der Oberfläche

2. Die Potentialverteilung $\Phi(\vec{r})$ im Raum mit $\rho = 0$ hängt nur von der Potentialverteilung

$$\Phi(\vec{r}_{Rand}) \text{ ab}$$

3. Die Potentialverteilung wird durch die Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$ bestimmt

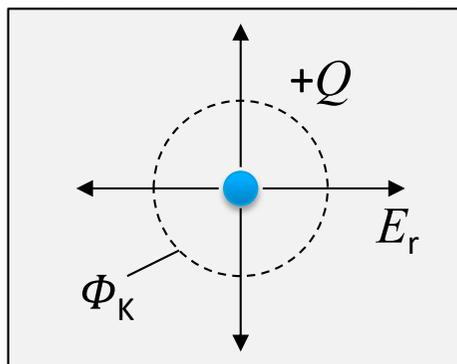
→

Die Potenzialverteilung in diesem Raum ist eindeutig gegeben, egal wie $\Phi(\vec{r}_{Rand})$ auf dem Rand erzeugt wurde.

7.1.2 Eindeutigkeitssatz, Randwertprobleme II

Beispiele:

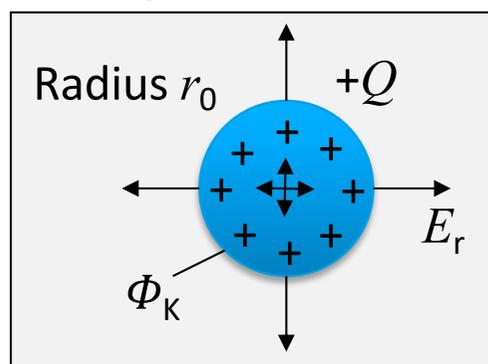
① Punktladung +Q



$$E_{r1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} \begin{cases} r < r_0 \\ r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \text{ für } r \geq r_0$$

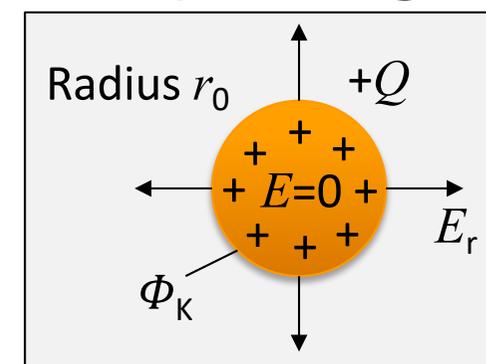
② Isolator +Q



$$E_{r2} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon r_0^3} r & r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} & r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \text{ für } r \geq r_0$$

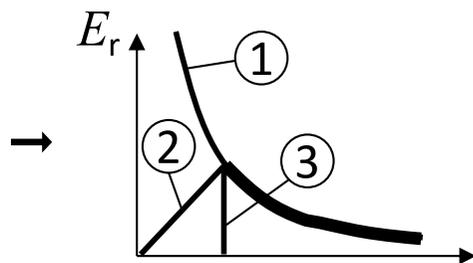
③ Leiter +Q



$$E_{r3} = \begin{cases} 0 & r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} & r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} \text{ für } r \geq r_0$$

Für $r > r_0$ gilt:
 $E_{r1} = E_{r2} = E_{r3}$



Randbedingung bei r_0 :

$$\Phi_{Rand} = \Phi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r_0}$$

Potential im Raum $r > r_0$:

$$\Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} = \Phi_{Rand} \cdot \left(\frac{r_0}{r}\right)$$

Begründung

Aus Maxwell-Gleichungen folgt die Laplace-Gleichung für Φ :

$$\Delta\Phi = 0$$

Kartesisch:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

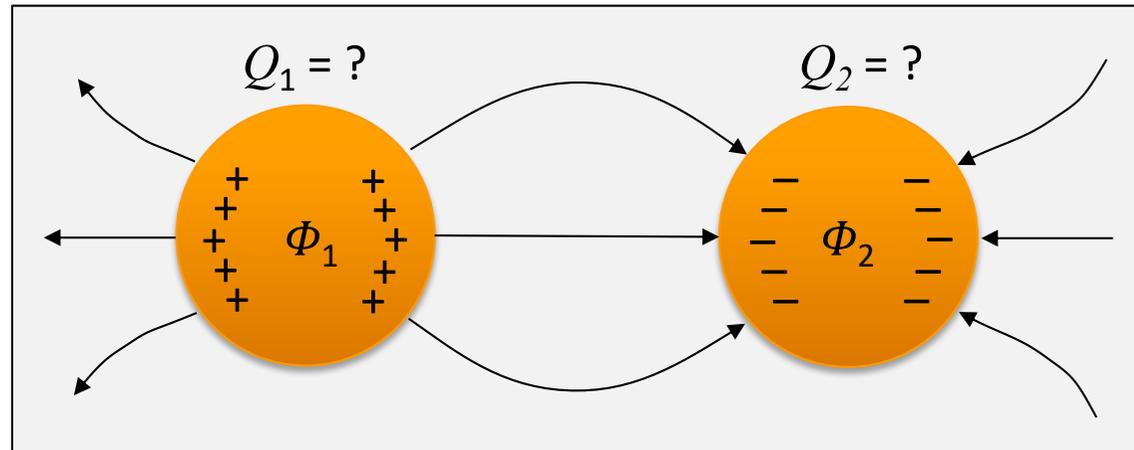
Die Potentialverteilung $\Phi(\vec{r})$ im leeren Raum muss immer diese DGL erfüllen.

Die Lösung einer partiellen DGL ist ausschließlich durch ihre Randbedingungen $\Phi = \Phi_{\text{Rand}}$ festgelegt.

7.1.3 Berechnungsmethode von Kapazitäten und Influenzladungen I

Gegeben: Φ_1, Φ_2

Gesucht: Q_1, Q_2



- ① Randbedingung:
Potentiale und Form
der Elektroden

$$\Phi_1 = \Phi_1(r = \text{Elektrodenoberfläche}) = \text{const.}$$

$$\Phi_2 = \Phi_2(r = \text{Elektrodenoberfläche}) = \text{const.}$$

- ② Lösung der Laplace-GL.

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\hookrightarrow \Phi(\vec{r})$$

mit Randbedingung aus ①

im Raum zwischen/außerhalb der Elektroden

- ③ Bestimmung von E:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r})$$

- ④ Speziell auf der
Elektrodenoberfläche:

$$\vec{E}(\vec{r} = \text{Oberfläche}) = \vec{E}_{H1,2}(\vec{r}_{Rand})$$

aus ③

- ⑤ Bestimmung $Q_{1,2}$ aus:

$$\oiint \varepsilon \vec{E}_{H1,2} \cdot d\vec{f} = \oiint \sigma \cdot df = Q_{1,2}$$

Bestimmung der Influenz-Koeffizienten

Algorithmus ① - ⑤ liefert:

$$Q_1 = \text{alg}(\Phi_1, \Phi_2)$$

$$Q_2 = \text{alg}(\Phi_1, \Phi_2)$$

Influenzkoeffizienten-Matrix c_{ik}

$$Q_1 = c_{11}\Phi_1 + c_{12}\Phi_2$$

$$Q_2 = c_{21}\Phi_1 + c_{22}\Phi_2$$

Bestimmung der Koeffizienten c_{ik}

a) setze $\Phi_1 = 0$

$$Q_{1a} = \text{alg}_1(0, \Phi_2) \quad \text{und} \quad Q_{1a} = c_{12}\Phi_2$$

$$Q_{2a} = \text{alg}_2(0, \Phi_2) \quad \text{und} \quad Q_{2a} = c_{22}\Phi_2$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_{12} = \text{alg}_1(0, \Phi_2) / \Phi_2 \\ c_{22} = \text{alg}_2(0, \Phi_2) / \Phi_2 \end{cases}$$

b) setze $\Phi_2 = 0$

$$Q_{1b} = \text{alg}_1(\Phi_1, 0) \quad \text{und} \quad Q_{1b} = c_{11}\Phi_1$$

$$Q_{2b} = \text{alg}_2(\Phi_1, 0) \quad \text{und} \quad Q_{2b} = c_{21}\Phi_1$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_{11} = \text{alg}_1(\Phi_1, 0) / \Phi_1 \\ c_{21} = \text{alg}_2(\Phi_1, 0) / \Phi_1 \end{cases}$$

Bestimmung der Teilkapazitäten bzw. der Potentialkoeffizienten

- 1) Bestimmung von Q_k als Funktion von Φ_i
- 2) Aus $Q_i = \{c_{ik}\} \Phi_k$ folgte die Influenzkoeffizienten-Matrix $\{c_{ik}\}$
- 3) Ermitteln der individuellen Teilkapazitäten

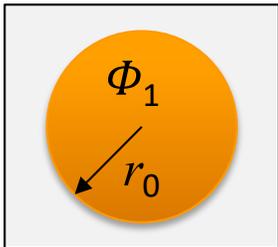
$$\begin{aligned} C_{ik} &= -c_{ik} \\ C_{ii} &= \sum_{k=1}^N c_{ik} \end{aligned}$$

- 4) Oder ermitteln der Potentialkoeffizienten durch Invertierung der Matrix der Influenzkoeffizienten

$$\{p_{ik}\} = \{c_{ik}\}^{-1}$$

7.1.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem I

1



Φ_1 auf Metallkugel gegeben $\rightarrow \Phi_1 = \text{const.}$ Randbedingung

$\Phi(r) = ?$ im Außenraum

Kugelsymmetrie \rightarrow nur radiale Variation von Φ
 $\Phi = \Phi(r)$ unabhängig von ϑ, φ

2

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} \right) = 0$$

Laplace-Gl. (r -Abhängigkeit)
in Kugelkoordinaten

$$\rightarrow r^2 \frac{d\Phi(r)}{dr} = c_1$$

$$\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{c_1}{r^2}$$

$$\Phi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2$$

c_1, c_2 sind noch unbekannte Integrationskonstanten

7.1.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem II

Bestimmung von c_1, c_2 aus den Randbedingungen:

- Potential auf der Kugeloberfläche ist $\Phi_1 = \text{const.}$
- Potential im ∞ soll gegen Null gehen

$$\boxed{\Phi(r) = -\frac{c_1}{r} + c_2} \quad \text{allgemeine Lösung der Laplace-Gleichung}$$

mit $(r \rightarrow \infty) = 0$ folgt $c_2 = 0$

mit $(r = r_0) = \Phi_1$ folgt $-c_1 / r_0 = \Phi_1 \quad c_1 = -r_0 \cdot \Phi_1$

$$\rightarrow \boxed{\Phi(r) = \Phi_1 \frac{r_0}{r}} \quad \text{Lösung der Laplace-Gleichung im Außenraum bei gegebenen Randbedingungen}$$

7.1.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem III

③ Bestimmung von $\vec{E}(\vec{r})$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi_1 \frac{r_0}{r}\right) = \Phi_1 \frac{r_0}{r^2} \vec{e}_r$$

④ E auf Kugeloberfläche $r = r_0$

$$\vec{E}_{H1} = E(r_0) = \Phi_1 \frac{r_0}{r_0^2} \vec{e}_r = \Phi_1 \frac{1}{r_0} \vec{e}_r$$

⑤ Bestimmung von Q_1

$$\oiint \varepsilon \vec{E}_{H1} \cdot d\vec{f} = Q_1$$

$$= \varepsilon \cdot \Phi_1 \frac{1}{r_0} \cdot 4\pi r_0^2 = \varepsilon \cdot \Phi_1 4\pi r_0$$

$$\rightarrow \boxed{Q_1 = 4\pi\varepsilon r_0 \cdot \Phi_1}$$

7.1.4 Beispiel kugelsymmetrisches Problem IV

Bestimmung des Influenzkoeffizienten

Algorithmus ① bis ⑤ liefert:

$$Q_1 = 4\pi\epsilon r_0 \cdot \Phi_1$$

Influenzkoeffizienten-Matrix c_{ik}

$$Q_1 = c_{11} \Phi_1$$

Bestimmung von c_{11} :

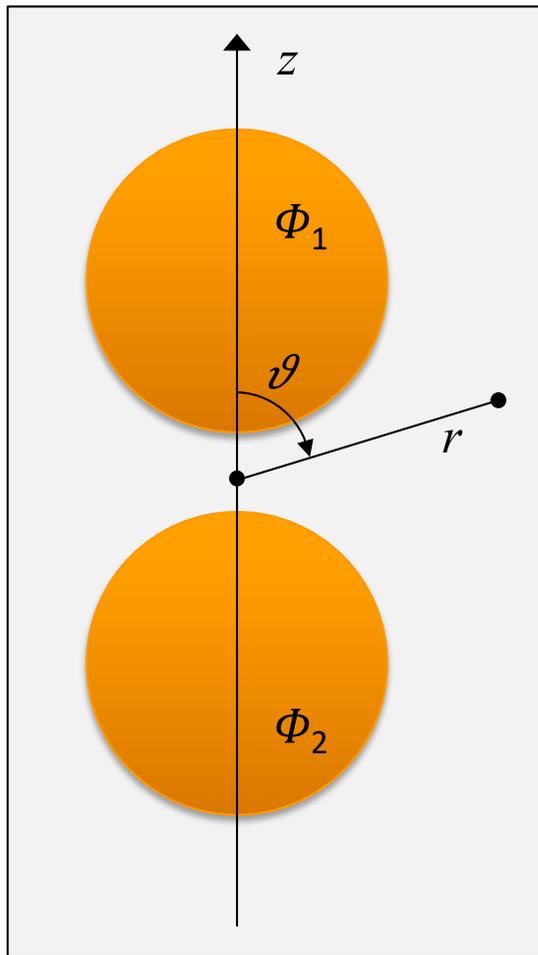
$$c_{11} = \text{alg}_1(\Phi_1) / \Phi_1 = (4\pi \epsilon r_0 \Phi_1) / \Phi_1$$

$$c_{11} = 4\pi \epsilon r_0$$

mit $C_{11} = c_{11}$ folgt auch für die Kapazität:

$$C_{11} = 4\pi \epsilon r_0$$

7.1.5 Beispiel rotationssymmetrisches Problem



Keine Kugelsymmetrie mehr

$\Phi = \Phi(r, \vartheta)$ abhängig von ϑ

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi(r, \vartheta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi(r, \vartheta)}{\partial\vartheta} \right)$$

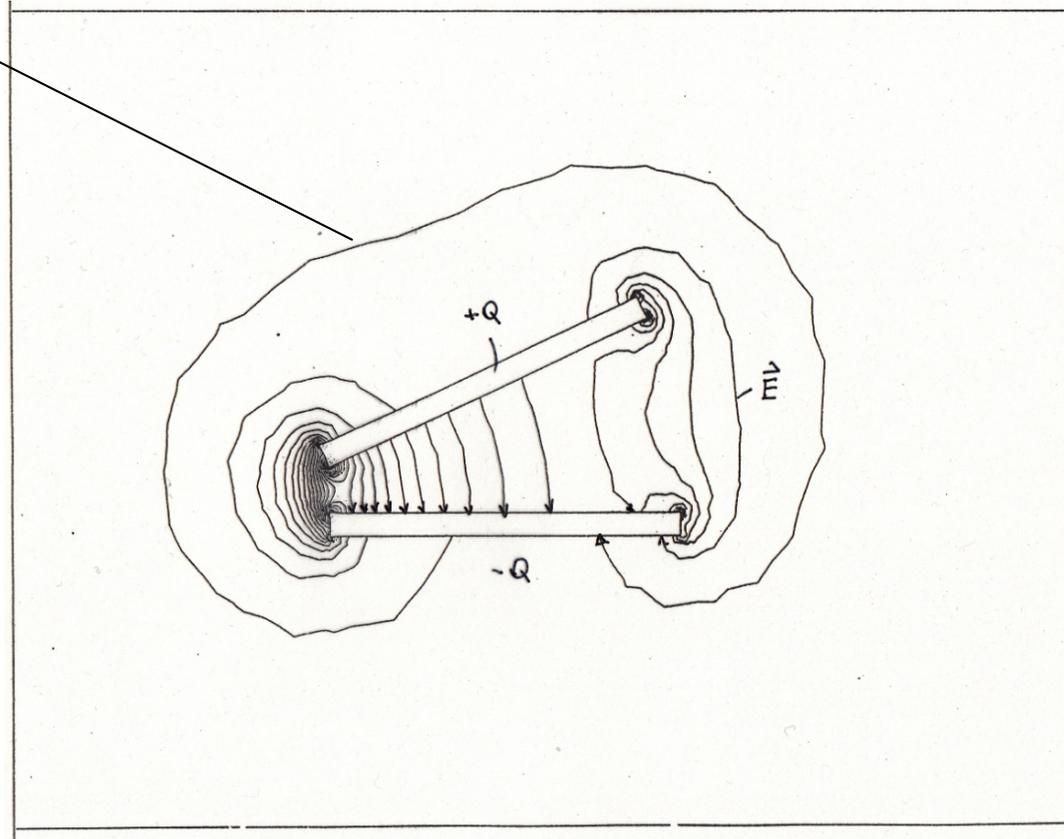


Integration ?

Lösung mittels Separation der Variablen
oder numerische PDGL – Routine
(z.B. Finite Elemente oder Finite
Differenzen Feldberechnung)

7.1.6 Verifikation numerischer Lösungen der Laplace-Gleichung I

Beispiel für eine fehlerhafte numerische Simulation



7.1.6 Verifikation numerischer Lösungen der Laplace-Gleichung II

Vergleiche Lösungen von Verfahren (1) und (2)

Verfahren (1) Laplace-Gleichung

$$\Delta\Phi = 0 \quad \Phi_1 = \dots \quad \Phi_2 = \dots$$

Laplace geg. Randbedingungen

Raumladungsverteilung
noch nicht bekannt

$$\Phi(\vec{r})$$

Lösung der Laplace-Gleichung

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\Phi(\vec{r})$$

$$\vec{D}_{H1,2}(\vec{r}) = \varepsilon \cdot \vec{E}_{H1,2}(\vec{r})$$

Feld auf Metalloberflächen 1,2

$$\sigma_{H1,2}(\vec{r}) = \vec{D}_{H1,2}(\vec{r})$$

Oberflächenladungsdichte auf
den Metalloberflächen 1,2

Input für Verfahren (2)

7.1.6 Verifikation numerischer Lösungen der Laplace-Gleichung III

Verfahren (2) Coulomb-Integral

Auf den Metalloberflächen 1,2 konzentrieren sich die Raumladungen an der Metalloberfläche \triangleq Oberflächenladungsdichten σ

$$\rightarrow \rho(\vec{r}) = \begin{cases} \rho_{1,2}(\vec{r}) & \text{für } \vec{r} \approx \text{Oberfläche 1,2 mit der Dicke } ds \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightarrow \Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{\text{Volumen } i} \frac{\rho_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right) \quad \text{mit } dv = df \cdot ds$$

$$= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_{\text{Volumen } i} \frac{\rho_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' df' \right) \quad \text{Mit } \rho \cdot ds = \sigma$$

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} \iint_{\text{Fläche } i} \frac{\sigma_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} df' \right) \quad \text{mit}$$

$$\sigma_{Hi}(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r = \vec{D}_{Hi}(\vec{r})$$

Input aus Verfahren (1)

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \Phi(\vec{r}) \stackrel{?}{=} \Phi(\vec{r}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Wenn gleich,} \\ \text{dann Lösung OK} \end{array}$$

(1) (2)

Zusammenfassung

Die Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta\Phi = 0$

ist eine geeignete Methode:

- Wenn Äquipotentiallinien durch metallische Flächen vorgegeben sind
- Und wenn das Medium linear und isotrop ist
- Und wenn zwischen den Metallen keine freien Ladungen sind.

7.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten I

Kartesische Koordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi = U(x) \cdot V(y) \cdot W(z)$$

$$\rightarrow V(y) \cdot W(z) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x) + U(x) \cdot W(z) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(y) + U(x) \cdot V(y) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(z) = 0$$

Separationsansatz \rightarrow
$$\frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{V(y)} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} = 0$$

Wir haben die Summe dreier Funktionen $f_x(x), f_y(y), f_z(z)$

$$f_x(x) + f_y(y) + f_z(z) = 0$$

Diese ist nur Null für alle x, y, z , wenn diese konstant sind

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ -\alpha^2 & -\beta^2 & +\gamma^2 \end{array}$$

7.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten II

Wann ist $f_x(x), f_y(y), f_z(z)$ konstant, unabhängig von x, y, z ?

$$f_x(x) = -\alpha^2 \quad \rightarrow \alpha \text{ unabhängig von } x$$

$$f_y(y) = -\beta^2 \quad \rightarrow \beta \text{ unabhängig von } y$$

$$f_z(z) = +\gamma^2 \quad \rightarrow \gamma \text{ unabhängig von } z$$

erfüllt für:

$$\frac{1}{U(x)} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} = -\alpha^2$$

$$\frac{1}{V(y)} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} = -\beta^2$$

$$\frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} = \gamma^2$$

\rightarrow

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2 U(x)}{dx^2} + \alpha^2 \cdot U(x) &= 0 \\ \frac{d^2 V(y)}{dy^2} + \beta^2 \cdot V(y) &= 0 \\ \frac{d^2 W(z)}{dz^2} - \gamma^2 \cdot W(z) &= 0 \end{aligned}}$$

$$U(x) = \sin(\alpha x) \text{ oder } \cos(\alpha x)$$

$$\rightarrow V(y) = \sin(\beta y) \text{ oder } \cos(\beta y)$$

$$W(z) = e^{\pm \gamma z}$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

Jede Linearkombination ist ebenfalls eine Lösung der Potentialgleichung

7.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten III

Partikuläre Lösung (1)

$$\Phi_{ij}(x, y, z) = A_{ij} \cdot \sin(\alpha_i x) \cdot \cos(\beta_j y) \cdot e^{-\gamma_{ij} z} \quad \text{mit} \quad \gamma_{ij}^2 = \alpha_i^2 + \beta_j^2$$

└─ noch unbekannter Koeffizient

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} = A_{ij} (-\alpha_i^2) \sin(\alpha_i x) \cdot \cos(\beta_j y) \cdot e^{-\gamma_{ij} z} = -\alpha_i^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} = \dots = -\beta_j^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial z^2} = \dots = +\gamma_{ij}^2 \Phi_{ij}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{ij}}{\partial z^2} = (-\alpha_i^2 - \beta_j^2 + \gamma_{ij}^2) \Phi_{ij} = 0 \cdot \Phi_{ij} = 0$$

→ Φ_{ij} ist eine Teillösung der Laplace-Gleichung

7.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten IV

Partikuläre Lösung (2)

$$\Phi_{nm}(x, y, z) = A_{nm} \cdot \cos(\alpha_n x) \cdot \cos(\beta_m y) \cdot e^{-\gamma_{nm} z} \quad \text{mit} \quad \gamma_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

└─ noch unbekannter Koeffizient

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{nm}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{nm}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{nm}}{\partial z^2} = 0$$

$$-\alpha_n^2 - \beta_m^2 + \gamma_{nm}^2 = 0$$

→ Φ_{nm} ist ebenfalls Teillösung der Laplace-Gleichung

Zusammengesetzte Lösung:

$$\Phi_{1+2} = (\Phi_{ij} + \Phi_{nm}) \quad \rightarrow \frac{\partial^2 \Phi_{1+2}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{1+2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{1+2}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ist ebenfalls eine Lösung}$$

Allgemeine Lösung mit allen Kombinationen von sin, cos, exp, ± :

$$\Phi = \sum_{n,m} \Phi_{nm}$$

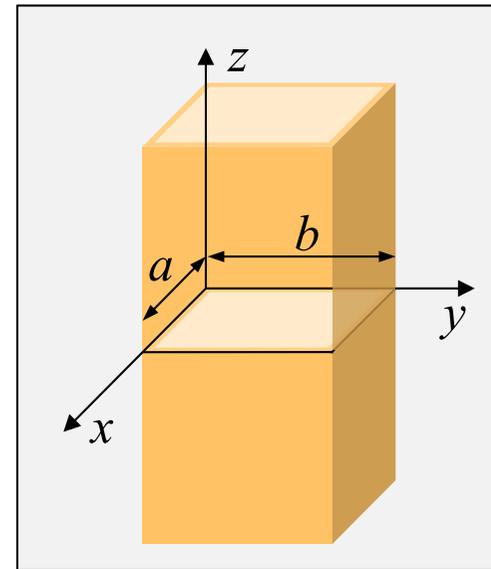
Die unbekanntenen Koeffizienten A_{nm} ergeben sich aus den Randbedingungen

7.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten V

Beispiel: Rechteckiges, metallisches Rohr (unendlich lang)

Randbedingungen:

- a) $\Phi(x,y,z) = 0$ auf dem Rand
- b) $\Phi(x,y,0) = \text{vorgegeben} = V_o(x,y)$
- c) abfallendes Potential in z -Richtung



Einschränkung der Lösungsvielfalt durch Randbedingungen $\phi = 0$ auf dem Rand:

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A^{mn} \cdot \sin(\alpha_n x) \cdot \sin(\beta_m y) \cdot e^{-\gamma_{mn} z}$$

$$\gamma_{nm}^2 = \alpha_n^2 + \beta_m^2$$

Nur sin-Terme wegen
 $\Phi(0,y,z) = 0$ „hintere Wand“

Nur sin-Terme wegen
 $\Phi(x,0,z) = 0$ „linke Wand“

7.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten VI

Bestimmung von α_n und β_m durch Berücksichtigung der weiteren Randbedingungen $\Phi = 0$

$$\begin{array}{l}
 \text{am vorderen Deckel} \\
 \text{am rechten Deckel}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x = a \\
 y = b
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \Phi(a, y, z) = 0 \rightarrow \alpha_n = \frac{n\pi}{a} \\
 \Phi(x, b, z) = 0 \rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{b}
 \end{array}$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A^{mn} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma_{nm}z}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \sin\left(\frac{n\pi}{a}a\right) = 0 \\
 \sin\left(\frac{m\pi}{b}b\right) = 0
 \end{array} \right\} \text{Rand-} \\
 \text{bedingungen} \\
 \text{erfüllt}$$

$$\gamma_{nm} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2}$$

Bestimmung der Koeffizienten A_{nm} durch Anpassung an die vorgegebene

Randbedingung des Potentialverlaufs $V_0(x, y)$:

$$\Phi(x, y, z=0) = V_0(x, y)$$

7.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten VII

Sei die Randbedingung z.B.:

$$V_0(x, y) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right)$$

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A^{mn} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \cdot e^{-\gamma_{mn} z} \quad \rightarrow \quad A_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq 1, m \neq 1 \\ k & n = 1, m = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \Phi(x, y, z) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \cdot e^{-\gamma z} \quad \text{mit} \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \quad [k] = V$$

Ist die Laplace-Gleichung erfüllt?

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -k \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -k \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = k \left\{ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \cdot e^{-\gamma z} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

q.e.d.

Berechnung der Felder im Inneren des Rohrs

Potential

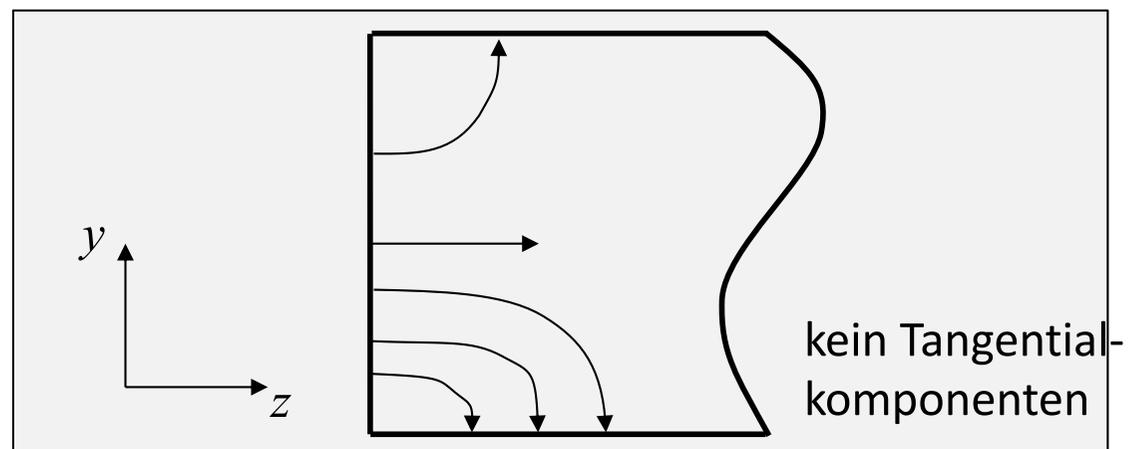
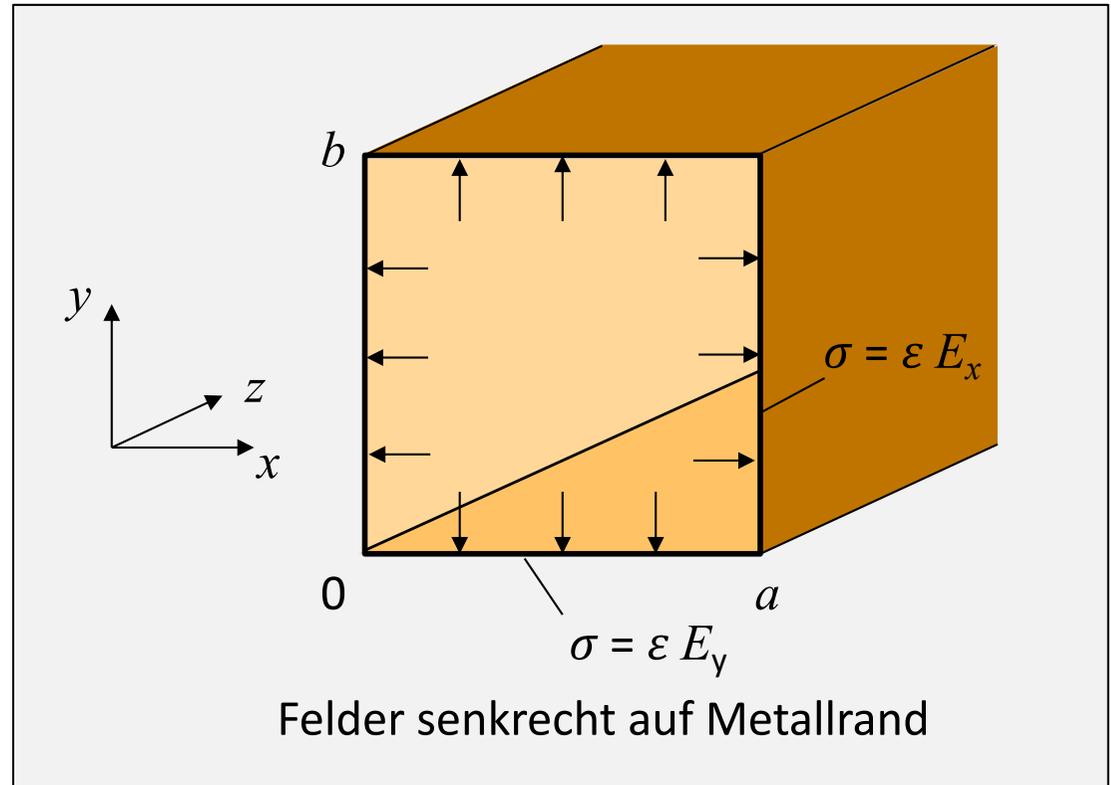
$$\Phi(x, y, z) = k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

Elektrisches Feld

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = +\gamma \cdot k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -k \frac{\pi}{a} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -k \frac{\pi}{b} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot e^{-\gamma z}$$



7.2.1 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kartesische Koordinaten IX

Vorgehen bei allgemeinen Randbedingungen $V_0(x,y)$

Wenn sich $V_0(x,y)$ als Produkt zweier Funktionen in x und y darstellen lässt, so gilt:

$$\Phi(x,y,0) \stackrel{!}{=} V_0(x,y) = f_0(x) \cdot g_0(y) \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} f_0(x) = 0 \text{ an } x = 0, a \\ g_0(y) = 0 \text{ an } y = 0, b \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{entspricht der Rand-} \\ \text{bedingung } \Phi=0 \text{ am} \\ \text{Rand} \end{array} \right.$$

$$\Phi(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \stackrel{!}{=} f_0(x) \cdot g_0(y)$$

Zerlegung von $f_0(x)$, $g_0(y)$ nach Fourier in eine Summe von Harmonischen:

$$f_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f_0(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

$$g_0(y) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \quad \text{mit} \quad b_m = \frac{2}{b} \int_0^b g_0(y) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dy$$

Koeffizientenvergleich:

$$\boxed{A_{mn} = a_n \cdot b_m} \quad \longleftarrow \quad a_n \cdot b_m$$

7.2.2 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Zylinderkoordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial\Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi = U(R) \cdot V(\varphi) \cdot W(z)$$

$$\rightarrow V(\varphi) \cdot W(z) \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + U(R) \cdot W(z) \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + U(R) \cdot V(\varphi) \cdot W(z) \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{U(R)} \cdot \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{1}{V(\varphi)} \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{W(z)} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0$$

Separationsansatz $f_R(R) + \frac{1}{R^2} f_\varphi(\varphi) + f_z(z) = 0$

$$\begin{array}{ccc} | & | & | \\ \textcircled{?} & -m^2 & \gamma^2 \end{array}$$

Konstanten, unabhängig von φ und z

7.2.3 Lösung der Laplace-Gleichung durch Separation der Variablen – Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} = 0 \quad / \cdot \frac{r^2 \sin^2\vartheta}{U \cdot V \cdot W}$$

$$\Phi = U(r) \cdot V(\vartheta) \cdot W(\varphi)$$

$$\rightarrow \frac{\sin^2\vartheta}{U(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right) + \frac{\sin\vartheta}{V(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\sin\vartheta \frac{\partial V(\vartheta)}{\partial\vartheta} \right) + \frac{1}{W(\varphi)} \frac{\partial^2 W(\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0$$

Separationsansatz

$$\frac{d^2 W(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 W(\varphi) = 0$$

Gewöhnliche DGL der
sin- und cos- Funktionen

$$\rightarrow W(\varphi) \sim \sin(m\varphi), \cos(m\varphi)$$

m ganze Zahl: Erfüllung der Randbedingungen

$$W(\varphi) = W(\varphi + 2\pi)$$

7.3 Lösung der Poisson-Gleichung

$$\Delta\Phi(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon}$$

$$\Phi(\vec{r}) = \Phi_P(\vec{r}) + \Phi_L(\vec{r})$$

$\Phi_P(\vec{r})$ Partikuläre Lösung

$\Phi_L(\vec{r})$ Homogene Lösung der Laplace-Gleichung:
Ungleich Null, im Falle von geladenen Elektroden; Randbedingungen durch deren Potentiale.

Lösung der Poisson-Gleichung (partikuläre Lösung):

$$\Phi_P(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

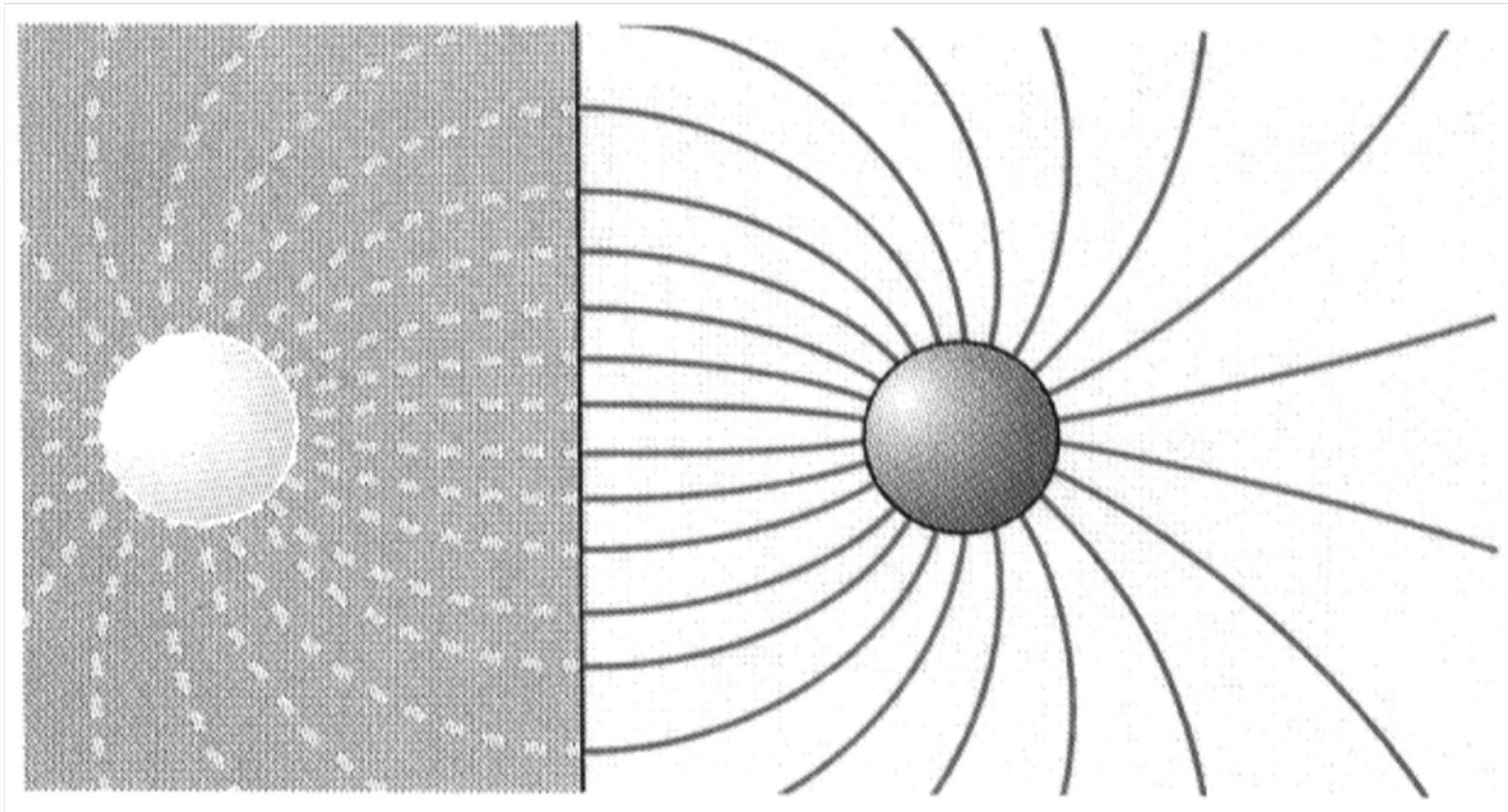
Coulomb-Integral

7.4 Spiegelungsmethode I

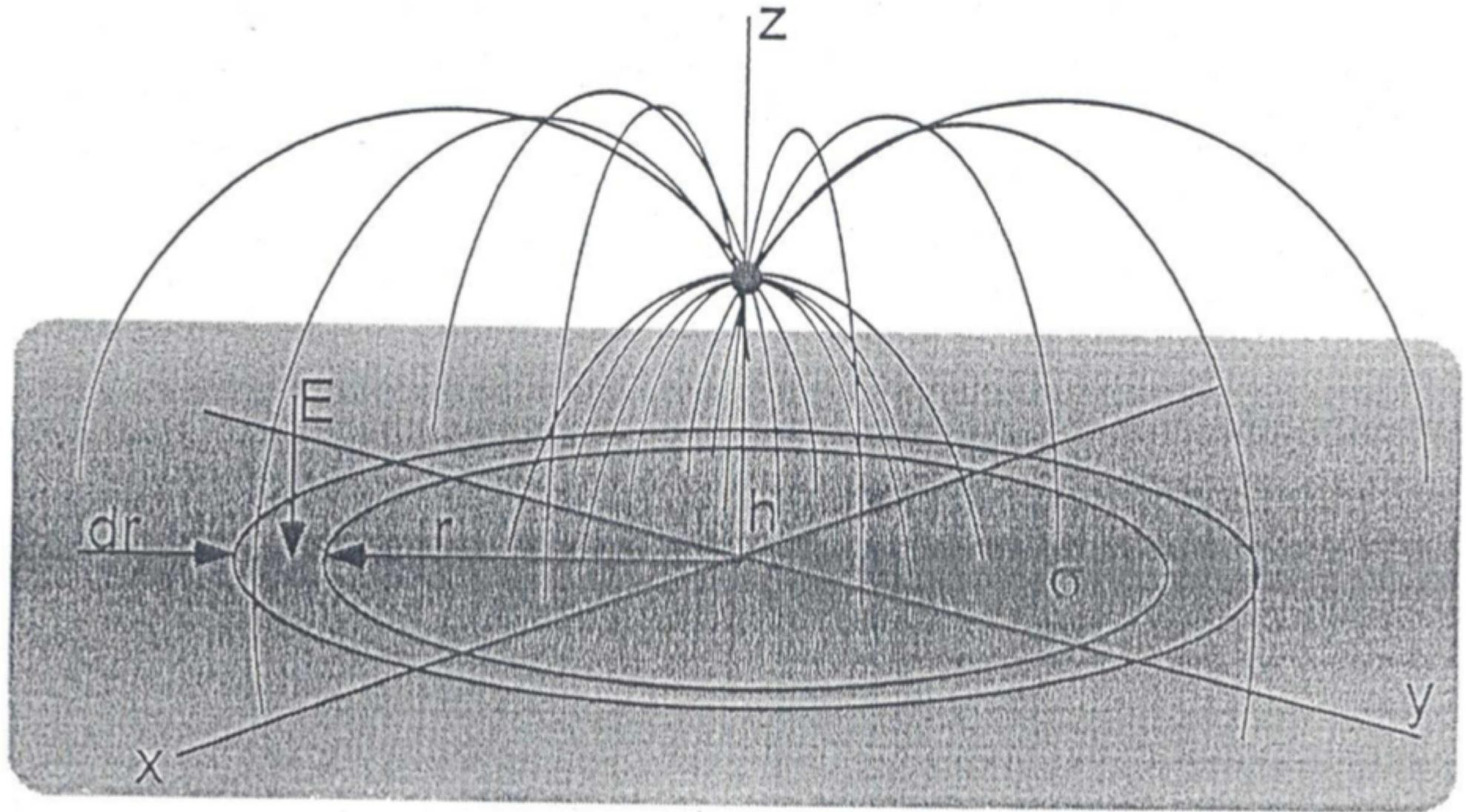
„elektrisches Spiegelbild“

Anwendungsbereich: Punktförmige Ladungen vor Metallplatten

Vorgehen: Metallplatte wegdenken und durch Anbringen von fiktiven Ladungen eine Äquipotentialfläche an der Stelle der Metallplatte mit gleichem Potential erzeugen.

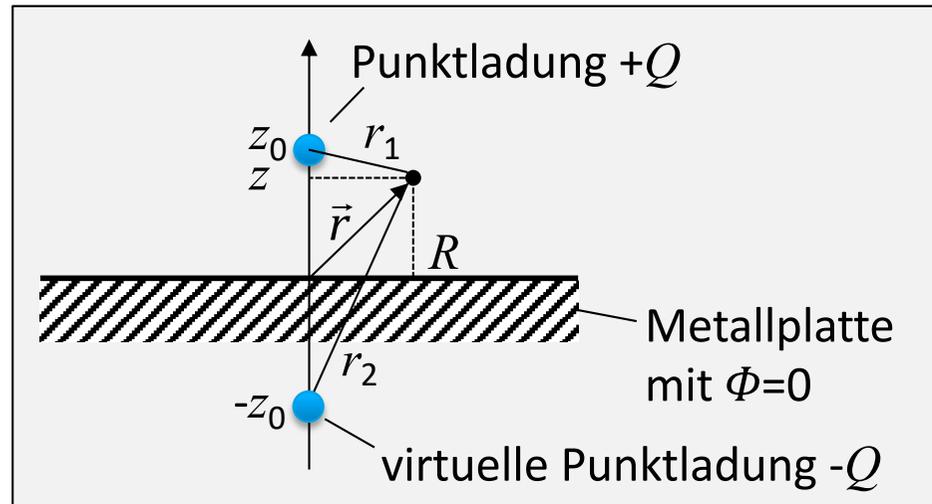


7.4 Spiegelungsmethode II



7.4 Spiegelungsmethode III

Beispiel:
(Zylinderkoordinaten
wegen Symmetrie)



$$r_1 = \sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}$$

$$\Phi(R, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}} \right) \cdot Q$$

$$\Phi(R, \varphi, z) = 0 \quad \text{Für } z = 0 \text{ und beliebige } R, \varphi \text{ (entspricht Potentialfläche der Metallplatte)}$$

7.4 Spiegelungsmethode IV

$$\Phi(R, \varphi, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{r_1} - \frac{Q}{r_2} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (z + z_0)^2}} \right) \cdot Q$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial R} \vec{e}_R - \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial\Phi}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\begin{array}{c} \left(-\frac{R}{\left(R^2 + (z - z_0)^2 \right)^{3/2}} + \frac{R}{\left(R^2 + (z + z_0)^2 \right)^{3/2}} \right) \cdot \vec{e}_R \\ 0 \cdot \vec{e}_\varphi \\ \left(-\frac{(z - z_0)}{\left(R^2 + (z - z_0)^2 \right)^{3/2}} + \frac{(z + z_0)}{\left(R^2 + (z + z_0)^2 \right)^{3/2}} \right) \end{array} \right]$$

7.4 Spiegelungsmethode V

Auf Oberflächen von Metallplatten bei $z = 0$ gilt:

$$\vec{E}(R, z=0) = 0 \cdot \vec{e}_R - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} \cdot \vec{e}_z$$

Das elektrische Feld steht senkrecht auf der Metalloberfläche.

Die Oberflächenladungsdichte $\sigma(R)$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\sigma(R) &= \epsilon E_z(R, z=0) \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

Die gesamte Influenzladung auf der Metallplatte:

$$\begin{aligned}Q_{\text{inf}} &= \iint \sigma df = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma(R) R d\varphi dR \\ &= -\frac{Q}{4\pi} \cdot 2\pi \int_0^\infty \frac{2z_0}{(R^2 + z_0^2)^{3/2}} \\ &= -Q \cdot z_0 \left[\frac{-1}{(R^2 + z_0^2)^{1/2}} \right]_0^\infty = +Q \cdot z_0 \left(0 - \frac{1}{z_0} \right) = -Q\end{aligned}$$

Ist gleich groß wie die Punktladung Q , aber mit negativem Vorzeichen.

7.5 Zusammenfassung

Prüfen: Welche Randbedingungen sind gegeben? Welche Größen sind gesucht?

Ladungsverteilung gegeben	→ Satz vom Hüllfluß → Coulomb Integral	→ Elektrisches Feld → Elektrisches Potential
Randbedingungen gegeben	→ Laplace Gleichung (ladungsfreier Raum) → Poisson Gleichung (mit Ladungen)	→ Potentialverlauf → analytisch kaum lösbar nur numerische Lösung (FEM)
Elektrisches Feld gegeben	→ Wegintegral $E = - \text{grad } \Phi$ → $\text{div } D = \rho$	→ Potential → Ladungsverteilung