

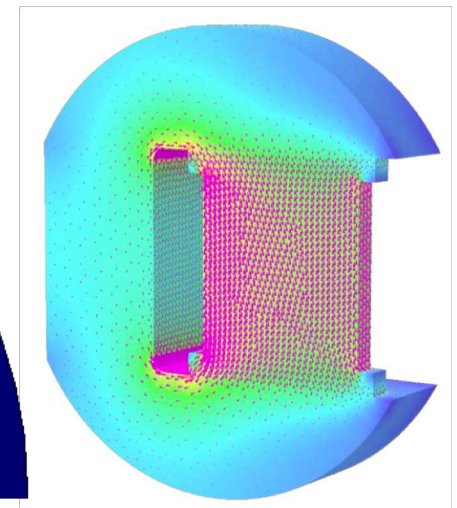
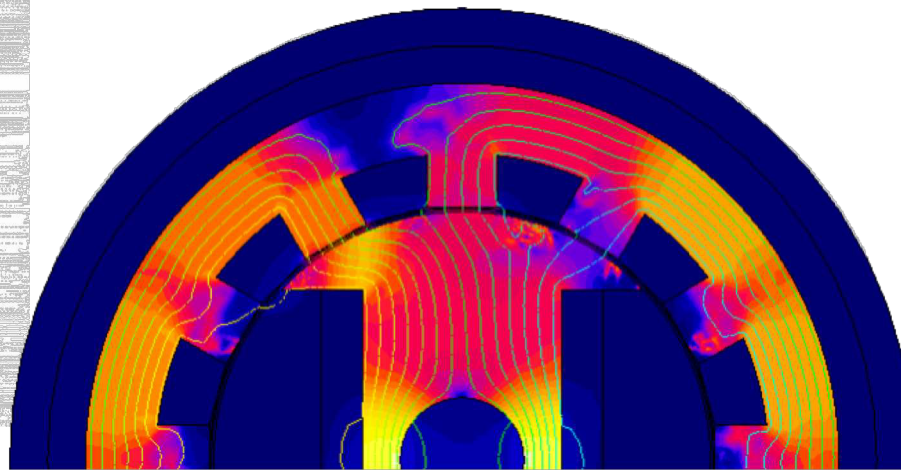
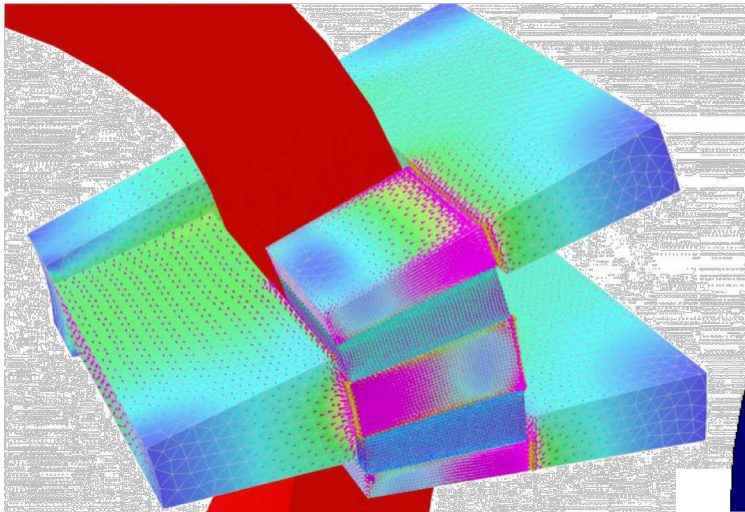
Vorlesung

Elektrische und magnetische Felder (EMF)

SS 2019

Kapitel 4: Stationäre elektrische Strömungsfelder

Elektrotechnisches Institut (ETI)



Gliederung

1. Erhaltung der Ladung
2. Ohmsches Gesetz
3. Ohmsche Verlustleistung
4. Ohmscher Widerstand
5. Laplace-Gleichung für stationäre Strömungsfelder
6. Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen

1. Erhaltung der Ladung I

Maxwell

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} &= \operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$0 = \operatorname{div} \vec{J} + \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

Maxwell

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{D} = \rho}$$

Kontinuitätsgleichung
der Ladung

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0}$$

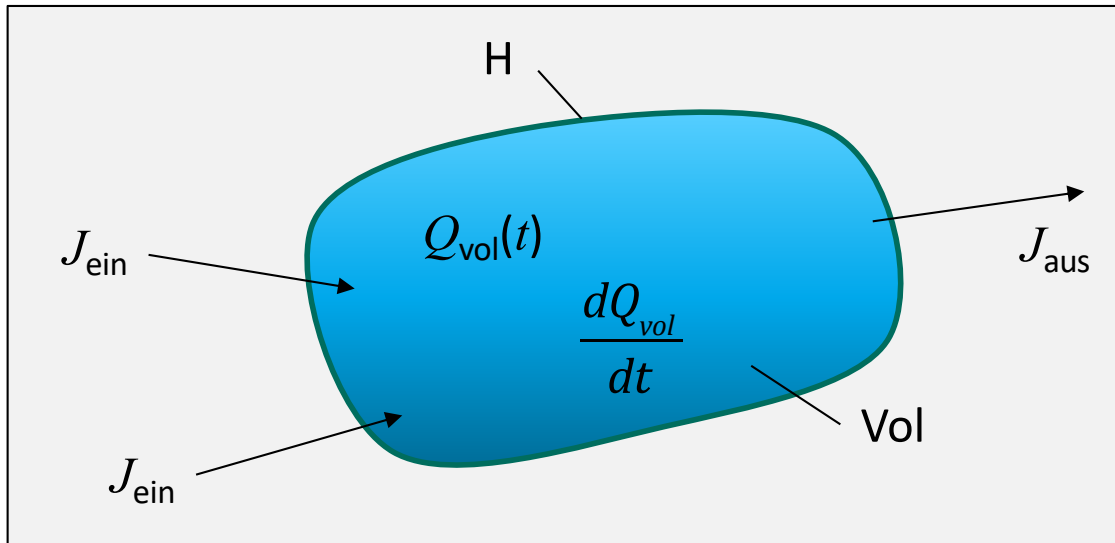
$$\iiint \operatorname{div} \vec{J} dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dv = 0 \quad \rightarrow \quad \oiint \vec{J} \cdot d\vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint \rho dv = 0$$

Bilanzgleichung
der Ladung

$$\boxed{\oiint \vec{J} \cdot d\vec{f} + \frac{dQ_{\text{vol}}}{dt} = 0}$$

Ladung geht
nicht verloren

1. Erhalt der Ladung II



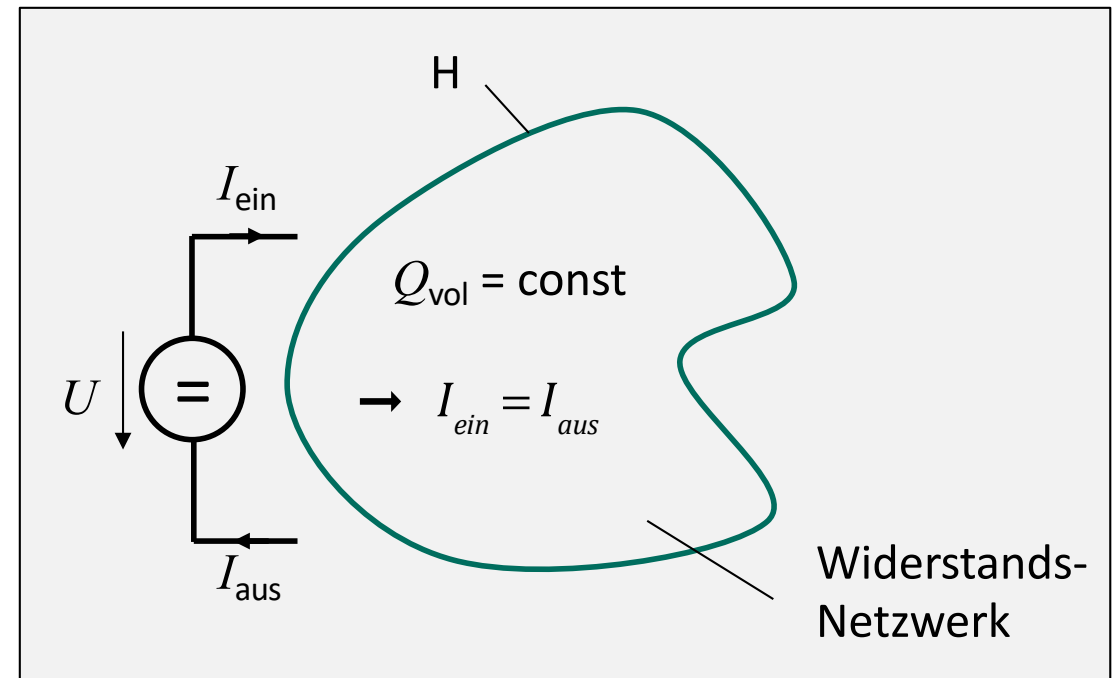
$$\oiint \vec{J} \cdot d\vec{f} = -\frac{dQ_{vol}}{dt}$$

Ladungserhaltung

$Q_{vol} = \text{const.}, \text{ z.B. Null}$

$$\rightarrow \frac{dQ_{vol}}{dt} = 0 \rightarrow \oiint \vec{J} \cdot d\vec{f} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{I_{ein} = I_{aus}}$$



2. Ohmsches Gesetz I

Bewegte elektrische Ladung = elektrischer Strom $\rightarrow I = \Delta Q / \Delta t$ $[I] = C / s = A$

Leiter

Metallische Leiter: Elektronen (negative Ladung per Definition), $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$

Elektrolyte: Ionen (positiv oder negativ)

Ionenleitung ist mit Materialtransport verbunden (siehe Batterien), Elektronenleitung nicht.

Die Richtung des Stroms ist definitionsgemäß die Richtung positiver Ladungsträger.

Bei der üblichen Elektronenleitung in metallischen Leitern bewegen sich die Elektronen also entgegengesetzt der Stromrichtung.

Kupfer hat nur ein Elektron auf der äußersten-Schale (Valenzelektron). Es ist daher lose gebunden und kann leicht von Atom zu Atom wandern, wenn ein elektrisches Feld anliegt.

Pro cm^3 Kupfer existieren rund $8,5 \cdot 10^{22}$ Leitungselektronen.

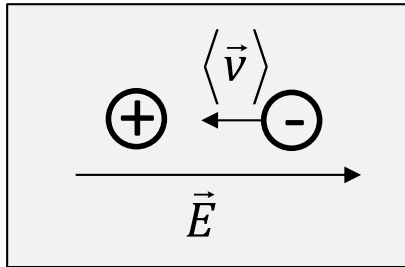
Die Bewegungsgeschwindigkeit der Kupferelektronen ist langsam, nur rund 1/10 mm/s.

Dielektrika (Isolatoren)

In Dielektrika sind die Elektronen fest an die Atome gebunden.

Unter Einfluss eines elektrischen Feldes findet also keine Elektronenwanderung statt, wohl aber eine Verschiebung ($\rightarrow$ atomarer Dipol $\rightarrow$ Polarisation).

2. Ohmsches Gesetz II



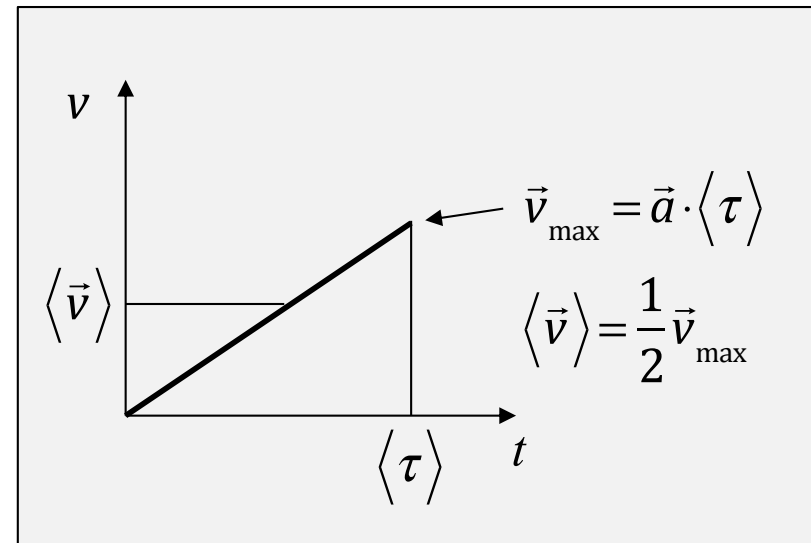
$$\vec{F} = m_e \vec{a} = q_e \vec{E}$$

→

$$\vec{a} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E}$$

→

$$\vec{v} = \vec{a} \cdot t = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \cdot t$$



Stöße Elektron/Ion

→

Abbremsung

→

Mittlere Flugzeit zwischen Stößen $\langle \tau \rangle$

Mittlere Fluggeschwindigkeit $\langle \vec{v} \rangle$

→

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \langle \tau \rangle \vec{E}$$

→

$$\vec{J} = \rho_e \underbrace{\frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \langle \tau \rangle}_{\kappa} \vec{E}$$

→

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E}}$$

Ohmsches Gesetz

2. Ohmsches Gesetz III

Die Bewegung der Elektronen im Metall ist eine Überlagerung aus

- zufällig gerichteter thermischer Bewegung, abhängig von der Temperatur T

$$\langle v_{th} \rangle = 0 \qquad \langle v_{th} \rangle = f(T) \neq 0$$

- gerichteter Bewegung in Richtung des elektrischen Feldes, abhängig von E

$$\langle v \rangle \sim E \qquad \langle v_{th} \rangle \gg \langle v \rangle$$

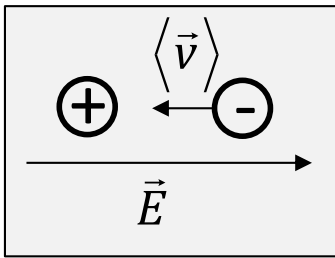
wobei die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Stößen des Elektrons mit den Ionen $\langle s \rangle$ abhängig von den Abständen der Ionen voneinander ist.

Die mittlere Stoßzeit $\langle \tau \rangle$ ergibt sich aus der mittleren freien Weglänge $\langle s \rangle$ und der dominanten thermischen Geschwindigkeit $\langle v_{th}(T) \rangle$

$$\boxed{\langle \tau(T) \rangle = \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle}} \rightarrow \vec{J} = \rho_e \frac{1}{2} \frac{q_e}{m_e} \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle} \vec{E} \rightarrow \boxed{\vec{J} = \kappa(T) \cdot \vec{E}}$$

mit $\kappa(T) \sim \frac{\langle s \rangle}{\langle v_{th}(T) \rangle}$

3. Ohmsche Verlustleistung I



mittlere freie
Flugzeit $\langle \tau \rangle$

$$\vec{F} = m_e \vec{a} = q_e \vec{E} \rightarrow \vec{v}_{\max} = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \langle \tau \rangle$$

Kinetische Energie eines Elektrons: $E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2$

Anzahl der Elektronen pro Volumeneinheit: $n = \frac{\rho_{el}}{q_e}$

Umgesetzte Energie pro Volumeneinheit pro Stoßzeit $\langle \tau \rangle$

$$n \cdot E_{kin} = \frac{\rho_{el}}{q_e} \cdot \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = \rho_{el} \frac{1}{2} \vec{v}_{\max} \frac{m_e}{q_e} \vec{v}_{\max} \quad \text{wobei} \quad \vec{J} = \rho_{el} \langle \vec{v} \rangle = \rho_{el} \frac{1}{2} \vec{v}_{\max}$$

$$= \vec{J} \cdot \frac{m_e}{q_e} \left(\frac{q_e}{m_e} \vec{E} \langle \tau \rangle \right) = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot \langle \tau \rangle \rightarrow \boxed{\frac{n \cdot E_{kin}}{\langle \tau \rangle} = \frac{\partial w_J}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E}} \quad \text{lokale Verlustleistung (pro Volumen)}$$

- Beschleunigung der Elektronen durch das elektrische Feld
- Stöße von Elektronen und Ionen
- Abbremsung der Elektronen
- Abgabe kinetischer Energie in thermische Energie
- Erwärmung
- Joulsche Verluste (Stromwärmeverluste)

3. Ohmsche Verlustleistung II

$$\boxed{w_J = \int_0^t \vec{J} \cdot \vec{E} dt \quad \frac{\partial w_J}{\partial t} = \vec{J} \cdot \vec{E}}$$

verheizte Joulsche Wärme

Leistungsdichte

$$[w_J] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \text{s} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} = \frac{\text{Ws}}{\text{m}^3} \quad \text{spezifische Energie}$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} \rightarrow w_J = \kappa \int_0^t \vec{E}^2 dt = \frac{1}{\kappa} \int_0^t \vec{J}^2 dt$$

Gesamtleistung

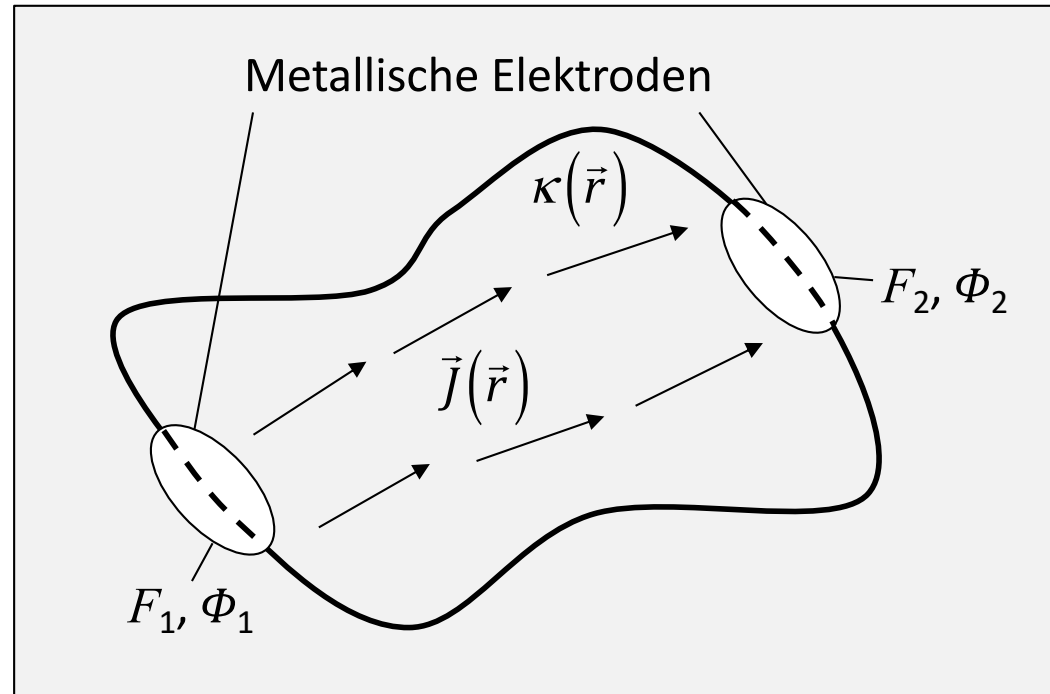
$$\frac{\partial W_J}{\partial t} = \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} dv = \iiint \vec{J} \cdot \vec{E} d\vec{f} d\vec{s} = U \cdot I$$

Leistung $\left[\frac{\partial W_J}{\partial t} \right] = A \cdot V = \text{Watt}$

$$\boxed{\frac{\partial W_J}{\partial t} = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}} \quad \begin{array}{l} \text{gesamte} \\ \text{thermische} \\ \text{Energie} \end{array}$$

Energie/Arbeit $[W_J] = A \cdot V \cdot s = \text{Joule} = \text{Watt} \cdot s$

4. Ohmscher Widerstand



$$U = \Phi_2 - \Phi_1 = - \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}$$

$$I = \iint_{F_1} \vec{J} d\vec{f}$$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{- \int_1^2 \vec{E} d\vec{s}}{\iint_{F_1} \vec{J} d\vec{f}} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\iint_{F_1} \vec{J} d\vec{f}}$$

Φ_2 und Φ_1 sind bekannt.

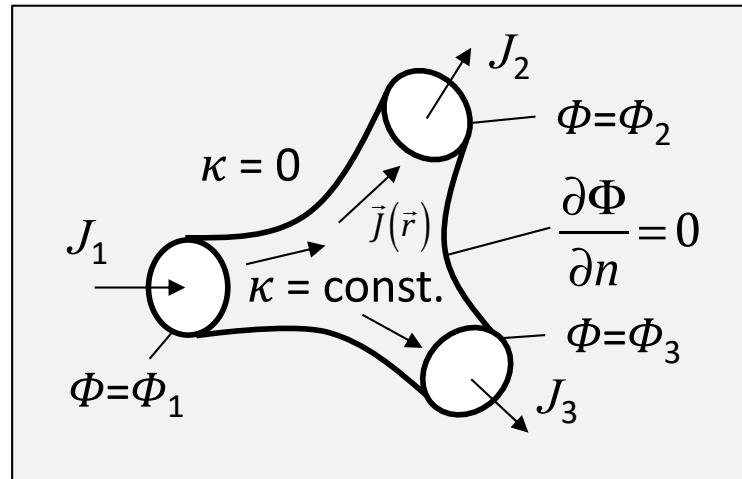
Verteilung von J über Elektroden unbekannt

5. Laplace-Gleichung für stationäre Strömungsfelder I

Ziel: Berechnung von $\vec{J}(\vec{r})$ innen bei gegebenen Randbedingungen an den Ein- und Ausgängen

Ziel:

$$\vec{J} \leftarrow \kappa \vec{E} \leftarrow -\kappa \text{grad} \Phi \quad \Phi = ?$$



Randbedingungen für Laplace-Gleichung für $\rho=0$ im Inneren (Leiter)

Stationär $\partial/\partial t = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = -\text{grad} \Phi$

Im Inneren mit $\rho=0 \quad \rightarrow \quad \text{div} \vec{D} = 0$

Linear & isotrop mit $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad \rightarrow \quad \text{div}(\varepsilon \cdot \vec{E}) = 0 \quad \rightarrow \quad \varepsilon \text{div} \text{grad} \Phi + \text{grad} \varepsilon \cdot \text{grad} \Phi = 0$

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{Laplace-Gleichung}$$

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E} = -\kappa \cdot \text{grad} \Phi$$

$$\rightarrow \quad \text{div} \text{grad} \Phi = 0$$

Null bei $\varepsilon = \text{const.}$

5. Laplace-Gleichung für stationäre Strömungsfelder II

Beispiel Rundleiter

$$\Delta\Phi = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = c_1$$

$$\Phi(z) = c_1 \cdot z + c_2$$

Randbedingungen:

$$\Phi(z=0) = \Phi_1 \rightarrow c_2 = \Phi_1$$

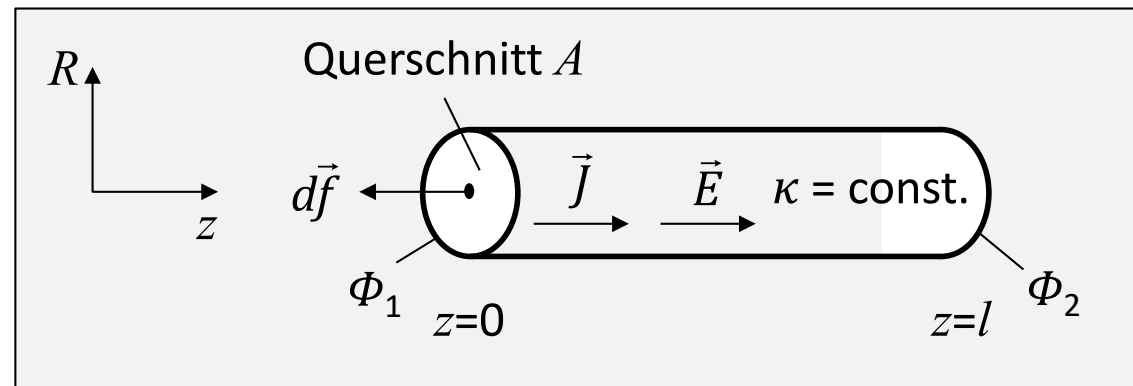
$$\Phi(z=l) = \Phi_2 \rightarrow c_1 l + \Phi_1 = \Phi_2 \rightarrow c_1 = (\Phi_2 - \Phi_1) / l$$

$$\rightarrow \Phi(z) = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \cdot z + \Phi_1$$

$$1) \text{ Lösung von } \Delta\Phi=0 \rightarrow \Phi(z)$$

$$2) \vec{E} = -\text{grad} \Phi$$

$$3) \vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}$$



$$\vec{E} = -\text{grad} \Phi = -\frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \vec{e}_z$$

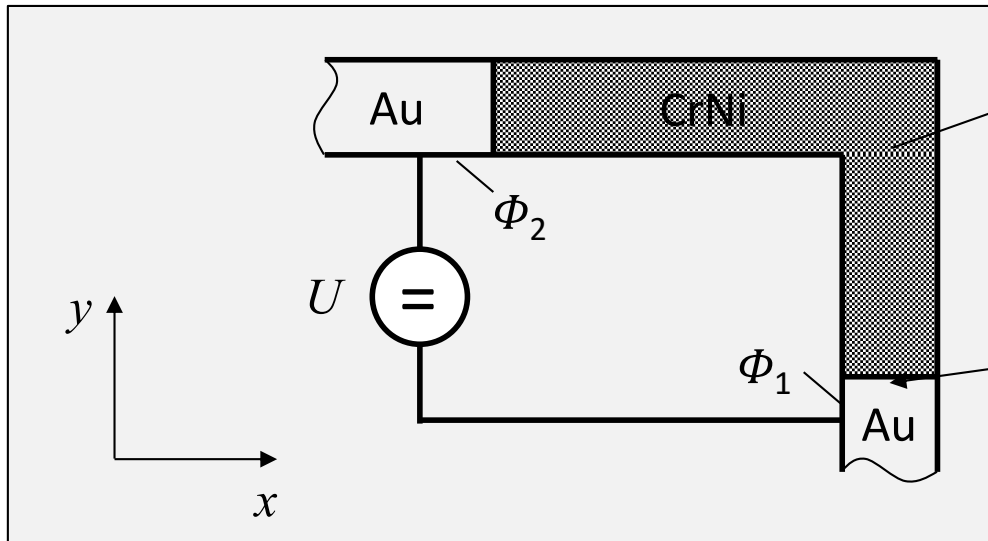
$$R = \frac{-\int \vec{E} d\vec{s}}{\iint \vec{J} d\vec{f}} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{-\kappa \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} (-A)} = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\kappa \cdot \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{l} \cdot A} = \frac{l}{\kappa \cdot A} = R$$

5. Laplace-Gleichung für stationäre Strömungsfelder III

Beispiel leitendes Widerstandsmaterial als strukturierter Dünnsfilm (Dicke d)

Gesucht: Stromdichte im Material und Gesamtwiderstand

Struktur 1:

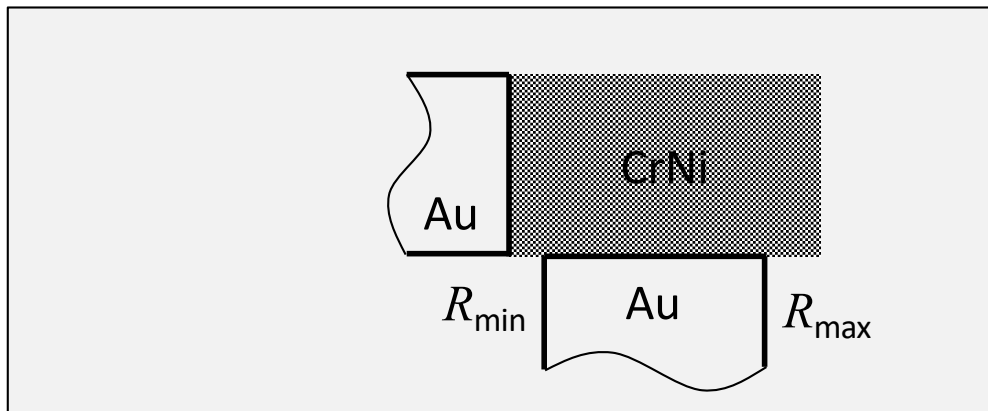


$$\Delta\Phi = 0$$

$$I = \iint J \cdot d \cdot dx = -d \cdot \kappa \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dx$$

$$R = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{d \cdot \kappa \int \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot dx}$$

Struktur 2:



6. Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen I

$$\boxed{\operatorname{div} J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Stationär heißt $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \operatorname{div} J = 0$

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}} \quad \rightarrow \quad \vec{J} = \frac{\kappa}{\varepsilon} \vec{D}$$

$$\rightarrow \operatorname{div} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon} \vec{D} \right) = 0$$

$$\frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \operatorname{div} \vec{D} + \vec{D} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon} \right) = 0$$

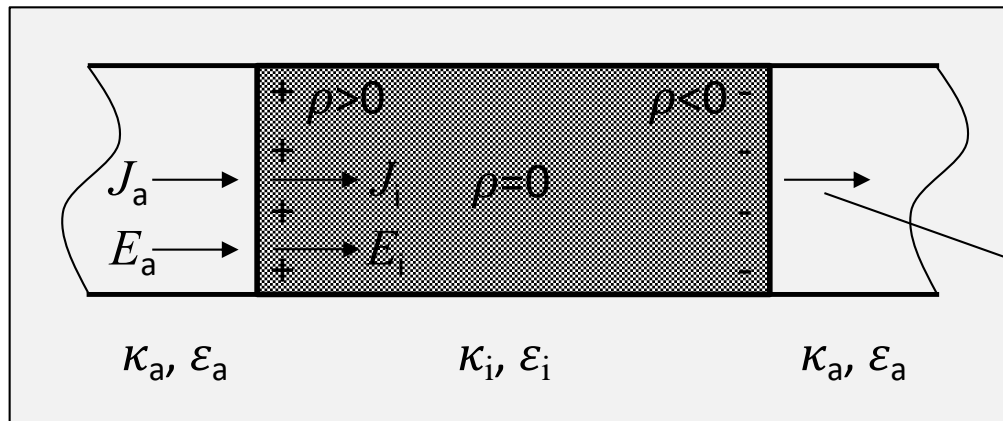
$$\operatorname{div} D = \rho \quad \text{und} \quad \vec{D} = \varepsilon / \kappa \cdot \vec{J} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \rho + \frac{\varepsilon}{\kappa} \cdot \vec{J} \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{\kappa}{\varepsilon} \right) = 0}$$

Zusammenhang zwischen Strömen und dadurch erzeugen Raumladungen

In Gebieten ungeladener Leiter, wo κ/ε konstant ist, gibt es keine freie Raumladung. An Grenzflächen mit unterschiedlichen ε oder κ können Ladungen auftreten, solange Ströme fließen.

6. Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen II

Grenzflächen-Ladungen



$$\text{grad}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\right) \quad \left(\frac{\kappa_i}{\varepsilon_i}\right) < \left(\frac{\kappa_a}{\varepsilon_a}\right) \quad \text{gute Außenleiter}$$

$$\frac{\kappa}{\varepsilon} \cdot \rho = -\frac{\varepsilon}{\kappa} \cdot \vec{J} \cdot \text{grad}\left(\frac{\kappa}{\varepsilon}\right)$$

Ladungserhaltung: $\vec{J}_a = \vec{J}_i = \vec{J}$

Ohmsches Gesetz: $\vec{J} = \kappa \vec{E} \quad \rightarrow \quad \kappa_a \vec{E}_a = \kappa_i \vec{E}_i$

$$\rightarrow \vec{E}_a = \frac{\kappa_i}{\kappa_a} \vec{E}_i$$

6. Stromdichte und Raumladungsdichte an Grenzflächen III

Stetigkeitsbeziehung für
Normalkomponenten D_n :

$$D_i - D_a = \sigma$$

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_0 E_i - \varepsilon_a \varepsilon_0 E_a = \sigma$$

$$\vec{E}_a = \frac{\kappa_i}{\kappa_a} \vec{E}_i$$

$$\varepsilon_i \varepsilon_0 E_i - \varepsilon_a \varepsilon_0 \frac{\kappa_i}{\kappa_a} E_i = \sigma$$

$$\vec{E}_i = \frac{\vec{J}}{\kappa_i}$$

$$\frac{\varepsilon_i \varepsilon_0}{\kappa_i} J - \frac{\varepsilon_a \varepsilon_0}{\kappa_i} \frac{\kappa_i}{\kappa_a} J = \sigma$$

$$\sigma = \left(\frac{\varepsilon_i \varepsilon_0}{\kappa_i} - \frac{\varepsilon_a \varepsilon_0}{\kappa_a} \right) \cdot J$$

An Grenzen unterschiedlicher Leitfähigkeit oder relativer Dielektrizitätskonstanten gibt es eine Proportionalität zwischen der Oberflächenladungsdichte und der Stromdichte.

Die Oberflächenladungsdichten verursachen ein elektrisches Feld, welches frei bewegliche Ladungsträger antreibt und so eine Stromdichte erzeugt.