

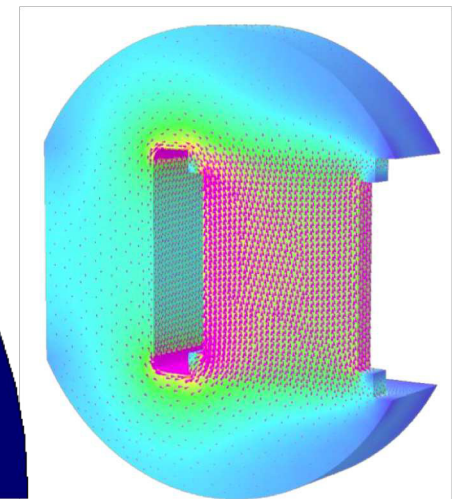
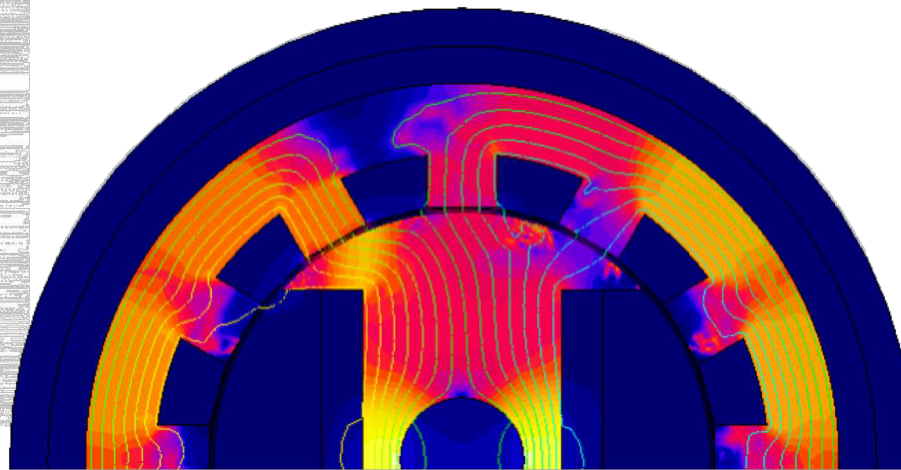
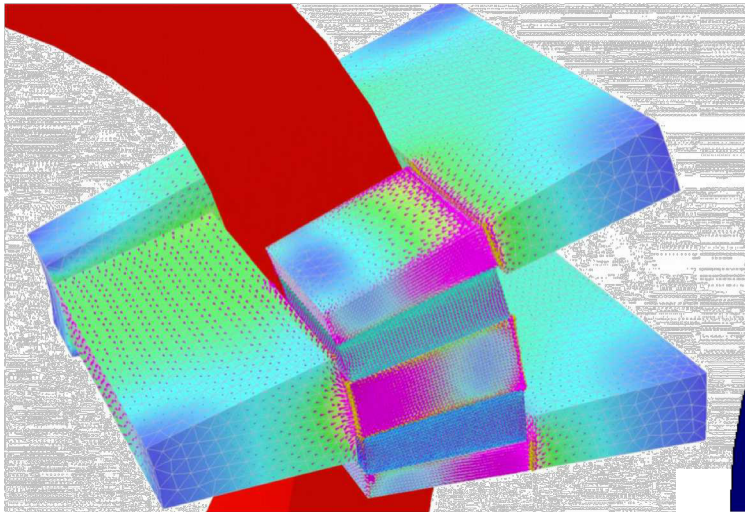
Vorlesung

Elektrische und magnetische Felder (EMF)

SS 2019

Kapitel 5: Stationäre Magnetfelder

Elektrotechnisches Institut (ETI)



Gliederung

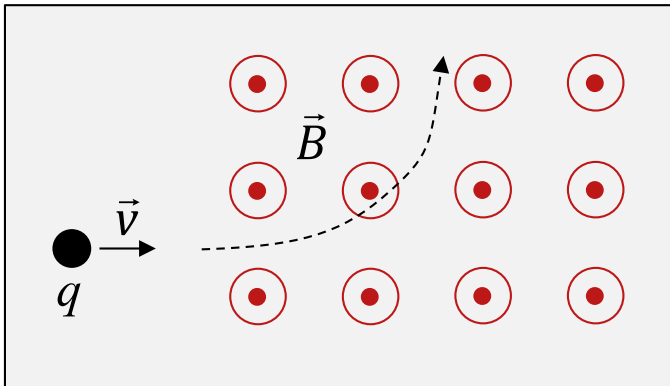
1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter
2. H - und B -Materialgleichungen
3. Ferromagnete
4. Übergänge an Grenzflächen
5. Magnetische Grenzflächenkräfte
6. Durchflutungsgesetz und Symmetrie
7. Berechnung von H in verschiedenen Spulenkonfigurationen
8. Vektorpotential A
9. Biot-Savart Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrien
10. Magnetischer Dipol

1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter I

Magnetische Flussdichte B

Definiert durch Kraft
auf bewegte Ladung q

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$



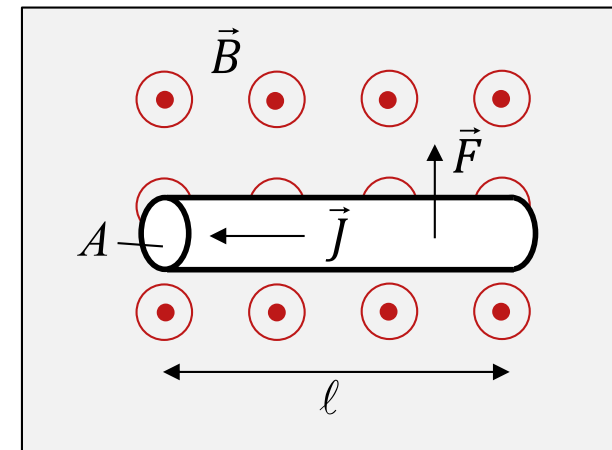
Ursprünglich definiert durch Kraft auf Leiter,
durchflossen vom Strom I (Lorentzkraft)

$$\vec{F} = \ell \cdot A \cdot (\vec{J} \times \vec{B})$$

$$\begin{aligned} &= \ell \cdot A \cdot \rho_{el} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= \ell \cdot A \cdot \frac{q}{\ell \cdot A} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned}$$

$\leftrightarrow$

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{\ell} \times \vec{B})$$



$$[\vec{B}] = \frac{\text{Ns}}{\text{As} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}^2} = \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{T}$$

Tesla; Magnetfeld der Erde rund $50 \mu\text{T}$

1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter II

Stationäre magnetische Flussdichte $\vec{B}$

erzeugt durch alle Ströme (frei und gebunden)

Maxwell:

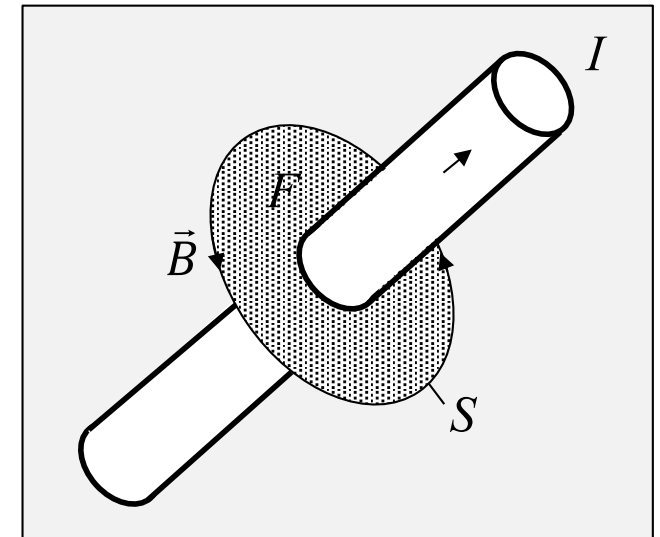
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$\partial/\partial t = 0 \rightarrow$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Leftrightarrow \iint_F \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

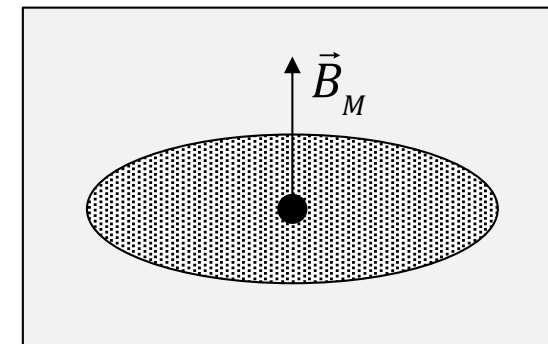
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{A} \cdot \text{m}}$$

Permeabilitätskonstante des Vakuums



Magnetisierung $\vec{B}_M$

erzeugt durch den gemittelten, summierten Betrag aller atomaren Kreisströme der um Atomkerne kreisenden Elektronen (Elektronenspin)
= **Ferromagnetismus** (Eisen, Permanentmagnete)

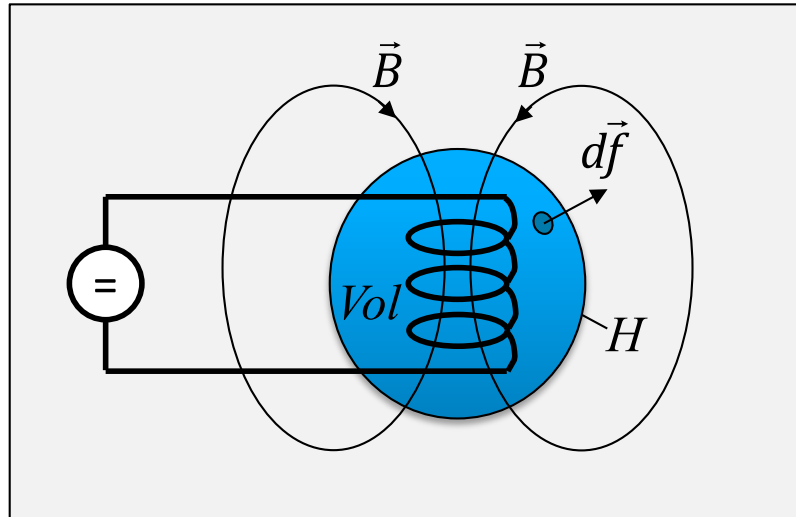


Mikroskopischer Beitrag der Magnetisierung

1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter III

Quellenfreiheit des Magnetfeldes

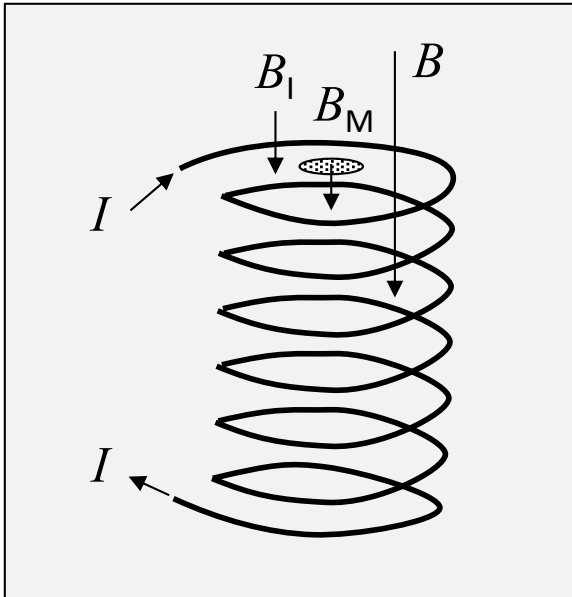
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad \rightarrow \quad \iiint_{Vol} \operatorname{div} \vec{B} dv = \oiint_H \vec{B} d\vec{f} = 0$$



- Durch die Hüllfläche H eines Volumens Vol gehen genauso viele Feldlinien des Magnetfeldes B hinein wie heraus – die Bilanz ist Null.
- Magnetische Feldlinien haben keinen Anfang und kein Ende – sie sind immer geschlossen.
- Magnete treten immer paarweise als Nord- und Südpol auf. Es gibt keine magnetischen Unipole und keine magnetischen Elementarladungen.

1. Kräfte auf bewegte Ladungen und stromdurchflossene Leiter IV

Zusammenspiel von freien Strömen (Leiter) und atomaren Kreisströmen (in ferromagnetischen Materialien)



Die Überlagerung

- des durch freie Ströme I erzeugten Feldes B_I
 - und der durch gebundene atomare Kreisströme erzeugten Magnetisierung B_M (bzw. M)
- liefert das effektiv messbare Gesamtfeld:

$$\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M$$

Die gemeinsame Wirkung äußerer, freier Ströme und atomarer, gebundener Kreisströme ergibt das messbare Gesamtfeld.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen I

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M} \quad \text{Materialgleichung, allgemein gültig,} \\ \text{nicht zwingend linear}$$

Im Falle einer linearen Abhängigkeit von B_M und B gilt:

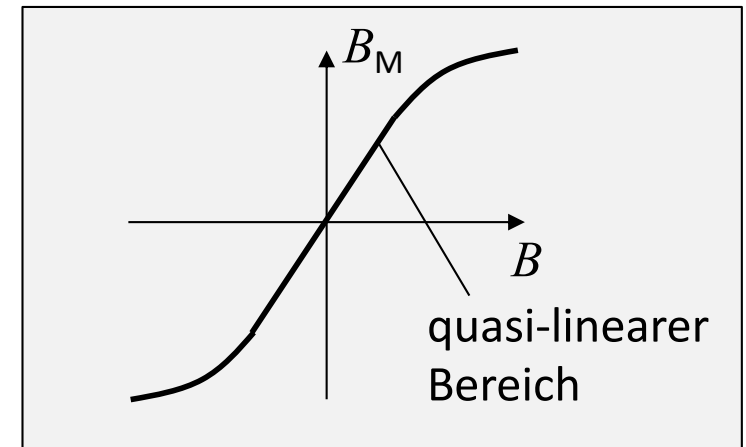
$$\vec{B}_M = \chi_B \vec{B} \quad \text{Proportionalitätskonstante } \chi_B \\ \text{(experimentell bestimmt)}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \vec{B}_I + \chi_B \vec{B}$$

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{1}{1 - \chi_B} \vec{B}_I \quad \text{mit} \quad \mu_r \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{1}{1 - \chi_B} \quad \rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \mu_r \vec{B}_I}$$

Die **magnetische Suszeptibilität** χ (chi, von lateinisch susceptibilitas „Übernahmefähigkeit“) ist eine einheitenlose physikalische Größe, die die Magnetisierbarkeit von Materie in einem externen Magnetfeld angibt.

Ferromagnetisches Material



2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen II

Zusammenhang der Größen H , M mit B_I , B_M und B

Historisch: Magnetische Feldstärke H und Magnetisierung M

$$\vec{H} \stackrel{Def}{=} \frac{\vec{B}_I}{\mu_0}$$

$$\vec{M} \stackrel{Def}{=} \frac{\vec{B}_M}{\mu_0}$$

mit $\vec{B} = \vec{B}_I + \vec{B}_M$ ergibt sich die bekannte Schreibweise der Materialgleichung $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$

Im Falle eines linearen Zusammenhangs zwischen B_M und B mit $\vec{B} = \mu_r \vec{B}_I$ ergibt sich daraus die ebenfalls bekannte Schreibweise

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{H}$$

analog zu elektrischen Kreisen $I = 1 / R \cdot U$

$$[H] = \text{A/m}$$

Die magnetische Feldstärke H ist die Ursache für die Entstehung eines magnetischen Flusses B (ähnlich wie die Spannung U die Ursache für den Stromfluss I in einem Leiter ist).

Der Term $1/(\mu_r \mu_0)$ wird daher auch als **magnetischer Widerstand** bezeichnet.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen III

Wie kann man die Bestimmung der atomaren Ringströme in ferromagnetischen Materialien umgehen (praktisch sowieso unmöglich) und anstelle dessen den einfach messbaren Zusammenhang zwischen B und H nutzen?

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{\text{frei}} + \vec{J}_{\text{Atom}}) = \vec{B}_I + \vec{B}_M = ?$$

J_{frei} = freie Ströme ungebundener Ladungen

J_{atom} = Kreisströme innerhalb von Atomen

(Drehung der Elektronen – Elektronenspin)

Superposition: $\text{rot } \vec{B}_I = \mu_0 \vec{J}_{\text{frei}}$

$$\text{rot } \vec{B}_M = \mu_0 \vec{J}_{\text{Atom}}$$

J_{frei} ist bekannt aus dem Strom in den Leitern, damit lässt sich B_I berechnen.

$\vec{B} = \mu_r \vec{B}_I$, wobei μ_r den Anteil von B_M am Gesamtfeld beinhaltet.

Mit der Definition $\vec{H} = \vec{B}_I / \mu_0$ ergibt sich:

$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{frei}}} \quad \leftrightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{H}}$$

Zur Berechnung von B sind jetzt nur noch freie Ströme und der Verlauf von μ_r erforderlich, aber keine atomaren Ringströme mehr.

2. Zusammenhang zwischen H - und B -Materialgleichungen IV

Magnetische Polarisation $\vec{J}$

Die magnetische Polarisation kennzeichnet die magnetische Flussdichte innerhalb eines Magnetwerkstoffs abzüglich des Anteils des magnetischen Feldes im Vakuum. Sie wird daher auch als intrinsische magnetische Flussdichte bezeichnet.

$$\overset{Def}{\vec{J}} = \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_M$$

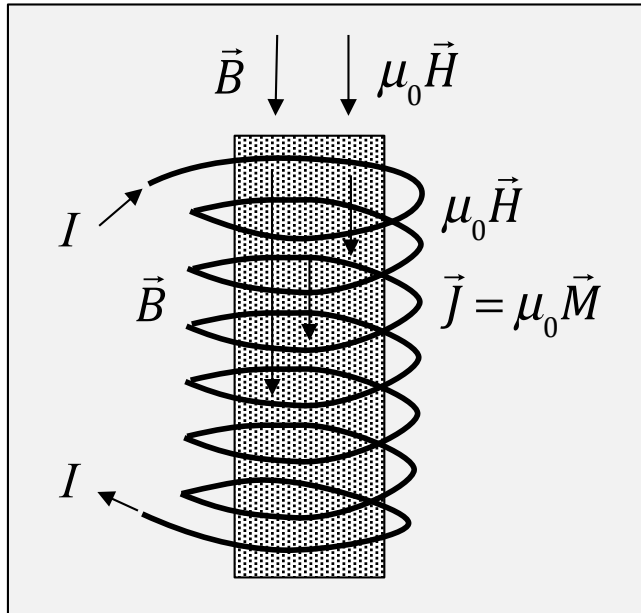
$$\rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J}$$

Achtung: Die Polarisation $\vec{J}$ ist nicht mit der Stromdichte (J_{frei} und J_{atom}) zu verwechseln, auch wenn die gebräuchlichen Symbole leider gleich sind!

Es gilt $[J] = [B] = \text{Vs} / \text{m}^2 = \text{Tesla}$
 $[J_{\text{frei}}] = [J_{\text{Atom}}] = \text{A} / \text{m}^2$

3. Ferromagnete I

Starke magnetische Momente mit starker Kopplung



Spontane Magnetisierung großer Bereiche unterhalb T_C (Curie Temperatur)

Ungerade Elektronenzahl, überschüssiges „d-Elektron“:
Cr, Mn, Fe, Co, Ni, ...

Magnetit Fe_3O_4 , Neodym-Eisen-Bor NdFeB,
Samarium-Cobalt SmCo_5 und $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$

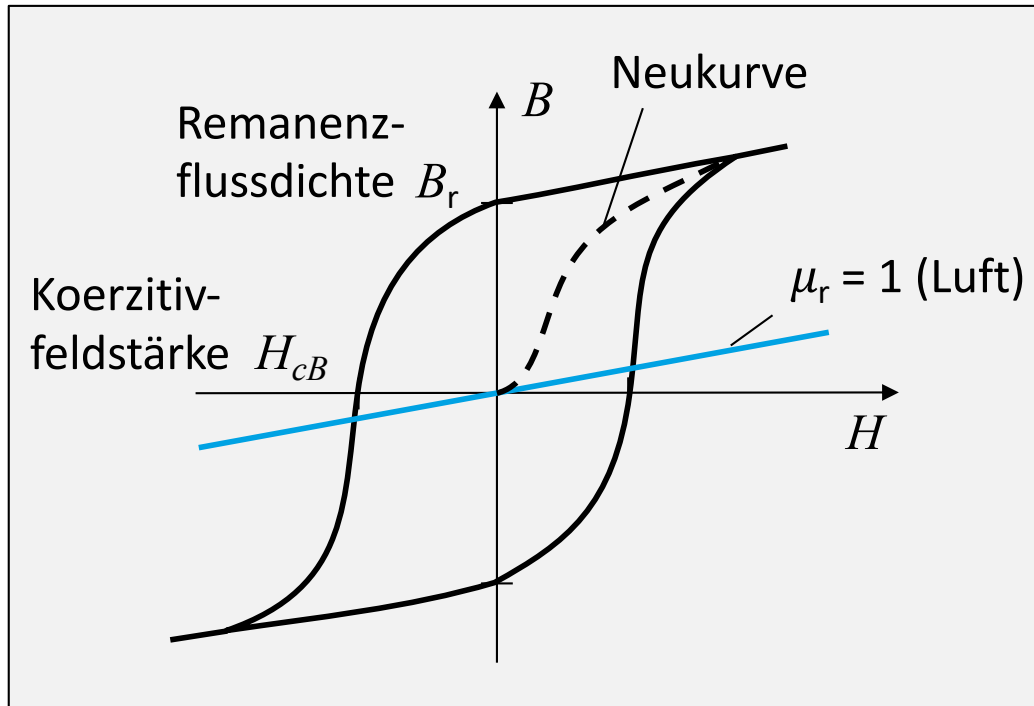
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

└─ Durch Spulenstrom I erzeugt (kann auch Null sein)

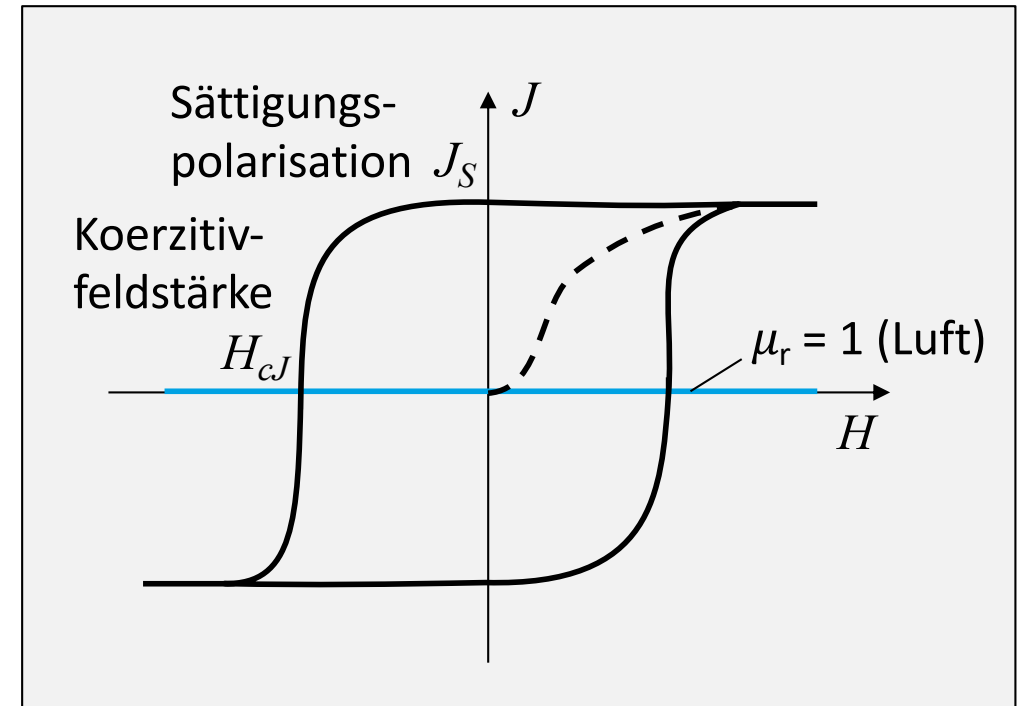
Der Magnetisierungsvektor $\vec{M}$ kennzeichnet den Zustand der Materie.

3. Ferromagnete II

Hysteresekurven $B = f(H)$ und $J = f(H)$



Die Neukurve wird nur beim allerersten Aufmagnetisieren aus dem magnetisch neutralen Zustand durchlaufen.

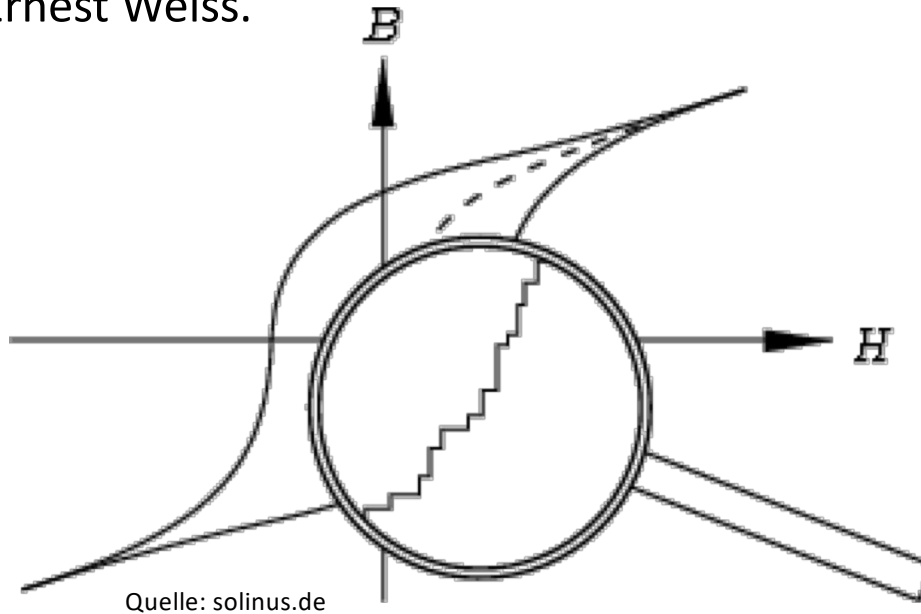


Bei ferromagnetischen Werkstoffen ist $J_S = B_r$ und $H_{cJ} > H_{cB}$

Ablauf der Ummagnetisierungsvorgänge

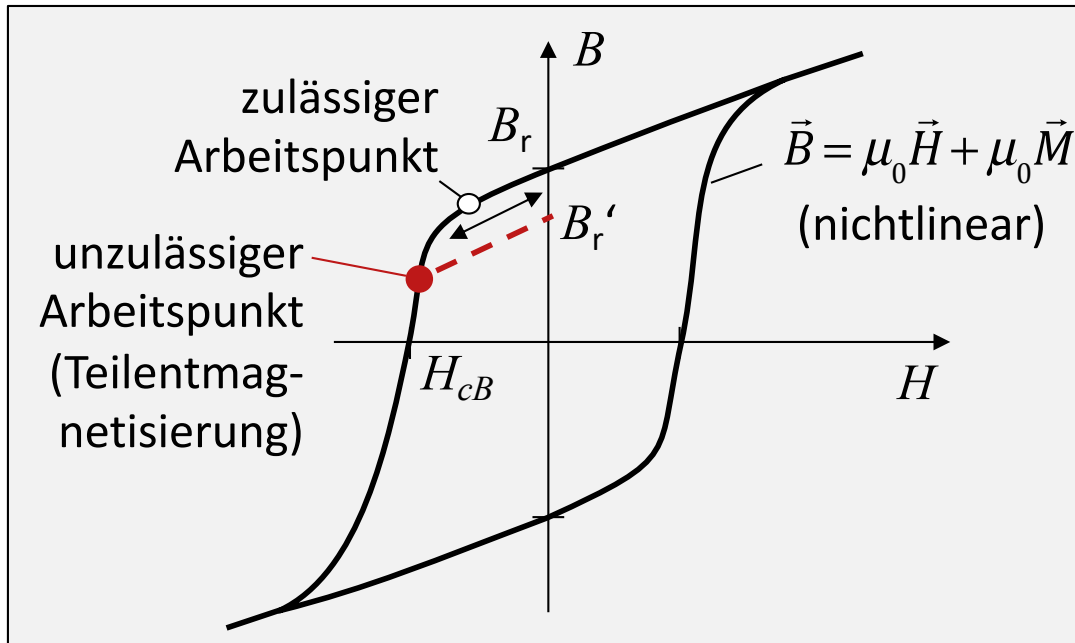
Die Hysteresekurve entsteht, wenn sich mehr und mehr Elektronen unter dem Einfluss des äußeren Magnetfeldes ausrichten. Sind alle Elektronen ausgerichtet, so ist Sättigung erreicht. Jedoch verläuft die Hysteresekurve nicht stetig, sondern sie ist eine Treppenfunktion: Das Umklappen der Elektronenspins geschieht sprunghaft. Dieses Verhalten wurde erstmals 1919 von Heinrich Barkhausen festgestellt, indem er die sprunghaften Ummagnetisierungen mit Hilfe einer Induktionsspule und eines Verstärkers als Knacken hörbar machte.

Das Umklappen der Elektronenspins erfolgt auch nicht individuell. Vielmehr ändern sich immer größere Gruppen zusammen – weissche Bezirke (10 μm bis 1 mm Ausdehnung). Entdeckt 1907 durch Pierre-Ernest Weiss.

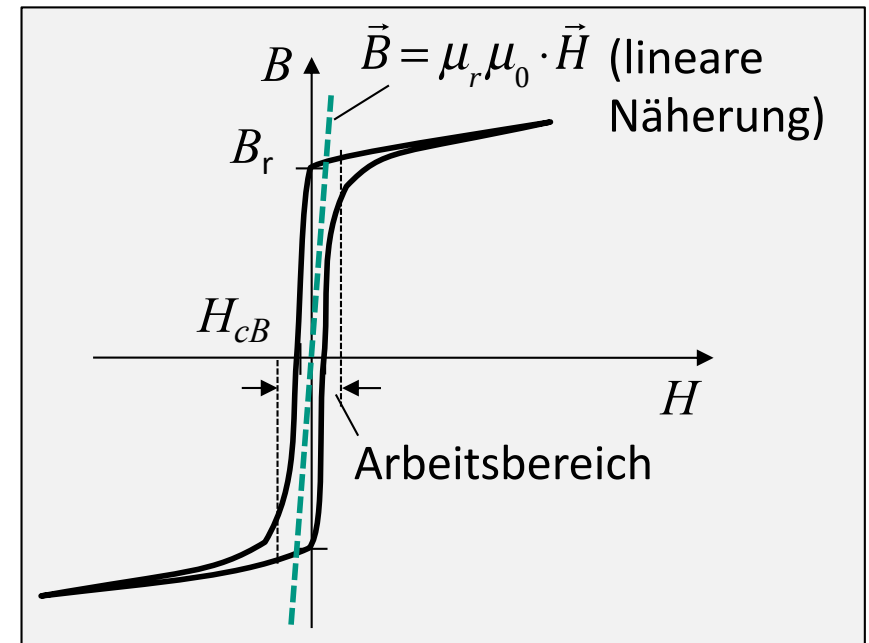


3. Ferromagnete IV

Hartmagnete (Permanentmagnete)



Weichmagnete (Elektroblech)



- Die Fläche unter der Hystereseschleife entspricht den Verlusten beim Ummagnetisieren.
- Hartmagnete werden einmalig aufmagnetisiert (1. Quadrant, sehr starker Stromstoß) und danach nur noch im 4. Quadranten betrieben (quasistationärer Arbeitspunkt), z.B. im Rotor von Elektromotoren. Wichtig ist, dass dieser Arbeitspunkt immer im linearen Teil der Kennlinie bleibt, sonst ergibt sich ein neues B_r' und damit Teilentmagnetisierung (Rotor defekt!).
- Die Hysteresekurve von Weichmagneten wird kontinuierlich mit der Frequenz des Stromes durchlaufen (z.B. 50 Hz bei Transformatoren und Statoren von Elektromotoren).

3. Ferromagnete V

Allgemein: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ und auch $\vec{B} = \mu_r \mu_0 \cdot \vec{H}$

Offenbar ist: $\mu = \mu_0 \cdot \left(1 + \frac{\vec{M}}{\vec{H}}\right)$

Man bezeichnet $\frac{|\vec{M}|}{|\vec{H}|} = \chi$ als magnetische Suszeptibilität $\chi = \mu_r - 1$

In isotropen Medien (weichmagnetisches Material) haben M und H die gleiche Richtung, so dass μ ein Skalar ist. Es genügt dann die Darstellung $\vec{B} = \mu \vec{H}$

In anisotropen Medien (hartmagnetisches Material) haben M und H nicht die gleiche Richtung und μ wird ein Tensor: $||\mu|| = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}$

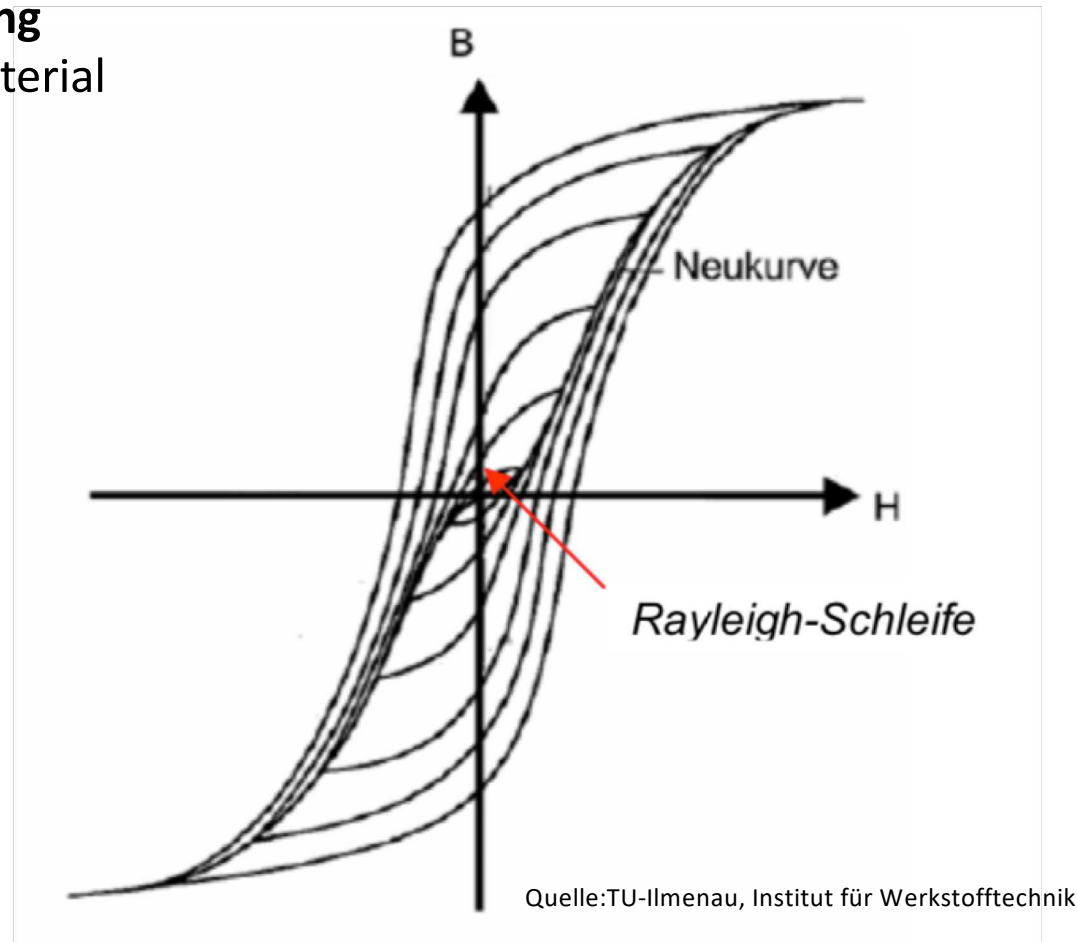
Grundsätzlich gilt: $\text{div } \vec{H} = -\text{div } \vec{M}$

Die H -Feldlinien beginnen also dort, wo die M -Feldlinien enden und umgekehrt. Im Inneren des Hartmagneten gibt es nur ein M -Feld und kein H -Feld, im Äußeren ist es umgekehrt.

3. Ferromagnete VI

Zyklische Magnetisierung

Weichmagnetisches Material

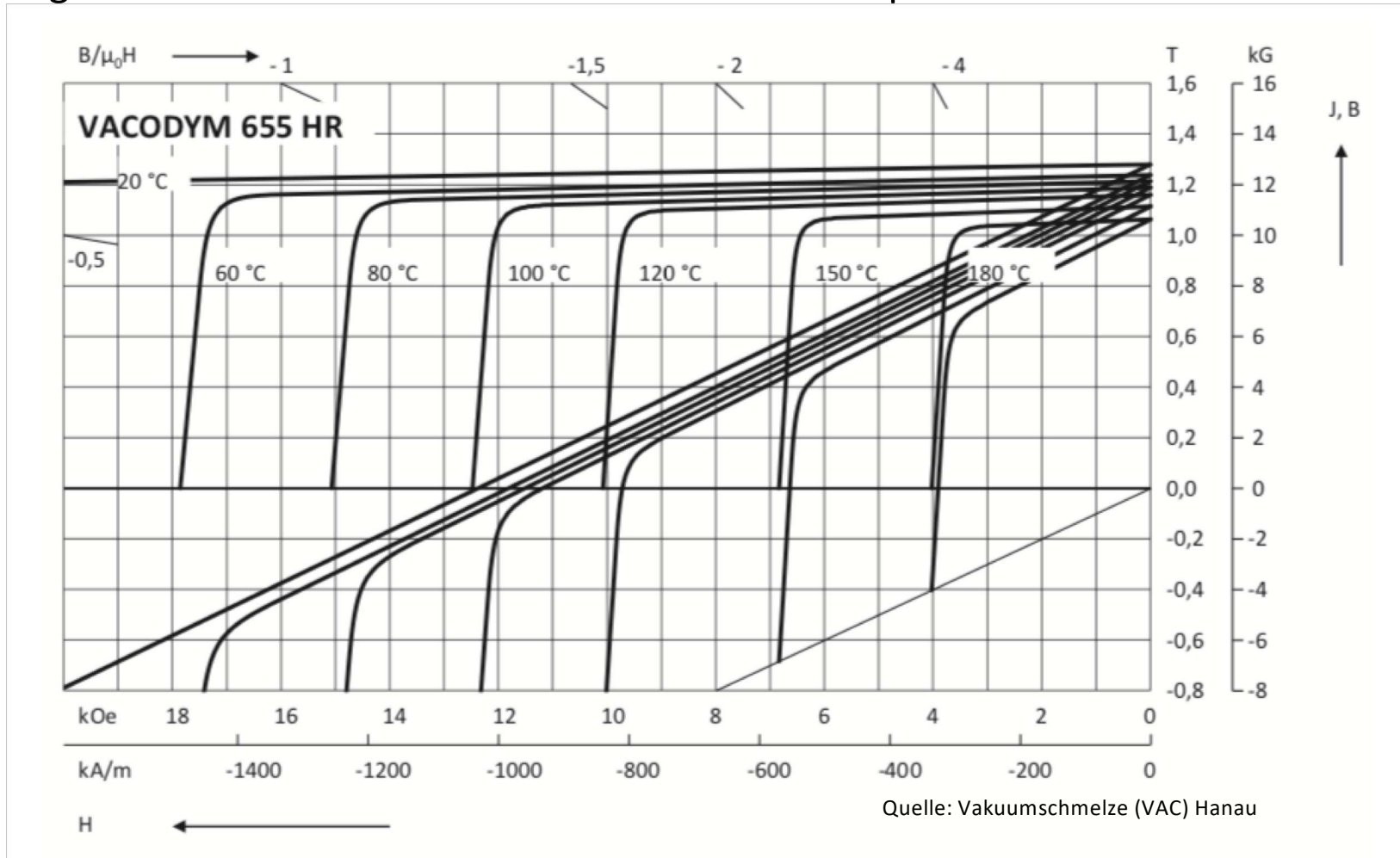


Je nach Aussteuerung (H -Feld = Spulenstrom), ergeben sich unterschiedliche Hystereseschleifen. Die volle Remanenzflussdichte und Koerzitivfeldstärke erhält man nur, wenn das H -Feld ausreichend groß gemacht wird, um das Material in die Sättigung zu treiben. Das ist vor allem beim Aufmagnetisieren von Hartmagneten wichtig.

3. Ferromagnete VII

Typische Entmagnetisierungskurven $B(H)$ und $J(H)$

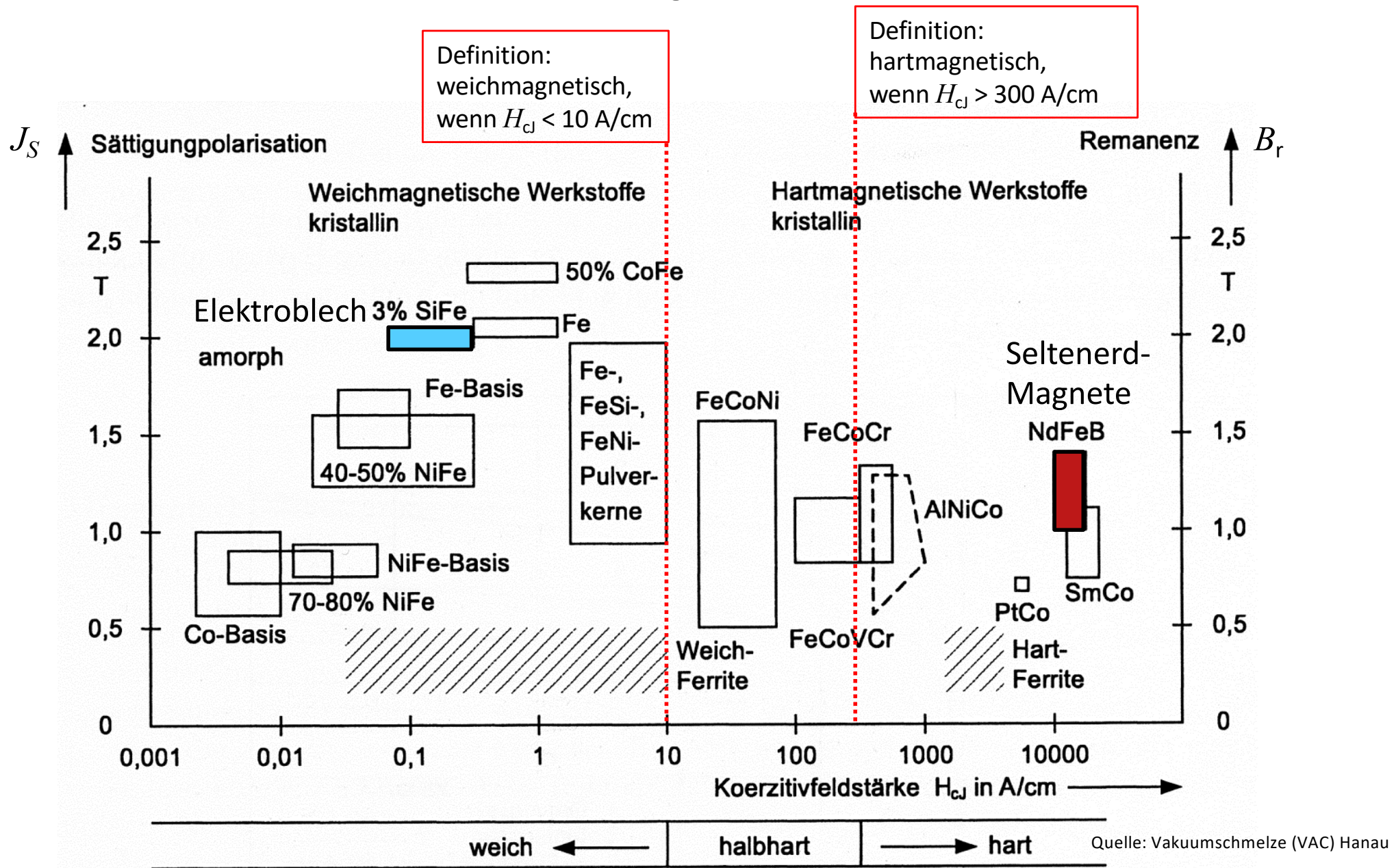
eines hartmagnetischen Materials bei unterschiedlichen Temperaturen.



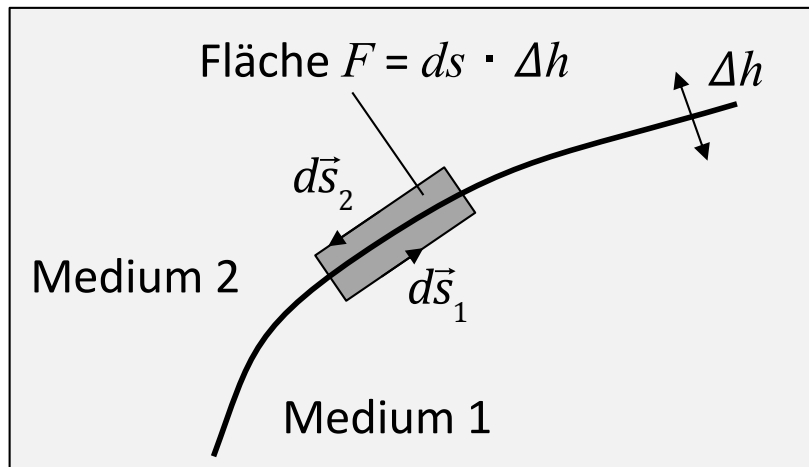
Oe = Oersted (alte Einheit für magnetische Feldstärke), es gilt: $1 \text{ Oe} = 1 \text{ A/m}$

G = Gauß (alte Einheit für magnetische Flussdichte), es gilt: $10.000 \text{ G} = 1 \text{ T}$

3. Ferromagnete VIII



4. Übergänge an Grenzflächen I



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{f} \quad \text{Stationärer Fall}$$

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$; keine Oberflächenströme

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \vec{H}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \vec{H}_1 \cdot d\vec{s}_1 = \iint_{H \rightarrow 0} \vec{J} \cdot d\vec{f} = 0$$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten:

$$\vec{H}_i = \vec{H}_{ti} \vec{e}_t + \vec{H}_{ni} \vec{e}_n \quad i=1,2$$

Wegelemente $d\vec{s}_1$ und $d\vec{s}_2$:

$$d\vec{s}_1 = ds \cdot \vec{e}_t$$

$$d\vec{s}_2 = ds \cdot (-\vec{e}_t)$$

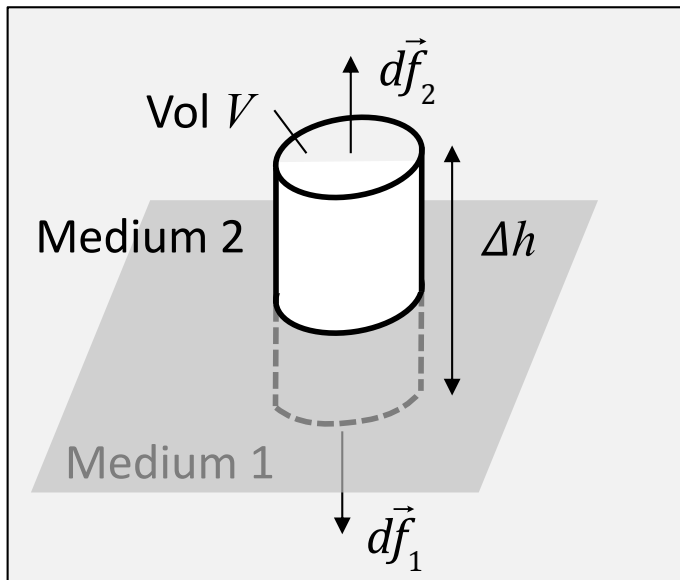
$$\vec{H}_1 \cdot d\vec{s}_1 = (H_{t1} \vec{e}_t + \vec{H}_{n1} \vec{e}_n) \cdot ds \cdot \vec{e}_t = H_{t1} ds$$

$$\vec{H}_2 \cdot d\vec{s}_2 = -H_{t2} \cdot ds$$

$$H_{t1} \cdot ds - H_{t2} ds = 0 \quad \rightarrow \quad H_{t1} = H_{t2}$$

Die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke ist (bei Abwesenheit von Oberflächenströmen) stetig.

4. Übergänge an Grenzflächen II



$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{f} = 0$$

Grenzübergang $\Delta h \rightarrow 0$

Aufteilung in Tangential- und Normalkomponenten: $\vec{B}_i = B_{ti} \vec{e}_t + B_{ni} \vec{e}_n \quad i = 1, 2$

Oberflächenelemente $d\vec{f}$:

Oben: $d\vec{f} = df \cdot \vec{e}_n$

Unten: $d\vec{f} = df \cdot (-\vec{e}_n)$

Rand: $\Delta h \rightarrow 0 \rightarrow F_{rand} = 0$

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{f} = B_{n2} df - B_{n1} df = 0 \quad \rightarrow$$

$$B_{n1} = B_{n2}$$

Die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte ist an Grenzflächen stetig.

4. Übergänge an Grenzflächen III

Voraussetzungen: Linearer Zusammenhang von B und H ($B = \mu_0 \mu_r H$), keine Oberflächenströme

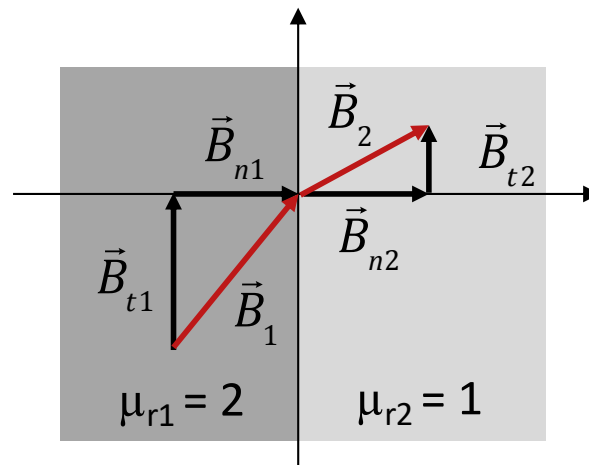
Dann gilt:

$$B_{n2} = B_{n1}$$

$$H_{t2} = H_{t1}$$

$$\frac{B_{t2}}{\mu_{r2}} = \frac{B_{t1}}{\mu_{r1}}$$

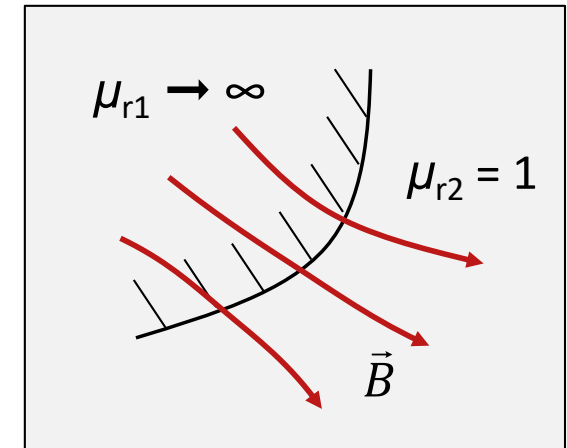
$$B_{t2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \cdot B_{t1}$$



5. Magnetische Grenzflächenkräfte

Andere Namen: Reluktanzkräfte, Maxwell'sche Kräfte

Beim Übergang zwischen Medien mit unterschiedlichem μ entstehen an der Grenzfläche Zugkräfte, die immer senkrecht (normal) zur Fläche gerichtet sind.



Ganz allgemein gilt:
$$\vec{F} = -\frac{1}{2} \iiint \vec{H}^2 \cdot \text{grad} \mu \cdot dv$$

Man erhält die Zugspannung aus:
$$\sigma_n = \frac{1}{2} (\mu_2 - \mu_1) \left(H_{t1}^2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} H_{n1}^2 \right)$$

Und die Kraft:

$$\vec{F} = A \cdot \sigma_n \cdot \vec{e}_n$$

Darin ist A die Fläche, aus der die Feldlinien austreten.

Im häufigen Sonderfall mit $\mu_{r1} \rightarrow \infty$ und $\mu_{r2} = 1$ ergibt sich:
(Übergang Eisen zu Luft)

$$\vec{F} \cong \frac{B_n^2}{2\mu_0} \cdot A \cdot \vec{e}_n$$

Praxis: Die höchsten Flussdichten in Elektroblech sind etwa 2 Vs/m^2 . Daher beträgt die höchste magnetische Zugspannung $\sigma_n = 1,6 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, was einem Gewicht von rund 160 t pro Quadratmeter entspricht. In eisenlosen Anwendungen (MRT, CERN) sind weit höhere magnetische Flussdichten möglich.

6. Durchflutungsgesetz und Symmetrie

Beispiel: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters

$$\vec{J} = 0 \cdot \vec{e}_r + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + J_z \cdot \vec{e}_z$$

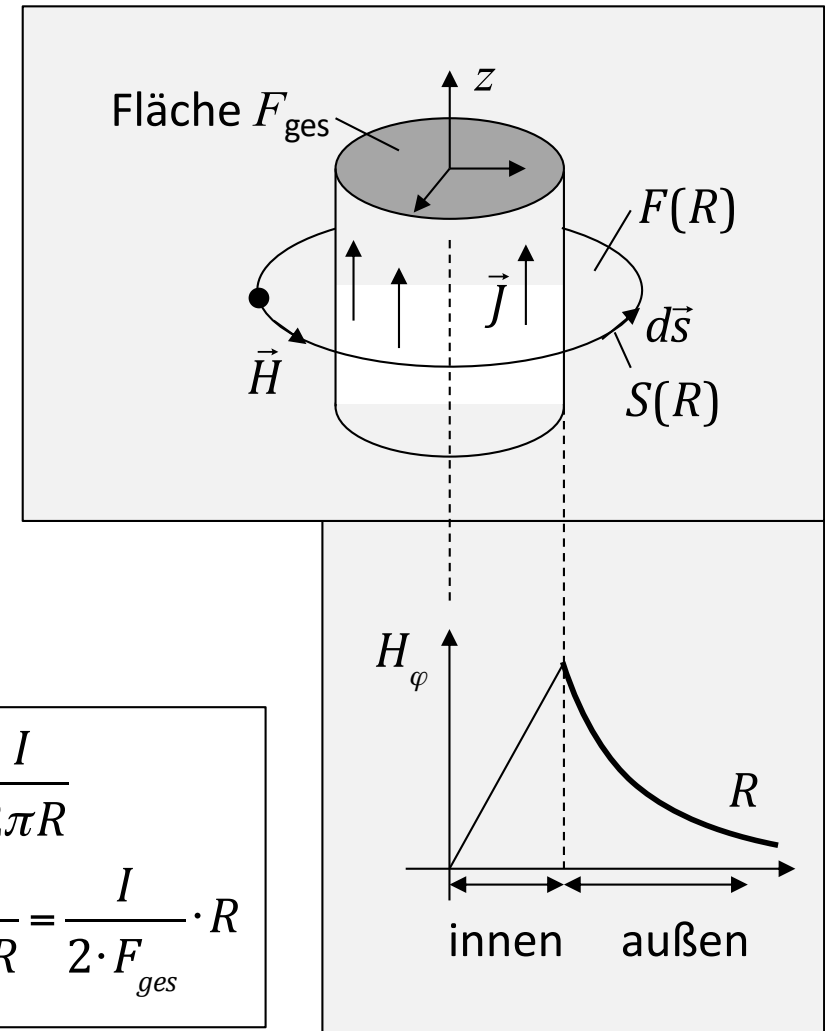
$$\text{Symmetrie} \rightarrow \vec{H} = H_\varphi(R) \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\oint_{S(R)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_{F(R)} \vec{J} \cdot d\vec{f} \quad \text{Maxwell}$$

$$\begin{aligned} \oint_{S(R)} \vec{H} \cdot d\vec{s} &= \oint_{S(R)} (H_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot (R \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \\ &= \oint_{S(R)} H_\varphi(R) \cdot R \cdot d\varphi = 2\pi \cdot H_\varphi(R) \cdot R \end{aligned}$$

$$\text{Außen: } \iint_{F(R)} \vec{J} \cdot d\vec{f} = I \rightarrow 2\pi H_{\varphi a}(R) \cdot R \rightarrow 2\pi H_{\varphi a}(R) = \frac{I}{2\pi R}$$

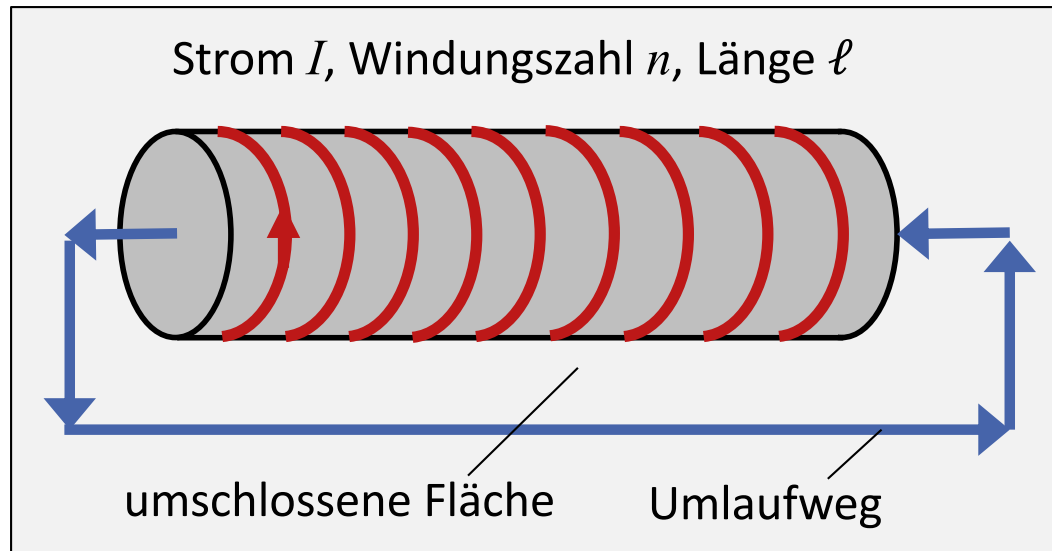
$$\text{Innen: } \iint_{F(R)} \vec{J} \cdot d\vec{f} = \frac{I}{F_{\text{ges}}} \cdot \pi \cdot R^2 \rightarrow 2\pi H_{\varphi i}(R) = \frac{I \cdot \pi \cdot R^2}{2 \cdot F_{\text{ges}} \cdot 2\pi R} = \frac{I}{2 \cdot F_{\text{ges}}} \cdot R$$



7. Berechnung von H in verschiedenen Spulenkonfigurationen

Beispiel: Lange Spule

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{f}$$



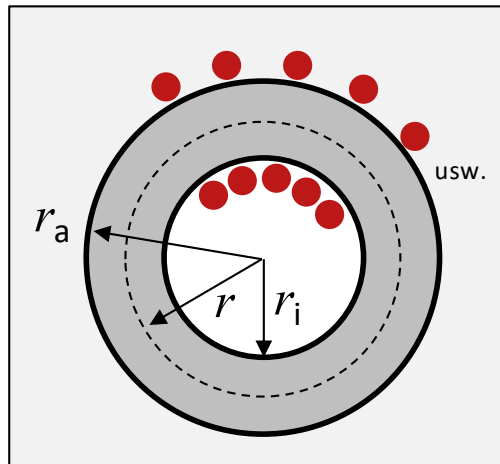
Näherungen:

- Inneres Feld ist homogen
 $\rightarrow H_{\text{innen}} = \text{const.}$
- Äußeres Feld ist Null
 $\rightarrow H_{\text{außen}} = 0$

$$\rightarrow H \cdot \ell \cong n \cdot I$$

$$\rightarrow H_z = \frac{n \cdot I}{\ell}$$

Beispiel: Toroidspule



In der Zentralebene $r_i < r < r_a$:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_\varphi(r) \cdot 2\pi r = n \cdot I$$

$$H_\varphi(r) = \frac{n \cdot I}{2\pi r}$$

Innen $0 < r < r_i$ und außen $r < r_a$:

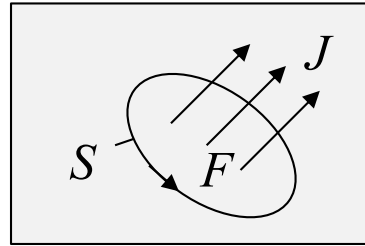
$$H_\varphi = 0$$

8. Vektorpotential I

Ziel: Berechnung von H aus J

1. Versuch mit Integralform

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

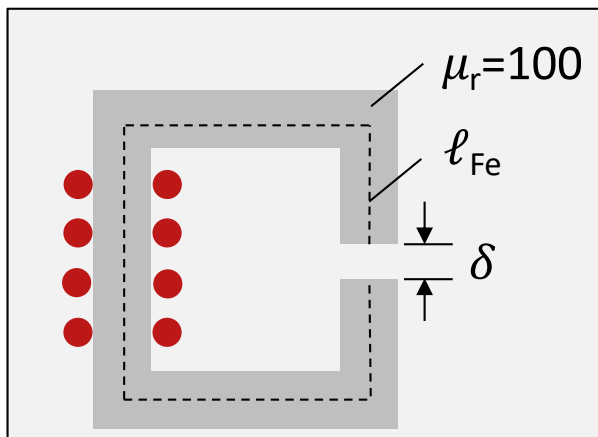


Wenn $H = \text{konstant}$ ist: $H_\varphi \cdot \oint_S d\vec{s} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f} \rightarrow H_\varphi = \frac{\iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f}}{\oint_S d\vec{s}}$

Aber wenn H beliebig und nicht konstant ist, funktioniert das so nicht!

Hier kann man sich oft behelfen, wenn H zumindest **abschnittsweise konstant** ist.

Beispiel: Spule um Eisenkern mit Luftspalt



Maxwell: $\text{div } \vec{B} = 0$

$$\rightarrow B_{Fe} = B_\delta$$

$$\rightarrow \mu_0 \mu_r H_{Fe} = \mu_0 H_\delta$$

$$\oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} + H_\delta \cdot \delta = n \cdot I$$

$$\rightarrow H_{Fe} \cdot \ell_{Fe} + \mu_r H_{Fe} \cdot \delta = n \cdot I$$

$$\rightarrow H_{Fe} = \frac{n \cdot I}{\ell_{Fe} + \mu_r \cdot \delta}$$

$$H_\delta = \frac{n \cdot I}{\ell_{Fe} / \mu_r + \delta}$$

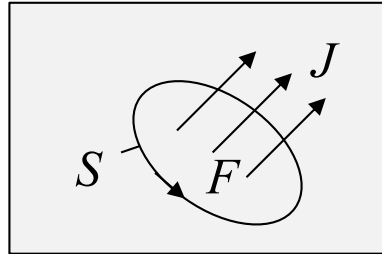
$$\begin{aligned} H_\delta &= \text{const.} \\ H_{Fe} &= \text{const.} \end{aligned}$$

Im ganz allgemeinen Fall gelingt die Lösung mit der Integralform aber nicht.

8. Vektorpotential II

Ziel: Berechnung von H aus J

2. Versuch mit differentieller Form



$$\boxed{\text{rot } \vec{H} = \vec{J}} \quad \leftrightarrow \quad \iint_F \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{f} = \oint_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{f}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = J_x$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = J_y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = J_z$$

- Gekoppeltes System partieller DGLn
- Keine analytische Lösung bekannt
- Numerisch schwierig

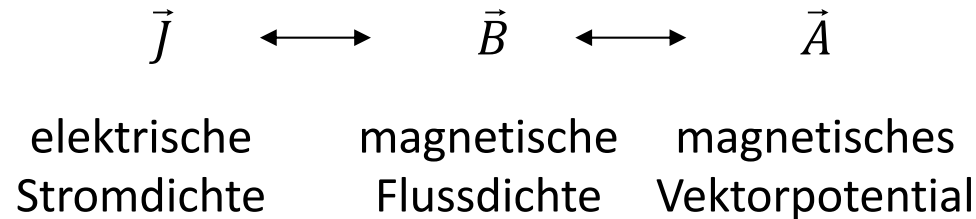


Einführung des
**magnetischen
Vektorpotentials A**

Analog zum
**elektrostatischen
Potential Φ**

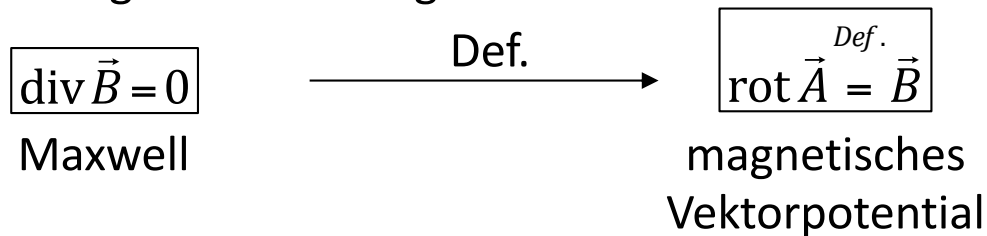
8. Vektorpotential III

Weiterhin bleibt das Ziel die Verknüpfung von Magnetfeld und Strömen



Stationäre Verhältnisse ($\partial/\partial t=0$):

Für das magnetische Feld gilt:



Die Definition ist erlaubt, da immer gilt: $\operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0$ für beliebige Vektorfunktionen A

8.1 Vektorpotential – Coulomb-Eichung I

Definition:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

vergleiche:

$$\vec{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$E_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$\text{div } \vec{B} = \text{div}(\text{rot } \vec{A}) \equiv 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot}(\text{grad } \Phi) \equiv 0$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Psi$$

$$\text{rot } \vec{A}' = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

beliebige Eichung von $\vec{A}$

$$\Phi' = \Phi + C$$

$$\text{grad } \Phi' = \text{grad } \Phi$$

beliebige Lage des Nullpunktes von Φ

$$\text{Coulomb Eichung: } \text{div } \vec{A} = 0$$

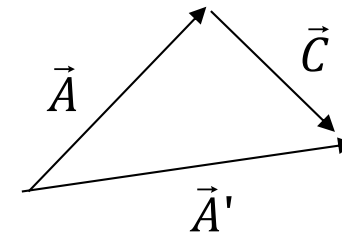
8.1 Vektorpotential – Coulomb-Eichung II

Beweis für Coulomb Eichung

Es besteht der Freiheitsgrad der Hinzufügung einer Integrationskonstanten, da die physikalisch reale magnetische Flussdichte B durch Differenzieren (Rotationsbildung) des magnetischen Vektorpotentials beschrieben wird.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$$

Vieldeutigkeit von A : $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{C}(\vec{r})$



mit $\vec{C}(\vec{r}) = \text{grad } \psi(\vec{r})$

↑
beliebige Funktion

Beweis:
$$\begin{aligned}\vec{B}'(\vec{r}) &= \text{rot } \vec{A}'(\vec{r}) \\ &= \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) + \text{rot grad } \psi(\vec{r}) \\ &= \vec{B}(\vec{r})\end{aligned}$$

$\vec{A}(\vec{r})$ repräsentiert das gleiche $\vec{B}(\vec{r})$ wie das mit $\text{grad } \psi(\vec{r})$ modifizierte $\vec{A}'(\vec{r})$

→ $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi$ Freiheitsgrad für ψ frei wählbar

8.1 Vektorpotential – Coulomb-Eichung III

Annahme: $\vec{A}(\vec{r})$ sei so, dass $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = \vec{V}_A(\vec{r}) \neq 0$

Wunsch: $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$

$$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \vec{C}(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \vec{C}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \psi(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \operatorname{div} \vec{A}'(\vec{r}) &= \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{div} \vec{C}(\vec{r}) \\ &= V_A(\vec{r}) + V_C(\vec{r}) \end{aligned} \quad \text{Skalare}$$

$$\rightarrow V_C(\vec{r}) = -V_A(\vec{r})$$

$$\rightarrow \operatorname{div} \vec{C}(\vec{r}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi(\vec{r}) = -V_A(\vec{r})$$

$$\rightarrow \Delta \psi(\vec{r}) = -V_A(\vec{r}) \quad \text{Poisson-Bestimmungsgleichung für } \psi$$

$$\rightarrow \psi(\vec{r}) = \psi_A(\vec{r}) \quad \text{Lösung } \psi_A(r) \text{ der Poisson-DGL}$$

$$\rightarrow \vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \psi_A(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \operatorname{div} \vec{A}'(\vec{r}) &= \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi_A(\vec{r}) \\ &= V_A(\vec{r}) - V_A(\vec{r}) = 0 \end{aligned}$$

Es existiert immer ein $\vec{A}$, das $\vec{B}$ richtig beschreibt, und für das $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ gilt.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}'(\vec{r})$$

$$\operatorname{div} \vec{A}'(\vec{r}) = 0$$

8.1 Vektorpotential – Coulomb-Eichung IV

Unter den vielen möglichen Vektorpotentialen gibt es immer ein $\vec{A}$, das die magnetische Flussdichte $\vec{B}$ richtig beschreibt und für das $\text{div } \vec{A} = 0$ gilt.

Hätte man ein $\vec{A}'$ mit $\text{div } \vec{A}' \neq 0$

so ließe sich ein ψ über $\Delta\psi = \text{div } \vec{A}'$ finden, welches das

richtige $\vec{A}$ mittels $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi$ liefert, für welches $\text{div } \vec{A} = 0$ gilt.

Berechnet man aber $\vec{A}$ aus den Maxwell-Gleichungen, indem man bei der Berechnung $\text{div } \vec{A} = 0$ bereits nutzt, dann erhält man das erwünschte einfachere und auch (siehe oben) erlaubte Ergebnis.

8.1 Vektorpotential – Coulomb-Eichung V

Voraussetzung: Medium linear und isotrop $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Maxwell: } \text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \\ \text{Definition: } \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \cdot \text{rot } \vec{A} \right) = \vec{J} \\ \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) = \mu \cdot \vec{J} \end{array} \right| \begin{array}{l} \mu = \text{stückweise konstant} \\ \text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} \end{array}$$

$\rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}}$

Coulomb-Eichung!

8.2.1 Vektorpotential – Poisson-Gleichung

Voraussetzung: Medium linear und isotrop $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Poisson – Gleichung für das Vektorpotential

In kartesischen
Koordinaten

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} &= -\mu J_x \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} &= -\mu J_y \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} &= -\mu J_z\end{aligned}$$

- 3 ungekoppelte, partielle DGLn
- Poisson Gleichungen
- Analytische Lösung vorhanden:
Coulomb-Integral

8.2.2 Vektorpotential – Coulomb Integral als Lösung der Poisson-Gleichung I

Coulomb-Integral als Lösung der Poisson-Gleichung

Differentialgleichung $\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \cdot \vec{J}(\vec{r})$

Analytische Lösung:

A_x, J_x

A_y, J_y

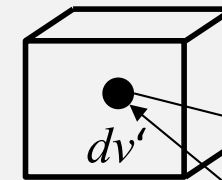
A_z, J_z

$$A_x(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_x(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$
$$A_y(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_y(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$
$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{J_z(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

x, y, z – Komponenten unabhängig voneinander, daher einzeln lösbar

„laufender“ Punkt

$$J_x(\vec{r}') dv'$$



$\vec{r} - \vec{r}'$

Messpunkt

$$A_x(\vec{r}) = ?$$

$\vec{r}'$

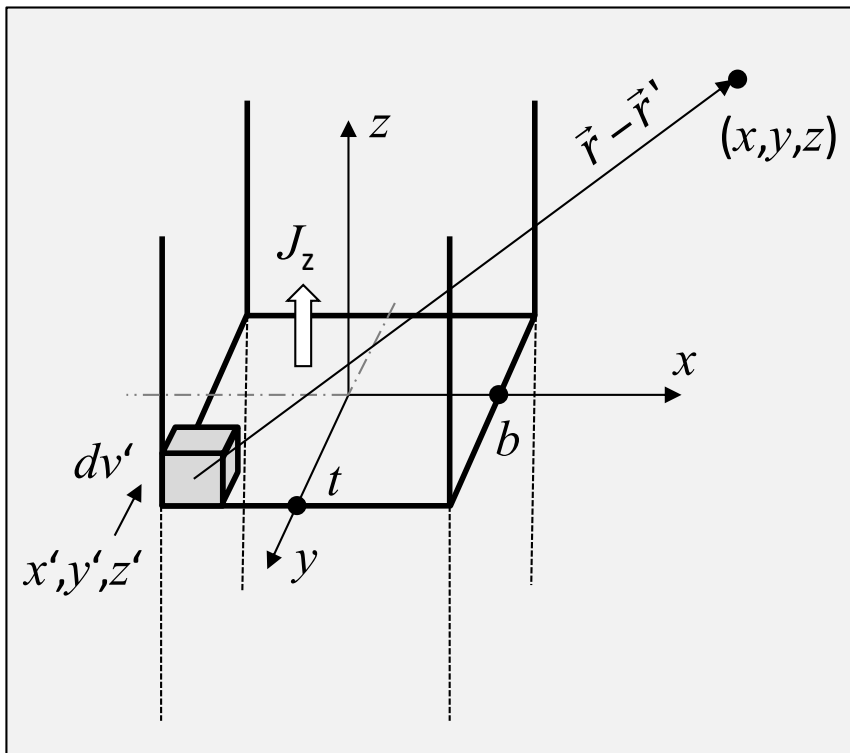
$\vec{r}$

Koordinaten-
ursprung

8.2.2 Vektorpotential – Coulomb Integral als Lösung der Poisson-Gleichung II

Beispiel für
$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Leiter mit rechteckigem Querschnitt, Vektorpotential am Messpunkt P außerhalb des Leiters.



$$J_z = \text{const.}$$

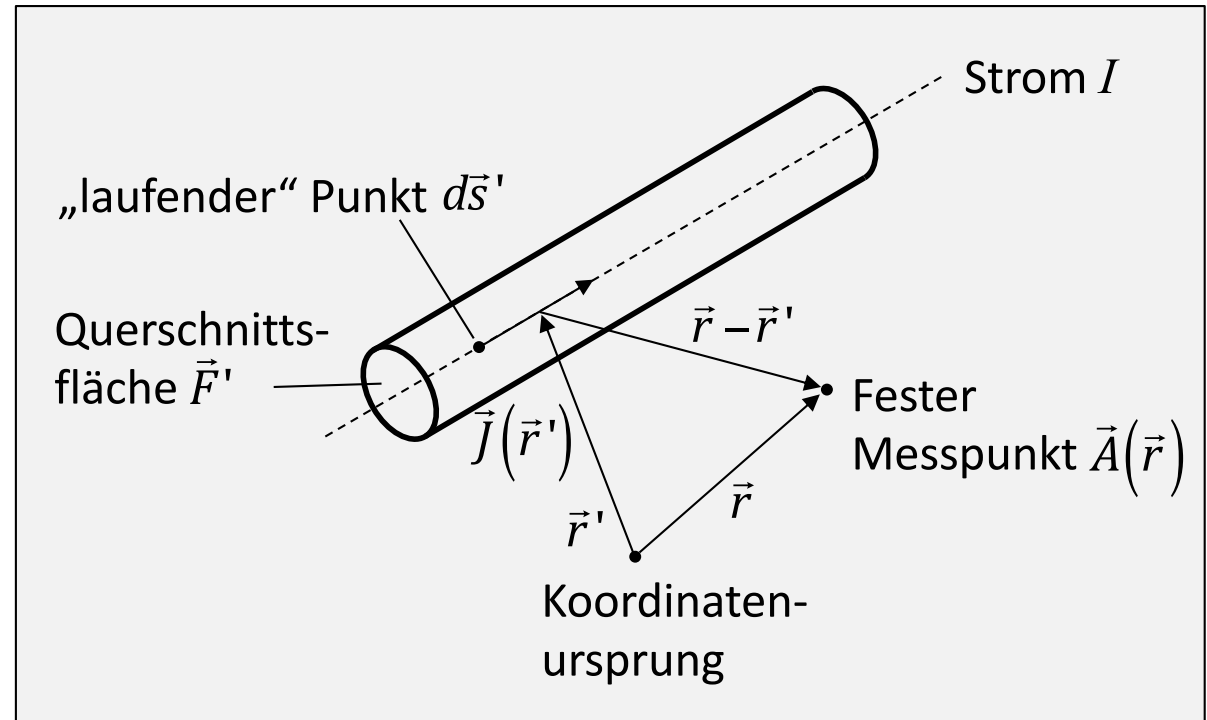
$$A_z(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} J_z \cdot \int_{-b}^b \int_{-t}^t \int_0^h \frac{dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

$$\rightarrow \vec{A} = A_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

Das Integral wird hier nicht weiter aufgelöst.

8.2.2 Vektorpotential – Coulomb Integral als Lösung der Poisson-Gleichung III

Spezialfall: Magnetisches Vektorpotential $\vec{A}$ für dünne Leiter



Für dünne Leiter gilt näherungsweise

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot d\vec{v}' = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{F}' \cdot d\vec{s}' = I \cdot d\vec{s}'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{v}'$$

Allgemeiner Fall

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \iiint_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

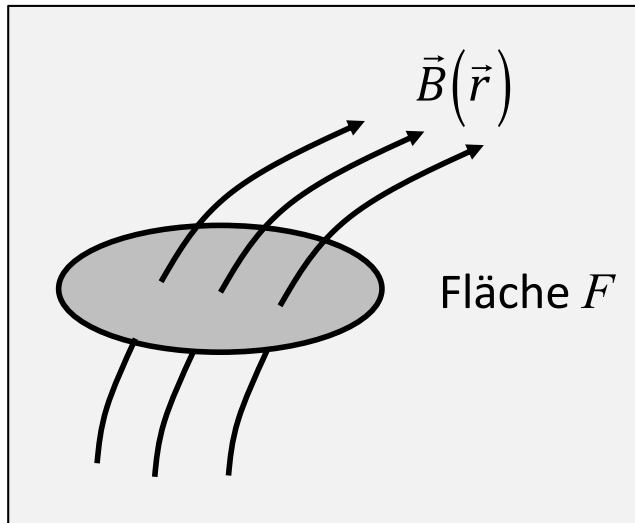
Spezialfall für dünne Leiter

8.2.3 Vektorpotential – Magnetischer Fluss und Vektorpotential I

Definition Magnetischer Fluss

$$\Phi_m = \iint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$$

$$[\Phi_m] = \text{Vs} = \text{Wb (Weber)}$$



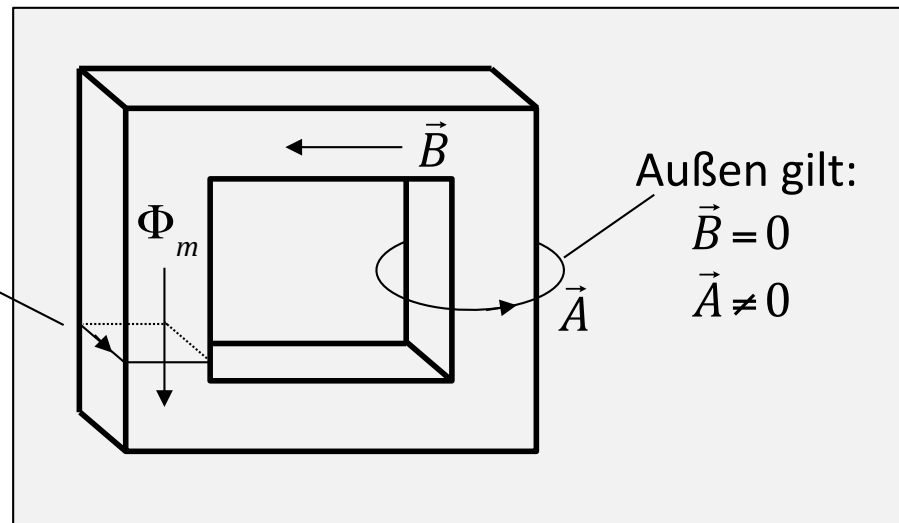
$$\Phi_m = \int \vec{B} d\vec{f} \quad \text{mit} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\Phi_m = \int \text{rot } \vec{A} d\vec{f} \quad \text{mit Satz von Stokes}$$

$$\Phi_m = \oint_S \vec{A} d\vec{s} \quad \text{hohe praktische Bedeutung!}$$

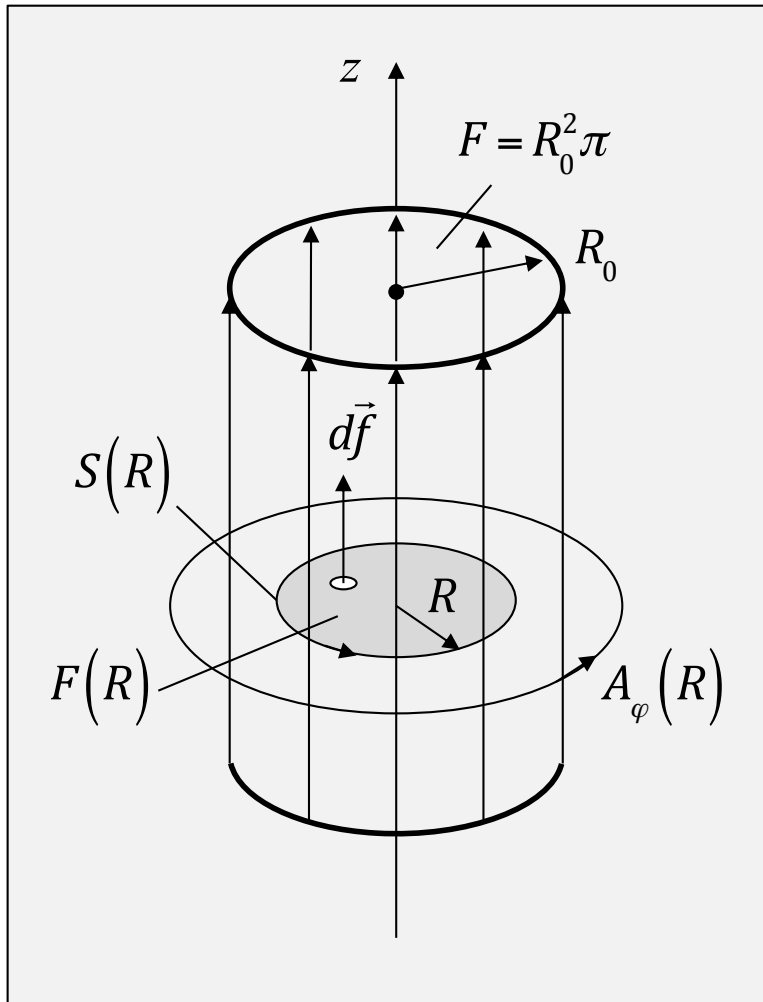
Wäre hier eine Leiter-
schleife (mindestens
eine Windung), dann
ergäbe sich eine
induzierte Spannung

$$U_i = - \frac{d\Phi_m}{dt}$$



8.2.3 Vektorpotential – Magnetischer Fluss und Vektorpotential II

Beispiel: Vektorpotential eines zylindrischen homogenen Magnetfeldes



$$\vec{B} = \begin{cases} B_0 \cdot \vec{e}_z & R \leq R_0 \\ 0 & R > R_0 \end{cases}$$

$$\Phi_m \stackrel{\text{Def.}}{=} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f}$$

$$\Phi_{\text{mges}} = B_0 R_0^2 \pi$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\rightarrow \iint_{F(R)} \vec{B} \cdot d\vec{f} = \iint_{F(R)} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{f} = \oint_{S(R)} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \Phi_m(R)$$

8.2.3 Vektorpotential – Magnetischer Fluss und Vektorpotential III

Berechnung von A aus B

Innen $R \leq R_0$

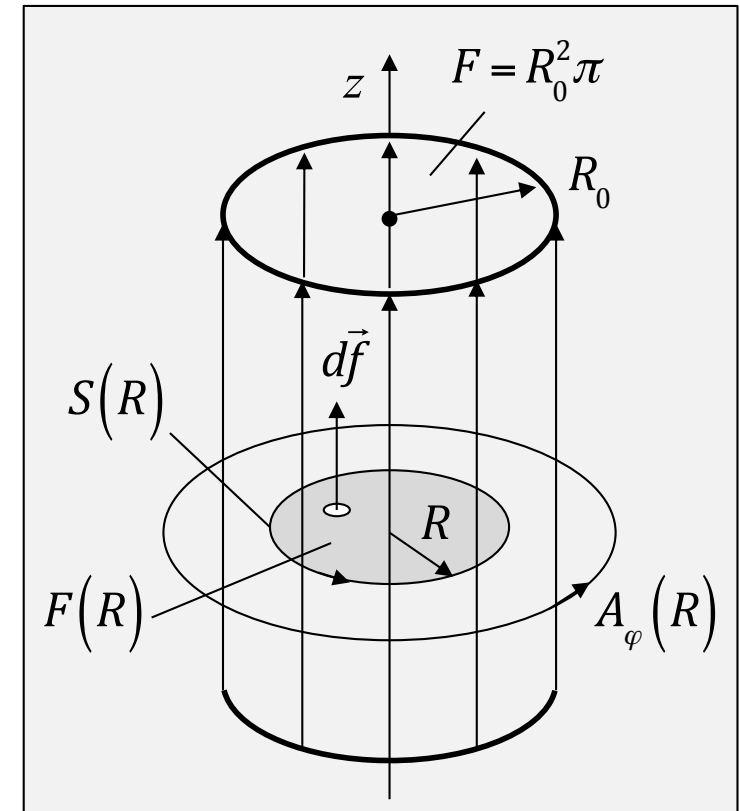
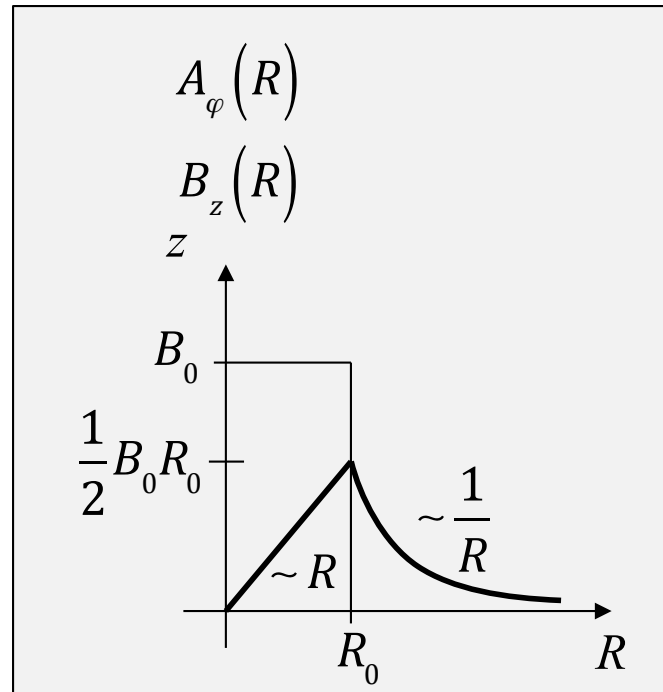
$$\begin{aligned} \iint_{F(R)} (B_0 \cdot \vec{e}_z) \cdot (d\vec{f} \cdot \vec{e}_z) &= B_0 R^2 \pi \\ &= \oint_{S(R)} (A_\varphi(R) \cdot \vec{e}_\varphi) \cdot (R \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) = A_\varphi(R) 2\pi R \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{A}(R) = \frac{1}{2} B_0 R \cdot \vec{e}_\varphi}$$

Außen $R > R_0$

$$\iint_{F(R)} \vec{B} \cdot d\vec{f} = B_0 R_0^2 \pi = \Phi_{\text{mges}}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{A}(R) = \frac{1}{2} B_0 R_0^2 \frac{1}{R} \cdot \vec{e}_\varphi}$$



A ist mathematisch außerhalb der Spule ungleich Null.

Trotzdem existiert dort keine physikalisch messbare Größe:

$$\vec{B} = 0 \text{ und damit } \vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

8.2.3 Vektorpotential – Magnetischer Fluss und Vektorpotential IV

Umkehrung: Berechnung von B aus A

Innen $R \leq R_0$

$$\begin{aligned}\vec{B}(R) &= \text{rot } \vec{A}(R) = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot A_\varphi(R) \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \frac{1}{2} B_0 R \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{2} B_0 2R \cdot \vec{e}_z = B_0 \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

Außen $R > R_0$

$$\vec{B}(R) = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R \cdot \frac{1}{2} B_0 R_0^2 \frac{1}{R} \right) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{2} B_0 R_0^2 \right) \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\begin{aligned}\iint_{F(R > R_0)} \vec{B} \cdot d\vec{f} &= \Phi_{\text{mges}} = \oint_{S(R > R_0)} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_{2\pi} \left(\frac{1}{2} B_0 R_0^2 \frac{1}{R} \cdot \vec{e}_\varphi \right) \cdot (R \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} B_0 R_0^2 \cdot d\varphi = B_0 R_0^2 \pi = \Phi_{\text{mges}}\end{aligned}$$

- Außen messbares physikalisches Feld $B = 0$
- Außen nicht messbares Vektorpotential A ungleich Null
- Kenntnis von A außen genügt, um den Fluss innen zu berechnen

8.3 Vektorpotential – Numerische Feldberechnung (Finite Elemente) I

Eine komplexe geometrische Anordnung wird in Dreiecke zerlegt. Wenn in z -Richtung (Länge ℓ) Symmetrie besteht, reicht eine 2D-Berechnung. Dann wird das Vektorpotential A_z in jedem Knotenpunkt durch eine numerische Optimierungsrechnung iterativ bestimmt.

Aus Kenntnis der Vektorpotentiale A_z an den Ecken i, j, k eines Dreiecks kann man die Flussdichten B_x, B_y an jeder Stelle im Inneren berechnen:

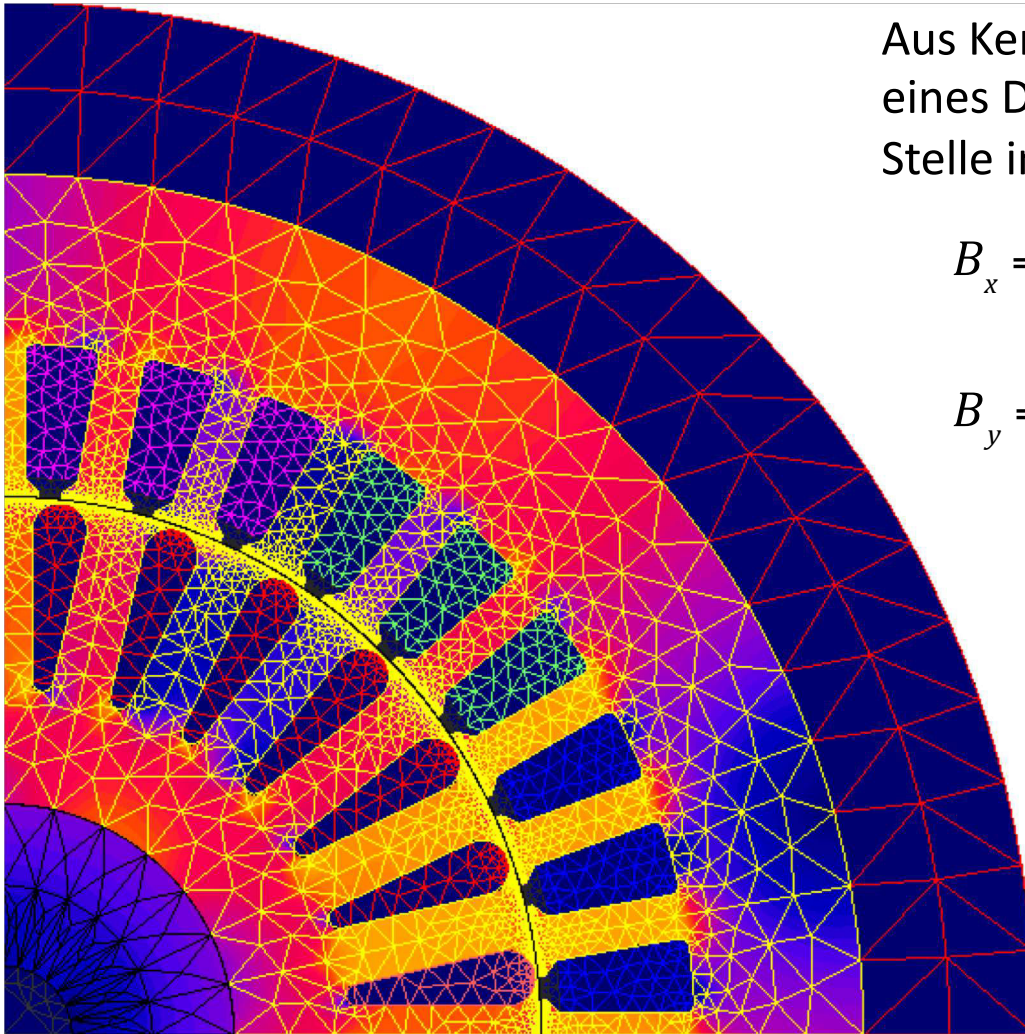
$$B_x = \frac{dA_z}{dy} = \frac{1}{2S} \left(A_i \cdot (x_k - x_j) + A_j \cdot (x_i - x_k) + A_k \cdot (x_j - x_i) \right)$$

$$B_y = \frac{dA_z}{dx} = \frac{1}{2S} \left(A_i \cdot (y_k - y_j) + A_j \cdot (y_i - y_k) + A_k \cdot (y_j - y_i) \right)$$

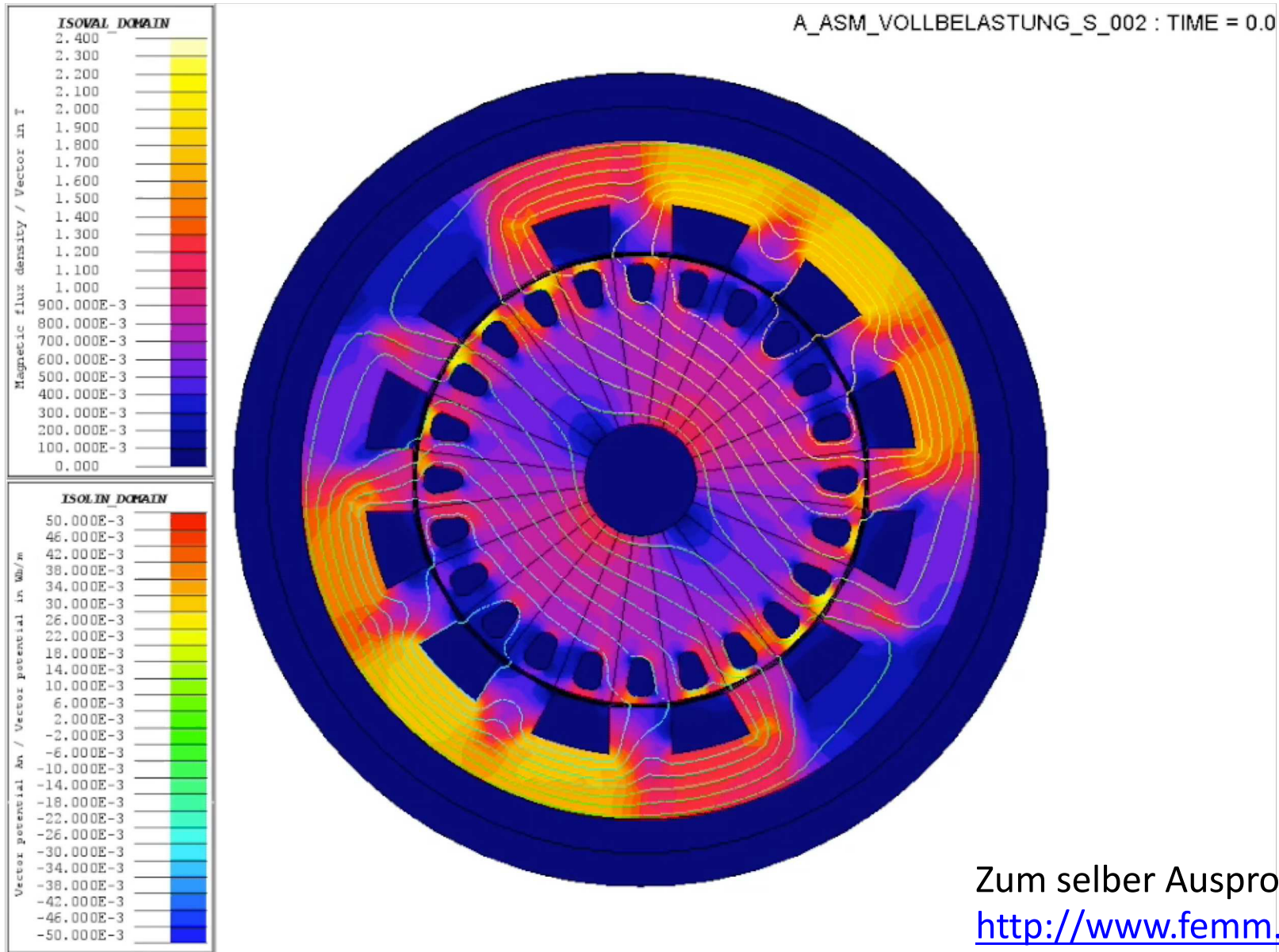
Der magnetische Fluss zwischen zwei beliebigen Punkten ergibt sich zu:

$$\Phi = \ell \cdot \left(A_z(x_1, y_1) - A_z(x_2, y_2) \right)$$

Vorteil: Für 2D-Anordnungen muss nur eine Komponente des Vektorpotentials in z -Richtung bestimmt werden. Bei 3D-Anordnungen hat man keinen Vorteil mehr.



8.3 Vektorpotential – Numerische Feldberechnung (Finite Elemente) II



Zum selber Ausprobieren:

<http://www.femm.info/wiki/HomePage>

9. Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie I

Ziel: Direkte Berechnung von $\vec{B}$ aus $\vec{J}$ ohne magnetisches Vektorpotential A

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Lösung der Poisson-Gleichung für A ;
 A ist hier nur eine mathematische Zwischenlösung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}_{(\vec{r})} \vec{A}(\vec{r})$$

$\text{rot}_{(\vec{r})}$ Differentiation bezüglich der ungestrichenen Koordinaten

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{B}(\vec{r}) &= \text{rot}_{(\vec{r})} \left\{ \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \right\} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \text{rot}_{(\vec{r})} \left(\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dv' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \text{rot}_{(\vec{r})} \vec{J}(\vec{r}') + \text{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dv' \end{aligned}$$

Mathematik

$$\text{rot}(\Psi \cdot \vec{G}) = \Psi \cdot \text{rot} \vec{G} + \text{grad} \Psi \times \vec{G}$$

hier

$$\Psi = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \vec{G} = \vec{J}$$

9. Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie II

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot \operatorname{rot}_{(\vec{r})} \vec{J}(\vec{r}') + \operatorname{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dv' \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(0 + \operatorname{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dv' \quad \leftarrow \operatorname{rot}_{(\vec{r})} \vec{J}(\vec{r}') = 0 \\
 &= \frac{\mu}{4\pi} \iiint \left(-\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \times \vec{J}(\vec{r}') \right) dv' \quad \leftarrow \begin{array}{l} \vec{J}(\vec{r}') \text{ ist } \underline{\text{keine}} \text{ Funktion der} \\ \text{ungestrichenen Koordinate } \vec{r} \end{array} \\
 &\quad \quad \quad \operatorname{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'}$$

Biot-Savart Gesetz

Damit ist die magnetische Flussdichte B direkt aus der Stromdichte J per Integration berechenbar.

9. Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie III

Nebenrechnung

$$\text{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = ? \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \vec{r} - \vec{r}' &= (x - x')\vec{e}_x + (y - y')\vec{e}_y + (z - z')\vec{e}_z \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{grad}_{(\vec{r})} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{\dots}} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{\dots}} \\ &= \vec{e}_x \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} 2(x - x') + \vec{e}_y \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\dots}^3} 2(y - y') + \vec{e}_z \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\dots}^3} 2(z - z') \\ &= -\vec{e}_x \frac{(x - x')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}^3} - \vec{e}_y \frac{(y - y')}{\sqrt{\dots}^3} - \vec{e}_z \frac{(z - z')}{\sqrt{\dots}^3} \\ &= -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

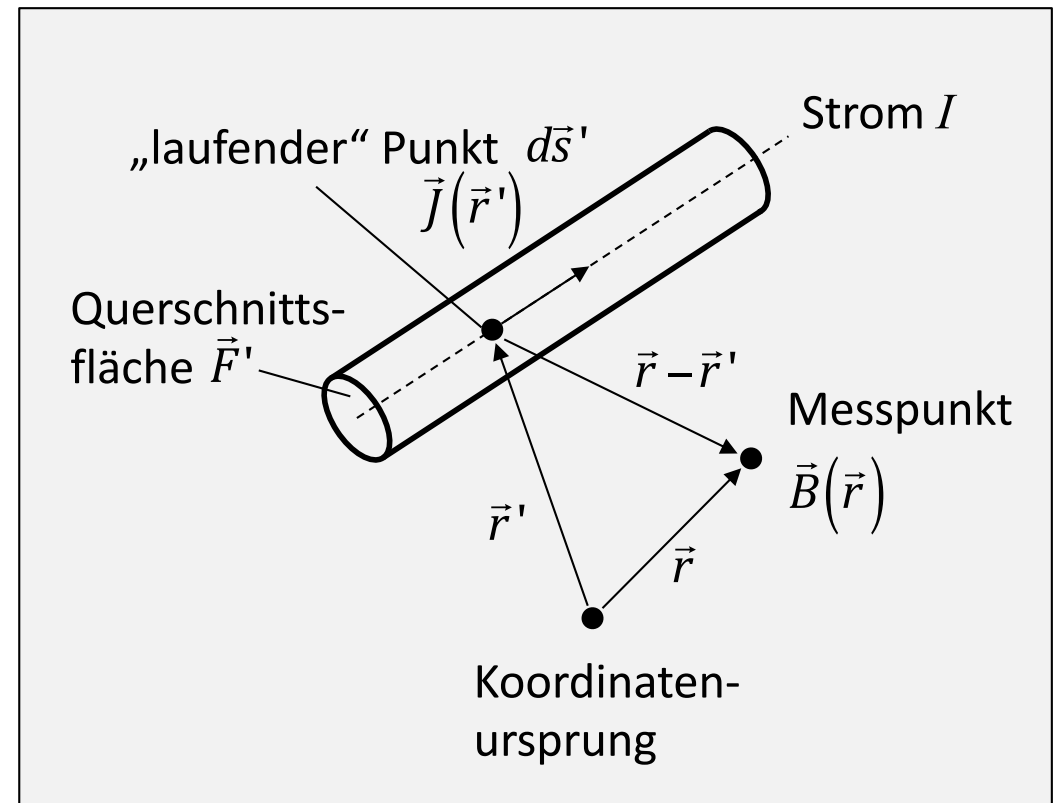
9. Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie IV

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad \text{Biot-Savart}$$

$$\vec{J}(\vec{r}') \cdot dv' = \vec{J}(\vec{r}') \cdot \vec{F}' \cdot d\vec{s}' = I \cdot d\vec{s}'$$

$$\rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{\text{Leiter}} \frac{I \cdot d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \iiint_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$



Magnetfeld B als Funktion des Leitungsstroms I und der Leitergeometrie

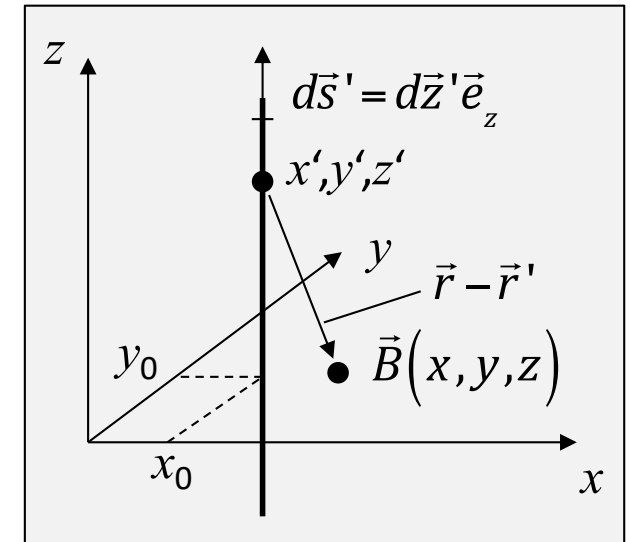
9. Biot-Savart-Gesetz und Anwendung auf einfache Leitergeometrie V

Beispiel: Gerader Leiter in z -Richtung

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \iiint_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$$

$$\begin{aligned} \vec{e}_z \times \vec{e}_x &= \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_y &= -\vec{e}_x \\ \vec{e}_z \times \vec{e}_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{r}' \Rightarrow \begin{cases} x' = x_0 & \text{fest} \\ y' = y_0 & \text{fest} \\ z' & \text{variabel} \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \vec{B}(x, y, z) &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\vec{e}_z \times ((x - x_0)\vec{e}_x + (y - y_0)\vec{e}_y + (z - z')\vec{e}_z)}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} dz' \\ &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\vec{e}_y \int_{z_1}^{z_2} \frac{(x - x_0) dz'}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} - \vec{e}_x \int_{z_1}^{z_2} \frac{(y - y_0) dz'}{\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} + 0 \right) \end{aligned}$$

Speziell Draht auf z -Achse, d.h. $x_0 = 0, y_0 = 0$

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\vec{e}_y \int_{z_1}^{z_2} \frac{x \cdot dz'}{\left(x^2 + y^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} - \vec{e}_x \int_{z_1}^{z_2} \frac{y \cdot dz'}{\left(x^2 + y^2 + (z - z')^2 \right)^{3/2}} \right)$$

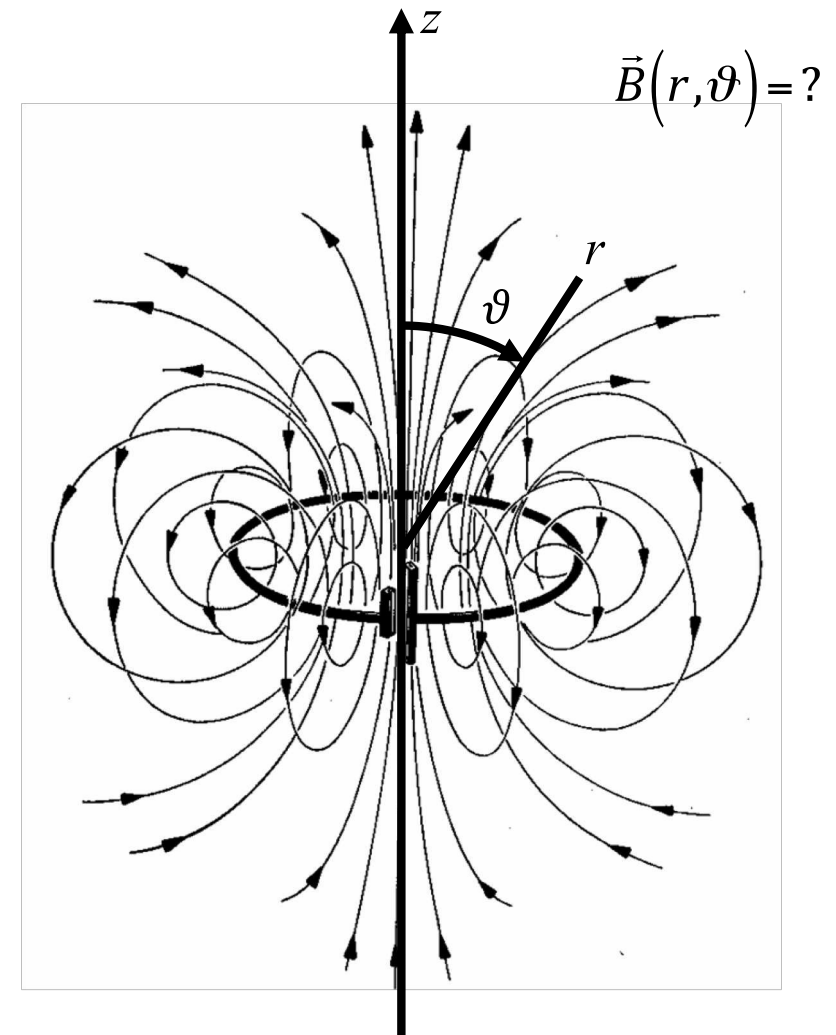
10. Magnetischer Dipol I

Ziel:

Berechnung des Magnetfeldes des magnetischen Dipols $\vec{B}(r, \vartheta)$ in Abhängigkeit vom Abstand r und dem Winkel ϑ .

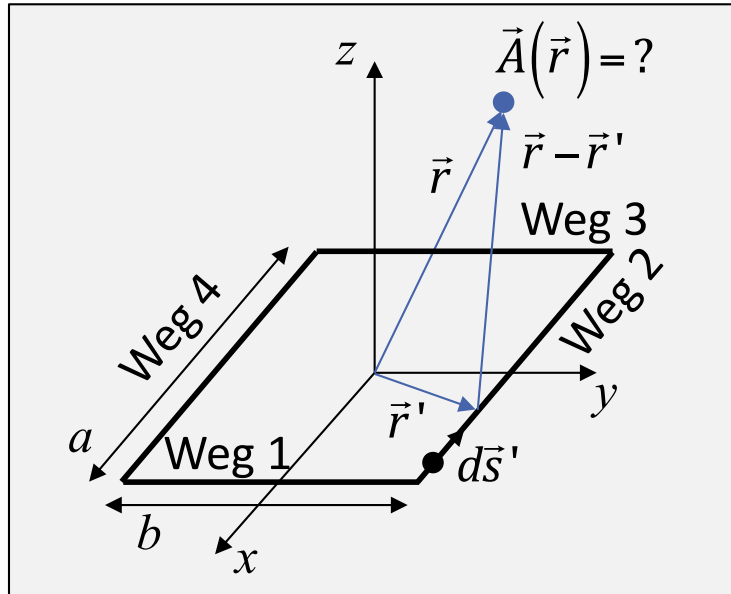
Methode:

1. Vereinfachung durch Betrachtung einer rechteckigen Leiterschleife anstelle einer runden,
2. Berechnung des Vektorpotentials in kartesischen Koordinaten,
3. Näherung für sehr kleine Abmessungen der Leiterschleife,
4. Nachweis der Äquivalenz der Lösung auch für runde Schleifen,
5. Transformation in Kugelkoordinaten,
6. Berechnung der magnetischen Flussdichte B .



10. Magnetischer Dipol II

1.+2. Vektorpotential einer rechteckigen Leiterschleife in kartesischen Koordinaten



Kleine Schleife bei $z=0$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \int_{\text{Leiter}} \frac{d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg1}} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_y + \int_{\text{Weg2}} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_x + \int_{\text{Weg3}} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_y + \int_{\text{Weg4}} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{e}_x \right)$$

$$A_x = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg2}}^{-a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\text{Weg4}}^{+a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad A_y = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg1}}^{-b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\text{Weg3}}^{+b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \quad A_z = 0$$

3. Berechnung für sehr kleine Schleifen

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}}$$

wobei $z' = 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2xx' + x'^2 + y^2 - 2yy' + y'^2 + z^2}}$$

wobei $x', y' \ll x, y$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xx' - 2yy'}}$$

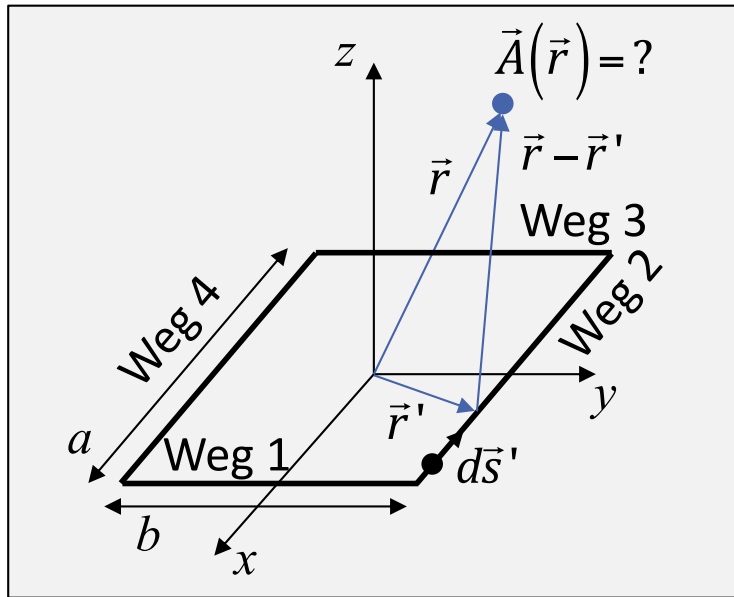
wobei $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

$$= \frac{1}{r \cdot \sqrt{1 - \frac{2xx' + 2yy'}{r^2}}}$$

Näherung $\frac{1}{\sqrt{1 + \sigma}} \approx 1 - \frac{1}{2}\sigma$
 $\sigma \ll 1$

$$\approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{2xx' + 2yy'}{r^2} \right)$$

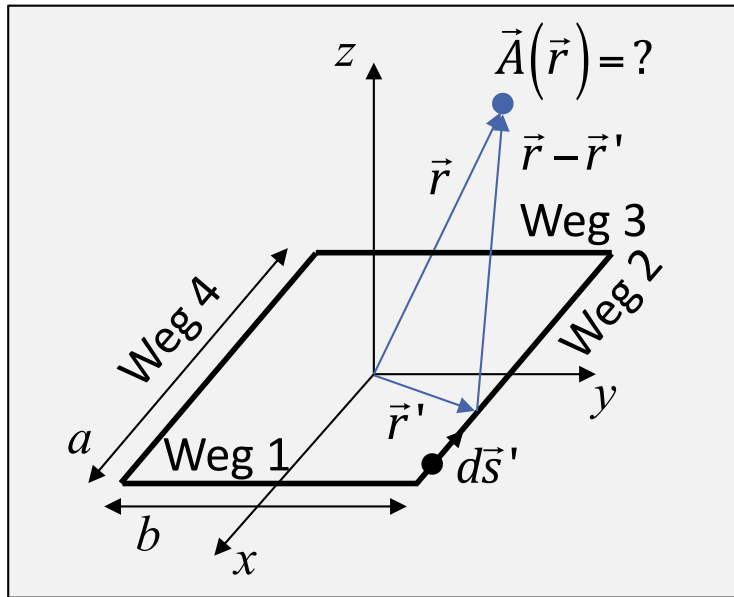
10. Magnetischer Dipol IV



$$A_x = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\text{Weg 2}}^{-a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\text{Weg 4}}^{+a/2} \frac{dx'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A_x &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left\{ \int_{\text{Weg 2}}^{-a/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot x' + y \cdot (+b/2)}{r^2} \right) dx' + \int_{\text{Weg 4}}^{+a/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot x' + y \cdot (-b/2)}{r^2} \right) dx' \right\} \\ &= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{b}{2} \right) \cdot y \cdot \left\{ \int_{\text{Weg 2}}^{-a/2} dx' - \int_{\text{Weg 4}}^{+a/2} dx' \right\} = -\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot a \cdot b \cdot y \\ &\quad a \cdot b = F \quad \text{Fläche} \end{aligned}$$

10. Magnetischer Dipol V



$$A_y = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left(\int_{\substack{+b/2 \\ -b/2 \\ \text{Weg1}}}^{+b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{\substack{-b/2 \\ +b/2 \\ \text{Weg3}}}^{+b/2} \frac{dy'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

Weg 1: $x' = +a/2$

Weg 3: $x' = -a/2$

$$\rightarrow A_y = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \left\{ \int_{\substack{+b/2 \\ -b/2 \\ \text{Weg1}}}^{+b/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot (+a/2) + y \cdot y'}{r^2} \right) dy' + \int_{\substack{-b/2 \\ +b/2 \\ \text{Weg3}}}^{+b/2} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{x \cdot (-a/2) + y \cdot y'}{r^2} \right) dy' \right\}$$

$$= \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \left(\frac{a}{2} \right) \cdot y \cdot \left\{ \int_{\substack{+b/2 \\ -b/2 \\ \text{Weg1}}}^{+b/2} dy' - \int_{\substack{-b/2 \\ +b/2 \\ \text{Weg3}}}^{+b/2} dy' \right\} = + \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot a \cdot b \cdot x$$

$a \cdot b = F$ Fläche

4. Nachweis der Lösung auch für runde Schleifen

Lösung $\vec{A}(x, y, z)$ für Drahtschleife:

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F \cdot y \\ A_y &= +\frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F \cdot x \\ A_z &= 0 \end{aligned}$$

mit $a \cdot b = F$

- Das Ergebnis ist aufgrund der Annahme sehr kleiner Abmessungen unabhängig von den Abmessungen a und b der Schleife
- Sowohl eine sehr schmale Schleife mit $a < b$, als auch eine quadratische Schleife mit $a = b$ liefert das gleiche Ergebnis für gleiche Schleifenflächen $F = a \cdot b$
- Daher gilt dieses Ergebnis auch für eine runde Schleife

5. Transformation von kartesischen Koordinaten in Kugelkoordinaten

$$A_x(x, y, z) = -k \cdot y$$

$$A_y(x, y, z) = +k \cdot y$$

$$A_z(x, y, z) = 0$$

mit der Abkürzung $k = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F$

1. Schritt Ortsvektoren $(x, y, z) \rightarrow (r, \vartheta, \varphi)$

$$A_x(r, \vartheta, \varphi) = -k \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

$$A_y(r, \vartheta, \varphi) = +k \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi$$

$$A_z(r, \vartheta, \varphi) = 0$$

10. Magnetischer Dipol VIII

2. Schritt Vektorfeld $A_x, A_y, A_z \rightarrow A_r, A_\vartheta, A_\varphi$

$$\begin{aligned} A_r &= A_x \sin \vartheta \cos \varphi + A_y \sin \vartheta \sin \varphi + 0 \\ &= -kr \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + kr \sin^2 \vartheta \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\vartheta &= A_x \cos \vartheta \cos \varphi + A_y \cos \vartheta \sin \varphi + 0 \\ &= -kr \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + kr \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_\varphi &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \\ &= +kr \sin \vartheta \sin^2 \varphi + kr \sin \vartheta \cos^2 \varphi \\ &= kr \sin \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = kr \sin \vartheta \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{A}(r, \vartheta) = \frac{\mu}{4\pi} I \cdot F \frac{\sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\varphi} \quad \text{mit der Abkürzung} \quad k = \frac{\mu \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot F$$

6. Berechnung der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$

$$\vec{A}(r, \vartheta) = \frac{\mu}{4\pi} I \cdot F \frac{\sin \vartheta}{r^2} \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \vec{B}(r, \vartheta) &= \text{rot} \left(A_\varphi \vec{e}_\varphi \right) \\ &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \vec{e}_\vartheta + 0 \cdot \vec{e}_\varphi \\ &= \frac{\mu I}{4\pi} \cdot F \cdot \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2} \sin^2 \vartheta \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \sin \vartheta \right) \vec{e}_\vartheta \right] \\ &= \frac{\mu I}{4\pi} \cdot F \cdot \left[\left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{1}{r^2} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \sin \vartheta \right) \vec{e}_\vartheta \right] \\ &= \frac{\mu I}{4\pi} \cdot F \cdot \left[\frac{2 \cos \vartheta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\sin \vartheta}{r^3} \vec{e}_\vartheta \right] \end{aligned}$$

10. Magnetischer Dipol X

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot F \cdot \frac{2\cos\vartheta}{r^3} \\ B_\vartheta &= \frac{\mu}{4\pi} \cdot I \cdot F \cdot \frac{\sin\vartheta}{r^3} \\ B_\varphi &= 0 \end{aligned}$$

