

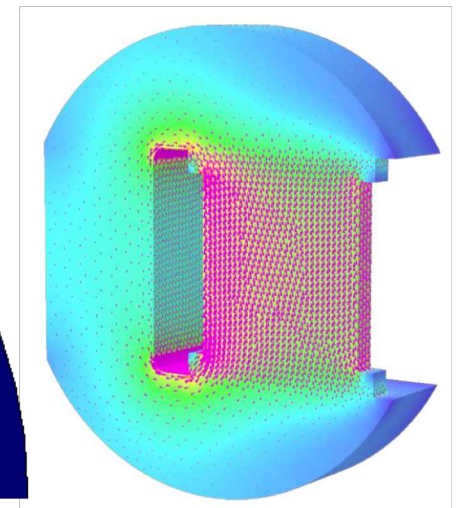
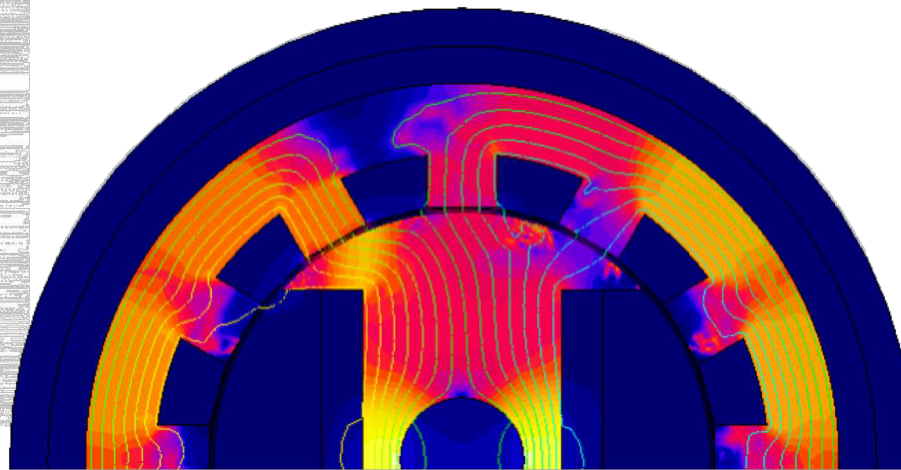
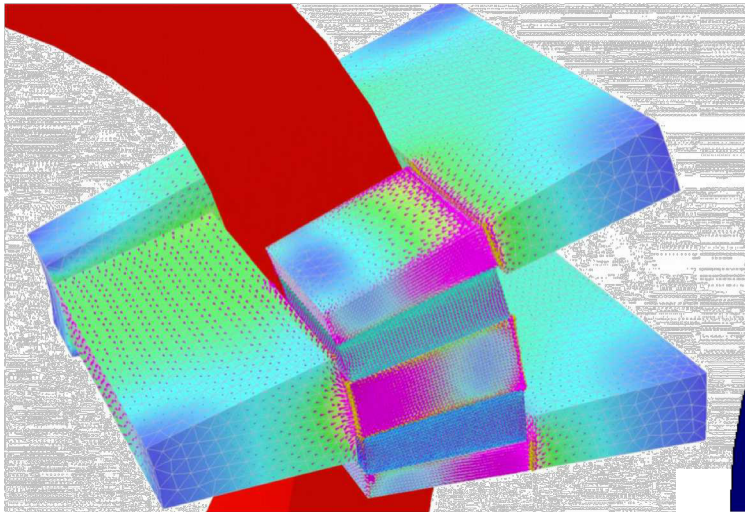
Vorlesung

Elektrische und magnetische Felder (EMF)

SS 2019

Kapitel 6: Induktivität L

Elektrotechnisches Institut (ETI)



1. Definition
2. Induktivität und magnetischer Fluss
3. Induktivität und magnetische Feldenergie

1. Definition I

In der Elektrodynamik gibt es zwei Beziehungen von Größen, die durch die gleiche Proportionalitätskonstante L verbunden sind:

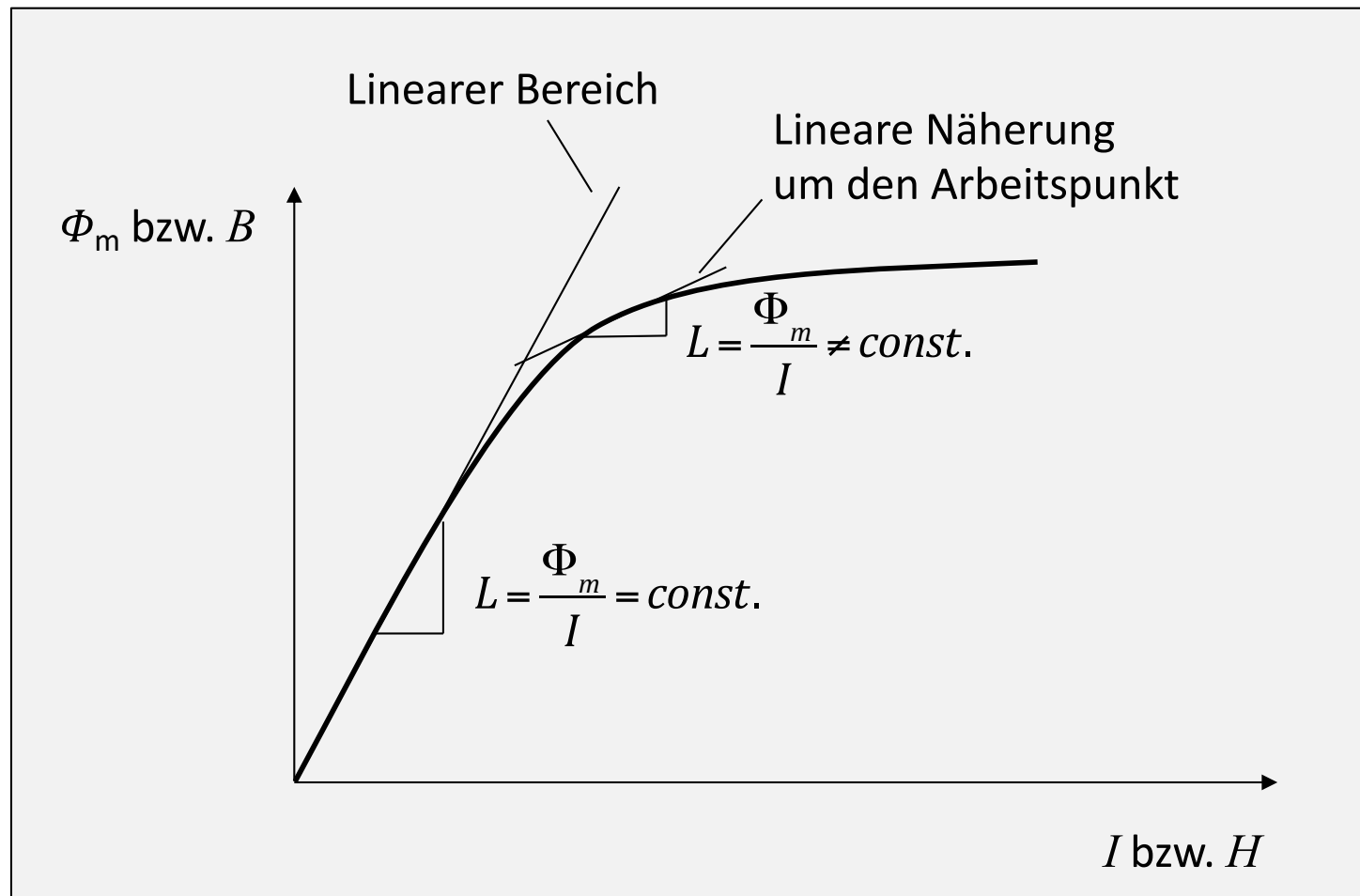
- Der magnetische Fluss mit dem erzeugenden Strom
- Die magnetische Feldenergie mit dem erzeugenden Strom

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\Phi_m = L \cdot I} & \longrightarrow & \boxed{U_{ind} = -\frac{\partial \Phi_m(t)}{\partial t} = -L \frac{dI(t)}{dt}} \\ \updownarrow & & \\ \boxed{W_m = \frac{1}{2} L \cdot I^2} & & \end{array}$$

Die Proportionalitätskonstante L heißt Induktivität

1. Definition II

Die Induktivität ist nur sinnvoll zu benutzen, wenn ein linearer Zusammenhang zwischen Strom I und Fluss Φ_m gegeben ist. Insbesondere in weichmagnetischen Materialien (Eisen) gilt dies nur eingeschränkt (Sättigung). Hier behilft man sich oft durch Linearisierung am Arbeitspunkt.



2. Induktivität und magnetischer Fluss I

Voraussetzung: Dünne Leiter bilden geschlossene Drahtschleifen

Gegeninduktivität Φ_{12} : Von Strom I_2 erzeugtes Feld, Wirkung in Spule 1

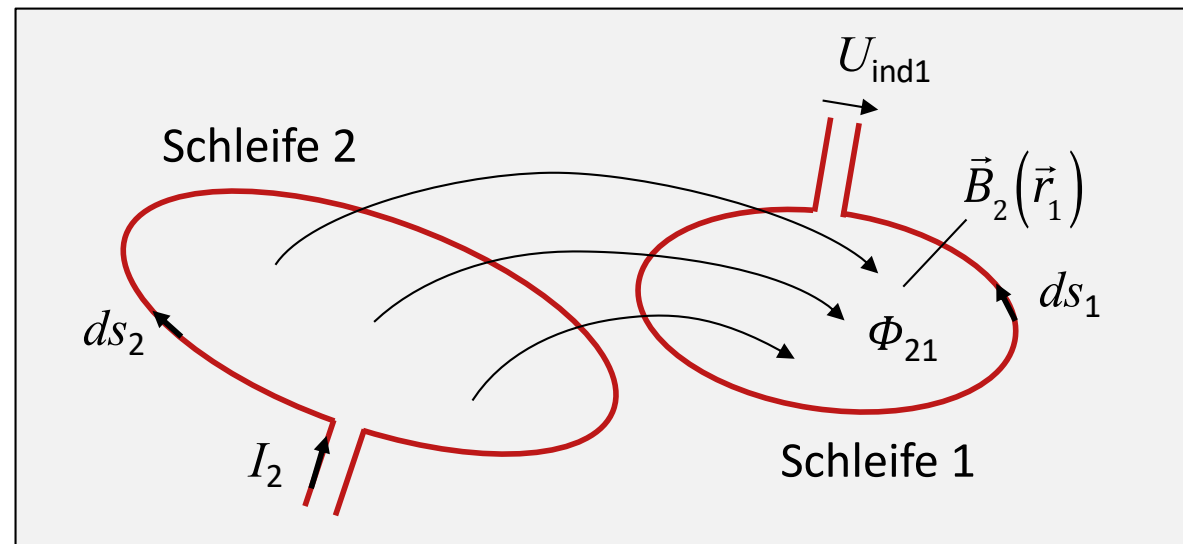
Diese Definition ist in Einklang mit den bekannten Büchern über Theoretische Elektrotechnik. Prof. Trommer hatte in seiner Vorlesung früher die umgekehrte Reihenfolge der Indices verwendet!

Von Strom I_2 , gemessen in Spule 1

$$\begin{aligned}\Phi_{12} &= \iint_{\text{Fläche 1}} \vec{B}_2(\vec{r}_1) \cdot d\vec{f}_1 \\ &= \iint_{\text{Fläche 1}} \text{rot } \vec{A}_2(\vec{r}_1) \cdot d\vec{f}_1 \\ &= \oint_{\text{Contour 1}} \vec{A}_2(\vec{r}_1) \cdot d\vec{s}_1\end{aligned}$$

$$\vec{A}_2(\vec{r}_1) = \frac{\mu \cdot I_2}{4\pi} \int \frac{d\vec{s}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$$\rightarrow \Phi_{12} = \frac{\mu \cdot I_2}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = L_{12} \cdot I_2$$



$$\rightarrow L_{12} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{c_1} \oint_{c_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = L_{21}$$

Die Gegeninduktivität ist unabhängig davon, welcher Kreis mit 1 und welcher mit 2 bezeichnet wird. Zwei Kreise haben also nur eine (gemeinsame) Gegeninduktivität!

2. Induktivität und magnetischer Fluss II

Gegeninduktivität bei einer Windung $L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_2}$

bei vielen Windungen $L_{12} = \frac{w_1 \Phi_{12}}{I_2}$

Selbstinduktivität bei vielen Windungen $L_{11} = \frac{w_1 \Phi_1}{I_1}$

Man bezeichnet $\Psi_{12} = w_1 \cdot \Phi_{12}$ als den verketteten Fluss (Flussverkettung) einer Spule. Damit wird die Wirkung des Flusses in der Spule beschrieben (Induktionsgesetz).

Der gesamte verkettete Fluss einer Spule 1 ergibt sich aus Selbst- und Gegeninduktivität(en) zu allen anderen Spulen 2... n , die magnetischen Fluss in der betrachteten Spule 1 erzeugen:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} + \dots + \Psi_{1n} = w_1 L_{11} I_1 + w_2 L_{12} I_2 + \dots + w_n L_{1n} I_n$$

$$U_{ind1} = - \frac{d\Psi_1}{dt}$$

2. Induktivität und magnetischer Fluss III

Beispiel: Selbstinduktivität einer langen Spule mit weichmagnetischem Kern

Methode magnetischer Fluss

Querschnittsfläche A

$B \cong \text{const. über } A$

Magnetischer Fluss
im Querschnitt:

$$\Phi = B \cdot A = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H \cdot A$$

$$\Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{A \cdot w}{\ell} \cdot I$$

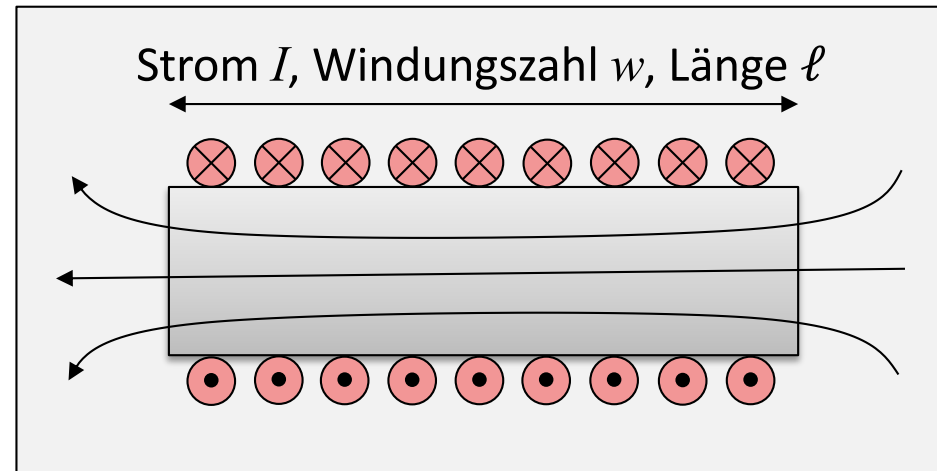
$$w \cdot \Phi = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{A \cdot w^2}{\ell} \cdot I$$

$\leftrightarrow$

$$w \cdot \Phi = L \cdot I$$

$\rightarrow$

$$L = \mu_0 \cdot \mu_r \frac{A \cdot w^2}{\ell}$$



$$\oint \vec{H} d\vec{s} = \iint \vec{J} d\vec{f}$$

Durchflutungsgesetz:

$$H \cdot \ell \cong w \cdot I$$

3. Induktivität und magnetische Feldenergie

Definition:
(zur Erinnerung)

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad \text{Energiedichte des elektrischen Feldes}$$

$$W_e = \iiint w_e dv \quad \text{Gesamte elektrische Feldenergie}$$

$$[w_e] = \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{As}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} = \frac{\text{Ws}}{\text{m}^3}$$

Wenn $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$ gilt, dann folgt:

$$w_e = \frac{\varepsilon}{2} E^2$$

Definition:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad \text{Energiedichte des magnetischen Feldes}$$

$$W_m = \iiint w_m dv \quad \text{Gesamte magnetische Feldenergie}$$

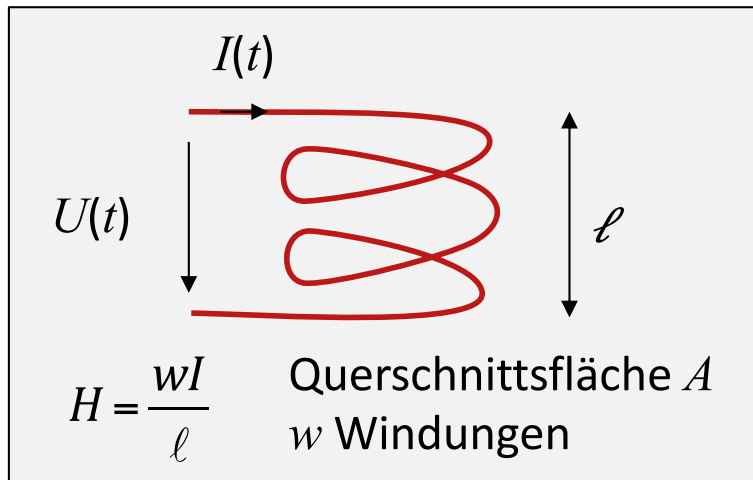
$$[w_m] = \frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^3} = \frac{\text{Ws}}{\text{m}^3}$$

Wenn $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$ gilt, dann folgt:

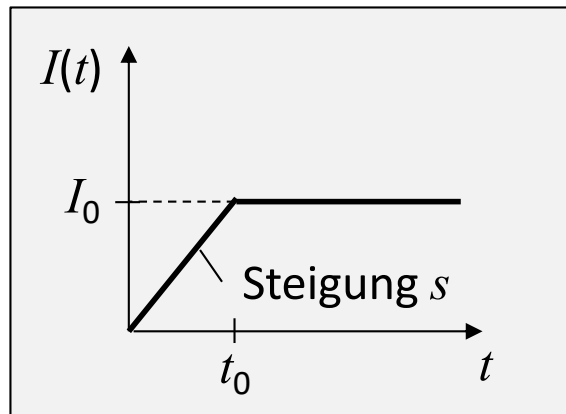
$$w_m = \frac{\mu}{2} H^2$$

3.1 Veranschaulichung der magnetischen Feldenergie I

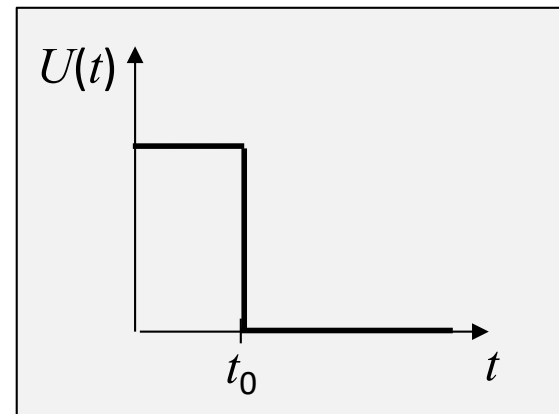
Strom wird in eine Spule eingespeist, ein Magnetfeld baut sich auf:



$$\Phi(t) = \mu H(t) A = \mu \frac{n}{\ell} I(t) A$$



$$I(t) = \begin{cases} s \cdot t & t < t_0 \\ I_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$



$$U(t) = \begin{cases} -\frac{\mu w^2}{\ell} A s & t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$U(t) = -w \frac{d\Phi(t)}{dt} = -w \mu \frac{n}{\ell} A \frac{I(t)}{dt}$$

3.1 Veranschaulichung der magnetischen Feldenergie II

Aufgenommene elektrische Leistung

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \begin{cases} -\left(\frac{\mu w^2}{\ell} A s\right) \cdot (s \cdot t) & t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Gesamte aufgenommene elektrische Energie nach $t \geq t_0$

$$W_{UI} = \int_0^{t_0} P(t) dt = -\frac{\mu w^2}{\ell} A s^2 \frac{1}{2} t_0^2 = -\frac{1}{2} \frac{\mu w^2 A}{\ell} I_0^2$$
$$H_0 = \frac{w I_0}{\ell} \rightarrow I_0 = \frac{\ell H_0}{w} \rightarrow \boxed{W_{UI} = -\frac{1}{2} \mu H_0^2 A \ell}$$

Gesamte aufgebaute magnetische Feldenergie: $W_m = \iiint w_m dv$

Magnetfeld H räumlich konstant in Spule mit Volumen $A \ell \rightarrow \boxed{W_m = w_m A \ell}$

Energiesatz: $W_m = W_{UI} \rightarrow w_m A \ell = -\frac{1}{2} \mu H_0^2 A \ell$

$$\rightarrow \boxed{w_m = \frac{1}{2} \mu H_0^2} \quad \text{magnetische Feldenergiedichte}$$

3.1 Veranschaulichung der magnetischen Feldenergie III

Berechnung der Feldenergie über die erzeugenden Ströme

Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint \vec{H} \cdot \vec{B} dv$$

Feldenergie als Funktion der erzeugenden Ströme:

Gesamte Feldenergie:

$$W_m = \frac{1}{2} \iiint \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} dv$$

$$= \frac{1}{2} \iiint \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) dv + \frac{1}{2} \iiint \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} dv$$

$$= \frac{1}{2} \oint (\vec{A} \times \vec{H}) d\vec{f} + \frac{1}{2} \iiint \vec{A} \cdot \vec{J} dv$$

$$= \frac{1}{2} \iiint \vec{A} \cdot \vec{J} dv \quad \text{mit} \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

$$\text{und} \quad \text{div}(\vec{A} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H}$$

$$\text{und Gaußsatz und } \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

$$\text{und} \quad \oint (\vec{A} \times \vec{H}) d\vec{f} = 0 \text{ über „Fernkugel“}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{4\pi} \iiint \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv \cdot dv'$$

3.1 Veranschaulichung der magnetischen Feldenergie IV

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{4\pi} \iiint \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv \cdot dv'$$

Magnetische Feldenergie als Funktion der Stromdichte $J(r)$

n Leiter mit $J(r)=0$ außerhalb der Leiter

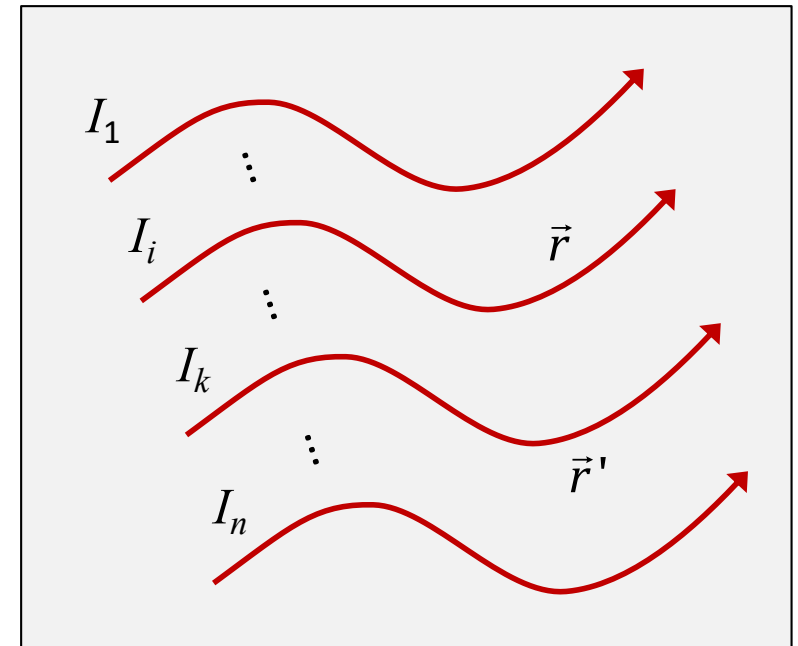
$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\mu}{4\pi} \iiint \iiint \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\vec{J}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv \cdot dv'$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{I_i \cdot I_k} \iiint \iiint \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv \cdot dv'}_{\text{Definition Induktivität } L_{ik}} \right) \cdot I_i \cdot I_k$$

Definition Induktivität L_{ik}

$$\rightarrow W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ki} \cdot I_i \cdot I_k \quad [L] = \text{H} = \frac{\text{J}}{\text{A}^2} = \frac{\text{VAs}}{\text{A}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} \quad \text{Henry}$$

I_i = Gesamtstrom durch Leiter i



3.1 Veranschaulichung der magnetischen Feldenergie V

$$L_{ik} = \frac{1}{I_i \cdot I_k} \cdot \frac{\mu}{4\pi} \cdot \iiint_{\text{Leiter } i} \iiint_{\text{Leiter } k} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv \cdot dv'$$

Selbstinduktivität

$$L_{ii} = \frac{1}{I_i^2} \cdot \frac{\mu}{4\pi} \cdot \iiint_{\text{Leiter } i} \iiint_{\text{Leiter } i} \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv \cdot dv'$$

Gegeninduktivität ($L_{ik} = L_{ki}$)

$$\rightarrow W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k$$

$$\text{z.B.: } n = 1 \quad W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\text{z.B.: } n = 2 \quad W_m = \frac{1}{2} L_{11} I_1^2 + L_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_{22} I_2^2$$

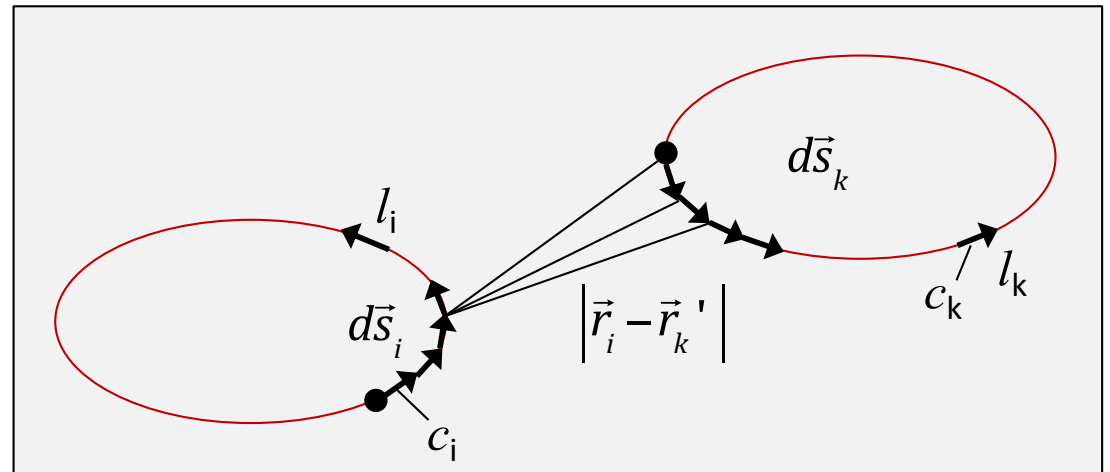
3.2 Gegeninduktivität dünner Leiter

$$L_{ik} = \frac{1}{l_i \cdot l_k} \frac{\mu}{4\pi} \iiint \iiint \frac{\vec{J}_i(\vec{r}) \cdot \vec{J}_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cdot dv_i \cdot dv_k'$$

mit $\vec{J}_i \cdot dv_i = \vec{J}_i \cdot d\vec{f}_i \cdot d\vec{s}_i = l_i \cdot d\vec{s}_i$

$$= \frac{1}{l_i \cdot l_k} \frac{\mu}{4\pi} \oint_{c_i} \oint_{c_k} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k'|}$$

$$\rightarrow \boxed{L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{c_i} \oint_{c_k} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k'|}} \quad L_{ik} = L_{ki}$$

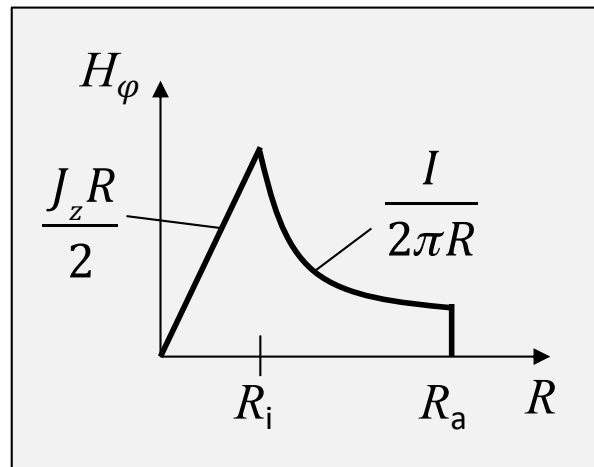
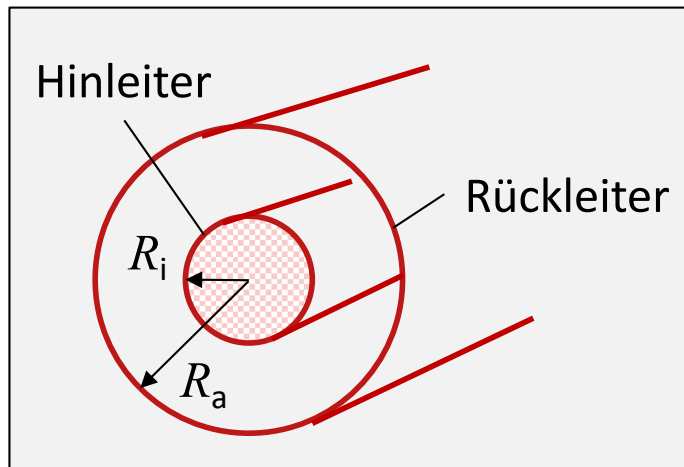


Dies ist der Beweis, dass die Proportionalität von L_{ik} für die Feldenergie die gleiche Größe ist wie die für den magnetischen Fluss

$$\boxed{\Phi_{ik} = L_{ki} \cdot I_i}$$

3.3.1 Selbstinduktivität einer Koaxialleitung I

Methode über die Feldenergie:



Radius Hinleiter: R_i
 Radius Außen: R_a
 Dazwischen Isolator
 Länge: ℓ
 Sehr dünner Rückleiter,
 dort keine innere
 Induktivität, d.h. J_z
 konstant über den
 Leiterquerschnitt
 (Näherung!)

Im Innendraht des Koaxialkabels ($0 < R < R_i$) gilt:

$$\begin{aligned}
 W_{mi} &= \iiint w_{mi} dv = \frac{\mu}{2} \cdot \iiint H_{\varphi}^2 dv = \frac{\mu}{2} \cdot \iiint \frac{J_z^2}{4} R^2 dv \\
 &= \frac{\mu}{2} \frac{J_z^2}{4} \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_i} R^2 \cdot R \cdot dR d\varphi dz \\
 &= \frac{\mu}{2} \frac{J_z^2}{4} \cdot \ell \cdot 2\pi \cdot \frac{R_i^4}{4} \\
 &= \frac{\mu \cdot I^2}{16\pi} \cdot \ell \quad \leftrightarrow \quad \boxed{W_{mi} = \frac{1}{2} L_i I^2}
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow L_i = \frac{\mu \cdot \ell}{8\pi} \rightarrow \boxed{\frac{L_i}{\ell} = \frac{\mu}{8\pi}}$$

Innere
Selbstinduktivität

3.3.1 Selbstinduktivität einer Koaxialleitung II

Zwischen den beiden Leitern im Isolator ($R_i < R < R_a$) gilt:

$$\begin{aligned} W_{ma} &= \iiint w_{ma} dv = \frac{\mu}{2} \cdot \iiint H_{\varphi}^2 dv = \frac{\mu}{2} \cdot \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_a} \frac{I^2}{4\pi^2 R^2} R \cdot dR d\varphi dz \\ &= \frac{\mu}{2} \frac{I^2}{4\pi^2} \cdot \ell \cdot 2\pi \cdot \int_{R_i}^{R_a} \frac{1}{R} dR = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \ell \cdot I^2 \cdot \ln \frac{R_a}{R_i} \end{aligned}$$

$$W_{ma} = \frac{1}{2} L_a \cdot I^2 \quad \rightarrow \quad L_a = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ell \cdot \ln \frac{R_a}{R_i} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{L_a}{\ell} = \frac{\mu}{2\pi} \cdot \ln \frac{R_a}{R_i}} \quad \begin{array}{l} \text{Äußere} \\ \text{Selbstinduktivität} \end{array}$$

Im Bereich außerhalb ($R > R_a$) gilt:

$$\boxed{H_{\varphi}(R > R_a) = 0} \quad \text{wegen} \quad \oint_{\text{Kreis} > R_a} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{f} = I_{\text{hin}} - I_{\text{rück}} = 0$$

3.3.2 Selbstinduktivität von Doppelleitungen I

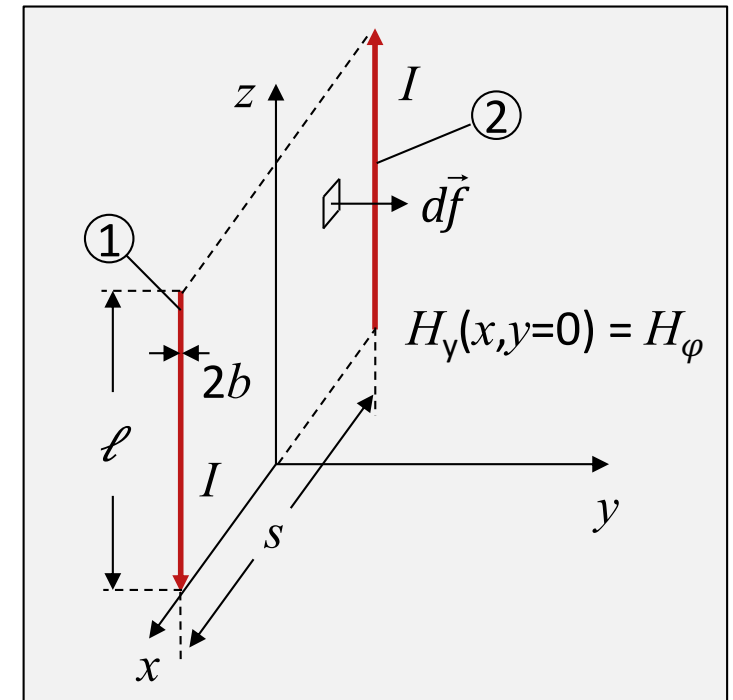
Doppelleitung im Abstand s ,
symmetrisch zur z -Achse, Drahradius b

Berechnung über den Fluss Φ_a zwischen den Drähten:

$$\Phi_a = \iint \vec{B}_a \cdot d\vec{f} = \ell \cdot \int_{-s/2+b}^{+s/2-b} B_y \cdot dx = \ell \cdot \mu_0 \int_{-s/2+b}^{+s/2-b} H_y \cdot dx$$

$\vec{B} = \vec{B}(x, y)$ $d\vec{f} = dz \cdot dx \cdot \vec{e}_y$ B_y in der x, z -Ebene

B hängt nicht von z ab $\rightarrow B_y(x, y=0)$



3.3.2 Selbstinduktivität von Doppelleitungen II

In der gesamten x - z -Ebene für $y = 0$ gilt: $H_\varphi(y=0) = H_y$

$$\boxed{H_\varphi = \frac{I}{2\pi R}} \quad \rightarrow \quad H_y = H_\varphi^{(1)} + H_\varphi^{(2)} = \frac{I}{2\pi(s/2 - x)} + \frac{I}{2\pi(s/2 + x)}$$

$$\begin{aligned} \Phi_a &= \mu_0 \cdot \ell \int_{-s/2+b}^{+s/2-b} H_y dx = \mu_0 \cdot \ell \frac{I}{2\pi} \cdot \left\{ -\ln(s/2 - x) \Big|_{-s/2+b}^{+s/2-b} + \ln(s/2 + x) \Big|_{-s/2+b}^{+s/2-b} \right\} \\ &= \mu_0 \cdot \ell \frac{I}{2\pi} \cdot \left\{ -\ln(b) + \ln(s-b) + \ln(s-b) - \ln(b) \right\} = \mu_0 \cdot \ell \cdot \frac{I}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{s-b}{b}\right) \end{aligned}$$

$$\rightarrow \Phi_a = \mu_0 \cdot \ell \cdot \frac{I}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{s-b}{b}\right)$$

$$\Phi_a = L_a \cdot I \quad \rightarrow \quad L_a = \ell \cdot \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{s-b}{b}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{L_a}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{s-b}{b}\right)}$$

3.3.2 Selbstinduktivität von Doppelleitungen III

Innere Selbstinduktivität L

$$\frac{L_i}{\ell} = \frac{L_{i1}}{\ell} + \frac{L_{i2}}{\ell}$$

Summe der beiden Leitungen 1 und 2

$$\boxed{\frac{L_i}{\ell} = 2 \cdot \frac{\mu_0}{8\pi}}$$

Siehe Rechnung für Koaxial-Leitungen
Unabhängig von der Drahtdicke $2b$

Gesamtinduktivität L_{ges}

$$\boxed{\frac{L_{\text{ges}}}{\ell} = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{s-b}{b}\right) + \frac{\mu_0}{4\pi}}$$

3.4 Zusammenfassung I

Energiedichte des magnetischen Feldes $W_m = \frac{1}{2} \iiint \vec{B} \cdot \vec{H} \cdot dv$

$$\textcircled{1} \quad W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N L_{ik} \cdot I_i \cdot I_k$$

W_{mik} berechnen $\rightarrow$

$$L_{ik} = \frac{W_{mik}}{I_i \cdot I_k}$$

Einfach nur bei $N=1$, d.h. $i=k$

Magnetischer Fluss

$$\Phi_m = \iint \vec{B} \cdot d\vec{f} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

$$\textcircled{2} \quad \Phi_{mik} = L_{ik} \cdot I_i$$

Φ_{mik} berechnen $\rightarrow$

$$L_{ik} = \frac{\Phi_{mik}}{I_i}$$

Für $\textcircled{1}$ und $\textcircled{2}$ gilt:

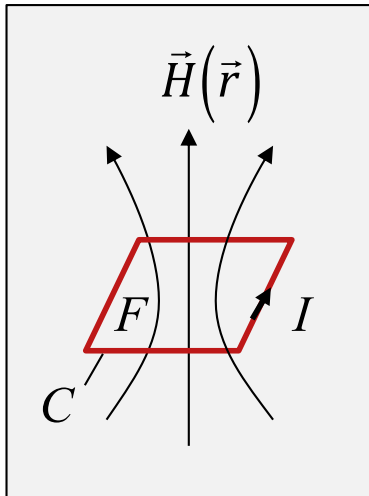
Integral direkt
berechnen $\rightarrow$

$$L_{ik} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

Gegeninduktivitäten sind unabhängig von der Wirkrichtung $L_{ik} = L_{ki}$

3.4 Zusammenfassung II

Alternativen zur Berechnung von W_m



Numerische Feldberechnung:

- ① Gesamter Raum:
1000 x 1000 x 1000 = 10^9 Stützstellen
- ② Innere Fläche:
100 x 100 = 10^4 Stützstellen
- ③ Kurve:
4 x 100 = 400 Stützstellen

$$\textcircled{1} \quad W_m = \frac{1}{2} \iiint \mu \vec{H}^2 \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} L I^2$$

H in gesamten Raum

$$\textcircled{2} \quad \Phi_m = \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = L \cdot I$$

B nur innerhalb der Fläche F

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{f} \\ \rightarrow L = \frac{\Phi_m}{I} \end{array} \right.$$

$$\textcircled{3} \quad \Phi_m = \iint_F \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{f} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

A nur auf dem Weg C

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} \\ \rightarrow L = \frac{\Phi_m}{I} \end{array} \right.$$