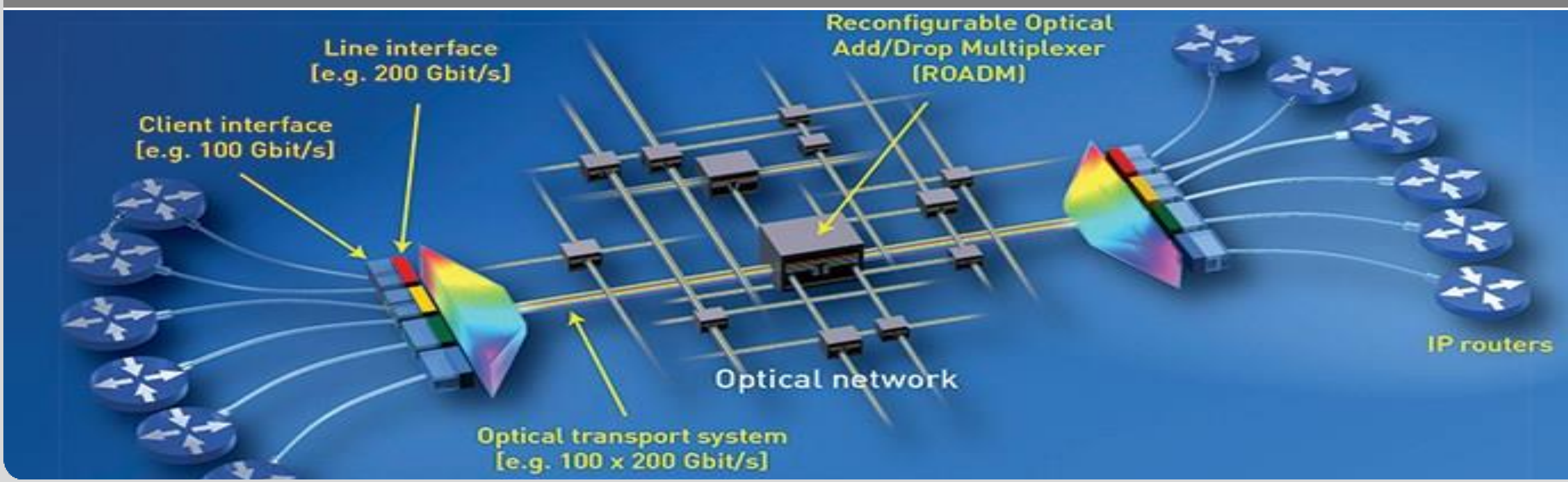
Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 1

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter
    www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu
  - Formelsammlung
  - Bonusregelung

- Wiederholung mathematischer Grundlagen + Beweise zur Vorlesung
  - Skalarfelder und Vektorfelder
  - Differentialoperatoren
  - Koordinatensysteme
  - Umgang mit der Formelsammlung
  - Integralrechnung

- Zusammenfassung elektromagnetischer Felder (Vorlesung 1)

Literaturhinweis

Innerhalb des KIT-Netzes als PDF zum kostenlosen Download verfügbar unter www.bibliothek.kit.edu

Kalender

2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	1 Fr Allerheiligen	1 So 1. Advent	1 Mi Neujahr	1 Sa	1 So	1 Mi Klausur
2 Mi	2 Sa	2 Mo Übung 7 49	2 Do	2 So	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	3 So	3 Di	3 Fr	3 Mo Übung 13 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo Übung 3 45	4 Mi Vorlesung 8	4 Sa	4 Di	4 Mi	4 Sa
5 Sa	5 Di	5 Do	5 So	5 Mi Vorlesung 15	5 Do	5 So
6 So	6 Mi Vorlesung 4	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	7 Sa	7 Di	7 Fr	7 Sa	7 Di
8 Di	8 Fr	8 So	8 Mi Vorlesung 11	8 Sa	8 So	8 Mi
9 Mi	9 Sa	9 Mo Übung 8 50	9 Do	9 So	9 Mo 11	9 Do
10 Do	10 So	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	10 Fr Karfreitag
11 Fr	11 Mo Übung 4 46	11 Mi Vorlesung 9	11 Sa	11 Di	11 Mi	11 Sa
12 Sa	12 Di	12 Do	12 So	12 Mi	12 Do	12 So Ostern
13 So	13 Mi Vorlesung 5	13 Fr	13 Mo Übung 10 3	13 Do	13 Fr	13 Mo Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	14 Sa	14 Di	14 Fr	14 Sa	14 Di
15 Di	15 Fr	15 So	15 Mi Vorlesung 12	15 Sa	15 So	15 Mi
16 Mi Vorlesung 1	16 Sa	16 Mo Übung 9 51	16 Do	16 So	16 Mo 12	16 Do
17 Do	17 So	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo Übung 5 47	18 Mi Vorlesung 10	18 Sa	18 Di	18 Mi	18 Sa
19 Sa	19 Di	19 Do	19 So	19 Mi	19 Do	19 So
20 So	20 Mi Vorlesung 6	20 Fr	20 Mo Übung 11 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo Übung 1 43	21 Do	21 Sa	21 Di	21 Fr	21 Sa	21 Di
22 Di	22 Fr	22 So	22 Mi Vorlesung 13	22 Sa	22 So	22 Mi
23 Mi Vorlesung 2	23 Sa	23 Mo 52	23 Do	23 So	23 Mo 13	23 Do
24 Do	24 So	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo Übung 6 48	25 Mi 1. Weihnachtstag	25 Sa	25 Di	25 Mi	25 Sa
26 Sa	26 Di	26 Do 2. Weihnachtstag	26 So	26 Mi	26 Do	26 So
27 So	27 Mi Vorlesung 7	27 Fr	27 Mo Übung 12 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo Übung 2 44	28 Do	28 Sa	28 Di	28 Fr	28 Sa	28 Di
29 Di	29 Fr	29 So	29 Mi Vorlesung 14	29 Sa	29 So	29 Mi
30 Mi Vorlesung 3	30 Sa	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Bonussystem

- Die Lösungen zu den Übungsblättern werden dreimal pro Semester unangekündigt zu Beginn der Übung (11:30 Uhr) eingesammelt. Wer jeweils mehr als 2/3 eines Übungsblattes sinnvoll bearbeitet hat, bekommt 2 Punkte in der schriftlichen Prüfung gutgeschrieben.
- Die Punkte müssen in einem Semester erworben werden, eine Addition der Punkte aus zwei Semestern ist nicht möglich.
- Die gesammelten Punkte verfallen nach einem Jahr.
  Beispiel: Wurden die Übungsblätter im WS 19/20 abgegeben, können die daraus resultierenden Punkte letztmalig zur Klausur im Frühjahr 2021 angerechnet werden.
- Pro Person muss eine Lösung handschriftlich ausgearbeitet und abgegeben werden; Gruppenarbeiten werden nicht anerkannt. Ein gemeinsames Lösen der Aufgaben in Lerngruppen ist selbstverständlich erwünscht!
- „Sinnvoll bearbeitet“ heißt:
  - Das Aufgabenblatt ist klar beschriftet mit Namen, Matrikelnummer und Aufgaben-Nr.
  - Jede Lösung beginnt mit einer klaren Auflistung dessen, was gegeben ist (geg.: …), und enthält eine mathematische Umsetzung dessen, was gesucht ist (ges.: …)
  - Es folgt eine Lösung, die aus einem mathematischen Ansatz und einer Lösung bzw. einem sinnvollen Lösungsversuch besteht. Es wird dabei nicht bewertet, ob das Ergebnis in allen Details korrekt ist.

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	1. Aufgabe	Partielle DGL, Ebene Wellen

1. Übung

Abgabe bis zum 28.10.2019 um 11:30Uhr

1. Aufgabe

Eine ebene Welle breitet sich im Vakuum in z-Richtung aus ($\frac{\partial}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y} = 0$).

a) Leiten Sie für diesen Fall die Wellengleichung aus den Maxwellgleichungen her.

Hinweis: Die Aufgabe ist ein Spezialfall der Herleitung aus der Vorlesung.

Gehen sie von den Maxwellgleichungen $rot\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ und $rot\vec{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ aus und formulieren Sie diese komponentenweise aus. Man erhält vier gekoppelte, partielle Differenzialgleichungen. Formen Sie das Gleichungssystem so um, dass Sie vier entkoppelte PDGL (das sind die Wellengleichungen) erhalten.

b) Zeigen Sie dass jede Funktion $f\,(z \pm ct)$ die Wellengleichung für diesen Fall erfüllt.

c) Können sich longitudinale Wellen ausbreiten? (Gehen Sie von $div\vec{B} = \nabla \cdot \vec{B} = 0$ und $div\vec{D} = \nabla \cdot \vec{D} = \varrho = 0$ aus.)

Größen und Einheiten

Abgeleitete Größe	Einheit	Symbol	Einheiten-zeichen
Elektrisches Potential	Volt	Φ	V
Elektrische Spannung	Volt	U	V
Elektrischer Strom	Ampere	I	A
Elektrische Stromdichte		J	$\mathrm{A/m^2}$
Elektrischer Widerstand	Ohm	R	Ω = V/A
Elektrische Ladung	Coulomb	Q	C = A·s
Raumladungsdichte		ρ	$\mathrm{A \cdot s/m^3}$
Flächenladungsdichte		σ	$\mathrm{A \cdot s/m^2}$
Elektrische Feldstärke		E	V/m = N/C
Dielektrische Verschiebungsdichte		D	$\mathrm{A \cdot s/m^2}$
Magnetische Flussdichte	Tesla	B	$\mathrm{T = V \cdot s/m^2}$
Magnetische Feldstärke		H	A/m

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

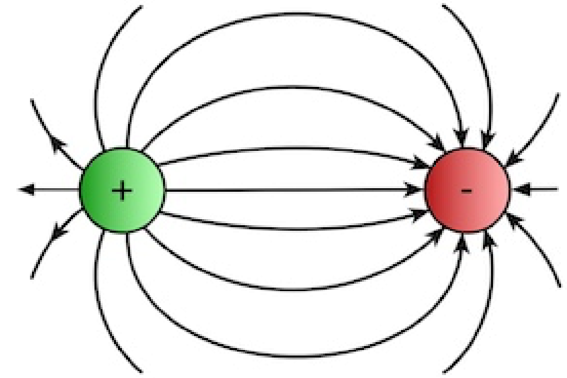
Größen und Einheiten

Abgeleitete Größe	Einheit	Symbol	Einheiten-zeichen
Leistung	Watt	P	W
Arbeit, Energie	Joule	W	J = W·s
Energiedichte		w	J/m^3
Frequenz	Hertz	f	1/s
Kreisfrequenz	Hertz	ω	1/s
Wellenlänge		λ	m
Wellenzahl		k	1/m

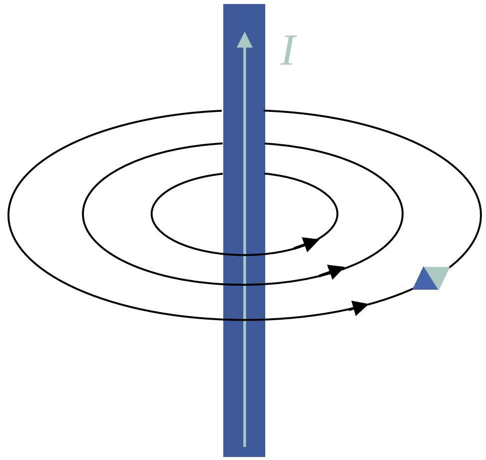
- Elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0 = 8{,}854... \cdot 10^{-12}$ (As)/(Vm)
- Magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
- Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\,792\,468$ m/s $\approx 2 \cdot 10^8$ m/s

Quellenfelder und Wirbelfelder

Quellenfelder sind Vektorfelder mit einer Quelle (Anfang) und einer Senke (Ende), beispielsweise elektrostatische Felder zweier Punktladungen. Die **Divergenz** ist Ursache für Quellenfelder.



Wirbelfelder sind Vektorfelder mit geschlossenen Feldlinien. Sie haben eine Richtung, aber weder Quelle, noch Senke. Ihre Divergenz ist daher Null. Das gilt beispielsweise für alle Magnetfelder oder für induzierte elektrische Wirbelfelder. Die **Rotation** ist die Ursache für Wirbelfelder. Das kann z.B. der Strom in einem Leiter-draht sein.



Bildquelle: Vorlesung “Elektromagnetische Felder”, Prof. Doppelbauer, KIT

Maxwellgleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{F} = \int_V \rho\, dV = Q$
• Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder. • Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung.		
$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = -\int_F \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} d\boldsymbol{F}$
• Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.		
$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{s} = \int_F \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) d\boldsymbol{F}$
• Magnetische Wirbelfelder werden durch einen elektrischen Strom oder ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld (Verschiebungsstrom) verursacht.		
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{F} = 0$
• Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.		

„Satz vom Hüllenfluss“

Induktions-gesetz

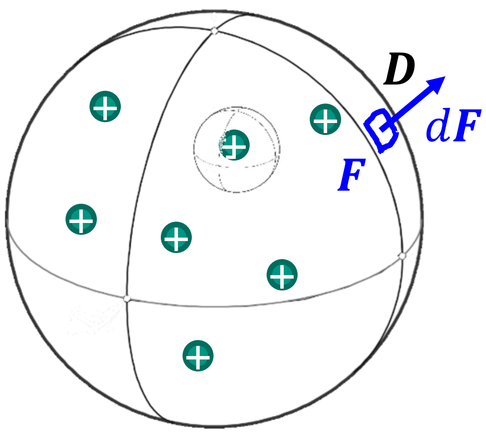
Durchflutungs-gesetz

Maxwellgleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{F} = \int_V \rho\, dV = Q$

„Satz vom Hüllenfluss“

- Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder.
- Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung.

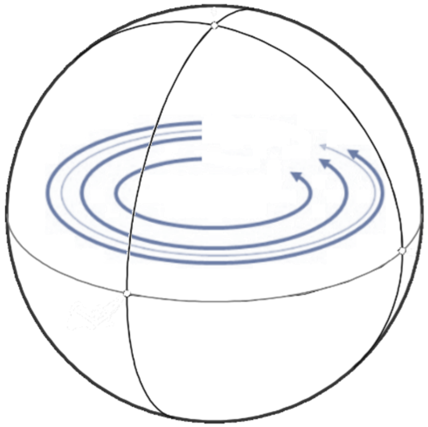


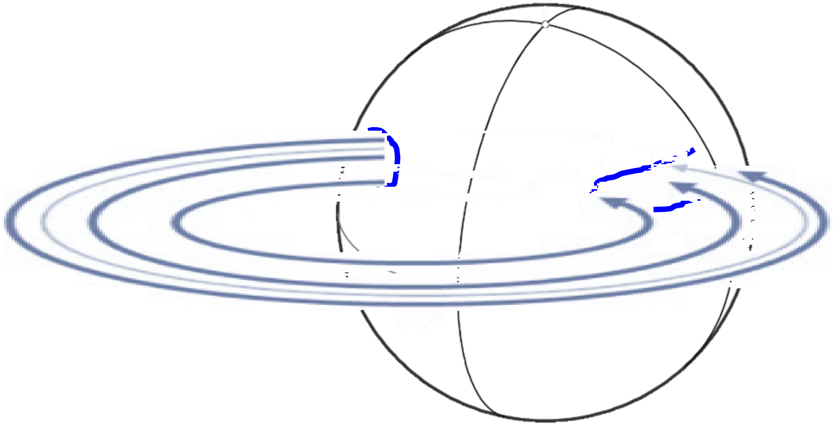
Das Skalarprodukt berechnet das senkrecht durch die Teiloberfläche hindurchtretende Feld. Integration über die gesamte Oberfläche ergibt die Summe des Zu- und Abflusses.

Das Volumenintegral der Kugel entspricht der Summe aller in der Kugel enthaltenen Ladungsanteile.

Maxwellgleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform



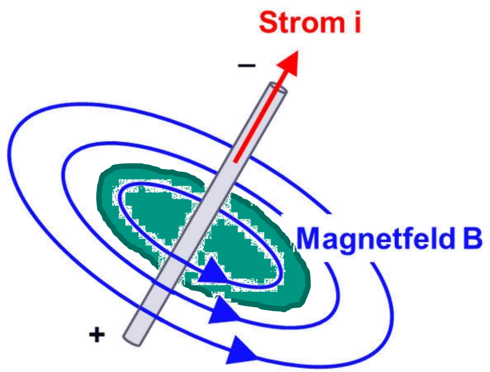


Es sind entweder alle geschlossenen Feldlinien in der Kugel enthalten oder sämtliche in die Kugel eintretenden Feldlinien verlassen diese auch wieder auf der anderen Seite.

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{F} = 0$

- Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.

Maxwellgleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform
		Das Flächenintegral berechnet den senkrecht durch die Fläche (z.B. die grüne Fläche) tretenden elektrischen Strom. Das Wegintegral (oder Linienintegral) der magnetischen Feldstärke entlang des Randes der Fläche ist identisch.
$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{s} = \int_F \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) d\boldsymbol{F}$
• Magnetische Wirbelfelder werden durch einen elektrischen Strom oder ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld (Verschiebungsstrom) verursacht.		
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{F} = 0$
• Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.		

„Satz vom Hüllenfluss"

Induktions-gesetz

Durchflutungs-gesetz

Bildquelle: https://www.emf.ethz.ch/emf-info/themen/physik/magnetische-felder/typen-von-magnetischen-feldern/

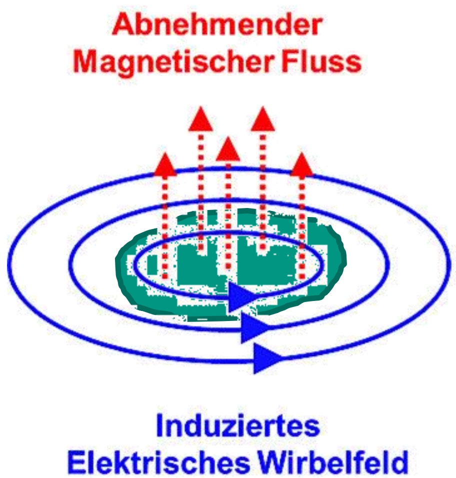
Maxwellgleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{F} = \int_V \rho\, dV = Q$
• Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder. • Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung.		
$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = -\int_F \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} d\boldsymbol{F}$
• Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.		

„Satz vom Hüllenfluss“

Induktions-gesetz

Durchflutungs-gesetz



Das Flächenintegral berechnet die zeitliche Änderung des Magnetfeldes, welche auf der grünen Fläche wirksam wird, d.h. senkrecht durch die Fläche hindurchtritt.

Das Wegintegral (oder Linienintegral) der elektrischen Feldstärke entlang des Randes der Fläche ist identisch.

Bildquelle: https://www.emf.ethz.ch/de/emf-info/themen/physik/verknuepfung-von-elektrischen-und-magnetischen-feldern/erzeugung-von-spannung-und-strom-durch-induktion/

Skalare und Vektoren

Karlsruhe Institute of Technology

- Skalar: durch Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert
- Vektor: durch Angabe eines Zahlenwertes und einer Geschwindigkeit charakterisiert; durch Pfeil oder fettierte Schreibweise gekennzeichnet

Die Position im Spaltenvektor gibt die Richtung der Komponente an

$$\vec{v} = \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \boxed{v_x(x,y,z)} \\ v_y(x,y,z) \\ v_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \boxed{v_x(x,y,z)}\boxed{\boldsymbol{e}_x} + v_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + v_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

Der Einheitsvektor gibt die Richtung der Komponente an

Skalare Feldkomponente, die an jedem Punkt im Raum einen anderen Wert annehmen kann und daher im Allgemeinen von allen Koordinaten x, y, z abhängt

Skalarprodukt und Vektorprodukt

Skalarprodukt

- Das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren einen Skalar zu.
- Das Skalarprodukt zueinander orthogonaler Vektoren ist 0.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Vektorprodukt

- Das Vektorprodukt ordnet zwei Eingangsvektoren einen Vektor zu, der senkrecht zu diesen beiden Eingangsvektoren steht.
- Es ergibt sich ein mathematisches Rechtssystem (Rechtsschraube).

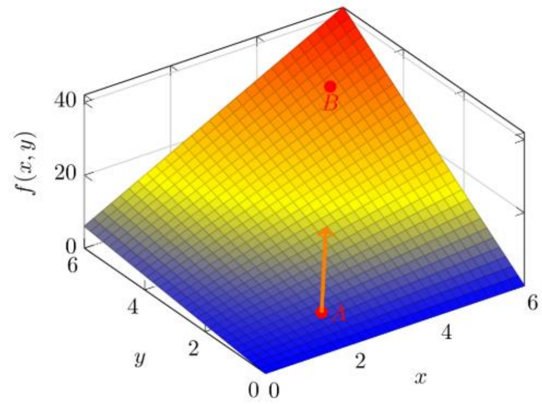
$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Differentialrechnung

Richtungsableitungen

- Ableitung einer von mehreren Variablen abhängigen Funktion entlang einer beliebigen Richtung, vorgegeben durch einen Vektor

$$D_v f(x) = \nabla_v f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial v} = \frac{f(x+hv) - f(x)}{hv}$$



Bildquelle: https://www.massmatics.de/merkzettel/#!203:Die_Richtungsableitung

Partielle Ableitungen

- Spezialfall der Richtungsableitung, bei denen entlang der kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ differenziert wird
- Beispiel: $f(x) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$

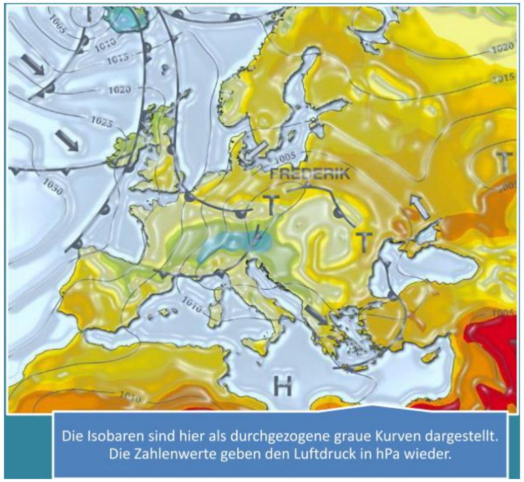
$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, const, const)}{\partial x} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x + 2yz$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f(const, y, const)}{\partial y} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2y + 2xz$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial f(const, const, z)}{\partial z} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z + 2xy$$

Skalarfeld

- Ordnet jedem Punkt im Raum einen skalaren Wert zu, z.B. ein elektrisches Potential oder eine Temperatur ($f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)
- Beispiel: $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y - 3z$



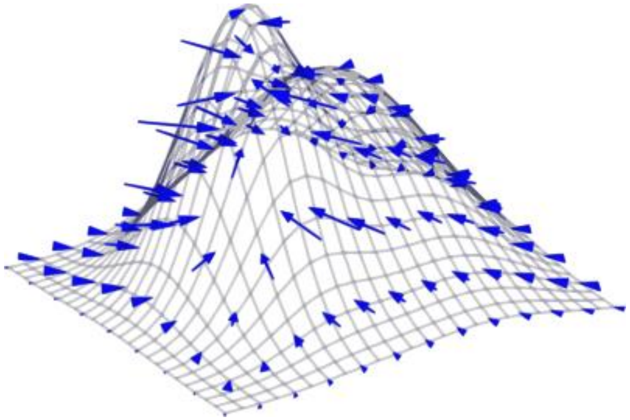
Bildquelle: https://www.abiweb.de/physik-ladungen-felder/feldkonzept-allgemeiner-ueberblick/skalarfeld.html

Gradient (Steigung)

- Vektorfeld, das die partiellen Ableitungen als Komponenten enthält
- Anschauung: zeigt an jedem Punkt in die Richtung der maximalen Steigung des Skalarfelds

$$\mathrm{grad}(\Phi) = \nabla\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\boldsymbol{e_x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\boldsymbol{e_y} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\boldsymbol{e_z}$$

Nabla-Operator



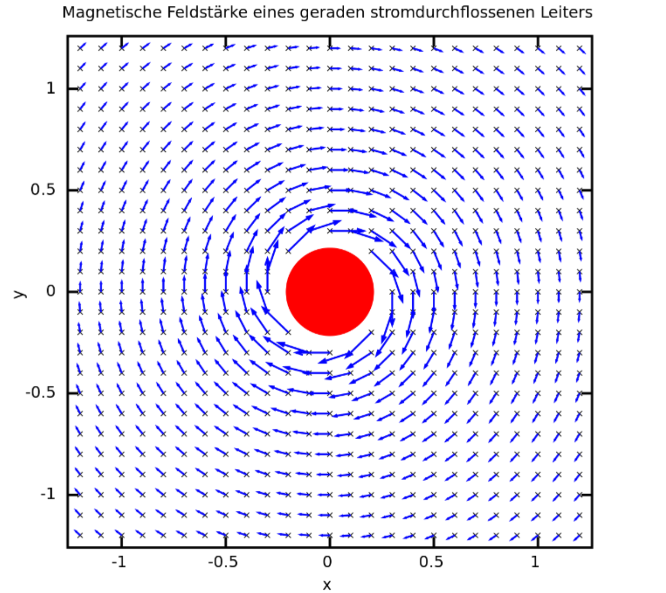
Bildquelle: http://lp.uni-goettingen.de/get/image/2320

Vektorfeld

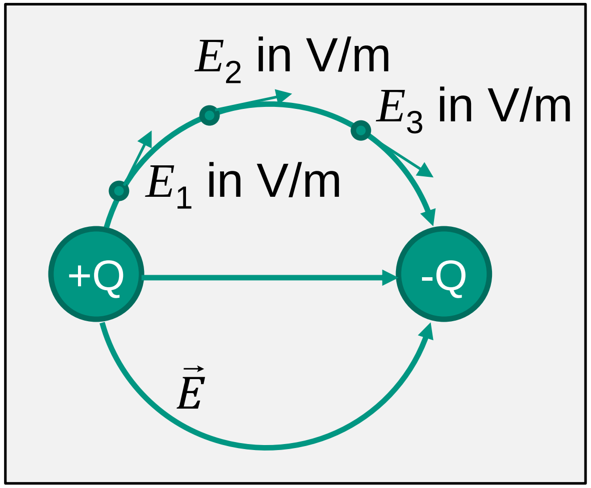
- Ordnet jedem Punkt im Raum einen Vektor zu, z.B. eine elektrische Feldstärke ($f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

- Beispiel: $\boldsymbol{E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x - 4y + z \\ -2y + 3z \end{pmatrix}$

- Feldlinien repräsentieren keine krummen Vektoren, sondern ein Vektorfeld. Die Krümmung der Feldlinien entsteht aus der Hintereinanderzeichnung der Einheitsvektoren.



Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Vektorfeld

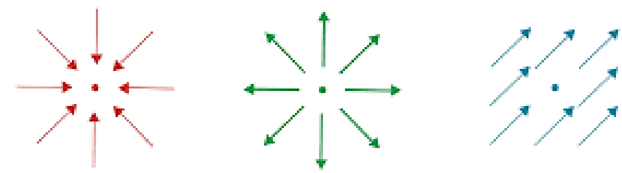


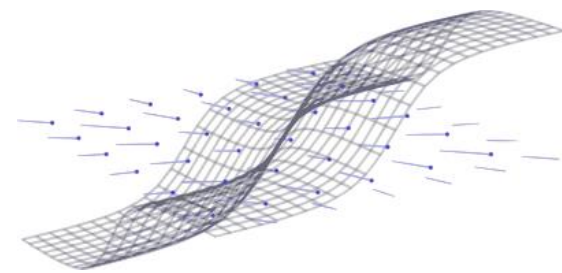
Vektorfeld

Divergenz (Quellstärke)

- Skalarfeld, das sich als Skalarprodukt des Vektor-feldes mit dem Nabla-Operator ergibt
- Anschauung: Quelldichte oder Ergiebigkeit des Vektorfeldes, d.h. div > 0 für Quellen und div < 0 für Senken
- Jeder Einzelterm misst die Quelldichte der Feldanteile, die durch die zur jeweiligen Richtung senkrecht liegenden Randflächen hindurchtreten.

$\nabla \cdot \boldsymbol{E} < 0$ $\quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} > 0$ $\quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$





Bildquelle: https://lp.uni-goettingen.de/get/text/766

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{E}) = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Nabla-Operator

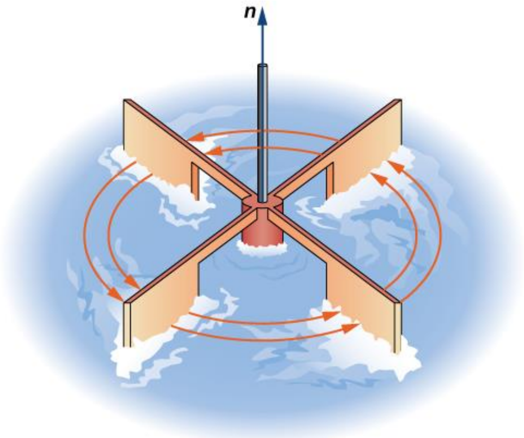
Vektorfeld

Rotation (Wirbelstärke)

- Vektorfeld, das sich als Kreuzprodukt des Vektorfeldes mit dem Nabla-Operator ergibt
- Anschauung: Maß für die Dichte von Wirbelursachen bzw. die Ungleichmäßigkeit eines Wirbelfeldes
- Zeigt in die Normalrichtung der Fläche mit dem stärksten Wirbel

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{E}) = \nabla \times \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

Nabla-Operator



Bildquelle: https://opentextbc.ca/calculusv3openstax/chapter/divergence-and-curl/

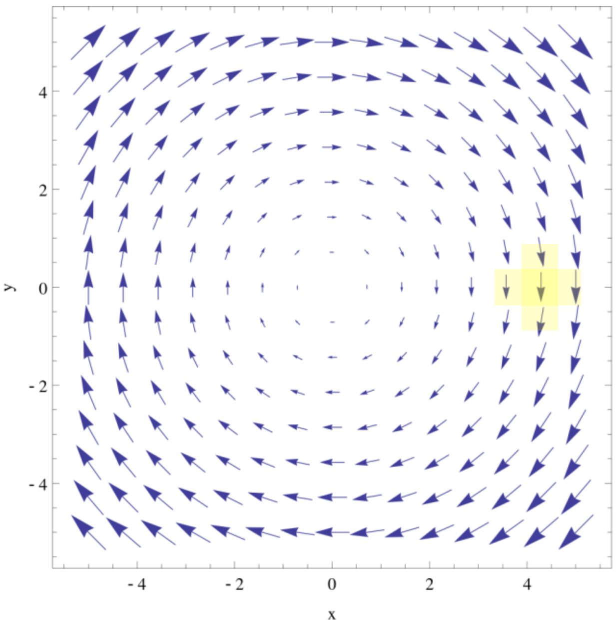
Vektorfeld

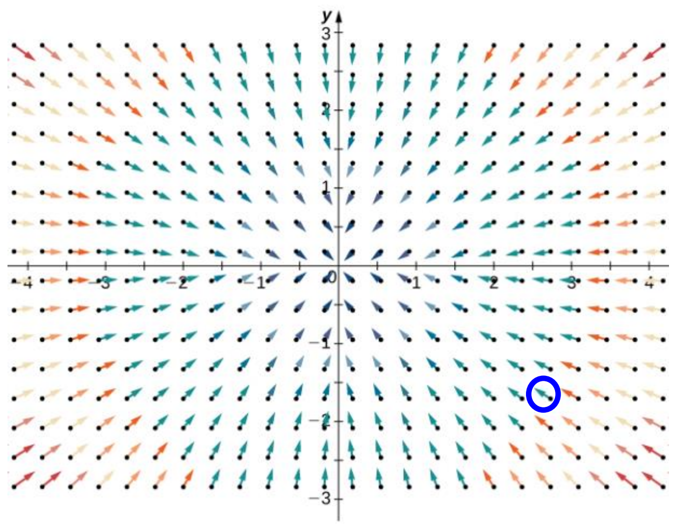
Rotation (Wirbelstärke)

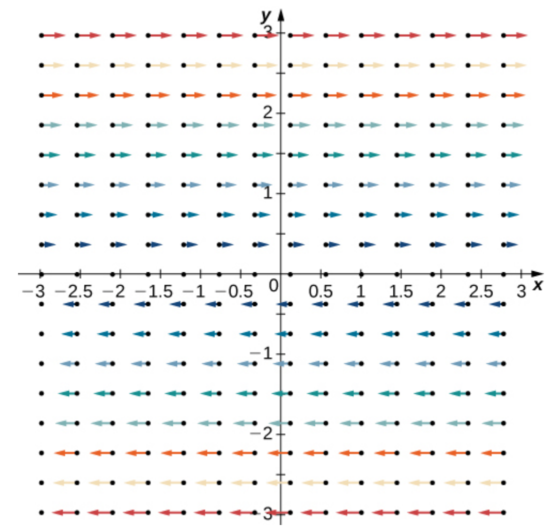
- Betrachtung zweidimensionaler Vektorfelder erleichtert die Anschauung. Dann gilt:

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{E}) = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

(„Nimmt der zu einer Richtung orthogonale Anteil genauso stark zu wie der zur orthogonalen Richtung orthogonale Anteil, so verschwindet die zugehörige Komponente.“)







Ableitungen $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ und $\frac{\partial E_x}{\partial y}$ sind in jedem Punkt verschieden

Ableitungen $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ und $\frac{\partial E_x}{\partial y}$ sind in jedem Punkt identisch

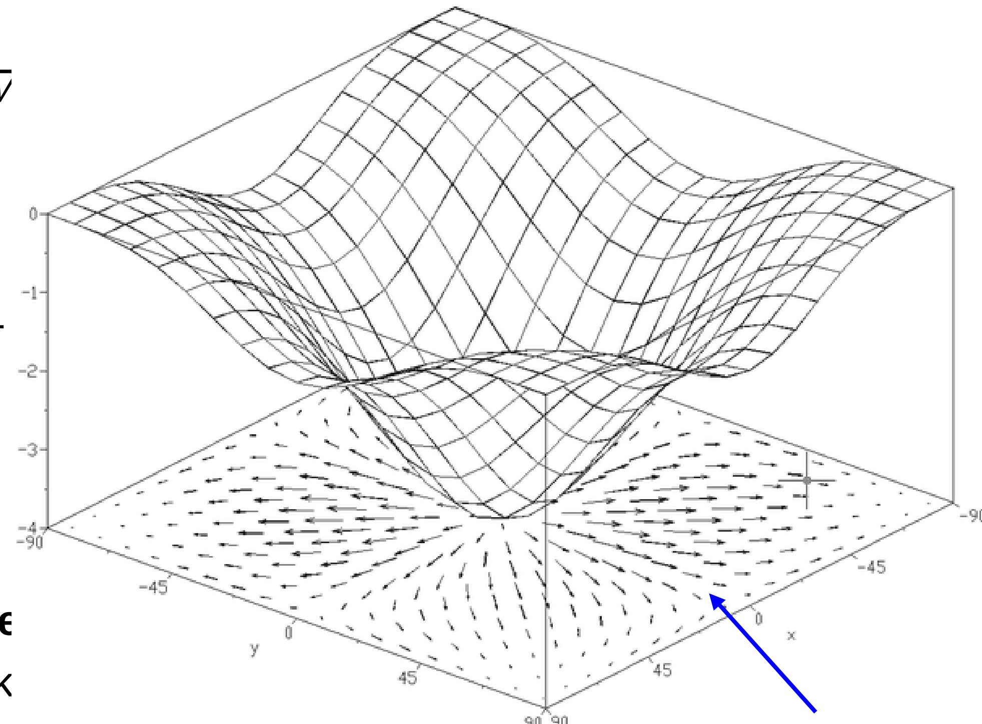
Skalarfeld und Vektorfeld

Laplace-Operator für Skalarfelder (Potentialfeldquellstärke)

- Skalarfeld, das die Divergenz des Gradienten enthält
- Anschauung: gibt die „Krümmung“ des Skalarfeldes an

$$\Delta\Phi = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(\Phi)) = \nabla\cdot(\nabla\Phi) = \nabla\cdot\nabla$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,y,z) \\ \frac{\partial}{\partial z}\Phi(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} +$$



Gradient des Skalarfeldes

Laplace-Operator für Vektorfelder (Pote

- Wird der Laplace-Operator auf ein Vek die Anwendung komponentenweise unabhängig.

$$\Delta\boldsymbol{A} = \Delta\boldsymbol{A}_x\boldsymbol{e}_x + \Delta\boldsymbol{A}_y\boldsymbol{e}_y + \Delta\boldsymbol{A}_z\boldsymbol{e}_z$$

Bildquelle: https://www.quora.com/What-is-the-physical-meaning-of-the-laplacian-operator/

Nabla-Operator

- Operator, der eine kompakte Notation für die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator erlaubt

$\mathrm{grad}(\Phi) = \nabla\Phi$	Operation wird auf ein Skalarfeld angewendet → Vektorfeld
$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}) = \nabla \cdot \boldsymbol{A}$	Operation wird auf ein Vektorfeld angewendet → Skalarfeld
$\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}) = \nabla \times \boldsymbol{A}$	Operation wird auf ein Vektorfeld angewendet → Vektorfeld
$\Delta(\boldsymbol{A}) = \nabla^2(\boldsymbol{A})$	Operation wird auf ein Skalarfeld angewendet → Skalarfeld Operation wird auf ein Vektorfeld angewendet → Vektorfeld

- Der Nabla-Operator kann als Vektor interpretiert werden und wird daher in der Literatur auch häufig mit einem Pfeil gekennzeichnet. $\nabla = \boldsymbol{\nabla} = \vec{\nabla}$

- Die Darstellung des Operators ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

Rechenregeln mit Differentialoperatoren

- Nützliche Rechenregeln mit dem Nabla-Operator

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0 \qquad \mathrm{rot}\big(\mathrm{grad}(\Phi)\big) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = 0 \qquad \mathrm{div}\big(\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})\big) = 0$$

$$\nabla \cdot (\Phi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \Phi) + \Phi(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) \qquad \mathrm{div}(\Phi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{grad}(\Phi) + \Phi\,\mathrm{div}(\boldsymbol{A})$$

$$\nabla \times (\Phi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \Phi) + \Phi(\nabla \times \boldsymbol{A}) \qquad \mathrm{rot}(\Phi \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}\,\mathrm{grad}(\Phi) + \Phi\,\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})$$

$$\Delta \boldsymbol{A} = \nabla^2 \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) \qquad \Delta \boldsymbol{A} = \mathrm{grad}\big(\mathrm{div}(\boldsymbol{A})\big) - \mathrm{rot}\big(\mathrm{rot}(\boldsymbol{A})\big)$$

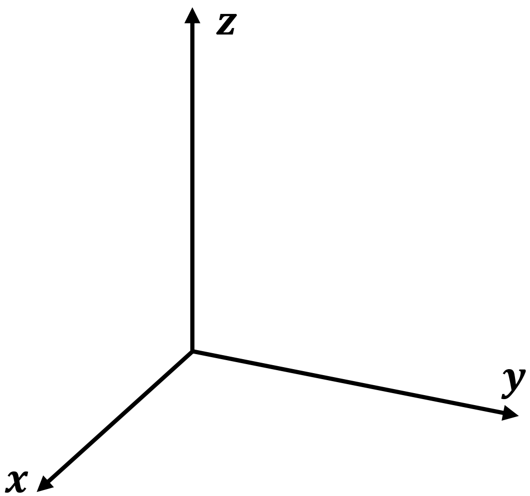
- Beispielhafter Nachweis der Regeln in kartesischen Koordinaten an der Tafel

Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten

x, y, z

Ausbreitung ebener Wellen

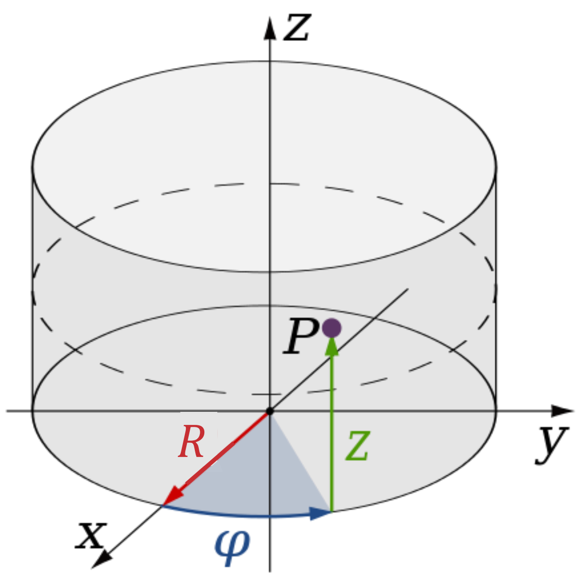


Zylinderkoordinaten

R, φ, z

Metalldraht (Antenne)

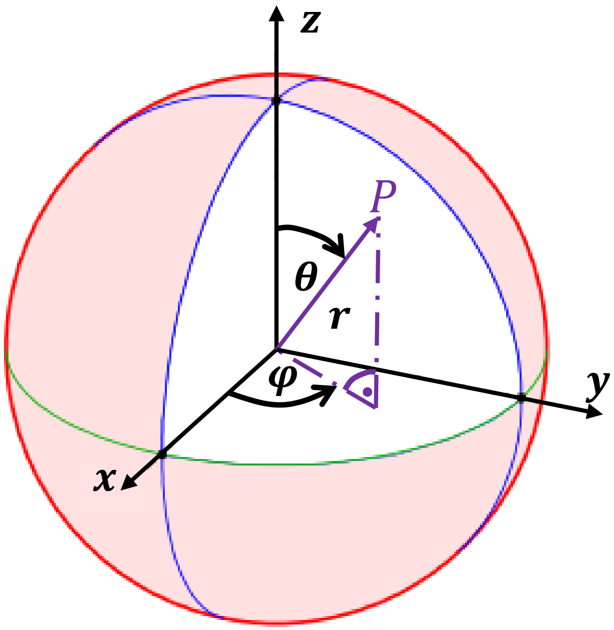
Spezialfall: unendlich dünner, unendlich ausgedehnter Draht



Kugelkoordinaten

r, θ, φ

Ausbreitung von Kugelwellen



Nabla-Operator

- Die Darstellung ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig.

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

Kartesische Koordinaten

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R}\boldsymbol{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

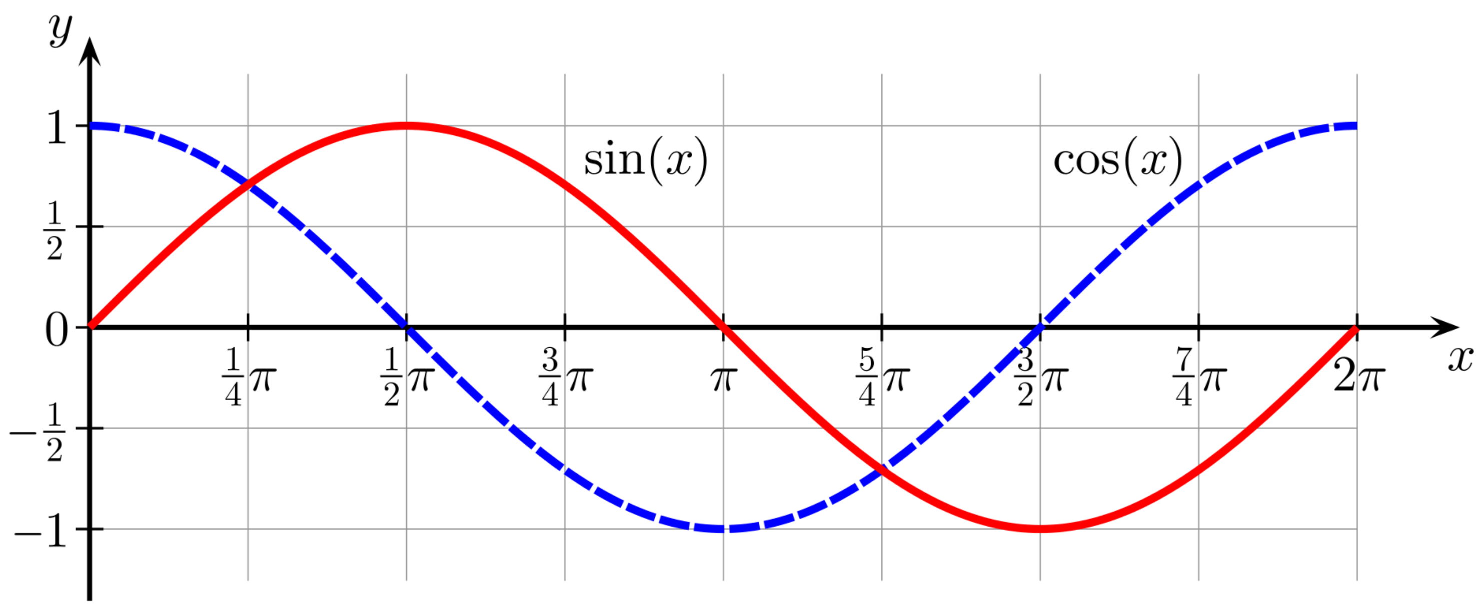
Zylinderkoordinaten

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta$$

Kugelkoordinaten

- Nachweis der Formel für Zylinderkoordinaten an der Tafel

Nabla-Operator



Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Sinus_und_Kosinus#/media/Datei:Sine_cosine_one_period.svg

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

EMF-Formelsammlung: Differentialoperatoren

Karlsruhe Institute of Technology

Kartesische Koordinaten		Zylinderkoordinaten		Kugelkoordinaten

$$\operatorname{grad}\Phi = \vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \vec{e}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

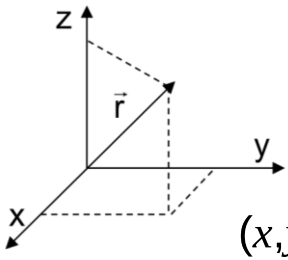
$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(R\cdot A_r\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot A_r\right) + \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(A_\vartheta\cdot\sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{A} &= \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\
&= \vec{e}_x\left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\cdot A_\varphi\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial \varphi}\right)\\
&= \vec{e}_x\frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(A_\varphi\cdot\sin\vartheta\right) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot A_\varphi\right)\right) + \vec{e}_\varphi\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot A_\vartheta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}\right)\end{aligned}$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

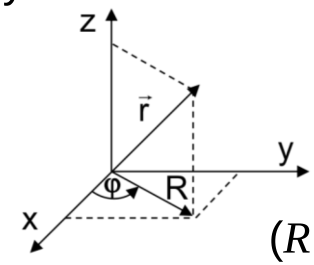
EMF-Formelsammlung: Ortsvektoren

Kartesische Koordinaten



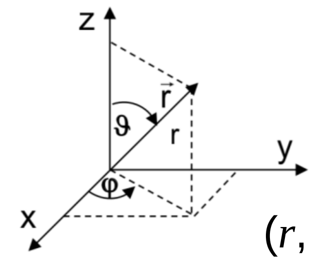
(x,y,z)

Zylinderkoordinaten



(R,φ,z)

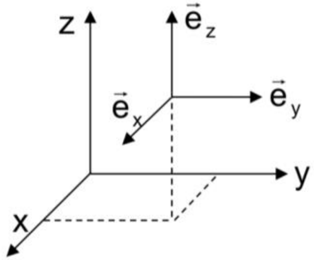
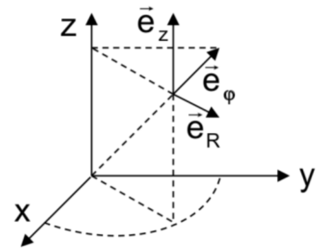
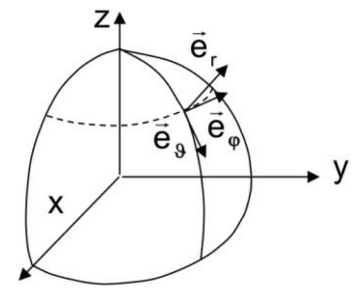
Kugelkoordinaten



(r,ϑ,φ)

x	$=$	$R\cdot\cos\varphi$	$=$	$r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi$
y	$=$	$R\cdot\sin\varphi$	$=$	$r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$
z	$=$	z	$=$	$r\cdot\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	$=$	R	$=$	$r\cdot\sin\vartheta$
$\arctan\frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ
z	$=$	z	$=$	$r\cdot\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$=$	$\sqrt{R^2+z^2}$	$=$	r
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$=$	$\arctan\frac{R}{z}$	$=$	ϑ
$\arctan\frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ

EMF-Formelsammlung: Feldkomponenten

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
		
$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$	$A_R \vec{e}_R + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z$	$A_r e_r + A_\vartheta e_\vartheta + A_\varphi e_\varphi$

$$A_x = A_r \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi = A_r \sin\vartheta \cos\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi$$
$$A_y = A_r \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi = A_r \sin\vartheta \sin\varphi + A_\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi$$
$$A_z = A_z = A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$$

$$A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi = A_R = A_r \sin\vartheta + A_\vartheta \cos\vartheta$$
$$-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi = A_\varphi = A_\varphi$$
$$A_z = A_z = A_r \cos\vartheta - A_\vartheta \sin\vartheta$$

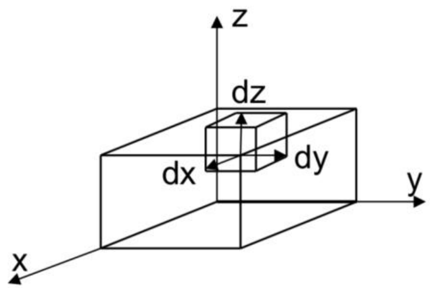
$$A_x \sin\vartheta \cos\varphi + A_y \sin\vartheta \sin\varphi + A_z \cos\vartheta = A_r \sin\vartheta + A_z \cos\vartheta = A_r$$
$$A_x \cos\vartheta \cos\varphi + A_y \cos\vartheta \sin\varphi - A_z \sin\vartheta = A_r \cos\vartheta - A_z \sin\vartheta = A_\vartheta$$
$$-A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi = A_\varphi = A_\varphi$$

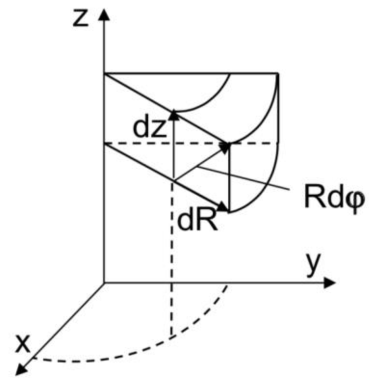
Zielspalte mit Kugel-koordinaten

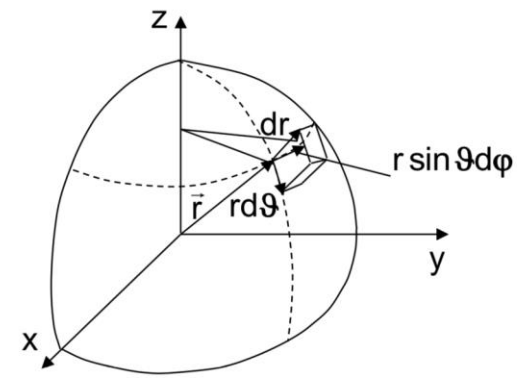
Spalte mit bekannten Feldgrößen

EMF-Formelsammlung: Flächen- & Volumenelemente

Kartesische Koordinaten | Zylinderkoordinaten | Kugelkoordinaten







$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{e}_x\,\mathrm{d}x + \vec{e}_y\,\mathrm{d}y + \vec{e}_z\,\mathrm{d}z \quad = \quad \vec{e}_R\cdot\mathrm{d}R + \vec{e}_\varphi\cdot R\cdot\mathrm{d}\varphi + \vec{e}_z\cdot\mathrm{d}z \quad = \quad \vec{e}_r\cdot\mathrm{d}r + \vec{e}_\vartheta\cdot r\cdot\mathrm{d}\vartheta + \vec{e}_\varphi\cdot r\cdot\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}\varphi$$

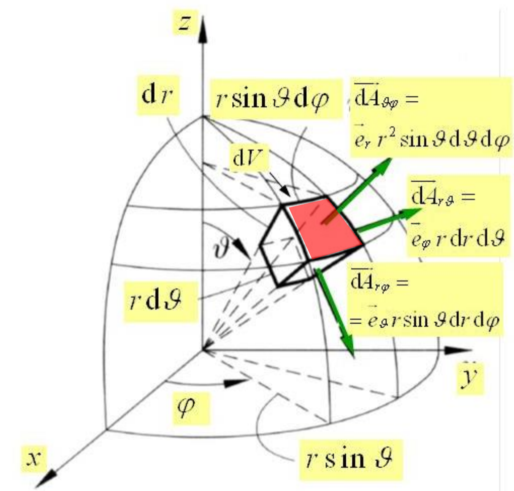
$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{f} = \vec{e}_x\cdot\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \qquad \vec{e}_R\cdot R\cdot\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z & \qquad \vec{e}_r\cdot r^2\cdot\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi \\ +\vec{e}_y\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad = & \qquad +\vec{e}_\varphi\cdot\mathrm{d}R\,\mathrm{d}z \quad = & \qquad +\vec{e}_\vartheta\cdot r\cdot\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ +\vec{e}_z\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \qquad +\vec{e}_z\cdot R\cdot\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi & \qquad +\vec{e}_\varphi\cdot r\cdot\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\end{aligned}$$

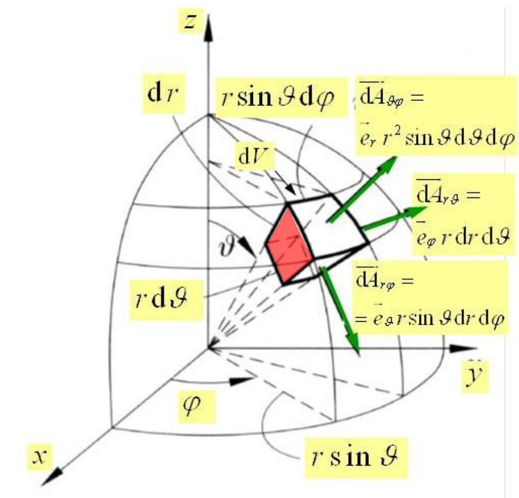
$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad = \quad R\cdot\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \quad = \quad r^2\cdot\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

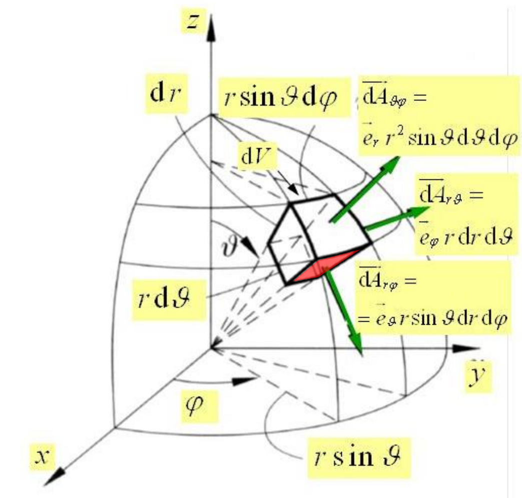
Kugelkoordinaten

- Die Formelsammlung gibt die allgemeinste Form des Flächenelements an.

$$\boxed{\mathrm{d}\mathbf{F} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi\ \boldsymbol{e}_r} + \boxed{\mathrm{d}\mathbf{F} = r dr d\theta\ \boldsymbol{e}_\varphi} + \boxed{\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{r}\sin(\theta) dr d\varphi\ \boldsymbol{e}_\theta}$$







- Normalenvektor des Flächenelements zeigt in Richtung des Radius r Integration über θ, φ
- Abhängig vom gewählten Radius ergibt sich eine Kugeloberfläche

- Normalenvektor des Flächenelements zeigt in Richtung von φ
- Integration über r, θ
- Abhängig vom gewählten Winkel φ ergibt sich ein halber Kugelquerschnitt (für begrenztes r)

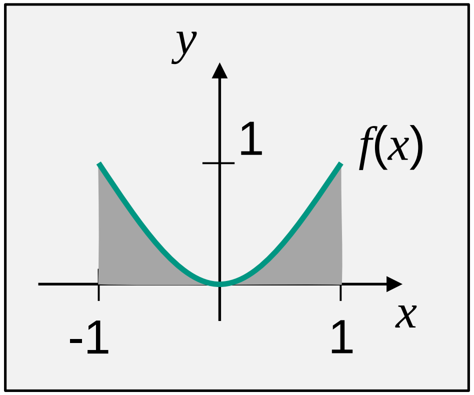
- Normalenvektor des Flächenelements zeigt in Richtung von θ
- Integration über r, φ
- Abhängig vom gewählten Winkel θ ergibt sich die Kugelgrundfläche oder der Mantel eines Kegels

Karlsruhe Institute of Technology

Integralrechnung

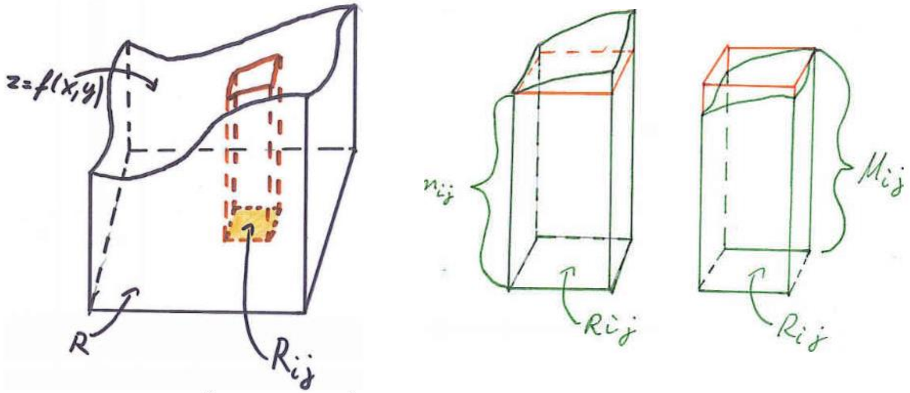
- Integral: Fläche unter einer Kurve (Summation von „Rechtecken“)

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$



- Flächenintegral / Doppelintegral: Volumen unter einer Oberfläche oder projizierte Fläche, falls $f(x,y) = 1$ (Summation von „Säulen“)

$$F(x) = \iint f(x,y)dxdy = \int_F f(x,y)dF$$



Bildquelle: Vorlesung “Elektromagnetische Felder”, Prof. Doppelbauer, KIT

Integralrechnung

- Volumenintegral / Dreifachintegral: Erweiterung auf dreidimensionale Funktionen $f(x,y,z)$, z.B. Integration über alle Temperatur- oder Potentialwerte im Raum

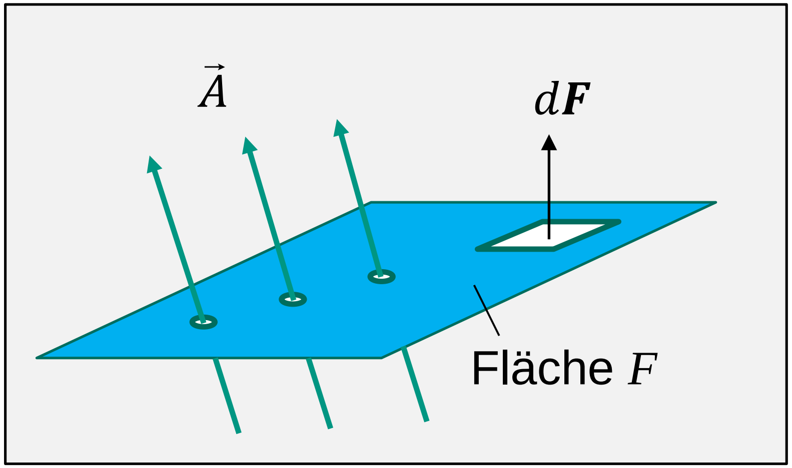
$$F(x) = \iiint f(x,y,z)dxdydz = \int_V f(x,y,z)dV$$

- (Ober)flächenintegral: Berechnung der senkrecht durch ein Flächenstück hindurchtretenden Komponente eines Vektorfeldes $\boldsymbol{A}$

$$F(x) = \iint \boldsymbol{A}(x,y)dxdy\boldsymbol{e}_z = \int_F f(x,y)d\boldsymbol{F}$$

$$F(x) = \oiint \boldsymbol{A}(x,y)dxdy\boldsymbol{e}_z = \oint_F \boldsymbol{A}(x,y)d\boldsymbol{F}$$

Normalenvektor der Ebene / Fläche



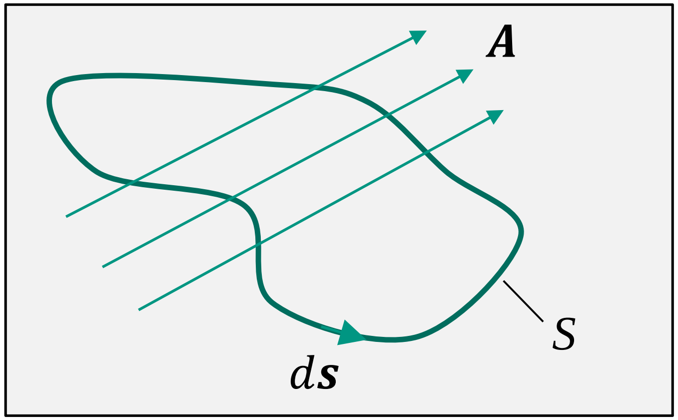
Bildquelle: Vorlesung "Elektromagnetische Felder", Prof. Doppelbauer, KIT

Integralrechnung

- Kurvenintegral: Berechnung der Fläche unter einer Raumkurve oder der Länge der Raumkurve, falls $f(x, y, z) = 1$

  In EMW meist Integration entlang geschlossener Feldlinien.

$$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{s}$$



Bildquelle: Vorlesung “Elektromagnetische Felder”, Prof. Doppelbauer, KIT

Integralsatz von Gauß

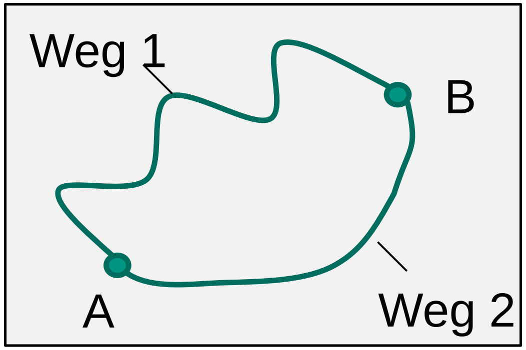
$$\int_{O=\partial V} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{F} = \int_{V} \mathrm{div}(\boldsymbol{A})\, dV$$

- Anschauung: Man erzielt das gleiche Ergebnis, wenn man den Fluss durch eine geschlossene Hüllfläche (z.B. eine Kugeloberfläche) berechnet und wenn man alle von der Hülle eingeschlossenen Quellen und Senken aufaddiert.

Integralsatz von Stokes

$$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{s} = \int_{F} \mathrm{rot}(\boldsymbol{A})\, d\boldsymbol{F}$$

- Anschauliche Interpretation: nicht direkt vorhanden



Linienintegral

$$\int_{A}^{B} \mathrm{grad}(\Phi) d\boldsymbol{s} = \Phi(B) - \Phi(A)$$

- Das Wegintegral über den Gradienten eines Skalarfeldes vom Punkt A zum Punkt B ist gleich der Differenz der Werte der Potentialfunktion an den beiden Punkten A und B unabhängig vom Verlauf des Integrationswegs zwischen den Punkten.

Maxwellgleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform
$div(\boldsymbol{D}) = \rho$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{F} = \int_V \rho\, dV = Q$
• Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder. • Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung.		
$rot(\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = -\int_F \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} d\boldsymbol{F}$
• Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.		
$rot(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{s} = \int_F \left(\boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) d\boldsymbol{F}$
• Magnetische Wirbelfelder werden durch einen elektrischen Strom oder ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld (Verschiebungsstrom) verursacht.		
$div(\boldsymbol{B}) = 0$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{F} = 0$
• Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.		

„Satz vom Hüllenfluss“

Induktions-gesetz

Durchflutungs-gesetz

Materialgleichungen

- Für lineare Materialien gilt:
  $\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$
  $\boldsymbol{B} = \mu_0 \mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$

- Vakuumpermittivität / elektrische Feldkonstante: $\varepsilon_0 \approx 8{,}854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$
- Relative Permittivität / Permittivität: ε_r
- Vakuumpermeabilität / magnetische Feldkonstante: $\mu_0 \approx 1{,}257 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$
- Relative Permeabilität / Permeabilität: μ_r

- Für isotrope Materialien sind ε, μ und κ richtungsunabhängig.
- Für homogene Materialien sind ε, μ und κ konstant.
- Im Allgemeinen kann die Permittivität ε_r eine komplexe Größe mit Real- und Imaginärteil sein.

Spezialfälle der Maxwellgleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellgleichungen	Zentrale Gleichung
Elektrostatik	Stationäre Größen $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ Keine Ströme $\boldsymbol{J} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$	Poisson-Gleichung $\Delta\Phi + \frac{1}{\varepsilon}\cancel{\nabla\varepsilon}\nabla\Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

Homogene Materialien mit konstanter Leitfähigkeit κ und Permittivität ε

- Raumladung ρ ist bekannt, elektrisches Potential Φ ist gesucht → Coulomb-Integral als Lösung der Poisson-Gleichung
- Raumladung ρ ist unbekannt, elektrisches Potential ist an Randstellen bekannt, Φ im gesamten Raum ist gesucht → Separationsansatz, Spiegelungsmethode, etc.
- DGL hat unendlich viele Lösungen, die erst durch Randbedingungen ($\Phi(\infty) = 0$) eindeutig wird.

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellgleichungen	Zentrale Gleichung
Stationäre Strömungen	Stationäre Größen $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ Ohmsches Gesetz $\boldsymbol{J} = \kappa\boldsymbol{E}$	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$	Laplace-Gleichung $\Delta\Phi + \frac{1}{\kappa}\cancel{\nabla\kappa}\nabla\Phi = 0$ Vektorpotential $\Delta\boldsymbol{A} = -\mu\boldsymbol{J}$

- Im ladungsfreien Raum verschwindet ρ im Vergleich zur Poisson-Gleichung, was die Lösung der DGL vereinfacht.

Spezialfälle der Maxwellgleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellgleichungen	Zentrale Gleichung
Langsam veränderliche Felder	Vernachlässisgbare zeitl. Ableitung der Verschiebungsdichte $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$	Diffusionsgleichung $\Delta \boldsymbol{A} - \mu\kappa \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0$ $\Delta \Phi - \mu\kappa \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ (für $\rho = 0$)

- Dieser Spezialfall ist stets gültig für Metalle, siehe Vorlesung 2.

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellgleichungen	Zentrale Gleichung
Beliebig veränderliche Felder	Zeitl. Ableitung der Verschiebungsdichte ist nicht vernachlässigbar $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \neq 0$	$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	Telegraphengleichung $\Delta \boldsymbol{A} - \mu\kappa \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0$ $\Delta \Phi - \mu\kappa \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$ (für $\rho = 0$)

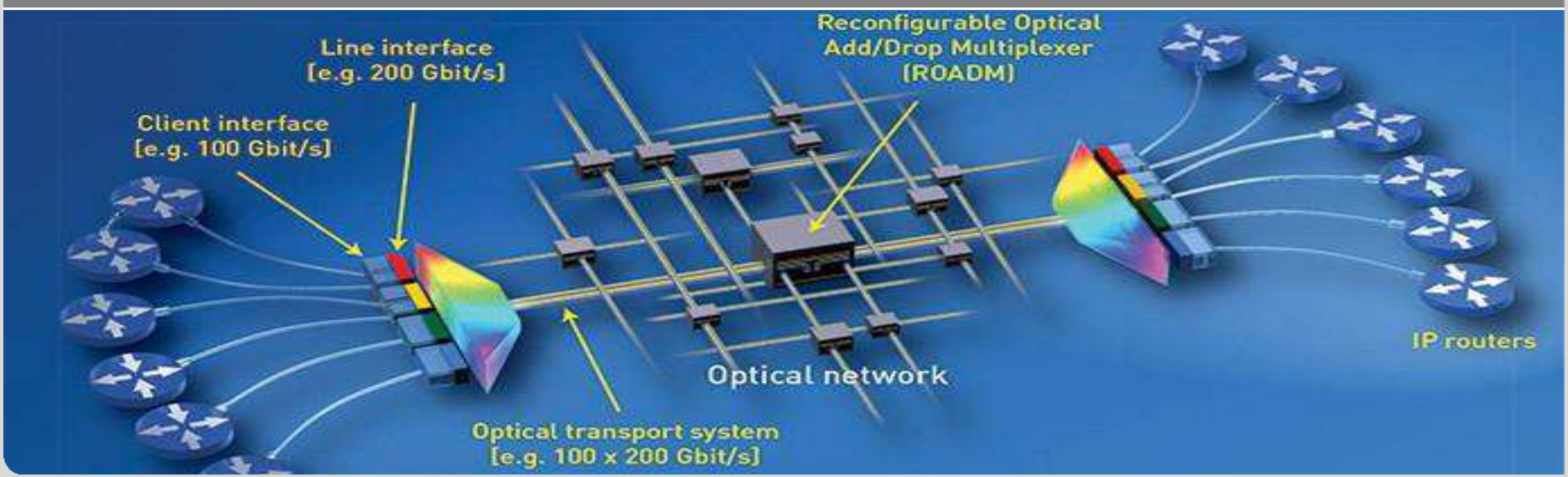
- Dieser allgemeinste Fall ist eine wesentliche Grundlage der elektroamgnetischen Wellen, da sich eine Kopplung zwischen elektrischem und magnetischem Feld ergibt.

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 2

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter
    www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu
- Wiederholung mathematischer Grundlagen
  - Differentialoperatoren
  - Differentialgleichungen
    - Partielle DGL
  - Ebene Wellen
- Übungsblatt 1

Bonussystem

- Die Lösungen zu den Übungsblättern werden dreimal pro Semester unangekündigt zu Beginn der Übung (11:30 Uhr) eingesammelt. Wer jeweils mehr als 2/3 eines Übungsblattes sinnvoll bearbeitet hat, bekommt 2 Punkte in der schriftlichen Prüfung gutgeschrieben.
- Die Punkte müssen in einem Semester erworben werden, eine Addition der Punkte aus zwei Semestern ist nicht möglich.
- Die gesammelten Punkte verfallen nach einem Jahr.
  Beispiel: Wurden die Übungsblätter im WS 19/20 abgegeben, können die daraus resultierenden Punkte letztmalig zur Klausur im Frühjahr 2021 angerechnet werden.
- Pro Person muss eine Lösung handschriftlich ausgearbeitet und abgegeben werden; Gruppenarbeiten werden nicht anerkannt. Ein gemeinsames Lösen der Aufgaben in Lerngruppen ist selbstverständlich erwünscht!
- „Sinnvoll bearbeitet“ heißt:
  - Das Aufgabenblatt ist klar beschriftet mit Namen, Matrikelnummer und Aufgaben-Nr.
  - Jede Lösung beginnt mit einer klaren Auflistung dessen, was gegeben ist (geg.: …), und enthält eine mathematische Umsetzung dessen, was gesucht ist (ges.: …)
  - Es folgt eine Lösung, die aus einem mathematischen Ansatz und einer Lösung bzw. einem sinnvollen Lösungsversuch besteht. Es wird dabei nicht bewertet, ob das Ergebnis in allen Details korrekt ist.

Kalender

2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	1 Fr Allerheiligen	1 So 1. Advent	1 Mi Neujahr	1 Sa	1 So	1 Mi Klausur
2 Mi	2 Sa	2 Mo Übung 7 49	2 Do	2 So	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	3 So	3 Di	3 Fr	3 Mo Übung 13 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo Übung 3 45	4 Mi Vorlesung 8	4 Sa	4 Di	4 Mi	4 Sa
5 Sa	5 Di	5 Do	5 So	5 Mi Vorlesung 15	5 Do	5 So
6 So	6 Mi Vorlesung 4	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	7 Sa	7 Di	7 Fr	7 Sa	7 Di
8 Di	8 Fr	8 So	8 Mi Vorlesung 11	8 Sa	8 So	8 Mi
9 Mi	9 Sa	9 Mo Übung 8 50	9 Do	9 So	9 Mo 11	9 Do
10 Do	10 So	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	10 Fr Karfreitag
11 Fr	11 Mo Übung 4 46	11 Mi Vorlesung 9	11 Sa	11 Di	11 Mi	11 Sa
12 Sa	12 Di	12 Do	12 So	12 Mi	12 Do	12 So Ostern
13 So	13 Mi Vorlesung 5	13 Fr	13 Mo Übung 10 3	13 Do	13 Fr	13 Mo Ostermontag 16
14 Mo 42	14 Do	14 Sa	14 Di	14 Fr	14 Sa	14 Di
15 Di	15 Fr	15 So	15 Mi Vorlesung 12	15 Sa	15 So	15 Mi
16 Mi Vorlesung 1	16 Sa	16 Mo Übung 9 51	16 Do	16 So	16 Mo 12	16 Do
17 Do	17 So	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo Übung 5 47	18 Mi Vorlesung 10	18 Sa	18 Di	18 Mi	18 Sa
19 Sa	19 Di	19 Do	19 So	19 Mi	19 Do	19 So
20 So	20 Mi Vorlesung 6	20 Fr	20 Mo Übung 11 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo Übung 1 43	21 Do	21 Sa	21 Di	21 Fr	21 Sa	21 Di
22 Di	22 Fr	22 So	22 Mi Vorlesung 13	22 Sa	22 So	22 Mi
23 Mi Vorlesung 2	23 Sa	23 Mo 52	23 Do	23 So	23 Mo 13	23 Do
24 Do	24 So	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosenmontag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo Übung 6 48	25 Mi 1. Weihnachtstag	25 Sa	25 Di	25 Mi	25 Sa
26 Sa	26 Di	26 Do 2. Weihnachtstag	26 So	26 Mi	26 Do	26 So
27 So	27 Mi Vorlesung 7	27 Fr	27 Mo Übung 12 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo Übung 2 44	28 Do	28 Sa	28 Di	28 Fr	28 Sa	28 Di
29 Di	29 Fr	29 So	29 Mi Vorlesung 14	29 Sa	29 So	29 Mi
30 Mi Vorlesung 3	30 Sa	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	1. Aufgabe	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	2. Aufgabe	Ebene und harmonische Wellen, Poynting Vektor

Übungsblatt 1 – Aufgabe 1

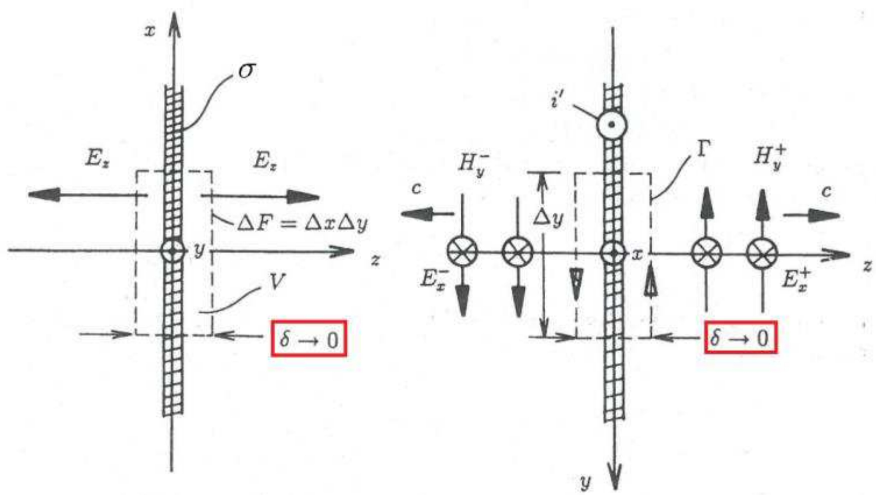
Berechnen Sie die Vektorfelder **E** und **H** für eine Flächenladung σ die sich in der xy-Ebene befindet. Die Ladung σ ist zunächst in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sie eine Geschwindigkeit u in x-Richtung annehmen bis sie für $t \geq T$ wieder in Ruhe ist (siehe Abb. 1). Benutzen Sie den Gaußschen und den Stokesschen Satz für Ihre Herleitung. Hierbei muss die z-Ausdehnung des umspannten Volumens bzw. der umspannten Fläche klein gewählt werden ($\delta \to 0$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ entsteht ein Strombelag

$$\mathbf{i}' = \sigma u \mathbf{e_x} \tag{1}$$

Nehmen Sie an dass der umfasste Verschiebungsstrom verschwindet. Verwenden Sie die folgenden Lösungsansatz:

$$E_x^{\pm} = Z f(z \mp ct), \qquad H_y^{\pm} = \pm f(z \mp ct) \tag{2}$$

mit dem Wellenwiderstand Z um die Feldpakete zu beschreiben.



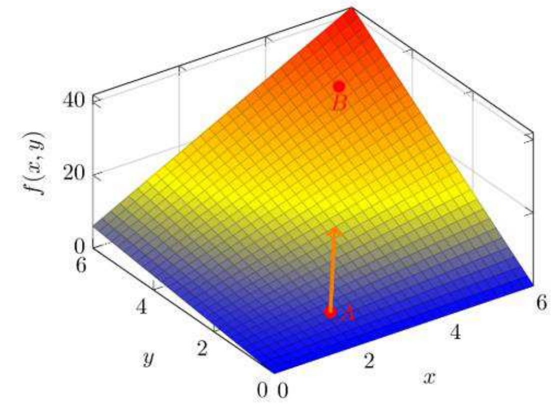
Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Differentialrechnung

Richtungsableitungen

- Ableitung einer von mehreren Variablen abhängigen Funktion entlang einer beliebigen Richtung, vorgegeben durch einen Vektor

$$D_v f(x) = \nabla_v f(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial v} = \frac{f(x+hv) - f(x)}{hv}$$



Bildquelle: https://www.massmatics.de/merkzettel/#!203:Die_Richtungsableitung

Partielle Ableitungen

- Spezialfall der Richtungsableitung, bei denen entlang der kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ differenziert wird
- Beispiel: $f(x) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, const, const)}{\partial x} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 2x + 2yz$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial f(const, y, const)}{\partial y} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = 2y + 2xz$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial f(const, const, z)}{\partial z} \qquad \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2z + 2xy$$

Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung ist eine mathematische Gleichung für eine gesuchte Funktion von einer oder mehreren Variablen, in der auch Ableitungen dieser Funktion vorkommen.

- Gewöhnliche DGLs bei denen nur Ableitungen nach genau einer Variablen auftreten.

  Hier unterscheidet man zwischen

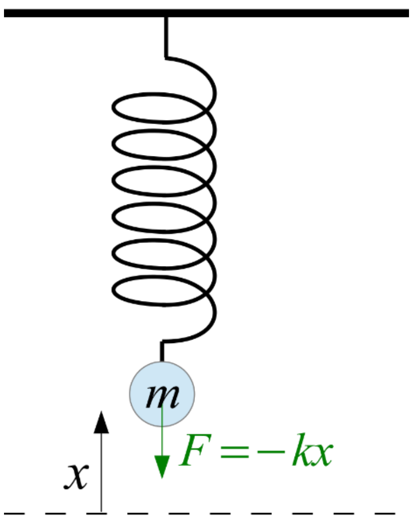
$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$	Impliziten DGLs
$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$	Explizite DGLs

Harmonischer Oszillator

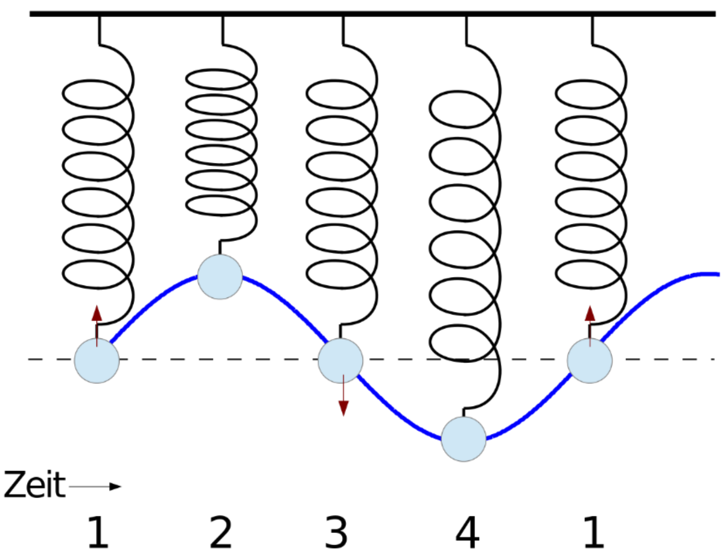
Beschreibung eines schwinungsfähigen Systems durch DGL

Idealer Oszillator (ohne Dämpfung) $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Gedämpfter Oszillator (lineare Dämpfung) $$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$



$$F = -kx$$
$$F = m\ddot{x}$$



Partielle Differentialgleichungen

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

Beispiele:

Laplace Gleichung in kartesischen Koordinaten

$$\nabla^2 F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

Bernoulli-Ansatz: $F(x,y) = \sum_p X_p(x) Y_p(y)$

$$X_p(x) = \begin{cases} A_0 + B_0 x & \text{für} \quad p = 0 \\ A_p \cos px + B_p \sin px & \text{für} \quad p \neq 0 \end{cases}$$

$$Y_p(y) = \begin{cases} C_0 + D_0 y & \text{für} \quad p = 0 \\ C_p \cosh py + D_p \sinh py & \text{für} \quad p \neq 0 \end{cases}$$

Helmholtz Gleichung in kartesischen Koordinaten

$$\nabla^2 F(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \alpha^2 F$$

Bernoulli-Ansatz: $F(x,y) = \sum X_p(x) Y_p(y)$

$$X_p(x) = \begin{cases} A_0 + B_0 x & \text{für} \quad p = 0 \\ A_p \cos px + B_p \sin px & \text{für} \quad p \neq 0 \end{cases}$$

$$Y_p(y) = C_p \left\{ \begin{matrix} \cosh qy \\ \text{oder} \\ \cos sy \end{matrix} \right\} + D_p \left\{ \begin{matrix} \sinh qy \\ \text{oder} \\ \sin sy \end{matrix} \right\}$$

mit $q^2 = p^2 + \alpha^2 \quad , \quad s^2 = \beta^2 - p^2 \quad , \quad \beta^2 = -\alpha^2$

Maxwellgleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform
$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{D}\, d\boldsymbol{F} = \int_{V} \rho\, dV = Q$
• Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder. • Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung.		
$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{s} = -\int_{F} \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} d\boldsymbol{F}$
• Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.		
$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{s} = \int_{F} \left(\boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) d\boldsymbol{F}$
• Magnetische Wirbelfelder werden durch einen elektrischen Strom oder ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld (Verschiebungsstrom) verursacht.		
$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \boldsymbol{B}\, d\boldsymbol{F} = 0$
• Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.		

„Satz vom Hüllenfluss“

Induktions-gesetz

Durchflutungs-gesetz

Herleitung der Wellengleichung im Vakuum

Die Welle breitet sich im Vakuum aus, deshalb gilt $\rho = 0, \vec{j} = 0$. Die zeitabhängigen Maxwellgleichungen im Vakuum ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$) lauten

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$
$$rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Eine sich in z-Richtung ausbreitende ebene Welle ist per Definition in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnt. Daher $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$.

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial E_x}{\partial z}\vec{e}_y$$
$$rot\vec{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}\vec{e}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z}\vec{e}_y$$

Herleitung der Wellengleichung im Vakuum

Die Maxwellgleichungen komponentenweise geschrieben lauten also

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \tag{2}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{3}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{4}$$

Man hat nur vier gekoppelte Differenzialgleichungen. Um zur Wellengleichung zu kommen, muss man die Gleichungen so umformen, dass sie entkoppelt werden. Zuerst werden alle Gleichungen nach z abgeleitet. Man erhält:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial t} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = -\varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial t} \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial z \partial t} \tag{8}$$

Herleitung der Wellengleichung im Vakuum

Setzt man (4) in (5), (3) in (6), (2) in (7) und (1) in (8) ein und verwendet man $\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ erhält man die entkoppelten Wellengleichungen:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \tag{12}$$

Ebene Wellen

= einfachste Lösung der Wellengleichung

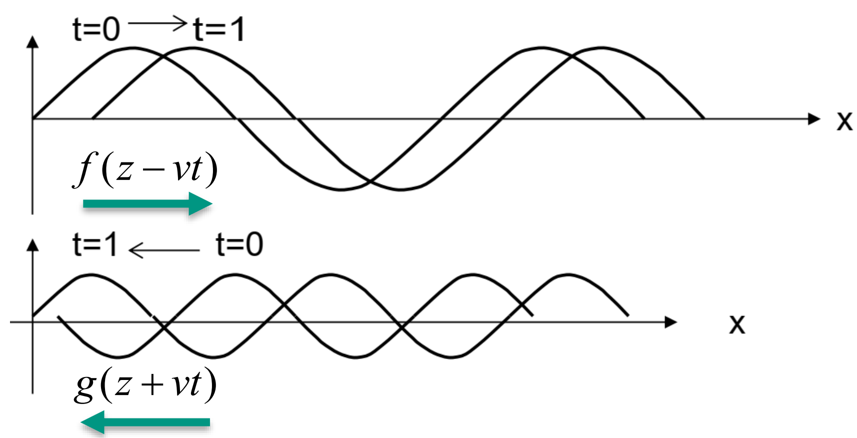
- Abhängig von nur einer Ortskoordinate (z.B. z) $\qquad \frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial z} \neq 0$

- Ausbreitungsrichtung entspricht Ortskoordinate

$$\vec{E} = \vec{E}(z,t)$$
$$\vec{H} = \vec{H}(z,t)$$

- Lösungen haben die allg. Form

$$\vec{E}(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt)$$



- E und H stehen senkrecht zu einander und zur Ausbreitungsrichtung

Übungsblatt 1 – Aufgabe 2

Eine ebene Welle breitet sich im Vakuum in z-Richtung aus $\left(\frac{\partial}{\partial x}=0, \frac{\partial}{\partial y}=0\right)$. In der Vorlesung wurden die Wellengleichungen im Vakuum aus den Maxwellgleichungen hergeleitet:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{5}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{6}$$

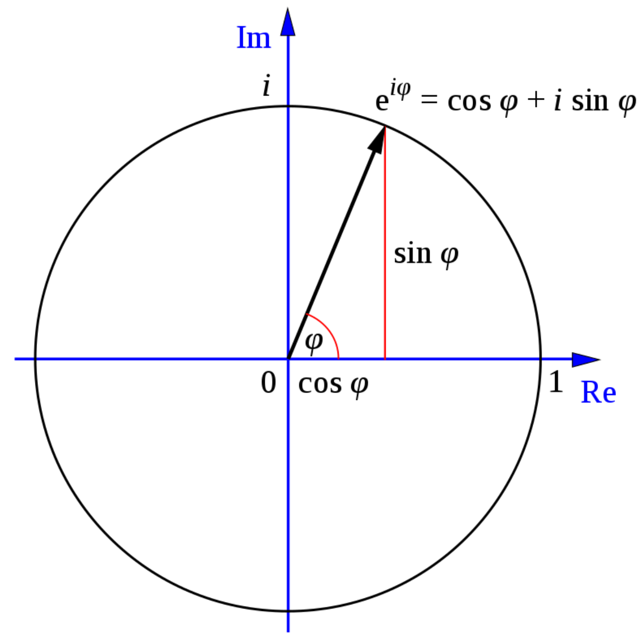
$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{7}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \tag{8}$$

a) Zeigen Sie dass jede Funktion $f\,(z \pm ct)$ die Wellengleichungen für diesen Fall erfüllt.

b) Können sich longitudinale Wellen ausbreiten? (Gehen Sie von $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho = 0$ aus.)

Phasor Darstellung / Zeigermodell



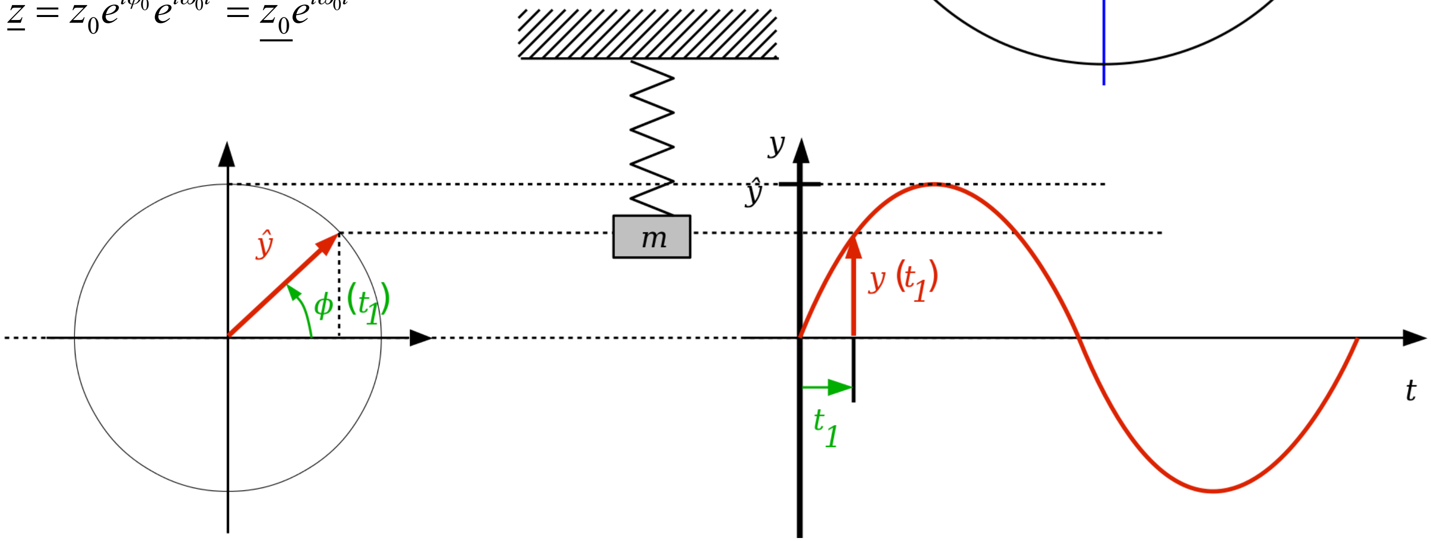
Jede komplexe Zahl kann dargestellt werden durch:

$$\underline{z} = x + iy = \underline{z_0 e^{i\phi}}$$

$$\underline{z} = \underline{z_0}(\cos\phi + i\sin\phi)$$

Eine harmonische Größe die mit der Frequenz ω_0 schwingt kann somit ausgedrückt werden durch

$$\underline{z} = z_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega_0 t} = \underline{z_0} e^{i\omega_0 t}$$



Phasor Darstellung / Zeigermodell

Einführung komplexer Größen wie in der Wechselstromlehre:

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \quad \mathrm{Re}\left[\vec{H}(\vec{r},t)\right]$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \quad \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r},t)\right]$$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \quad \mathrm{Re}\left[\vec{J}(\vec{r},t)\right]$$

$$\rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t} \rightarrow \quad \mathrm{Re}\left[\rho(\vec{r},t)\right]$$

Hierbei sind die Größen $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$, $\vec{J}(\vec{r})$, $\rho(\vec{r})$ usw. komplexe Größen welche die jeweilige Amplitude sowie Phasenlage bestimmen.

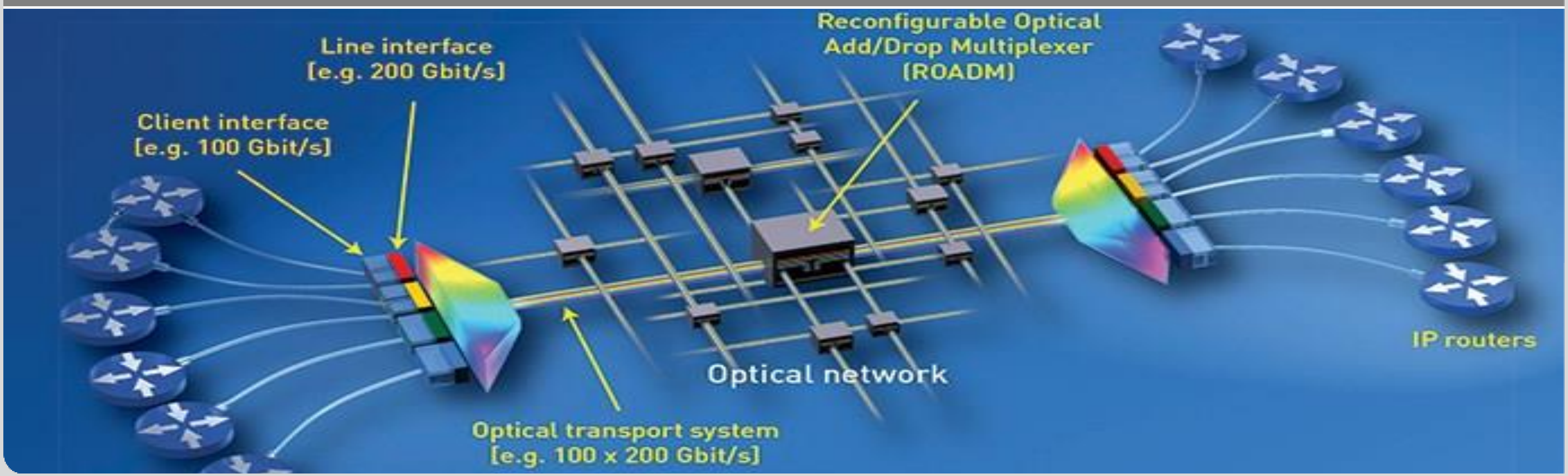
Karlsruhe Institute of Technology

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 3

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter
    www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: **maxwell19**
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu

- Wiederholung aus der Vorlesung
  - Ebene und harmonische Wellen
  - Fourier-Reihe, Fourier-Transformation und Zeigerdarstellung
  - Poynting-Vektor

- Besprechung von Übungsblatt 2

- ggf. Diskussion einer Frage: partielle vs. totale Ableitung

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Harmonische Wellen, Poynting-Vektor

Kalender

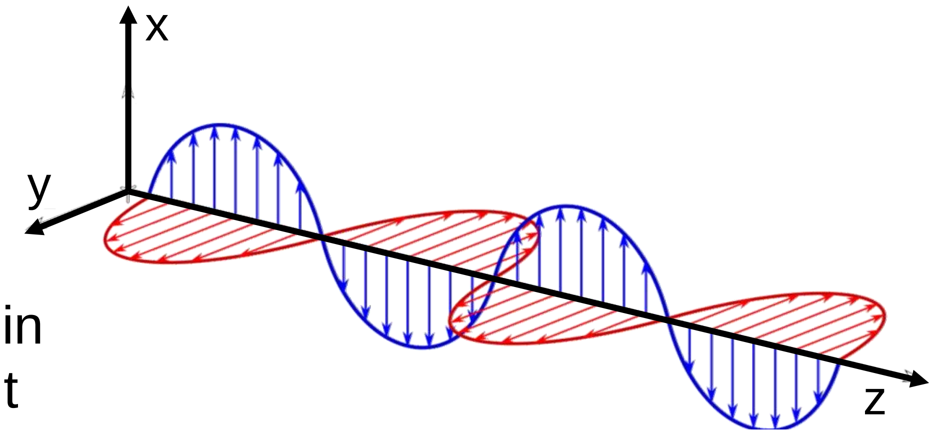
2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	**1 Fr** Allerheiligen	**1 So** 1. Advent	**1 Mi** Neujahr	**1 Sa**	**1 So**	1 Mi **Klausur**
2 Mi	**2 Sa**	2 Mo **Übung 7** 49	2 Do	**2 So**	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	**3 So**	3 Di	3 Fr	3 Mo **Übung 13** 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo **Übung 3** 45	4 Mi **Vorlesung 8**	**4 Sa**	4 Di	4 Mi	**4 Sa**
5 Sa	5 Di	5 Do	**5 So**	5 Mi **Vorlesung 15**	5 Do	**5 So**
6 So	6 Mi **Vorlesung 4**	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	**7 Sa**	7 Di	7 Fr	**7 Sa**	7 Di
8 Di	8 Fr	**8 So**	8 Mi **Vorlesung 11**	**8 Sa**	**8 So**	8 Mi
9 Mi	**9 Sa**	9 Mo **Übung 8** 50	9 Do	**9 So**	9 Mo 11	9 Do
10 Do	**10 So**	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	**10 Fr** Karfreitag
11 Fr	11 Mo **Übung 4** 46	11 Mi **Vorlesung 9**	**11 Sa**	11 Di	11 Mi	**11 Sa**
12 Sa	12 Di	12 Do	**12 So**	12 Mi	12 Do	**12 So** Ostern
13 So	13 Mi **Vorlesung 5**	13 Fr	13 Mo **Übung 10** 3	13 Do	13 Fr	**13 Mo** Ostermontag 16
14 Mo 42	14 Do	**14 Sa**	14 Di	14 Fr	**14 Sa**	14 Di
15 Di	15 Fr	**15 So**	15 Mi **Vorlesung 12**	**15 Sa**	**15 So**	15 Mi
16 Mi **Vorlesung 1**	**16 Sa**	16 Mo **Übung 9** 51	16 Do	**16 So**	16 Mo 12	16 Do
17 Do	**17 So**	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo **Übung 5** 47	18 Mi **Vorlesung 10**	**18 Sa**	18 Di	18 Mi	**18 Sa**
19 Sa	19 Di	19 Do	**19 So**	19 Mi	19 Do	**19 So**
20 So	20 Mi **Vorlesung 6**	20 Fr	20 Mo **Übung 11** 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo **Übung 1** 43	21 Do	**21 Sa**	21 Di	21 Fr	**21 Sa**	21 Di
22 Di	22 Fr	**22 So**	22 Mi **Vorlesung 13**	**22 Sa**	**22 So**	22 Mi
23 Mi **Vorlesung 2**	**23 Sa**	23 Mo 52	23 Do	**23 So**	23 Mo 13	23 Do
24 Do	**24 So**	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosenmontag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo **Übung 6** 48	**25 Mi** 1. Weihnachtstag	**25 Sa**	25 Di	25 Mi	**25 Sa**
26 Sa	26 Di	**26 Do** 2. Weihnachtstag	**26 So**	26 Mi	26 Do	**26 So**
27 So	27 Mi **Vorlesung 7**	27 Fr	27 Mo **Übung 12** 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo **Übung 2** 44	28 Do	**28 Sa**	28 Di	28 Fr	**28 Sa**	28 Di
29 Di	29 Fr	**29 So**	29 Mi **Vorlesung 14**	**29 Sa**	**29 So**	29 Mi
30 Mi **Vorlesung 3**	**30 Sa**	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

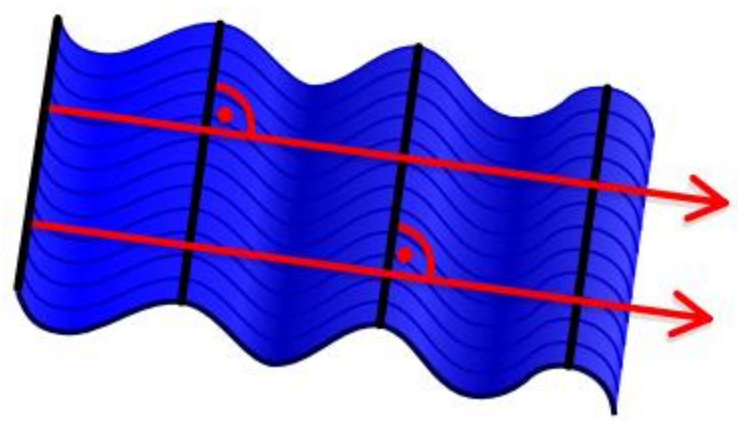
Ebene Wellen

- Die Wellenfront ist eine ebene Fläche, die sich im Idealfall unendlich weit in x- und y-Richtung erstreckt (bei Ausbreitung in z-Richtung).

Wichtige Eigenschaften:

- Ebene Wellen sind Transversal-wellen: $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ stehen senkrecht zueinander, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung und bilden ein mathematisches Rechtssystem mit dem Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$.
- $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld sind stets in Phase, d.h. sie haben ihre Maxima und Minima an gleichen Orten entlang der z-Achse.



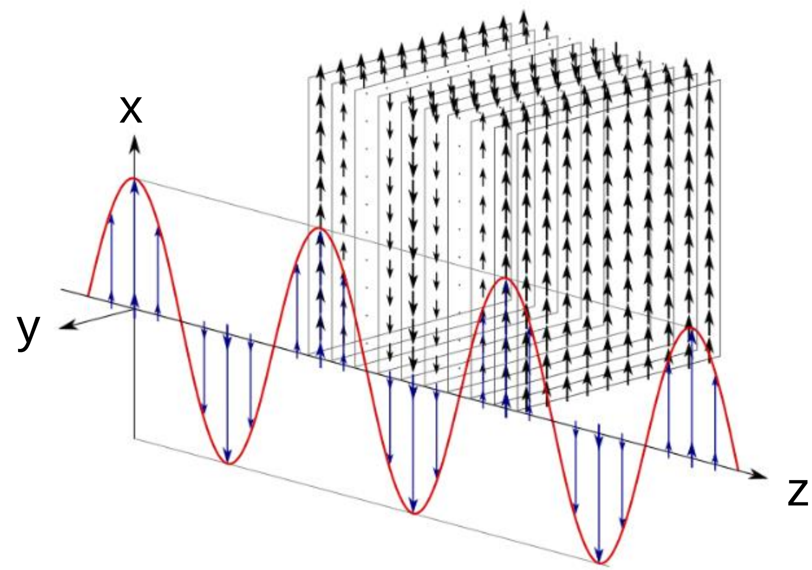


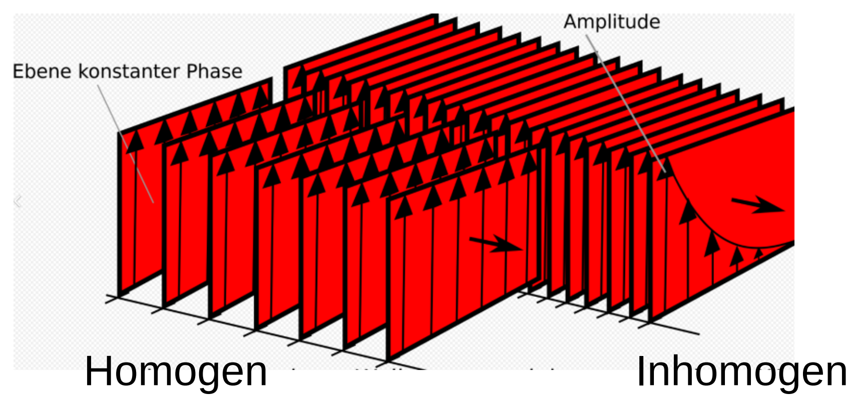
Ebene Wellen

Wichtige Eigenschaften:

- Der Energiefluss findet genau in Ausbreitungsrichtung statt, d.h. der Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$ zeigt genau in diese Richtung.
- In der Vorlesung betrachten wir in der Regel homogene ebene Wellen, d.h. die Amplitude ist über die gesamte jeweilige Wellenfront (Ebene) konstant und $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld hängen nur von einer Ortskoordinate ab.

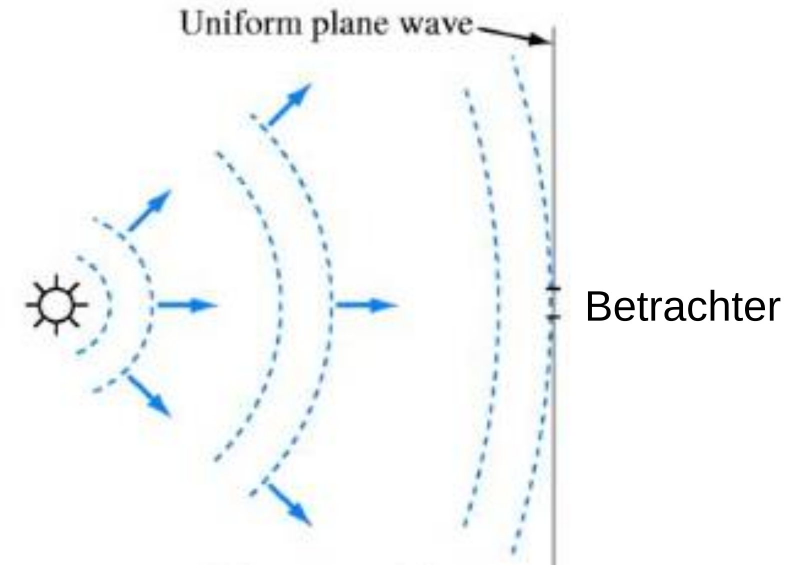
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$$





Ebene Wellen – Bedeutung (I)

- Ebene Wellen stellen die mathematisch einfachste Lösung der Wellengleichung dar.
- Komplizierte Wellenfronten können lokal als ebene Welle approximiert werden, was die Mathematik vereinfacht.



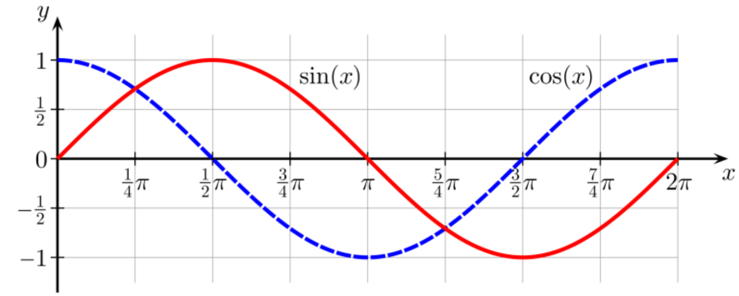
Harmonische Wellen

- Monochromatische Welle: **E**- und **H**-Feld schwingen mit einer Frequenz
- Harmonische Welle: **E**- und **H**-Feld schwingen sinusförmig

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\ \cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude Kreisfrequenz Anfangsphase

Phase



Warum sind harmonische Wellen so nützlich?

- Leichte mathematische Handhabung linearer Systeme mit komplexer Zeigerschreibweise
  - simultane Erfassung von Amplitude und Phase
  - (Implizite) Zeitabhängigkeit kann weggelassen werden

Lineare Systeme sind solche Systeme, bei denen die Frequenz der Welle unbeeinflusst von Operationen bleibt. Frequenzanteile können gedämpft werden (linearer Filter), aber es entstehen keine neuen Frequenzkomponenten.

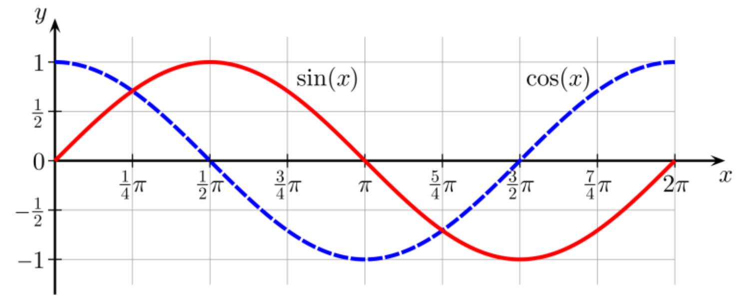
Harmonische Wellen

- Monochromatische Welle: **E**- und **H**-Feld schwingen mit einer Frequenz
- Harmonische Welle: **E**- und **H**-Feld schwingen sinusförmig

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\ \cos(\omega t + \varphi)$$

Amplitude Kreisfrequenz Anfangsphase

Phase



<u>Warum sind harmonische Wellen so nützlich?</u>

- Leichte mathematische Handhabung linearer Systeme mit komplexer Zeigerschreibweise
  - simultane Erfassung von Amplitude und Phase
  - (Implizite) Zeitabhängigkeit kann weggelassen werden
- Fourier-Reihe bzw. Fourier-Transformation:
  periodische bzw. nicht-periodische Funktionen können als Überlagerungen von Sinus- oder Kosinusschwingungen dargestellt werden

Komplexe Zeigerdarstellung

Reelles Feld

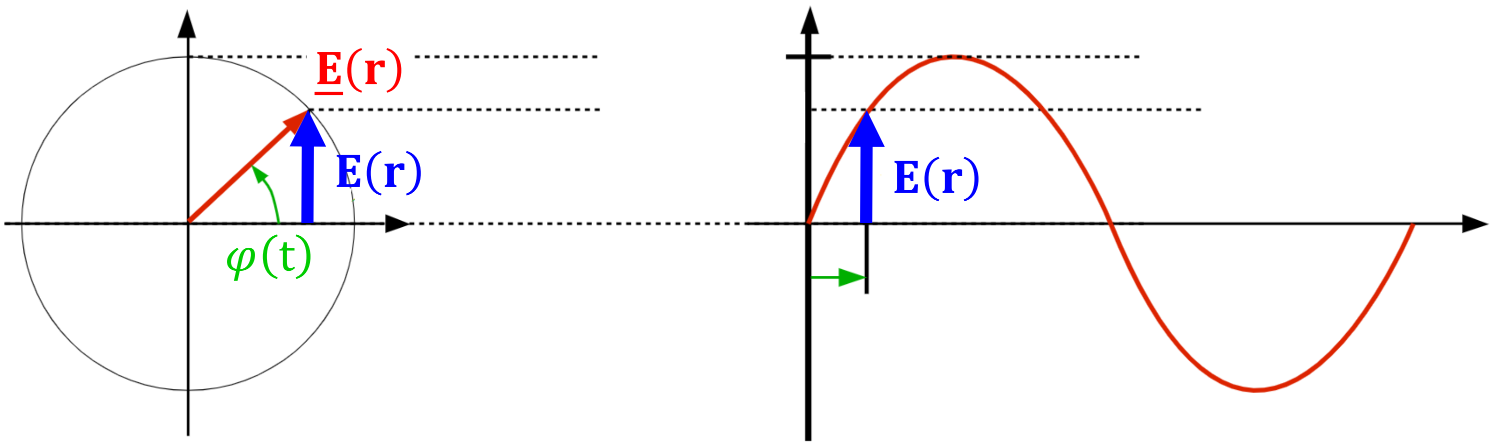
$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cos(\omega t + \varphi) \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \Re\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)\}$$

Komplexes Feld

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp\big(\mathrm{j}(\omega t + \varphi)\big) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\varphi)\exp(\mathrm{j}\omega t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\omega t)$$

Komplexe Felddarstellung
(komplexer Zeiger / Phasor)

Komplexe Amplitude
(manchmal auch ~~Phasor~~)



Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Maxwellgleichungen für komplexe Felder

- Komplexe Darstellung:
  Zeitliche Ableitung vereinfacht sich zu einer Multiplikation mit jω

$$
\begin{array}{llll}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) = \mathrm{j}\,\omega\epsilon\left(1-\mathrm{j}\,\dfrac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) & & (I) & \textit{Durchflutungsgesetz} \\
\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) & = -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) & (II) & \textit{Induktionsgesetz} \\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) & = \dfrac{1}{\epsilon}\underline{\rho}(\mathbf{r},t) & (III) & \textit{Gaußsches Gesetz} \\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) & = 0 & (IV) &
\end{array}
$$

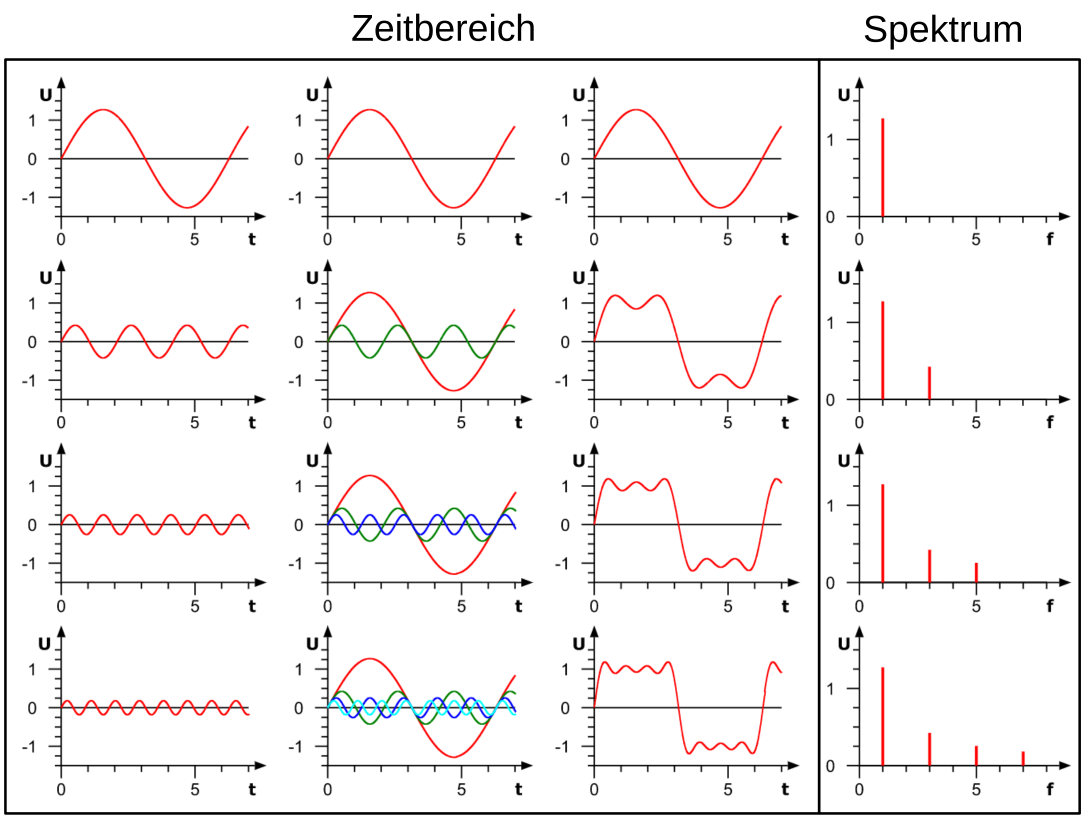
- Beschränkung auf komplexe Amplituden:
  Zeitliche Abhängigkeit kann komplett vernachlässigt werden

$$
\begin{array}{llll}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathrm{j}\,\omega\epsilon\left(1-\mathrm{j}\,\dfrac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & & (I) & \textit{Durchflutungsgesetz} \\
\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & = -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) & (II) & \textit{Induktionsgesetz} \\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) & = \dfrac{1}{\epsilon}\underline{\rho}(\mathbf{r}) & (III) & \textit{Gaußsches Gesetz} \\
\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) & = 0 & (IV) &
\end{array}
$$

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ
Karlsruhe Institute of Technology

Zusammenhang mit der Fourier-Entwicklung

- **Fourier-Reihe**
  Jede periodische Funktion[1] kann als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen geschrieben werden.



Das Spektrum gibt an, welche Frequenzanteile wie stark zu einer Funktion beitragen.

[1]Die Funktion muss auch (abschnittsweise) stetig sein.

Zusammenhang mit der Fourier-Entwicklung

- **Fourier-Reihe**
  Jede periodische Funktion[1] kann als Überlagerung von Sinus- und Kosinusschwingungen geschrieben werden.

$$s(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T} + \varphi_n\right) \quad \text{mit } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

  oder in komplexer Notation

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{j} 2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

- **Fourier-Transformation**
  Erweiterung der Fourier-Reihe auf nicht-periodische Funktionen.

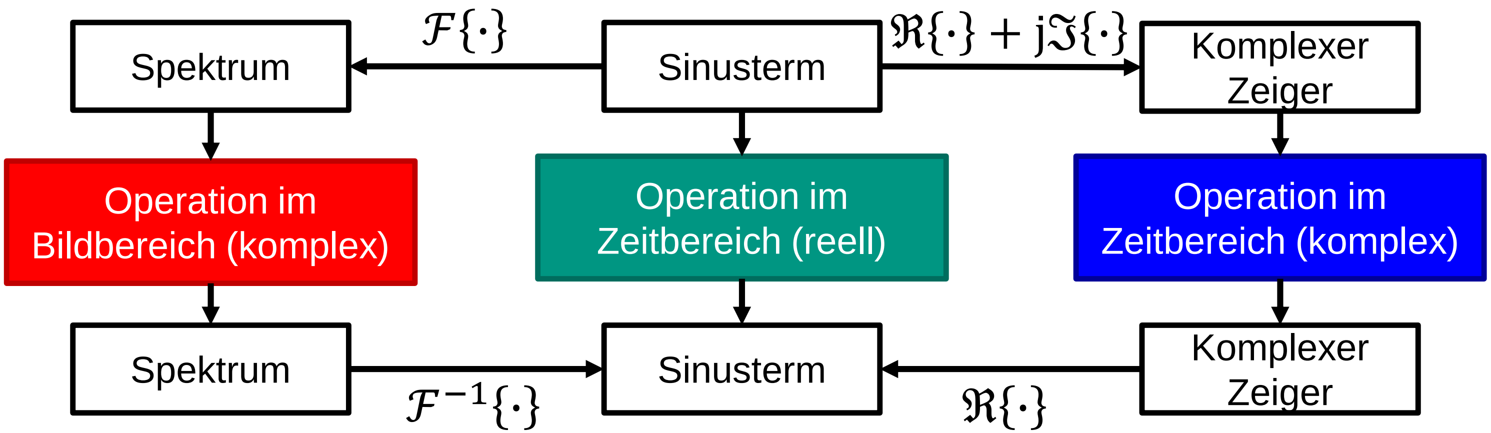
$$s(t) = \int_{n=-\infty}^{\infty} S(f) \exp(\mathrm{j}2\pi f t)\, df$$

  Inverse Fourier-Transformation

- Bemerkung: Im linearen Fall liefern die Fourier-Transformation und die komplexe Zeigerdarstellung äquivalente Ergebnisse.

[1]Die Funktion muss auch (abschnittsweise) stetig sein.

Analyse linearer Systeme



- Bemerkung: Im linearen Fall liefern die Fourier-Transformation und die komplexe Zeigerdarstellung äquivalente Ergebnisse. Beide Darstellungen repräsentieren Amplitude und Phase einer komplexen Schwingung.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\cos(\omega t+\varphi) = \Re\{\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)\} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) + \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)^*\right)$$

$$= \left(\frac{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{2}\exp(j\varphi)\right)\exp(j\omega t) + \left(\frac{\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})}{2}\exp(-j\varphi)\right)\exp(-j\omega t)$$

$$= \frac{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r})}{2}\exp(j\omega t) + \frac{\underline{\tilde{\mathbf{E}}}(\mathbf{r})^*}{2}\exp(-j\omega t)$$

Betrachtung der Ausgangsgröße

Ebene Wellen – Bedeutung (II)

- Ebene Wellen bilden wie auch Kugelwellen eine Basis von Lösungen der Wellengleichung, d.h. jede Überlagerung aus ebenen Wellen ist ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung

➔ Jede beliebige Welle im Vakuum kann stets als Superposition ebener Wellen geschrieben werden (Grundprinzip der Fourieroptik).

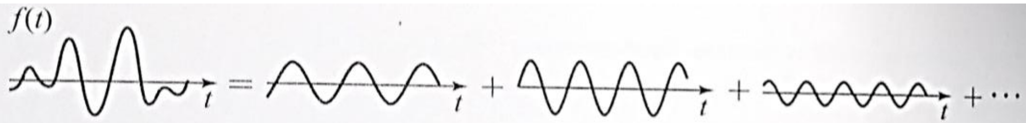


Abbildung 4.1 Eine beliebige Funktion $f(t)$ kann als Summe von harmonischen Funktionen mit unterschiedlichen Frequenzen und komplexen Amplituden geschrieben werden.

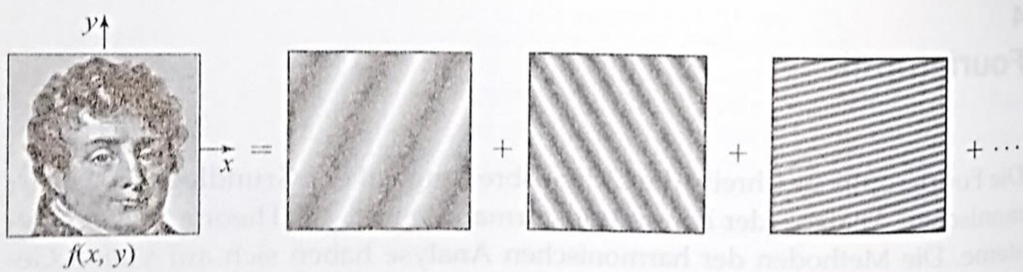


Abbildung 4.2 Eine beliebige Funktion $f(x, y)$ kann als Summe harmonischer Funktionen mit unterschiedlichen Ortsfrequenzen und komplexen Amplituden geschrieben werden, die hier schematisch als schattierte Linien dargestellt sind.

Institute of Photonics and Quantum Electronics

Wellengleichung im Vakuum

- Wellengleichung für lineare, homogene Medien

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\mathbf{H} - \frac{1}{{c_0}^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

Vakuum: $\varepsilon_r = 1,\ \mu_r = 1,$
$\rho = 0,\ \kappa = 0,\ \vec{j} = 0,$
$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \approx 3 \times 10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

  - Ebene Wellen: $E(z,t) = f(z-ct) + g(z+ct)$
  - Harmonische ebene Wellen: $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{j(\omega t - kz)}$

- Helmholtz-Gleichung für harmonische Vorgänge

$$\Delta\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = 0, \qquad \Delta\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = 0$$

- Eindimensionaler Fall für eine ebene Welle

$$\frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + k^2\underline{E}_x = 0, \quad \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} + k^2\underline{H}_y = 0$$

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f$
Wellenlänge: $\lambda = \frac{c}{f}$
Wellenzahl: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Der Poynting-Vektor

- Elektromagnetische Wellen (bzw. elektrische und magnetische Felder) speichern Energie.
- Der Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ definiert die Richtung des Energieflusses einer Welle, indem er Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten Feldenergie beschreibt. Er hat somit die Einheit W/m².

$$\underbrace{\text{Betrag und Richtung}}_{\text{Vektor}}\ \text{der}\ \underbrace{\text{pro Flächenelement und}\ \underbrace{\text{pro Zeiteinheit abgestrahlten Feldenergie}}_{\text{Leistung / Energiefluss}}}_{\text{Leistungsdichte / Energieflussdichte}}$$

$$\boxed{\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}$$

Der komplexe Poynting-Vektor

$$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})^*$$

- Anmerkung I:
  Die Berechnung erfolgt mit komplexen Amplituden oder Effektivwerten, d.h. mit zeitunabhängigen Größen!

- Anmerkung II:
  Der Vorfaktor $\frac{1}{2}$ entsteht durch die nichtlineare Verknüpfung der komplexen Zeiger. Er entfällt, wenn mit komplexen Effektivwerten statt komplexen Amplituden gerechnet wird.
- Vorteile:
  - Simultane Erfassung von Wirkleistungsdichte (Realteil) und Blindleistungsdichte (Imaginärteil), d.h. der komplexe Poynting-Vektor gibt die Schein-leistungsdichte an.
  - Vereinfachte Rechnung, da kein Integral mehr zur zeitlichen Mittelung mehr zu berechnen ist.

© www.elektronik-kompendium.de

Der Poynting-Vektor

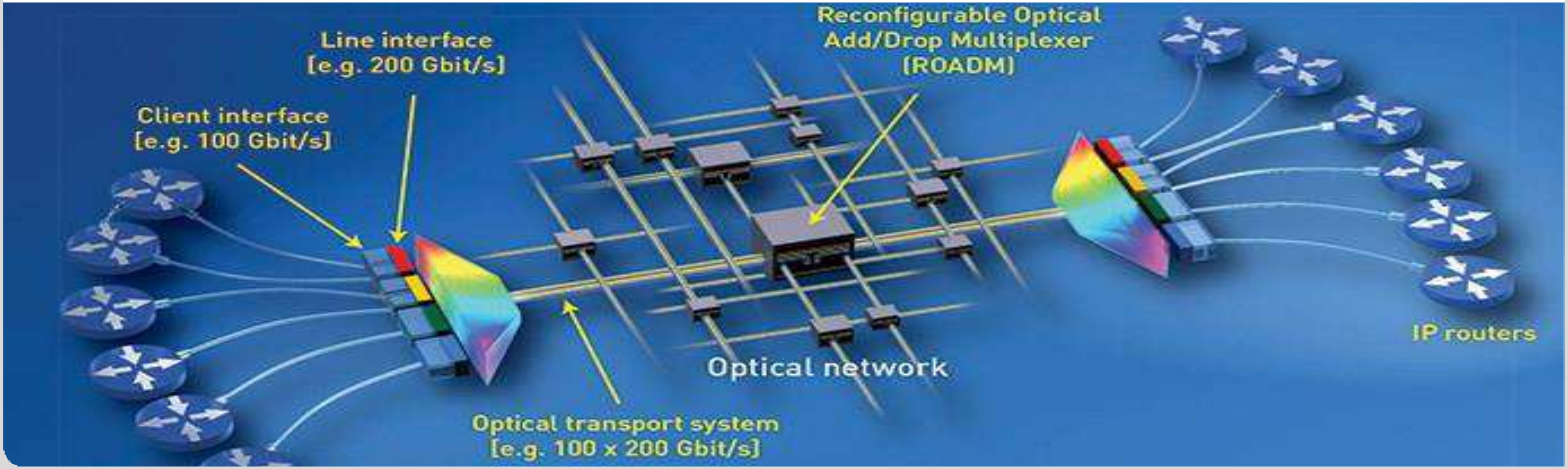
Reeller Poynting-Vektor	Komplexer Poynting-Vektor
$\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)$	Unmöglich, da zeitunabhängige Größen vorliegen
Momentane Leistungsdichte / Energieflussdichte	
$\overline{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)} = \overline{\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t)}$	$\Re\{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\} = \Re\left\{\frac{1}{2}\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r})^*\right\}$
Mittlere Leistungsdichte / Energieflussdichte ergibt sich durch zeitliche Mittelung	Mittlere Leistungsdichte / Energieflussdichte ergibt sich als Realteil
$\oint \mathbf{S}(\mathbf{r},t) d\mathbf{F}$	Unmöglich, da zeitunabhängige Größen vorliegen
Momentaner Energiefluss durch eine Oberfläche	
$\oint \overline{\mathbf{S}(\mathbf{r},t)}\, d\mathbf{F}$	$\oint \Re\{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\}\, d\mathbf{F}$
Mittlerer Energiefluss durch eine Oberfläche	Mittlerer Energiefluss durch eine Oberfläche

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 4

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: maxwell19
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu
- Wiederholung aus der Vorlesung
  - Zeitharmonische Ebene Wellen
  - Dispersionsrelation
    - Gruppengeschwindigkeit und Phasengeschwindigkeit
  - Polarisation
- Besprechung von Übungsblatt 3

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Ebene und harmonische Wellen, Poynting Vektor
Übung 4	A5	Zeitharmonische ebene Wellen, Dispersionsrelation, Polarisation

Kalender

2019			2020			
Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März	April
1 Di	1 Fr Allerheiligen	1 So 1. Advent	1 Mi Neujahr	1 Sa	1 So	1 Mi Klausur
2 Mi	2 Sa	2 Mo Übung 7 49	2 Do	2 So	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	3 So	3 Di	3 Fr	3 Mo Übung 13 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo Übung 3 45	4 Mi Vorlesung 8	4 Sa	4 Di	4 Mi	4 Sa
5 Sa	5 Di	5 Do	5 So	5 Mi Vorlesung 15	5 Do	5 So
6 So	6 Mi Vorlesung 4	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	7 Sa	7 Di	7 Fr	7 Sa	7 Di
8 Di	8 Fr	8 So	8 Mi Vorlesung 11	8 Sa	8 So	8 Mi
9 Mi	9 Sa	9 Mo Übung 8 50	9 Do	9 So	9 Mo 11	9 Do
10 Do	10 So	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	10 Fr Karfreitag
11 Fr	11 Mo Übung 4 46	11 Mi Vorlesung 9	11 Sa	11 Di	11 Mi	11 Sa
12 Sa	12 Di	12 Do	12 So	12 Mi	12 Do	12 So Ostern
13 So	13 Mi Vorlesung 5	13 Fr	13 Mo Übung 10 3	13 Do	13 Fr	13 Mo Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	14 Sa	14 Di	14 Fr	14 Sa	14 Di
15 Di	15 Fr	15 So	15 Mi Vorlesung 12	15 Sa	15 So	15 Mi
16 Mi Vorlesung 1	16 Sa	16 Mo Übung 9 51	16 Do	16 So	16 Mo 12	16 Do
17 Do	17 So	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo Übung 5 47	18 Mi Vorlesung 10	18 Sa	18 Di	18 Mi	18 Sa
19 Sa	19 Di	19 Do	19 So	19 Mi	19 Do	19 So
20 So	20 Mi Vorlesung 6	20 Fr	20 Mo Übung 11 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo Übung 1 43	21 Do	21 Sa	21 Di	21 Fr	21 Sa	21 Di
22 Di	22 Fr	22 So	22 Mi Vorlesung 13	22 Sa	22 So	22 Mi
23 Mi Vorlesung 2	23 Sa	23 Mo 52	23 Do	23 So	23 Mo 13	23 Do
24 Do	24 So	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo Übung 6 48	25 Mi 1. Weihnachtstag	25 Sa	25 Di	25 Mi	25 Sa
26 Sa	26 Di	26 Do 2. Weihnachtstag	26 So	26 Mi	26 Do	26 So
27 So	27 Mi Vorlesung 7	27 Fr	27 Mo Übung 12 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo Übung 2 44	28 Do	28 Sa	28 Di	28 Fr	28 Sa	28 Di
29 Di	29 Fr	29 So	29 Mi Vorlesung 14	29 Sa	29 So	29 Mi
30 Mi Vorlesung 3	30 Sa	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Maxwellgleichungen für komplexe Felder

- Komplexe Darstellung:
  - Zeitliche Ableitung vereinfacht sich zu einer Mulitplikation mit $j\omega$

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) = \mathrm{j}\,\omega\epsilon\left(1-\mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) && (I) && \textit{Durchflutungsgesetz}\\
&\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) && (II) && \textit{Induktionsgesetz}\\
&\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\epsilon}\underline{\rho}(\mathbf{r},t) && (III) && \textit{Gaußsches Gesetz}\\
&\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) = 0 && (IV) &&
\end{aligned}
$$

- Beschränkung auf komplexe Amplituden: $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}[\omega t+\varphi]) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})\exp(\mathrm{j}\,\omega t)$
  - Zeitliche Abhängigkeit kann komplett vernachlässigt werden

$$
\begin{aligned}
&\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \mathrm{j}\,\omega\epsilon\left(1-\mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\epsilon}\right)\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) && (I) && \textit{Durchflutungsgesetz}\\
&\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) && (II) && \textit{Induktionsgesetz}\\
&\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon}\underline{\rho}(\mathbf{r}) && (III) && \textit{Gaußsches Gesetz}\\
&\nabla \cdot \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = 0 && (IV) &&
\end{aligned}
$$

Zeitharmonische ebene Welle

- Für zeitharmonische ebene Wellen in homogenen linearen Medien erhalten wir aus dem Durchflutungsgesetz (I) und dem Induktionsgestz (II)

$$-\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} = \mathrm{j}\,\omega\varepsilon\left(1-\mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)\underline{E}_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = -\mathrm{j}\,\omega\mu\underline{H}_y$$

und damit die skalaren Helmholtz-Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial z^2} + \underline{k}^2\underline{H}_y = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} + \underline{k}^2\underline{E}_x = 0$$

mit der Lösung

$$\rightarrow \quad \underline{H}_y(z,t) = \underline{A}^+\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + \underline{A}^-\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}$$

mit der komplexen Wellenzahl

$$\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}}$$

Nichtleitende Medien: $\kappa = 0$

- reell $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Leitende Medien: $\kappa \neq 0$

- komplex $\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}}$

Komplexe Wellenzahl

- Die komplexe Wellenzahl

$$\underline{k} = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}} = \pm\left(\beta - \mathrm{j}\,\alpha\right)$$

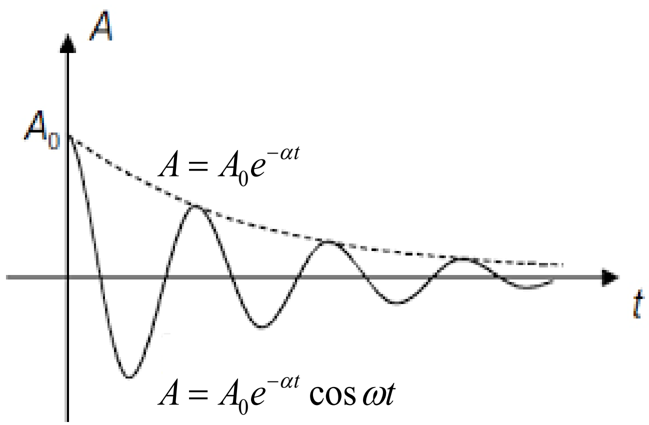
Relaxationszeit
$T_\mathrm{r} = \varepsilon/\kappa$

- Phasenkonstante

$$\beta(\omega) = \pm\frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega T_\mathrm{r})^2}}+1}$$

- Dämpfungskonstante

$$\alpha(\omega) = \pm\frac{\omega}{c}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{(\omega T_\mathrm{r})^2}}-1}$$



Die Welle muss mit zunehmender Entfernung von der Quelle abnehmen, da:

$$\underline{H}_y(z,t) = \underline{A}^+\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + \underline{A}^-\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}$$

und $\quad e^{j(\omega t \pm kz)} = e^{j(\omega t \pm (\beta - j\alpha)z)} = e^{j(\omega t \pm \beta z)}e^{\mp\alpha z}$

Dispersionsrelation, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

- Dispersionsrelation $$\omega(\beta) = c\frac{2\beta^2}{\sqrt{(2\beta)^2 + \frac{1}{(cT_\mathrm{r})^2}}} = c\frac{\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + \beta_\mathrm{r}^2}}$$

- Mit der Materialkonstante $$\beta_\mathrm{r} = \frac{1}{2cT_\mathrm{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\kappa}{2}}$$

- Phasengeschwindigkeit

  die Geschwindigkeit mit der sich bei einer ebenen Welle die Punkte konstanter Phase $\omega t - \beta z = 0$ bewegen

$$v_\mathrm{ph}(\beta) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega(\beta)}{\beta} = c\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta_\mathrm{r}^2}} = c\sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega T_\mathrm{r})^2}}}}$$

Dispersionsrelation, Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

- Gruppengeschwindigkeit

Für Signale, aus mehreren Frequenzkomponenten, kann sich jede Frequenzkomponente mit ihrer eigenen Phasengeschwindigkeit ausbreiten. Die Einhüllende (auch Schwebung) dieses Zeitsignals breitet sich mit der *Gruppengeschwindigkeit* aus

$$v_{\mathrm{gr}}(\beta) = \frac{\mathrm{d}\omega(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = c\,\frac{\beta^3 + 2\beta_{\mathrm{r}}^2\beta}{(\beta^2+\beta_{\mathrm{r}}^2)^{\frac{3}{2}}} = v_{\mathrm{ph}}(\beta)\left(1 + \frac{\beta_{\mathrm{r}}^2}{\beta^2+\beta_{\mathrm{r}}^2}\right)$$

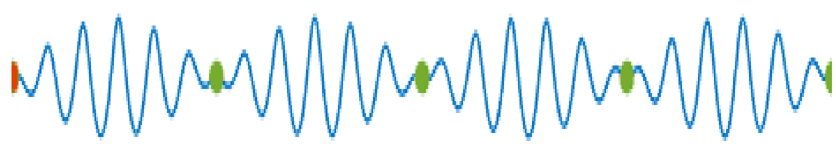
$$= v_{\mathrm{ph}}(\omega)\left(1 + \frac{1}{1 + 2\omega^2 T_{\mathrm{r}}^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{\omega^2 T_{\mathrm{r}}^2}} + 1\right)}\right)$$

Nichtleitende Medien: $\omega T_{\mathrm{r}} \gg 1$

- $v_{\mathrm{ph}} = c$ und $v_{\mathrm{gr}} = v_{\mathrm{ph}} = c.$

Leitende Medien: $\omega T_{\mathrm{r}} \ll 1$

- $v_{\mathrm{ph}} = \sqrt{2\omega T_{\mathrm{r}}}\,c = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\kappa}}$ und $v_{\mathrm{gr}} = 2v_{\mathrm{ph}}$



Gruppengeschwindigkeit
Phasengeschwindigkeit

Ergänzung zur Animation:
Bei Lichtpulsen in stark verlustbehafteten Medien kann die Phasengeschwindigkeit wesentlich größer sein als die Gruppengeschwindigkeit

Polarisation

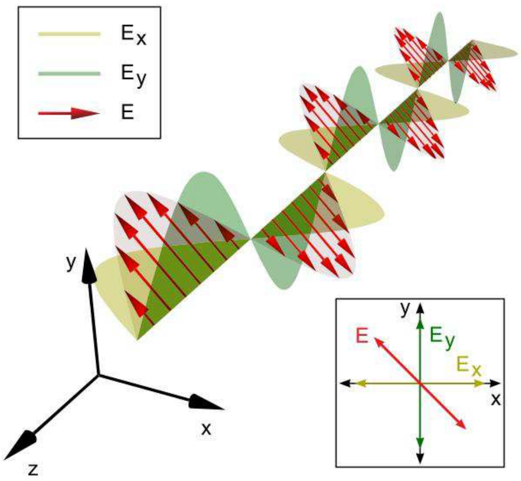
- Zeitharmonische Wellen die sich in z-Richtung ausbreitet

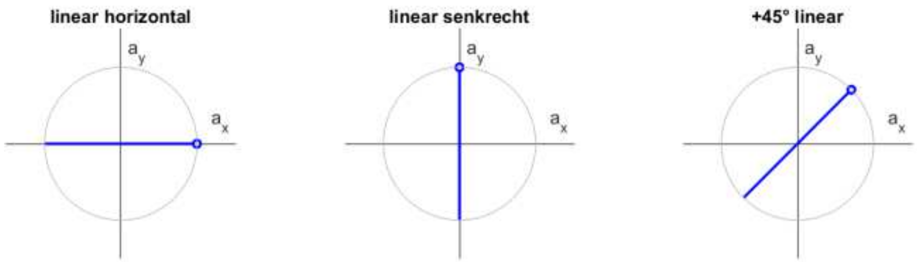
$$E_x(t) = E_x \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$
$$E_y(t) = E_y \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

für $z = 0$

Mit Normierung
$a_x^2 + a_y^2 = 1$

Lineare Polariation $\varphi_y = \pm n \cdot 2\pi$





$Für \quad \varphi_x = 0$

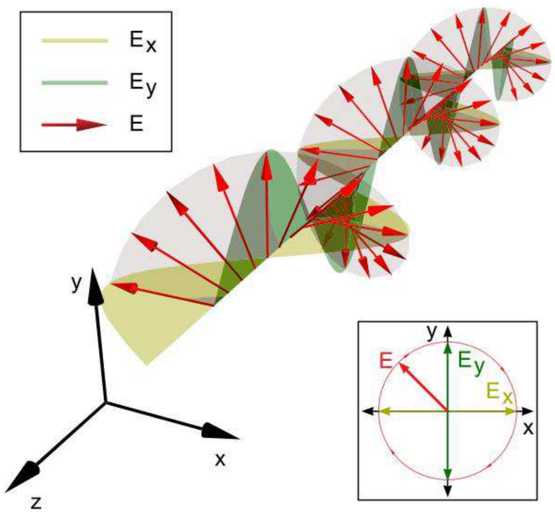
Polarisation

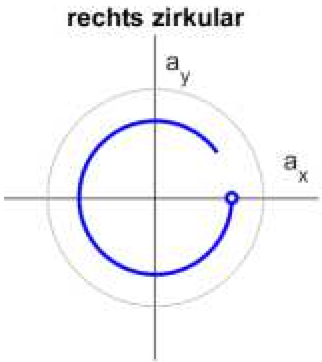
Zirkulare Polarisation

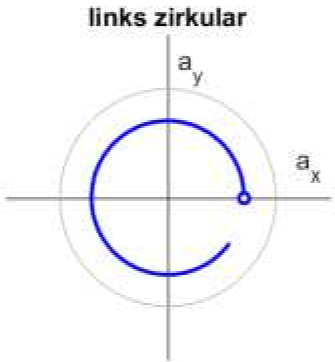
$$\text{Für} \quad \varphi_x = 0$$

linkszirkular $\varphi_y = \frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$

rechtszirkular $\varphi_y = -\frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$





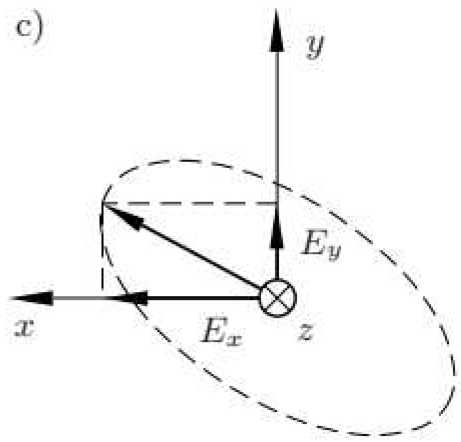


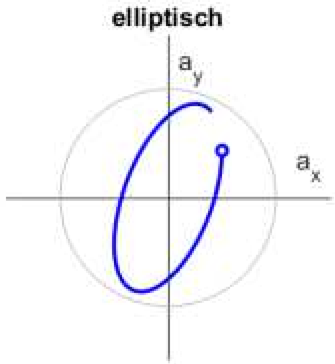
Polarisation

Elliptisch Polarisation

$$\boxed{Für \quad \varphi_x = 0}$$

- Mischform der zirkularen und der linearen Polarisation.
- Amplituden $E_x \neq E_y$ oder Phasenunterschied $\varphi_y \neq \frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$





Darstellungsformen der Polarisation

Jones-Vektor

$$\underline{E}_x(t) = E_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t + \mathrm{j}\,\varphi_x) = \underline{E}_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = E_0 \underline{a}_x \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$
$$\underline{E}_y(t) = E_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t + \mathrm{j}\,\varphi_y) = \underline{E}_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t) = E_0 \underline{a}_y \exp(\mathrm{j}\,\omega t)$$

Mit $\underline{a}_x = a_x\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_x}$, $\underline{a}_y = a_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi_y}$ und $|\underline{a}_x|^2 + |\underline{a}_y|^2 = 1$

$$\vec{\underline{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix}$$

Stokes-Vektor

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{E}_x\underline{E}_x^* + \underline{E}_y^*\underline{E}_y \\ \underline{E}_x\underline{E}_x^* - \underline{E}_y^*\underline{E}_y \\ \underline{E}_x\underline{E}_y^* + \underline{E}_x^*\underline{E}_y \\ \underline{E}_x\underline{E}_y^* - \underline{E}_x^*\underline{E}_y \end{pmatrix} = |E_0|^2 \begin{pmatrix} 1 \\ |\underline{a}_x|^2 - |\underline{a}_y|^2 \\ 2\Re\left\{\underline{a}_x\underline{a}_y^*\right\} \\ 2\Im\left\{\underline{a}_x\underline{a}_y^*\right\} \end{pmatrix} = |E_0|^2 \vec{S}'$$

Und für zeitharmonische ebene Wellen gilt $p = \sqrt{S_1^2 + S_1^2 + S_3^2}/S_0 = 1$

Polarisation

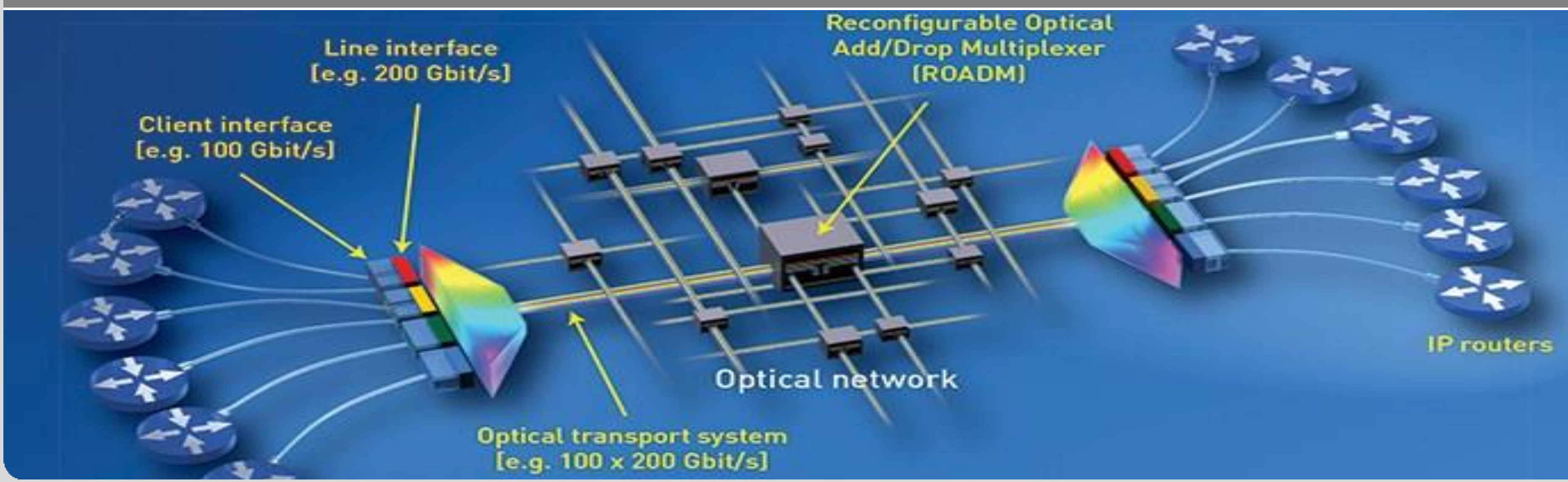
Polarisationszustand	$Für \quad \varphi_x = 0$
Linear in x-Richtung	$\varphi_y = \pm n \cdot 2\pi, \quad a_y = 0$
Linear in y-Richtung	$\varphi_y = \pm n \cdot 2\pi, \quad a_x = 0$
+/- 45° linear	$\varphi_y = \pm n \cdot 2\pi, \quad a_x = a_y$
Rechts zirkular	$\varphi_y = -\frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$
Links zirkular	$\varphi_y = \frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$
Elliptisch	$E_x \neq E_y$ oder $\varphi_y \neq \frac{\pi}{2} \pm n \cdot 2\pi$

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 5

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter
    www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: **maxwell19**
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu

- Grenzflächenübergänge
  - a)-c) Dielektrikum – Dielektrikum (senkrechter Einfall)
  - d-e) Dielektrikum – Leiter (senkrechter Einfall)

Themenübersicht

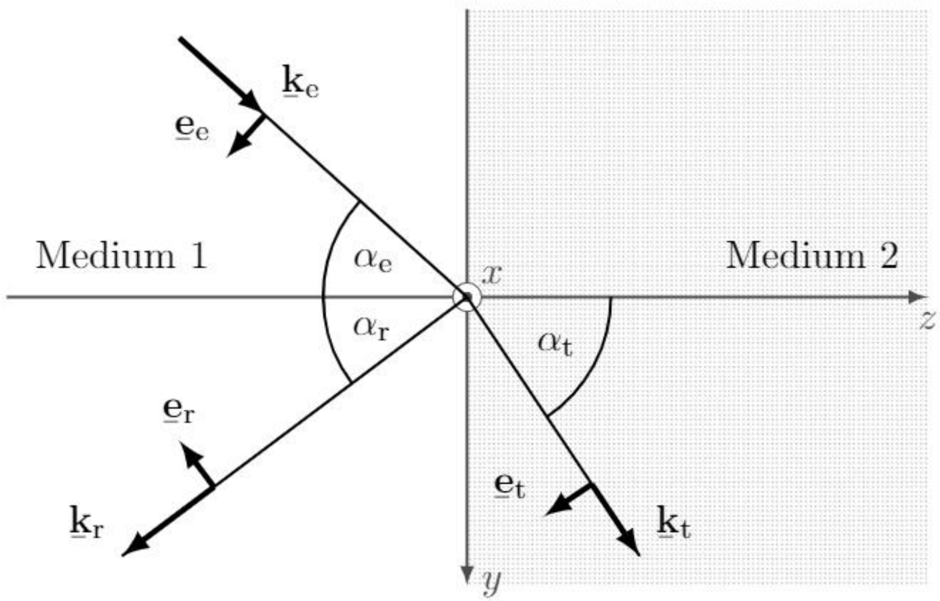
Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Harmonische Wellen, Poynting-Vektor
Übung 4	A5	Zeitharmonische ebene Wellen, Dispersionsrelation, Polarisation
Übung 5	A6	Grenzflächenübergänge (senkrechtes Auftreffen)

Kalender

Karlsruhe Institute of Technology

2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	1 Fr Allerheiligen	1 So 1. Advent	1 Mi Neujahr	1 Sa	1 So	1 Mi Klausur
2 Mi	2 Sa	2 Mo Übung 7 49	2 Do	2 So	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	3 So	3 Di	3 Fr	3 Mo Übung 13 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo Übung 3 45	4 Mi Vorlesung 8	4 Sa	4 Di	4 Mi	4 Sa
5 Sa	5 Di	5 Do	5 So	5 Mi Vorlesung 15	5 Do	5 So
6 So	6 Mi Vorlesung 4	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	7 Sa	7 Di	7 Fr	7 Sa	7 Di
8 Di	8 Fr	8 So	8 Mi Vorlesung 11	8 Sa	8 So	8 Mi
9 Mi	9 Sa	9 Mo Übung 8 50	9 Do	9 So	9 Mo 11	9 Do
10 Do	10 So	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	10 Fr Karfreitag
11 Fr	11 Mo Übung 4 46	11 Mi Vorlesung 9	11 Sa	11 Di	11 Mi	11 Sa
12 Sa	12 Di	12 Do	12 So	12 Mi	12 Do	12 So Ostern
13 So	13 Mi Vorlesung 5	13 Fr	13 Mo Übung 10 3	13 Do	13 Fr	13 Mo Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	14 Sa	14 Di	14 Fr	14 Sa	14 Di
15 Di	15 Fr	15 So	15 Mi Vorlesung 12	15 Sa	15 So	15 Mi
16 Mi Vorlesung 1	16 Sa	16 Mo Übung 9 51	16 Do	16 So	16 Mo 12	16 Do
17 Do	17 So	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo Übung 5 47	18 Mi Vorlesung 10	18 Sa	18 Di	18 Mi	18 Sa
19 Sa	19 Di	19 Do	19 So	19 Mi	19 Do	19 So
20 So	20 Mi Vorlesung 6	20 Fr	20 Mo Übung 11 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo Übung 1 43	21 Do	21 Sa	21 Di	21 Fr	21 Sa	21 Di
22 Di	22 Fr	22 So	22 Mi Vorlesung 13	22 Sa	22 So	22 Mi
23 Mi Vorlesung 2	23 Sa	23 Mo 52	23 Do	23 So	23 Mo 13	23 Do
24 Do	24 So	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo Übung 6 48	25 Mi 1. Weihnachtstag	25 Sa	25 Di	25 Mi	25 Sa
26 Sa	26 Di	26 Do 2. Weihnachtstag	26 So	26 Mi	26 Do	26 So
27 So	27 Mi Vorlesung 7	27 Fr	27 Mo Übung 12 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo Übung 2 44	28 Do	28 Sa	28 Di	28 Fr	28 Sa	28 Di
29 Di	29 Fr	29 So	29 Mi Vorlesung 14	29 Sa	29 So	29 Mi
30 Mi Vorlesung 3	30 Sa	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Grenzflächenbetrachtungen



An Grenzflächen zweier Medien werden Wellen teilweise reflektiert und dringen teilweise in das hinter der Grenzfläche liegende Medium ein (transmittiert).

Reflexionsgesetz:
$\alpha_e = \alpha_r$

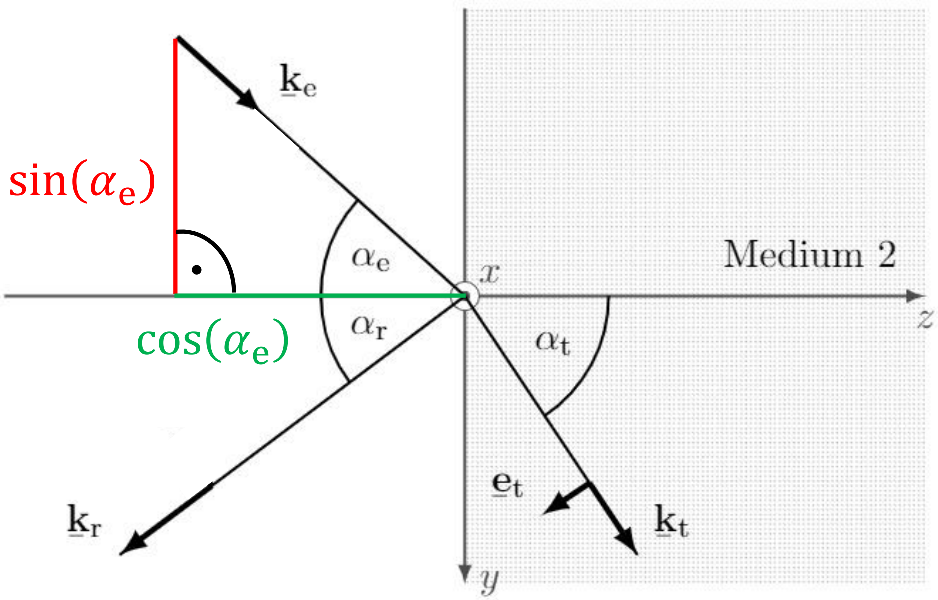
Snelliussches Brechungsgesetz:
$\underline{k}_1 \sin(\alpha_e) = \underline{k}_2 \sin(\alpha_t)$

- Die Ausbreitungsrichtung sowie die Schwingungsrichtung von $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld entsprechen nicht mehr exakt einer Koordinatenachse: ➔ Einführung eines (komplexen) **Wellen-vektors** anstelle der skalaren Wellenzahl

$$\underline{\mathbf{k}}_i = \underline{k}_i \mathbf{e}_{k,i} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$$

- Ansatz für eine harmonische Welle verändert sich im Allgemeinen zu: $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_i \mathbf{r})}$, mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x\, \mathbf{e}_x + y\, \mathbf{e}_y + z\, \mathbf{e}_z$.

Grenzflächenbetrachtungen



$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{e}) \\ \cos(\alpha_\mathrm{e}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{r}) \\ -\cos(\alpha_\mathrm{r}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{t}) \\ \cos(\alpha_\mathrm{t}) \end{pmatrix}$$

- In nichtleitenden Medien sind die Wellenzahl $\underline{k}$, der Wellenwiderstand $\underline{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{k}{\omega\mu}$ und der Brechungsindex $\underline{n} = \sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{c_0}{c}$ reell.
- Heutige Übung: Spezialfall des senkrechten Auftreffens auf die Grenzfläche ($\alpha_\mathrm{e} = 0°$)
  - $\alpha_\mathrm{r} = 0°$ und $\alpha_\mathrm{t} = 0°$
  - $\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}} = \mathbf{e}_{k,\mathrm{t}} = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_{k,\mathrm{r}} = -\mathbf{e}_z$

Grenzflächenbetrachtungen

Gegeben: entweder $\mathbf{E}$- oder $\mathbf{H}$-Feld

Schritt 1: Bestimmen der unbekannten Feldkomponenten

- **Ansatz** für $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld aufstellen, z.B. einen harmonischen Ansatz unter Berücksichtigung der Ausbreitungs- und Schwingungsrichtungen
- Amplitude von $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld sind über den **Wellenwiderstand** $\mathrm{Z} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$ verknüpft;

  Herleitung (inkl. korrektem Vorzeichen) aus der Maxwellgleichung
- $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld bilden mit der Ausbreitungsrichtung bzw. dem Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$ ein Rechtssystem („Rechte-Hand-Regel“)

Schritt 2: Bestimmen der Amplitudenverhältnisse (Grad der Reflexion und Transmission)

- Tangentiale Feldkomponenten müssen die Stetigkeitsbedingungen erfüllen, aus denen sich **Reflexionsfaktor** $\underline{r}$ und **Transmissionsfaktor** $\underline{t}$ ergeben.
- In nichtleitenden Medien sind der Reflexions- und Transmissionsfaktor reell.
- **Energieerhaltung** muss erfüllt sein: $|\boldsymbol{S}_\mathrm{e}|=|\boldsymbol{S}_\mathrm{r}|+|\boldsymbol{S}_\mathrm{t}|$

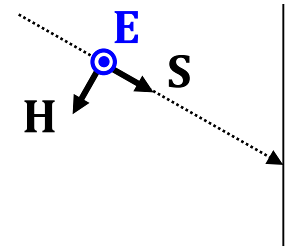
Fresnelsche Formeln

- Reflexionsfaktor und Transmissionsfaktor (für $\mu_r = 1$, $\kappa = 0$) und **TE-Polarisation**

$$\underline{r}_s = \frac{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_e) - \underline{Z}_1 \cos(\alpha_t)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_e) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_t)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e) - \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_t)}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e) + \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_t)}$$

$$\underline{t}_s = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_e)}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_e) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_t)} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e)}{\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e) + \sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_t)}$$

E-Feld ⊥ Einfallsebene

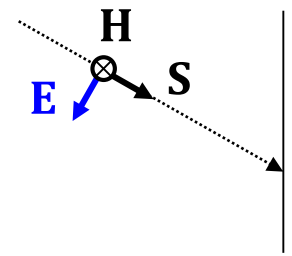


- Reflexionsfaktor und Transmissionsfaktor (für $\mu_r = 1$, $\kappa = 0$) und **TM-Polarisation**

$$\underline{r}_p = \frac{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_e) - \underline{Z}_2 \cos(\alpha_t)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_e) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_t)} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_e) - \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_t)}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_e) + \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_t)}$$

$$\underline{t}_s = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_e)}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_e) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_t)} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_e)}{\sqrt{\varepsilon_2} \cos(\alpha_e) + \sqrt{\varepsilon_1} \cos(\alpha_t)}$$

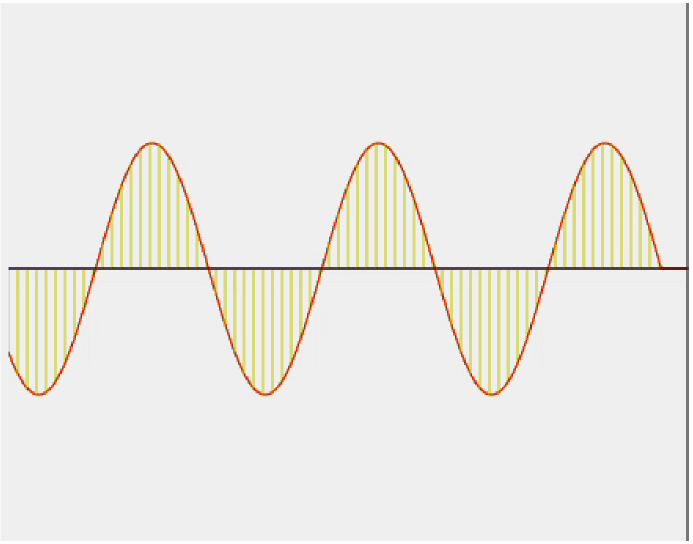
E-Feld ∥ Einfallsebene



Der Reflexionsfaktor
kann negativ sein!

Stehende Wellen beim idealen Leiter

- Die hinlaufende und reflektierte Welle überlagern sich und bilden eine stehende Welle mit fixen Schwingungsbäuchen und –knoten.
- Da der Reflexions- und Transmissionsfaktor im Allgemeinen komplex sind, können am Grenzübergang **Phasensprünge** auftreten, die sich aus den Winkeln $\arg(\underline{r})$ und $\arg(\underline{t})$ ergeben.
  - Idealer Leerlauf: kein Phasensprung
    z.B. magnetisches Feld bei der Reflexion am idealen Leiter
  - Idealer Kurzschluss: Phasensprung von 180°
    z.B. elektrisches Feld bei der Reflexion am idealen Leiter



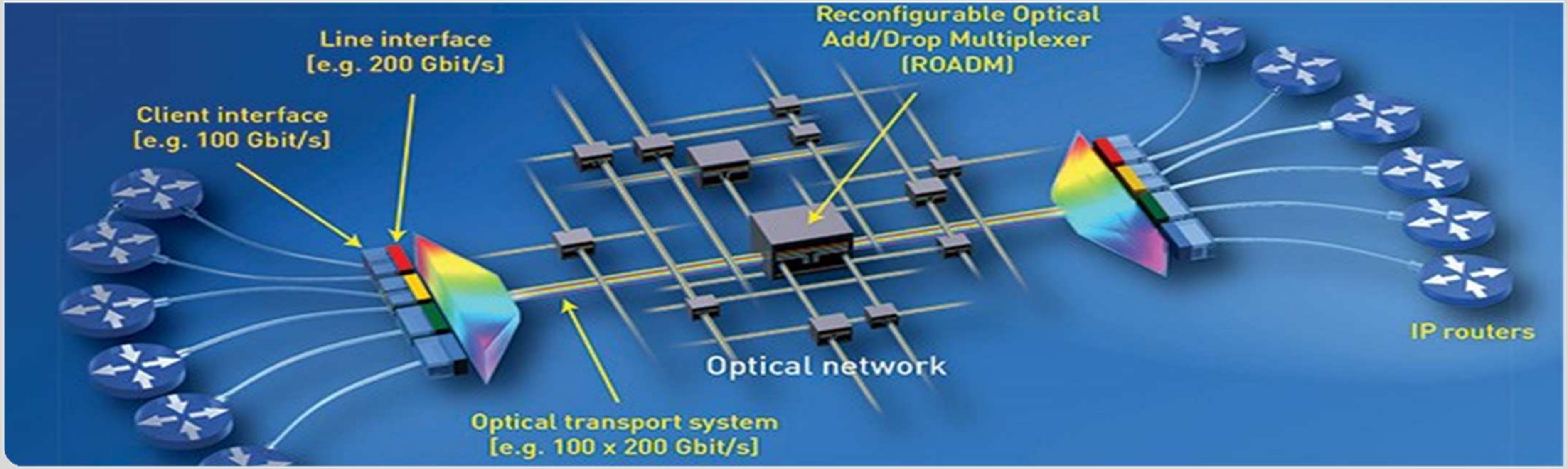
Animation, © W. Fendt, 1999

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 6

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter
    www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: maxwell19
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu
- Grenzflächenübergang
  - Schräger Einfall
  - Totalreflexion

Themenübersicht

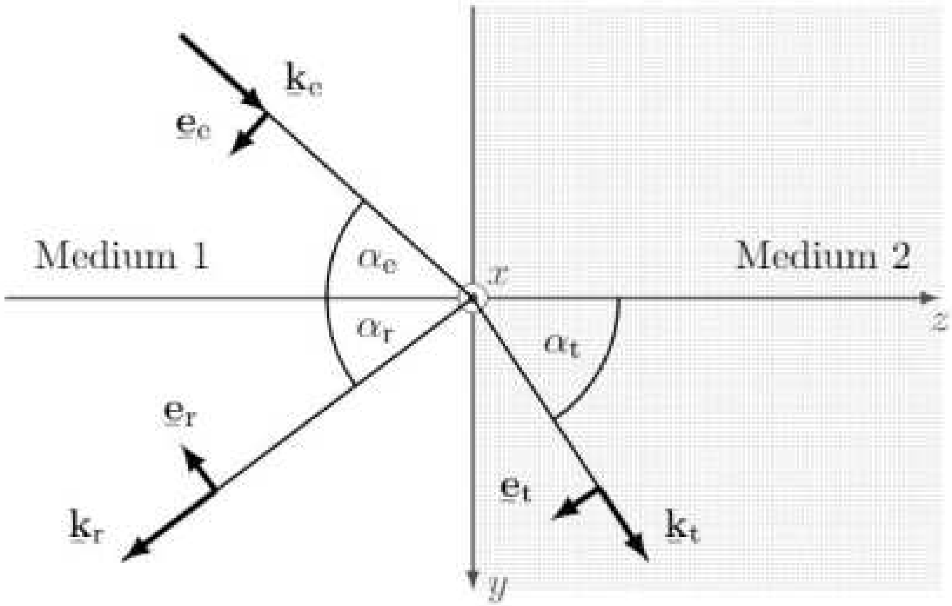
Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Ebene und harmonische Wellen, Poynting Vektor
Übung 4	A5	Zeitharmonische ebene Wellen, Dispersionsrelation, Polarisation
Übung 5	A6	Grenzflächenübergänge (senkrechtes Auftreffen)
Übung 6	A7	Grenzflächenübergänge

Kalender

2019			2020			
Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März	April
1 Di	1 Fr Allerheiligen	1 So 1. Advent	1 Mi Neujahr	1 Sa	1 So	1 Mi Klausur
2 Mi	2 Sa	2 Mo Übung 7 49	2 Do	2 So	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	3 So	3 Di	3 Fr	3 Mo Übung 13 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo Übung 3 45	4 Mi Vorlesung 8	4 Sa	4 Di	4 Mi	4 Sa
5 Sa	5 Di	5 Do	5 So	5 Mi Vorlesung 15	5 Do	5 So
6 So	6 Mi Vorlesung 4	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	7 Sa	7 Di	7 Fr	7 Sa	7 Di
8 Di	8 Fr	8 So	8 Mi Vorlesung 11	8 Sa	8 So	8 Mi
9 Mi	9 Sa	9 Mo Übung 8 50	9 Do	9 So	9 Mo 11	9 Do
10 Do	10 So	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	10 Fr Karfreitag
11 Fr	11 Mo Übung 4 46	11 Mi Vorlesung 9	11 Sa	11 Di	11 Mi	11 Sa
12 Sa	12 Di	12 Do	12 So	12 Mi	12 Do	12 So Ostern
13 So	13 Mi Vorlesung 5	13 Fr	13 Mo Übung 10 3	13 Do	13 Fr	13 Mo Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	14 Sa	14 Di	14 Fr	14 Sa	14 Di
15 Di	15 Fr	15 So	15 Mi Vorlesung 12	15 Sa	15 So	15 Mi
16 Mi Vorlesung 1	16 Sa	16 Mo Übung 9 51	16 Do	16 So	16 Mo 12	16 Do
17 Do	17 So	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo Übung 5 47	18 Mi Vorlesung 10	18 Sa	18 Di	18 Mi	18 Sa
19 Sa	19 Di	19 Do	19 So	19 Mi	19 Do	19 So
20 So	20 Mi Vorlesung 6	20 Fr	20 Mo Übung 11 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo Übung 1 43	21 Do	21 Sa	21 Di	21 Fr	21 Sa	21 Di
22 Di	22 Fr	22 So	22 Mi Vorlesung 13	22 Sa	22 So	22 Mi
23 Mi Vorlesung 2	23 Sa	23 Mo 52	23 Do	23 So	23 Mo 13	23 Do
24 Do	24 So	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo Übung 6 48	25 Mi 1. Weihnachtstag	25 Sa	25 Di	25 Mi	25 Sa
26 Sa	26 Di	26 Do 2. Weihnachtstag	26 So	26 Mi	26 Do	26 So
27 So	27 Mi Vorlesung 7	27 Fr	27 Mo Übung 12 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo Übung 2 44	28 Do	28 Sa	28 Di	28 Fr	28 Sa	28 Di
29 Di	29 Fr	29 So	29 Mi Vorlesung 14	29 Sa	29 So	29 Mi
30 Mi Vorlesung 3	30 Sa	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Grenzflächenbetrachtungen

Wiederholung: Übung 5



An Grenzflächen zweier Medien werden Wellen teilweise reflektiert und dringen teilweise in das hinter der Grenzfläche liegende Medium ein (transmittiert).

Reflexionsgesetz:
$\alpha_e = \alpha_r$

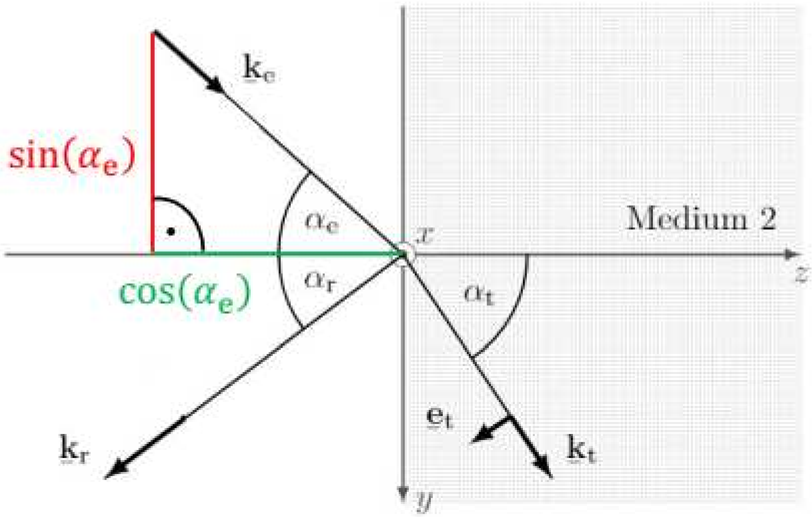
Snelliussches Brechungsgesetz:
$\underline{k}_1 \sin(\alpha_e) = \underline{k}_2 \sin(\alpha_t)$

- Die Ausbreitungsrichtung sowie die Schwingungsrichtung von $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld entsprechen nicht mehr exakt einer Koordinatenachse: ➔ Einführung eines (komplexen) **Wellen-vektors** anstelle der skalaren Wellenzahl

$$\underline{\mathbf{k}}_i = \underline{k}_i \mathbf{e}_{k,i} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$$

- Ansatz für eine harmonische Welle verändert sich im Allgemeinen zu:
$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_i \mathbf{r})}$, mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x\, \mathbf{e}_x + y\, \mathbf{e}_y + z\, \mathbf{e}_z$.

Grenzflächenbetrachtungen



$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{e}) \\ \cos(\alpha_\mathrm{e}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{r}) \\ -\cos(\alpha_\mathrm{r}) \end{pmatrix}$$

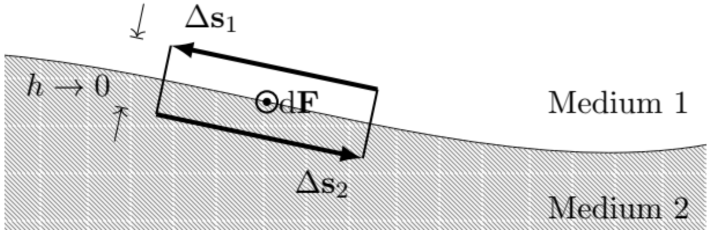
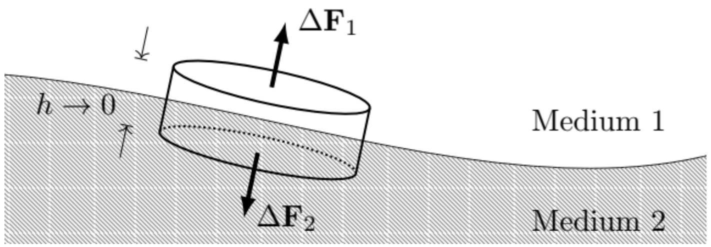
$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{t}) \\ \cos(\alpha_\mathrm{t}) \end{pmatrix}$$

Wiederholung:
Übung 5 & Vorlesung

- In nichtleitenden Medien sind die Wellenzahl $\underline{k}$, der Wellenwiderstand $\underline{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{k}{\omega\mu}$ und der Brechungsindex $\underline{n} = \sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{c_0}{c}$ reell.

- Heutige Übung:
  - Schräger Einfall $\alpha_e \neq 0$
  - Grenzfläche in x-z-Ebene

Stetigkeitsbedingungen

Tangentiale Feldkomponenten 	$\oint_s \mathbf{H} \cdot \mathrm{ds} = \int_F \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F}$ *Durchflutungsgesetz*	$H_{\mathrm{t},1} - H_{\mathrm{t},2} = i'$
	$\oint_s \mathbf{E} \cdot \mathrm{ds} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F}$ *Induktionsgesetz*	$E_{\mathrm{t},1} - E_{\mathrm{t},2} = 0$
Normale Feldkomponenten 	$\oint_O \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \int_V \rho \, \mathrm{d}V$ *Gaußsches Gesetz*	$D_{\mathrm{n},1} - D_{\mathrm{n},2} = \sigma$
	$\oint_O \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = 0$	$B_{\mathrm{n},1} - B_{\mathrm{n},2} = 0$

Brewsterscher Polarisationswinkel

- Snelliussches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1} = \frac{\underline{n}_2}{\underline{n}_1}$$

mit $n = \frac{kc_0}{\omega} = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}$

- Fresnelsche Beziehungen

$$r_\mathrm{s} = \frac{n_1\cos(\alpha_1) - n_2\cos(\alpha_2)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad r_\mathrm{p} = \frac{n_2\cos(\alpha_1) - n_1\cos(\alpha_2)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

$$t_\mathrm{s} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_1\cos(\alpha_1) + n_2\cos(\alpha_2)} \qquad t_\mathrm{p} = \frac{2n_1\cos(\alpha_1)}{n_2\cos(\alpha_1) + n_1\cos(\alpha_2)}$$

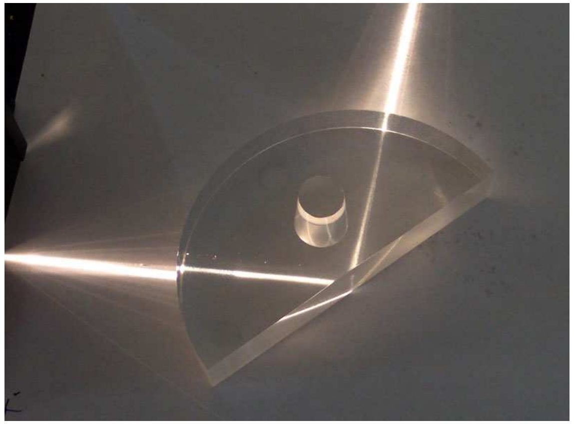
- Für $r_\mathrm{p} = 0$ folgt $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos(\alpha_2)}{\cos(\alpha_1)}$

$$\frac{\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_2)}{\sin(\alpha_1)\cos(\alpha_1)} = \frac{\sin(2\alpha_2)}{\sin(2\alpha_1)} = 1$$

$\rightarrow$ $\alpha_2 = \alpha_1$

$\rightarrow$ $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$ und $\alpha_1 = \operatorname{atan}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

Totalreflexion



Snelliussches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1} = \frac{\underline{n}_2}{\underline{n}_1}$$

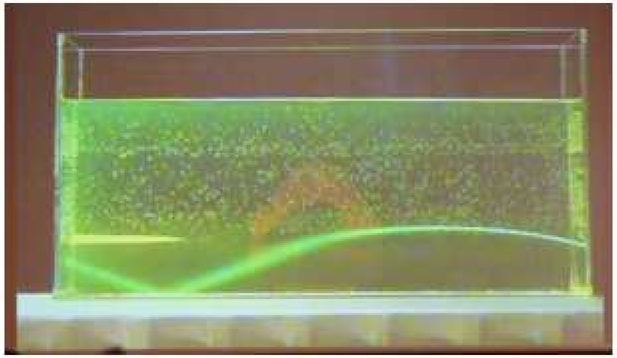
mit $n = \frac{kc_0}{\omega} = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$

Für $\frac{\underline{k}_1}{\underline{k}_2}\sin\alpha_1 > 1$ folgt α_2 nicht reell

$$\rightarrow \underline{\mathbf{k}}_2 = \underline{\mathbf{k}}_t = k_2\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1\underline{\mathbf{e}}_y + j\sqrt{\frac{n_1}{n_2}\sin^2\alpha_1 - 1}\,\underline{\mathbf{e}}_z\right) = \beta\underline{\mathbf{e}}_y - j\alpha\underline{\mathbf{e}}_z$$

$$\rightarrow \underline{\mathbf{E}}_t \sim E_{t,0}e^{j(\omega t - \beta y)}e^{-\alpha z}$$

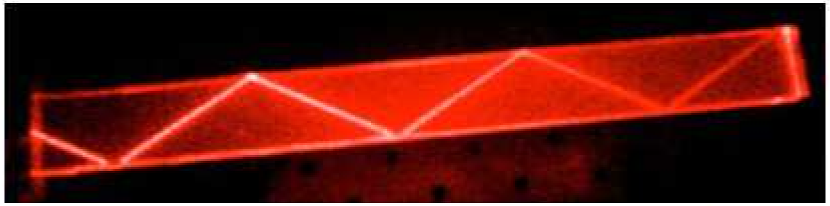
Totalreflexion



Zucker-Lösung
-> Gradient im Brechungsindex
-> Lichtleiter

Gießen, H.: Öffentliche Vorlesung über Tarnkappen im Mercedes Museum am 22.7.2008. http://www.pi4.uni-stuttgart.de/

Totalreflexion an Luft-PMMA-Grenzfläche



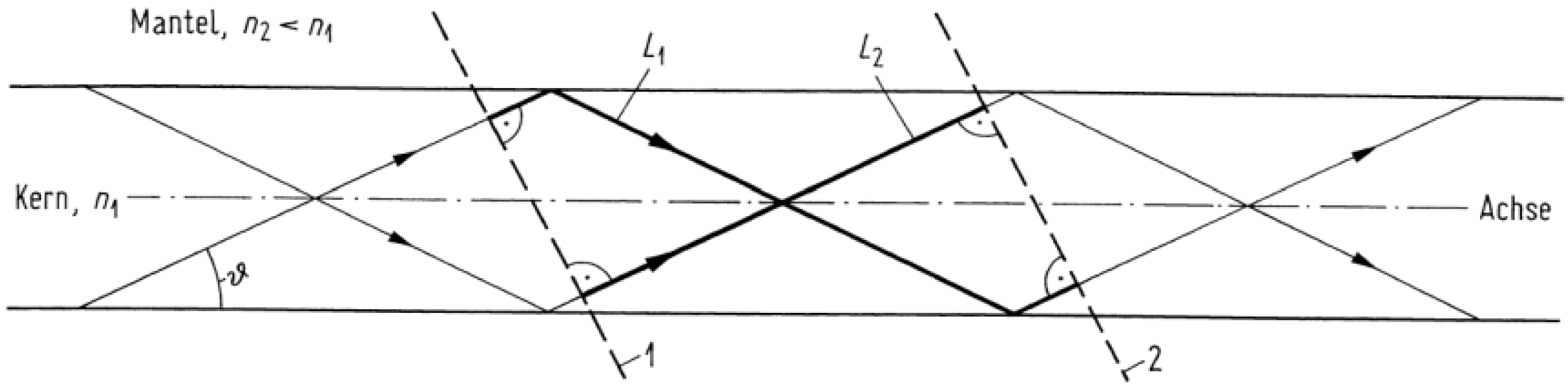
http://en.wikipedia.org/wiki/File:TIR_in_PMMA.jpg

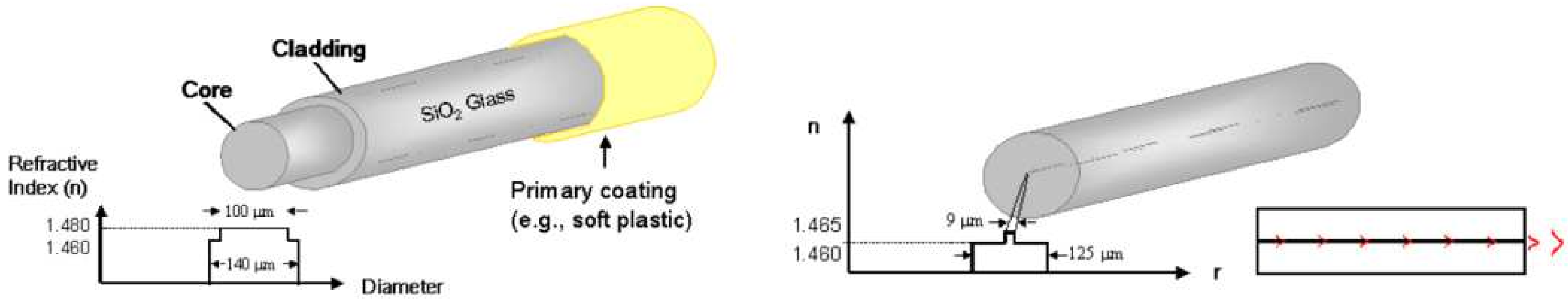
Totalreflexion an Wasser-Luft-Grenzfläche

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Total internal reflection of Chelonia mydas .jpg

W.Freude - FPC Vorlseung

Totalreflexion





(a) Multimode fibre with step-index profile

(b) Single-mode fibre with step-index profile

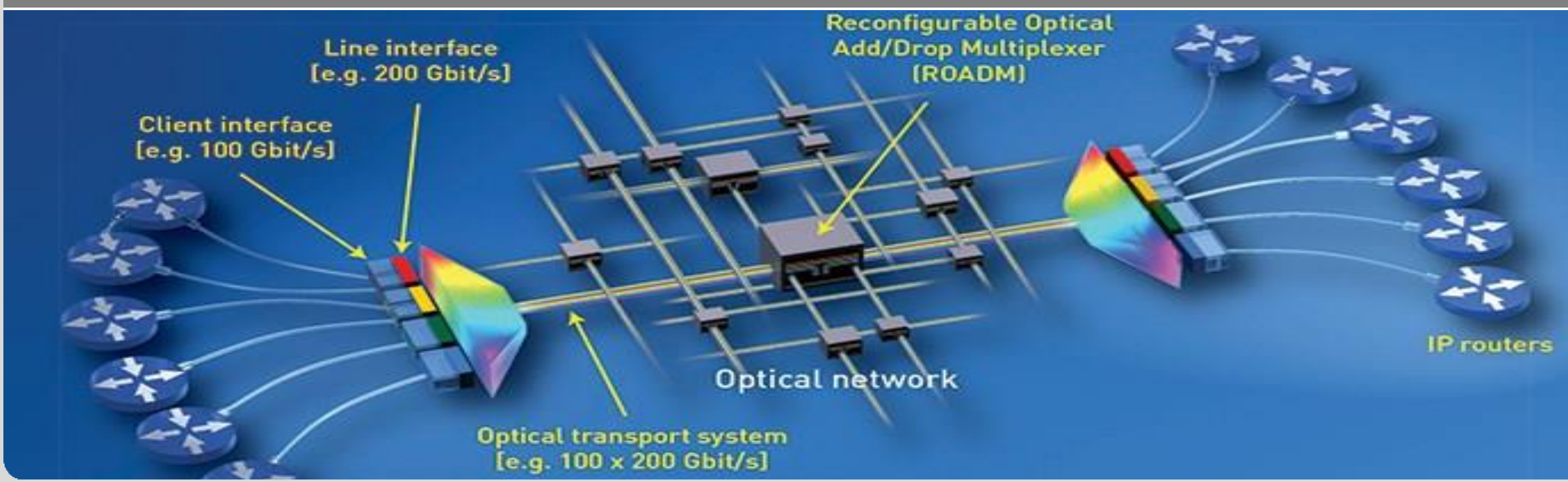
W.Freude - FPC Vorlseung

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 7

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter
    www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: **maxwell19**
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu

- Rückgabe der eingesammelten Übungsblätter (Übungsblatt 4) und kurze Diskussion
- Besprechung von Aufgabe 8

Rückgabe der eingesammelten Übungsblätter

Karlsruhe Institute of Technology

Typische Fehler

- Falsches Vorzeichen beim Wellenwiderstand (da nicht hergeleitet)
- Falsches Vorzeichen der Wellenzahl → Ausbreitungsrichtung
- Reflexions- und Transmissionsfaktor beziehen sich auf die Amplituden. Das Hinschreiben von $r = \frac{E_r \exp(\ldots)}{E_e \exp(\ldots)}$ reicht definitiv nicht als Ergebnis aus. Was passiert mit den Exponentialtermen?
- Vorsicht beim Poynting-Vektor: Es gilt nur $|\overline{S}_e| = |\overline{S}_r| + |\overline{S}_t|$
  → Vergessen Sie die Betragsstriche nicht.

Weitere Anmerkungen

- In der Klausur ist der Wellenwiderstand (inklusive Vorzeichen) in der Regel aus der Maxwell-Gleichung herzuleiten, vgl. Musterlösung Übungsblatt 4, und das Hinschreiben der Formeln genügt nicht. Dies steht dann jedoch explizit in der Aufgabenstellung.
- Schauen Sie sich Aufgabe 6e) nochmals an. Sowohl die Superposition von Feldern (nicht von Leistungen!), als auch das Phänomen stehender Wellen spielen eine große Rolle in der Elektrotechnik.

Themenübersicht

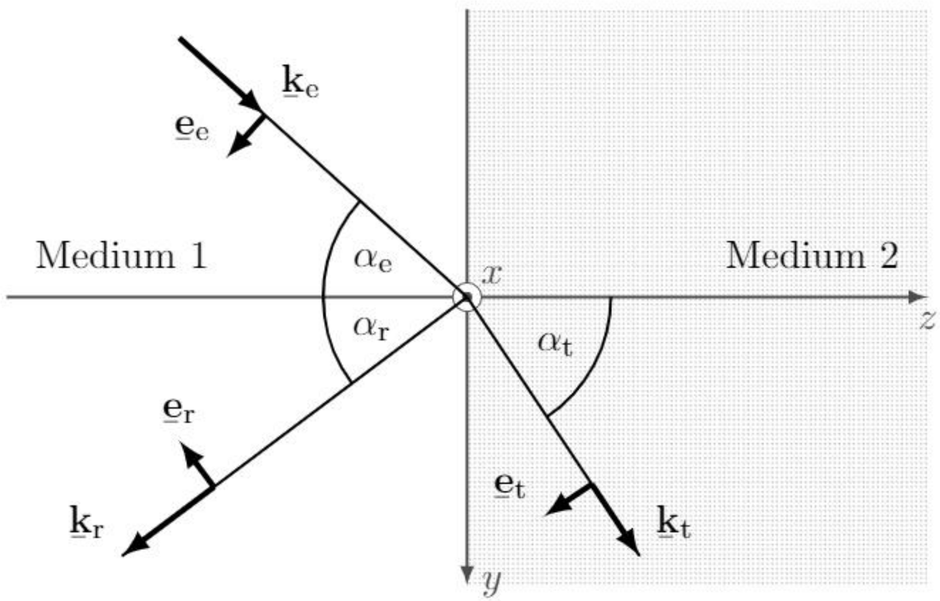
Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Harmonische Wellen, Poynting-Vektor
Übung 4	A5	Zeitharmonische ebene Wellen, Dispersionsrelation, Polarisation
Übung 5	A6	Grenzflächenübergänge (senkrechtes Auftreffen)
Übung 6	A7	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 7	A8	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$

Kalender

2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	1 Fr Allerheiligen	1 So 1. Advent	1 Mi Neujahr	1 Sa	1 So	1 Mi Klausur
2 Mi	2 Sa	2 Mo Übung 7 49	2 Do	2 So	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	3 So	3 Di	3 Fr	3 Mo Übung 13 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo Übung 3 45	4 Mi Vorlesung 8	4 Sa	4 Di	4 Mi	4 Sa
5 Sa	5 Di	5 Do	5 So	5 Mi Vorlesung 15	5 Do	5 So
6 So	6 Mi Vorlesung 4	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	7 Sa	7 Di	7 Fr	7 Sa	7 Di
8 Di	8 Fr	8 So	8 Mi Vorlesung 11	8 Sa	8 So	8 Mi
9 Mi	9 Sa	9 Mo Übung 8 50	9 Do	9 So	9 Mo 11	9 Do
10 Do	10 So	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	10 Fr Karfreitag
11 Fr	11 Mo Übung 4 46	11 Mi Vorlesung 9	11 Sa	11 Di	11 Mi	11 Sa
12 Sa	12 Di	12 Do	12 So	12 Mi	12 Do	12 So Ostern
13 So	13 Mi Vorlesung 5	13 Fr	13 Mo Übung 10 3	13 Do	13 Fr	13 Mo Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	14 Sa	14 Di	14 Fr	14 Sa	14 Di
15 Di	15 Fr	15 So	15 Mi Vorlesung 12	15 Sa	15 So	15 Mi
16 Mi Vorlesung 1	16 Sa	16 Mo Übung 9 51	16 Do	16 So	16 Mo 12	16 Do
17 Do	17 So	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo Übung 5 47	18 Mi Vorlesung 10	18 Sa	18 Di	18 Mi	18 Sa
19 Sa	19 Di	19 Do	19 So	19 Mi	19 Do	19 So
20 So	20 Mi Vorlesung 6	20 Fr	20 Mo Übung 11 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo Übung 1 43	21 Do	21 Sa	21 Di	21 Fr	21 Sa	21 Di
22 Di	22 Fr	22 So	22 Mi Vorlesung 13	22 Sa	22 So	22 Mi
23 Mi Vorlesung 2	23 Sa	23 Mo 52	23 Do	23 So	23 Mo 13	23 Do
24 Do	24 So	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo Übung 6 48	25 Mi 1. Weihnachtstag	25 Sa	25 Di	25 Mi	25 Sa
26 Sa	26 Di	26 Do 2. Weihnachtstag	26 So	26 Mi	26 Do	26 So
27 So	27 Mi Vorlesung 7	27 Fr	27 Mo Übung 12 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo Übung 2 44	28 Do	28 Sa	28 Di	28 Fr	28 Sa	28 Di
29 Di	29 Fr	29 So	29 Mi Vorlesung 14	29 Sa	29 So	29 Mi
30 Mi Vorlesung 3	30 Sa	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Grenzflächenbetrachtungen

Wiederholung



An Grenzflächen zweier Medien werden Wellen teilweise reflektiert und dringen teilweise in das hinter der Grenzfläche liegende Medium ein (transmittiert).

Reflexionsgesetz:

$\alpha_\mathrm{e} = \alpha_\mathrm{r}$

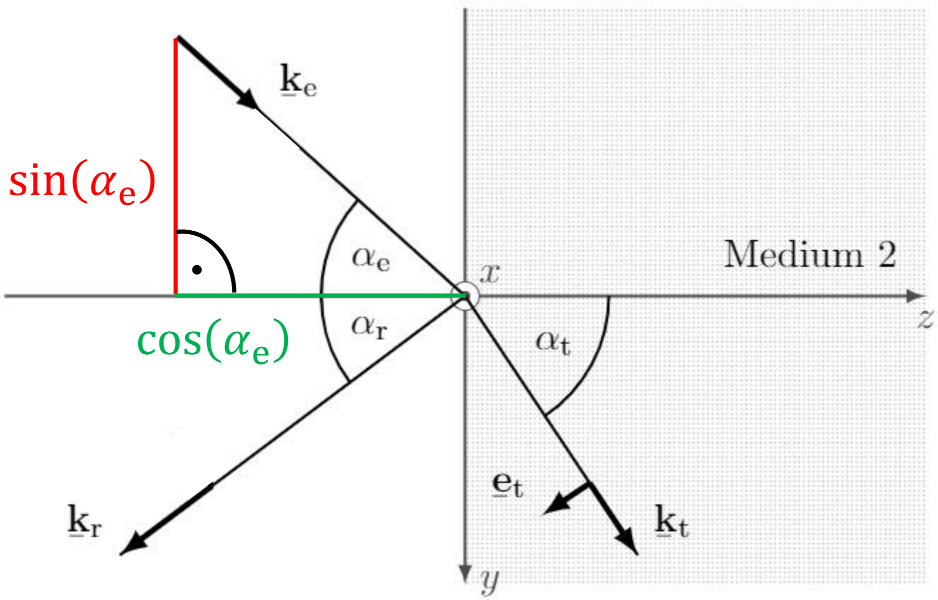
Snelliussches Brechungsgesetz:

$\underline{k}_1 \sin(\alpha_\mathrm{e}) = \underline{k}_2 \sin(\alpha_\mathrm{t})$

- Die Ausbreitungsrichtung sowie die Schwingungsrichtung von $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld entsprechen nicht mehr exakt einer Koordinatenachse: ➔ Einführung eines (komplexen) **Wellen-vektors** anstelle der skalaren Wellenzahl
$$\underline{\mathbf{k}}_\mathrm{i} = \underline{k}_\mathrm{i} \mathbf{e}_{k,\mathrm{i}} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$$
- Ansatz für eine harmonische Welle verändert sich im Allgemeinen zu:
$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{i} \mathbf{r})}$, mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x\, \mathbf{e}_x + y\, \mathbf{e}_y + z\, \mathbf{e}_z$.

Grenzflächenbetrachtungen

Wiederholung



$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{e}) \\ \cos(\alpha_\mathrm{e}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{r}) \\ -\cos(\alpha_\mathrm{r}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_\mathrm{t}) \\ \cos(\alpha_\mathrm{t}) \end{pmatrix}$$

- In nichtleitenden Medien sind die Wellenzahl $\underline{k}$, der Wellenwiderstand $\underline{Z} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{k}{\omega\mu}$ und der Brechungsindex $\underline{n} = \sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}} = \frac{c_0}{c}$ reell.
- Heutige Übung: Spezialfall des senkrechten Auftreffens auf die Grenzfläche ($\alpha_\mathrm{e} = 0°$)
  - $\alpha_\mathrm{r} = 0°$ und $\alpha_\mathrm{t} = 0°$
  - $\mathbf{e}_{k,\mathrm{e}} = \mathbf{e}_{k,\mathrm{t}} = \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_{k,\mathrm{r}} = -\mathbf{e}_z$

Grenzflächenbetrachtungen

Wiederholung

Gegeben: entweder $\mathbf{E}$- oder $\mathbf{H}$-Feld

Schritt 1: Bestimmen der unbekannten Feldkomponenten

- **Ansatz** für $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld aufstellen, z.B. einen harmonischen Ansatz unter Berücksichtigung der Ausbreitungs- und Schwingungsrichtungen
- Amplitude von $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld sind über den **Wellenwiderstand** $\mathrm{Z} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}}$ verknüpft;

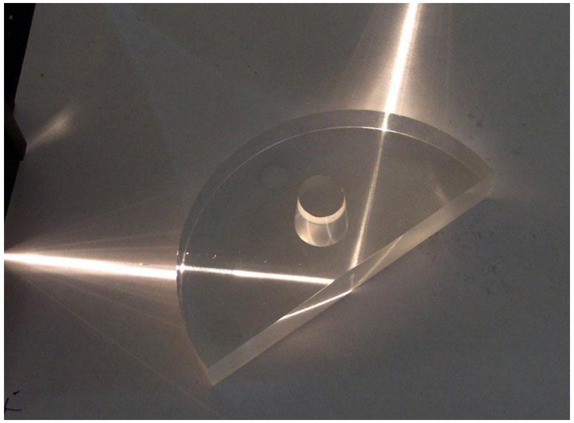
  Herleitung (inkl. korrektem Vorzeichen) aus der Maxwellgleichung
- $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld bilden mit der Ausbreitungsrichtung bzw. dem Poynting-Vektor $\boldsymbol{S}$ ein Rechtssystem („Rechte-Hand-Regel“)

Schritt 2: Bestimmen der Amplitudenverhältnisse (Grad der Reflexion und Transmission)

- Tangentiale Feldkomponenten müssen die Stetigkeitsbedingungen erfüllen, aus denen sich **Reflexionsfaktor** $\underline{r}$ und **Transmissionsfaktor** $\underline{t}$ ergeben.
- In nichtleitenden Medien sind der Reflexions- und Transmissionsfaktor reell.
- **Energieerhaltung** muss erfüllt sein: $|\boldsymbol{S}_\mathrm{e}|=|\boldsymbol{S}_\mathrm{r}|+|\boldsymbol{S}_\mathrm{t}|$

Totalreflexion

Wiederholung



Snelliussches Brechungsgesetz

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{\underline{k}_2}{\underline{k}_1} = \frac{\underline{n}_2}{\underline{n}_1} \qquad \text{mit } n = \frac{kc_0}{\omega} = \frac{c_0}{c} = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_\mathrm{r}\varepsilon_\mathrm{r}}$$

Für $\frac{\underline{k}_1}{\underline{k}_2}\sin\alpha_1 > 1$ folgt α_2 nicht reell

$$\rightarrow \underline{\mathbf{k}}_2 = \underline{\mathbf{k}}_\mathrm{t} = k_2\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha_1\underline{\mathbf{e}}_y + j\sqrt{\frac{n_1}{n_2}\sin^2\alpha_1 - 1}\,\underline{\mathbf{e}}_z\right) = \beta\underline{\mathbf{e}}_y - j\alpha\underline{\mathbf{e}}_z$$

$$\rightarrow \underline{\mathbf{E}}_\mathrm{t} \sim E_{\mathrm{t},0}e^{j(\omega t - \beta y)}e^{-\alpha z}$$

Aufgabe 7 c)

Grenz-übergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfalls-winkel α_e	Brechungs-winkel α_t	Erforderlicher kritischer Winkel $\alpha_{\mathrm{e,krit}isch}$
1	$\varepsilon_{\mathrm{r},1} = 1$	$\varepsilon_{\mathrm{r},2} = 0{,}95$	45°	46,51°	77,08°
2	$\varepsilon_{\mathrm{r},2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{\mathrm{r},3} = 0{,}9$	46,51°	48,19°	76,74°
3	$\varepsilon_{\mathrm{r},3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{\mathrm{r},4} = 0{,}85$	48,19°	50,08°	76,37°
4	$\varepsilon_{\mathrm{r},4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{\mathrm{r},5} = 0{,}8$	50,08°	52,24°	75,96°
5	$\varepsilon_{\mathrm{r},5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{\mathrm{r},6} = 0{,}75$	52,24°	54,74°	75,52°
6	$\varepsilon_{\mathrm{r},6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{\mathrm{r},7} = 0{,}7$	54,74°	57,69°	75,04°
7	$\varepsilon_{\mathrm{r},7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{\mathrm{r},8} = 0{,}65$	57,69°	61,29°	74,50°
8	$\varepsilon_{\mathrm{r},8} = 0{,}65$	$\varepsilon_{\mathrm{r},9} = 0{,}6$	61,29°	65,91°	73,90°
9	$\varepsilon_{\mathrm{r},9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{\mathrm{r},10} = 0{,}55$	65,91°	72,45°	73,22°
10	$\varepsilon_{\mathrm{r},10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{\mathrm{r},11} = 0{,}5$	72,45°	90,00°	72,45°
11	$\varepsilon_{\mathrm{r},11} = 0{,}5$	$\varepsilon_{\mathrm{r},12} = 0{,}45$	90,00°	>90°	71,57°

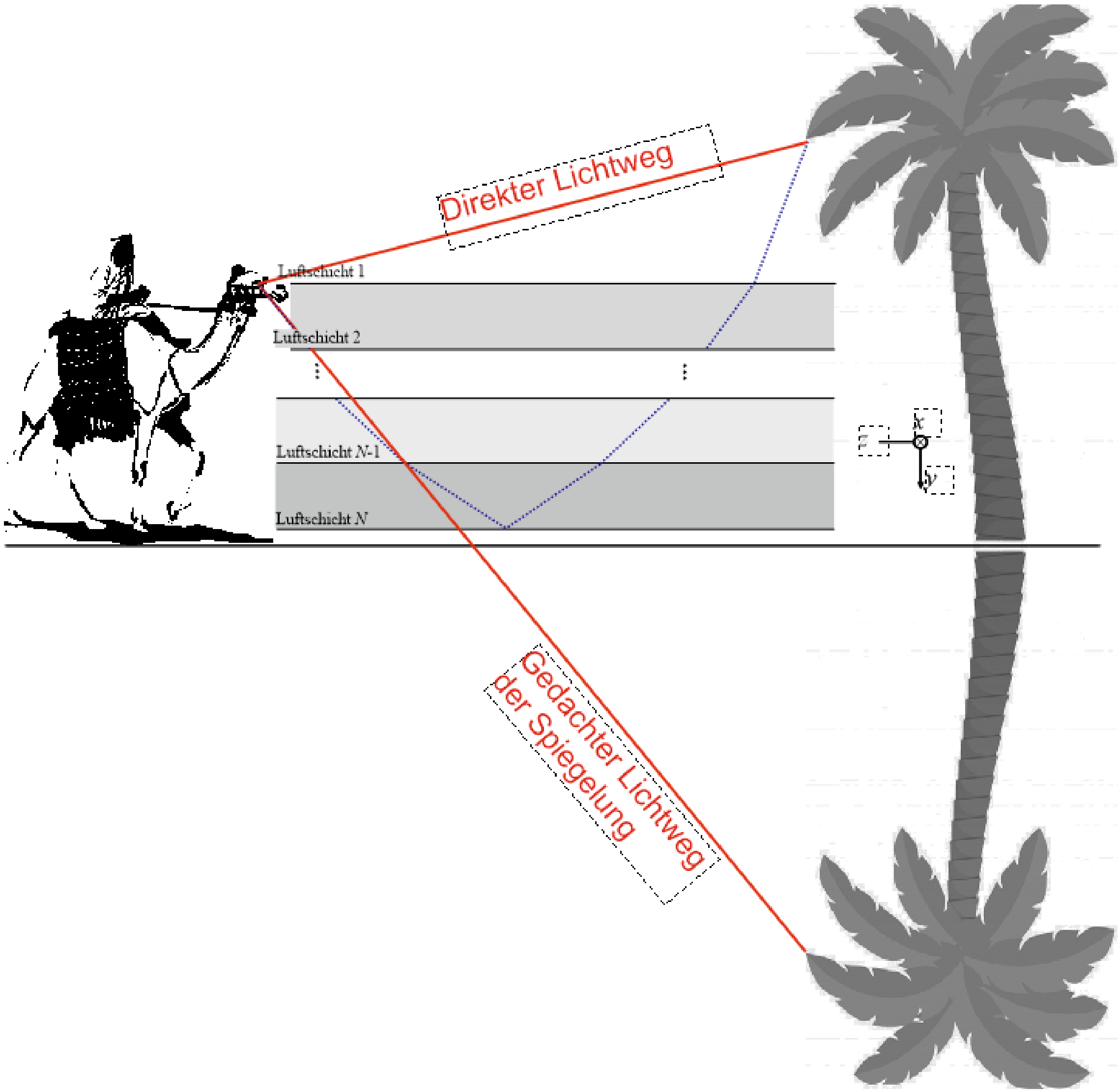
Es werden $N = 10$ oder $N = 11$ Grenzübergänge benötigt, je nachdem, ob man einen Brechungswinkel von 90° bereits als Totalreflexion bezeichnet oder nicht. Für andere Einfallswinkel, z.B. $\alpha_\mathrm{e} = 50°$ ergibt sich ein eindeutiges Ergebnis.

Institute of Photonics and Quantum Electronics — IPQ

Aufgabe 7 d)

Der „fliegende Holländer“

Aufgabe 7 d)



Direkter Lichtweg
Luftschicht 1
Luftschicht 2
Luftschicht N-1
Luftschicht N
x
y
Gedachter Lichtweg
der Spiegelung

Fresnelsche Formeln

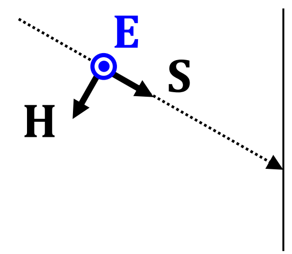
Wiederholung

- Reflexionsfaktor und Transmissionsfaktor (für $\mu_r = 1,\ \kappa = 0$) und **TE-Polarisation**

$$\underline{r}_s = \frac{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_\mathrm{e}) - \underline{Z}_1 \cos(\alpha_\mathrm{t})}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_\mathrm{e}) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_\mathrm{t})} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_\mathrm{e}) - \sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_\mathrm{t})}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_\mathrm{e}) + \sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_\mathrm{t})}$$

$$\underline{t}_s = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_\mathrm{e})}{\underline{Z}_2 \cos(\alpha_\mathrm{e}) + \underline{Z}_1 \cos(\alpha_\mathrm{t})} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_\mathrm{e})}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_\mathrm{e}) + \sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_\mathrm{t})}$$

E-Feld ⊥ Einfallsebene

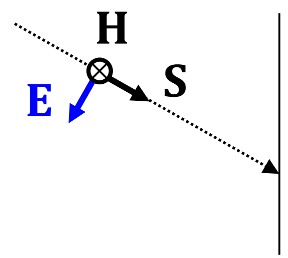


- Reflexionsfaktor und Transmissionsfaktor (für $\mu_r = 1,\ \kappa = 0$) und **TM-Polarisation**

$$\underline{r}_\mathrm{p} = \frac{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_\mathrm{e}) - \underline{Z}_2 \cos(\alpha_\mathrm{t})}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_\mathrm{e}) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_\mathrm{t})} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_\mathrm{e}) - \sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_\mathrm{t})}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_\mathrm{e}) + \sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_\mathrm{t})}$$

$$\underline{t}_\mathrm{p} = \frac{2\underline{Z}_2 \cos(\alpha_\mathrm{e})}{\underline{Z}_1 \cos(\alpha_\mathrm{e}) + \underline{Z}_2 \cos(\alpha_\mathrm{t})} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_\mathrm{e})}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_\mathrm{e}) + \sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_\mathrm{t})}$$

E-Feld ∥ Einfallsebene



Der Reflexionsfaktor kann negativ sein!

Institute of Photonics and Quantum Electronics — IPQ

Aufgabe 7 e) – Parallele Polarisation, Hinweg

Grenzübergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfallswinkel α_e	Brechungswinkel α_t	Reflexionsfaktor r_p	Reflexionsgrad $\lvert r_\mathrm{p}\rvert^2$	Transmissionsgrad $\lvert t_\mathrm{p}\rvert^2$
1	$\varepsilon_{\mathrm{r},1} = 1$	$\varepsilon_{\mathrm{r},2} = 0{,}95$	45°	46,51°	$\approx 6{,}935 \cdot 10^{-4}$	$\approx 4{,}819 \cdot 10^{-7}$	≈ 1
2	$\varepsilon_{\mathrm{r},2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{\mathrm{r},3} = 0{,}9$	46,51°	48,19°	$\approx 0{,}0024$	$\approx 5{,}818 \cdot 10^{-6}$	≈ 1
3	$\varepsilon_{\mathrm{r},3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{\mathrm{r},4} = 0{,}85$	48,19°	50,08°	$\approx 0{,}0048$	$\approx 2{,}308 \cdot 10^{-5}$	≈ 1
4	$\varepsilon_{\mathrm{r},4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{\mathrm{r},5} = 0{,}8$	50,08°	52,24°	$\approx 0{,}0082$	$\approx 6{,}765 \cdot 10^{-5}$	≈ 0,9999
5	$\varepsilon_{\mathrm{r},5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{\mathrm{r},6} = 0{,}75$	52,24°	54,74°	$\approx 0{,}0133$	$\approx 1{,}772 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9998
6	$\varepsilon_{\mathrm{r},6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{\mathrm{r},7} = 0{,}7$	54,74°	57,69°	$\approx 0{,}0213$	$\approx 4{,}531 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9995
7	$\varepsilon_{\mathrm{r},7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{\mathrm{r},8} = 0{,}65$	57,69°	61,29°	$\approx 0{,}0349$	$\approx 0{,}0012$	≈ 0,9988
8	$\varepsilon_{\mathrm{r},8} = 0{,}65$	$\varepsilon_{\mathrm{r},9} = 0{,}6$	61,29°	65,91°	$\approx 0{,}0613$	$\approx 0{,}0038$	≈ 0,9962
9	$\varepsilon_{\mathrm{r},9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{\mathrm{r},10} = 0{,}55$	65,91°	72,45°	$\approx 0{,}1291$	$\approx 0{,}0167$	≈ 0,9833
10	$\varepsilon_{\mathrm{r},10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{\mathrm{r},11} = 0{,}5$	72,45°	90,00°	1	1	0

Ausfallswinkel $\alpha_\mathrm{r} = 72{,}45°$

Allgemein gilt: $1 - \lvert r_\mathrm{p}\rvert^2 = \lvert t_\mathrm{p}\rvert^2$

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Aufgabe 7 e) – Parallele Polarisation, Rückweg

Grenz-übergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfalls-winkel α_e	Brechungs-winkel α_t	Reflexions-faktor r_p	Reflexions-grad $\lvert r_p\rvert^2$	Trans-missionsgrad $\lvert t_p\rvert^2$
9	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	72,45°	65,91°	$\approx -0{,}1291$	$\approx 0{,}0167$	≈ 0,9833
8	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	65,91°	61,29°	$\approx -0{,}0613$	$\approx 0{,}0038$	≈ 0,9962
7	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}65$	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	61,29°	57,69°	$\approx -0{,}0349$	$\approx 0{,}0012$	≈ 0,9988
6	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	57,69°	54,74°	$\approx -0{,}0213$	$\approx 4{,}531 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9995
5	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	54,74°	52,24°	$\approx -0{,}0133$	$\approx 1{,}772 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9998
4	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	52,24°	50,08°	$\approx -0{,}0082$	$\approx 6{,}765 \cdot 10^{-5}$	≈ 0,9999
3	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	50,08°	48,19°	$\approx -0{,}0048$	$\approx 2{,}308 \cdot 10^{-5}$	≈ 1
2	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	48,19°	46,51°	$\approx -0{,}0024$	$\approx 5{,}818 \cdot 10^{-6}$	≈ 1
1	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{r,1} = 1$	46,51°	45°	$\approx -6{,}935 \cdot 10^{-4}$	$\approx 4{,}819 \cdot 10^{-7}$	≈ 1

Negatives Vorzeichen des Reflexionsfaktors beim Übergang vom optisch dünneren ins optisch dichter Medium.

Gleiche Ergebnisse wie auf dem Hinweg!

Multiplikation der rot markierten Werte ergibt:

$$\prod \lvert t_p\rvert^2 \approx 0{,}9557 = 95{,}57\%$$

Aufgabe 7 f) – Senkrechte Polarisation, Hinweg

Für den Fall der senkrechten Polarisation endet sich lediglich die Fresnel-Formel.

Grenz-übergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfalls-winkel α_e	Brechungs-winkel α_t	Reflexions-faktor r_p	Reflexions-grad $\|r_p\|^2$	Trans-missionsgrad $\|t_p\|^2$
1	$\varepsilon_{r,1} = 1$	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	45°	46,51°	$\approx 0{,}0263$	$\approx 6{,}935 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9993
2	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	46,51°	48,19°	$\approx 0{,}0294$	$\approx 8{,}666 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9991
3	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	48,19°	50,08°	$\approx 0{,}0334$	$\approx 0{,}0011$	≈ 0,9989
4	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	50,08°	52,24°	$\approx 0{,}0385$	$\approx 0{,}0015$	≈ 0,9985
5	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	52,24°	54,74°	$\approx 0{,}0455$	$\approx 0{,}0021$	≈ 0,9979
6	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	54,74°	57,69°	$\approx 0{,}0557$	$\approx 0{,}0031$	≈ 0,9969
7	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	57,69°	61,29°	$\approx 0{,}0718$	$\approx 0{,}0052$	≈ 0,9948
8	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	61,29°	65,91°	$\approx 0{,}1010$	$\approx 0{,}0102$	≈ 0,9898
9	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	65,91°	72,45°	$\approx 0{,}1716$	$\approx 0{,}0294$	≈ 0,9706
10	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{r,11} = 0{,}5$	72,45°	90,00°	1	1	0

Ausfallswinkel $\alpha_r = 72{,}45°$

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Aufgabe 7 f) – Senkrechte Polarisation, Rückweg

Karlsruhe Institute of Technology

Grenz-übergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfalls-winkel α_e	Brechungs-winkel α_t	Reflexions-faktor r_p	Reflexions-grad $\lvert r_\mathrm{p}\rvert^2$	Trans-missionsgrad $\lvert t_\mathrm{p}\rvert^2$
9	$\varepsilon_{\mathrm{r},10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{\mathrm{r},9} = 0{,}6$	72,45°	65,91°	$\approx -0{,}1716$	$\approx 0{,}0294$	≈ 0,9706
8	$\varepsilon_{\mathrm{r},9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{\mathrm{r},8} = 0{,}65$	65,91°	61,29°	$\approx -0{,}1010$	$\approx 0{,}0102$	≈ 0,9898
7	$\varepsilon_{\mathrm{r},7} = 0{,}65$	$\varepsilon_{\mathrm{r},7} = 0{,}7$	61,29°	57,69°	$\approx -0{,}0718$	$\approx 0{,}0052$	≈ 0,9948
6	$\varepsilon_{\mathrm{r},7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{\mathrm{r},6} = 0{,}75$	57,69°	54,74°	$\approx -0{,}0557$	$\approx 0{,}0031$	≈ 0,9969
5	$\varepsilon_{\mathrm{r},6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{\mathrm{r},5} = 0{,}8$	54,74°	52,24°	$\approx -0{,}0455$	$\approx 0{,}0021$	≈ 0,9979
4	$\varepsilon_{\mathrm{r},5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{\mathrm{r},4} = 0{,}85$	52,24°	50,08°	$\approx -0{,}0385$	$\approx 0{,}0015$	≈ 0,9985
3	$\varepsilon_{\mathrm{r},4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{\mathrm{r},3} = 0{,}9$	50,08°	48,19°	$\approx -0{,}0334$	$\approx 0{,}0011$	≈ 0,9989
2	$\varepsilon_{\mathrm{r},3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{\mathrm{r},2} = 0{,}95$	48,19°	46,51°	$\approx -0{,}0294$	$\approx 8{,}666 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9991
1	$\varepsilon_{\mathrm{r},2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{\mathrm{r},1} = 1$	46,51°	45°	$\approx -0{,}0263$	$\approx 6{,}935 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9993

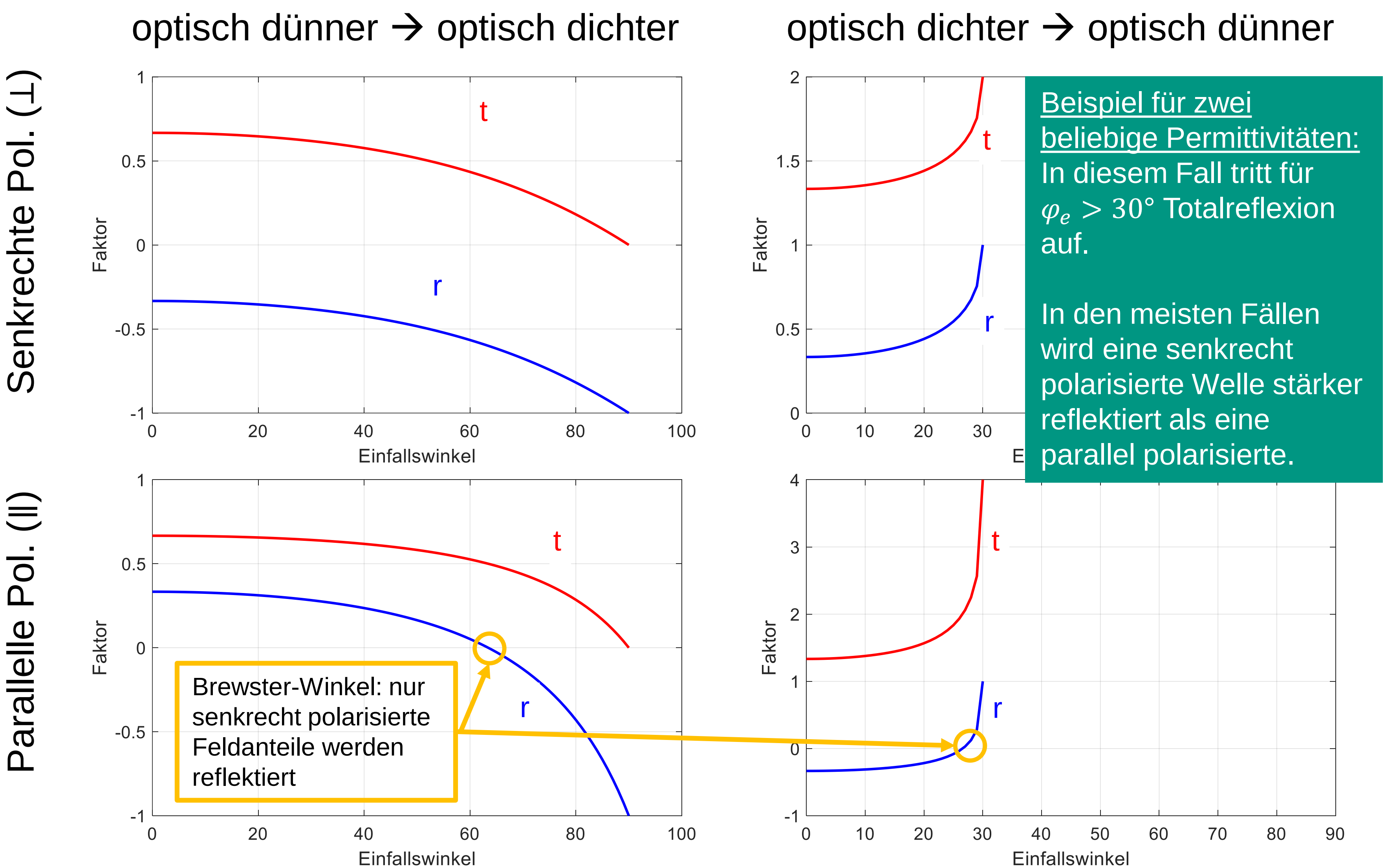
- Parallel polarisiertes Licht trägt etwas mehr zur Luftspiegelung bei, da größere Anteil des senkrecht polarisierten Lichts an den ersten Grenzschichten stärker reflektiert werden und den Kamelreiter gar nicht erreichen.

Multiplikation der rot markierten Werte ergibt:

$$\prod \lvert t_\mathrm{p}\rvert^2 \approx 0{,}8963 = 89{,}63\%$$

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Fresnelsche Formeln



<u>Beispiel für zwei beliebige Permittivitäten:</u>
In diesem Fall tritt für $\varphi_e > 30°$ Totalreflexion auf.

In den meisten Fällen wird eine senkrecht polarisierte Welle stärker reflektiert als eine parallel polarisierte.

Fresnelsche Formeln

- Der **Reflexionsgrad** R ist unabhängig von der Polarisation definiert als

$$R = \frac{P_r}{P_e} = \left|\frac{E_r}{E_e}\right|^2 = \left|\underline{r}\right|^2$$

- Der **Transmissionsgrad** T ist unabhängig von der Polarisation definiert als

$$T = \frac{P_t}{P_e} = \left|\frac{E_t}{E_e}\right|^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_2)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_1)} = \left|\underline{t}\right|^2 \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} \neq \left|\underline{t}\right|^2$$

$$R = \frac{\text{reflektierte Leistung}}{\text{einfallende Leistung}} = \frac{|I_r A_{eff,r}|}{|I_e A_{eff,e}|} = \frac{|I_r|}{|I_e|}\frac{|A_{eff,r}|}{|A_{eff,e}|} = \left|\frac{E_{0r}}{E_{0e}}\right|^2 = \left|\underline{r}\right|^2$$

mit I als Intensität und $A_{eff} = A\cos(\alpha_1)$ als der effektiv bestrahlten Fläche (Projektionsfläche) bei einem Einstrahlwinkel von α_1. Da $\alpha_1 = \alpha_r$ nach dem Reflexionsgesetz bleibt der Quotient der Intensitäten stehen, was gerade dem Quadrat des Reflexionskoeffizienten entspricht.

$$T = \frac{\text{transmittierte Leistung}}{\text{einfallende Leistung}} = \frac{|I_t A_{eff,t}|}{|I_e A_{eff,e}|} = \frac{|I_t|}{|I_e|}\frac{|A_{eff,t}|}{|A_{eff,e}|} = \left|\frac{E_{0t}}{E_{0e}}\right|^2 \left|\frac{\Re\{n_t\}\cos(\varphi_t)}{\Re\{n_e\}\cos(\varphi_e)}\right| = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_2)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_1)}\left|\underline{t}\right|^2$$

In diesem Fall sind die Winkel nicht identisch ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) und man bekommt einen zusätzlichen Vorfaktor. Man kann geometrisch zeigen, dass die effektive Fläche zum Produkt aus reeller Brechzahl (bzw. reeller Permittivität) und dem Kosinus des jeweiligen Winkels vereinfacht werden kann.

Fresnelsche Formeln

- Der **Reflexionsgrad** R ist unabhängig von der Polarisation definiert als

$$R = \frac{P_r}{P_e} = \left|\frac{E_r}{E_e}\right|^2 = \left|\underline{r}\right|^2$$

- Der **Transmissionsgrad** T ist unabhängig von der Polarisation definiert als

$$T = \frac{P_t}{P_e} = \left|\frac{E_t}{E_e}\right|^2 \frac{\sqrt{\varepsilon_2}\cos(\alpha_2)}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos(\alpha_1)} = \left|\underline{t}\right|^2 \frac{\tan(\alpha_1)}{\tan(\alpha_2)} \neq \left|\underline{t}\right|^2$$

- Allgemein gilt aufgrund der **Energieerhaltung** $1 = T + R$, d.h. die Leistung der einfallenden Welle muss entweder reflektiert werden oder ins Material jenseits der Grenzfläche eindringen.
- Jedoch gilt keinesfalls $\cancel{1 = \underline{t} + \underline{r}}$ für den Reflexionsfaktor und Transmissionsfaktor. Dort gilt aufgrund der Stetigkeitsbedingungen gerade $1 + r = t$ (für senkrechte Polarisation) bzw. $(1 + r)\frac{k_1}{k_2} = t$ (für parallele Polarisation).
- Weiterhin sind die Reflexionsfaktoren für das elektrische und magnetische Feld identisch, nicht aber die Transmissionsfaktoren. Dort muss der Unterschied des Wellenwiderstands in den Materialien berücksichtigt werden. $r = \frac{E_r}{E_e} = \frac{H_r}{H_e}$, $t = \frac{E_t}{E_e} = \frac{H_t}{H_e}\frac{Z_1}{Z_2}$

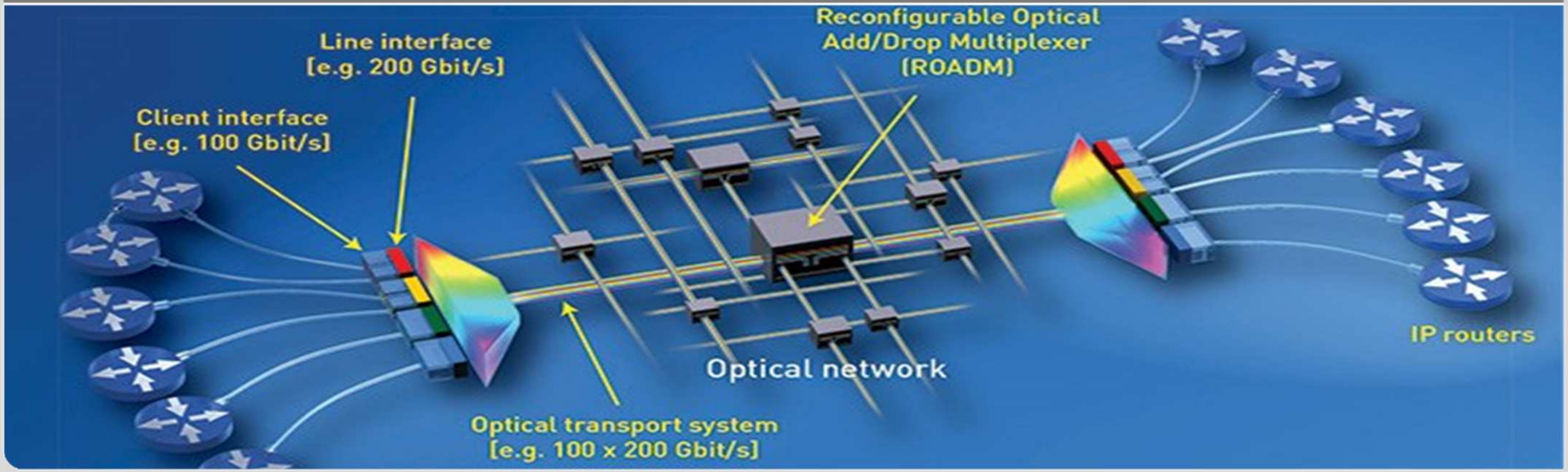
Karlsruhe Institute of Technology

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 8

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter
    www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: maxwell19
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu
- Reflexion am idealen Leiter
- Parallelplattenleitung
- Gruppen-/Phasengeschwindigkeit

Themenübersicht

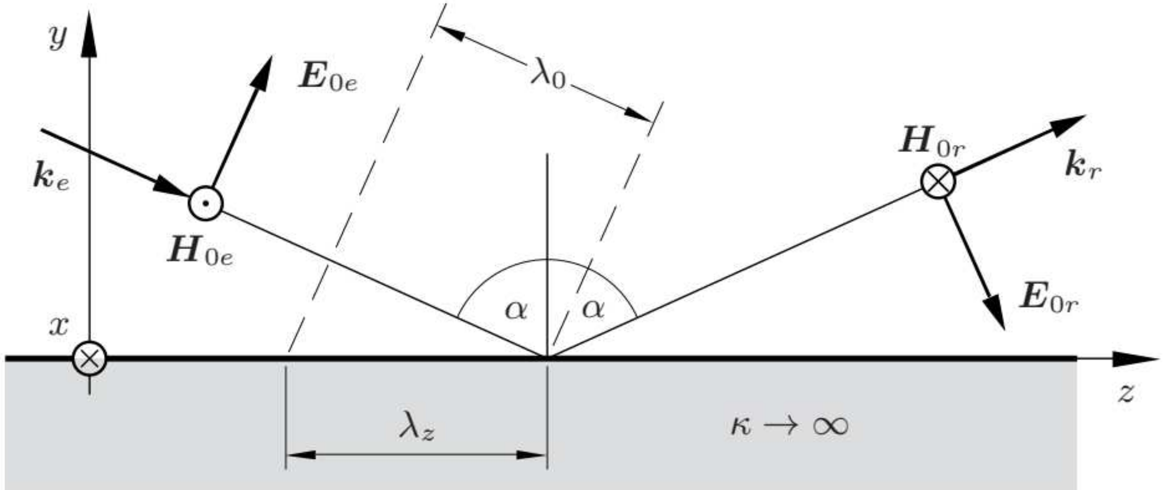
Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Ebene und harmonische Wellen, Poynting Vektor
Übung 4	A5	Zeitharmonische ebene Wellen, Dispersionsrelation, Polarisation
Übung 5	A6	Grenzflächenübergänge (senkrechtes Auftreffen)
Übung 6	A7	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 7	A8	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 8	A9	Parallelplattenleitung, TM-Welle

Kalender

2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	**1 Fr** Allerheiligen	**1 So** 1. Advent	**1 Mi** Neujahr	**1 Sa**	**1 So**	1 Mi **Klausur**
2 Mi	**2 Sa**	2 Mo **Übung 7** 49	2 Do	**2 So**	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	**3 So**	3 Di	3 Fr	3 Mo **Übung 13** 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo **Übung 3** 45	4 Mi **Vorlesung 8**	**4 Sa**	4 Di	4 Mi	**4 Sa**
5 Sa	5 Di	5 Do	**5 So**	5 Mi **Vorlesung 15**	5 Do	**5 So**
6 So	6 Mi **Vorlesung 4**	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	**7 Sa**	7 Di	7 Fr	**7 Sa**	7 Di
8 Di	8 Fr	**8 So**	8 Mi **Vorlesung 11**	**8 Sa**	**8 So**	8 Mi
9 Mi	**9 Sa**	9 Mo **Übung 8** 50	9 Do	**9 So**	9 Mo 11	9 Do
10 Do	**10 So**	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	**10 Fr** Karfreitag
11 Fr	11 Mo **Übung 4** 46	11 Mi **Vorlesung 9**	**11 Sa**	11 Di	11 Mi	**11 Sa**
12 Sa	12 Di	12 Do	**12 So**	12 Mi	12 Do	**12 So** Ostern
13 So	13 Mi **Vorlesung 5**	13 Fr	13 Mo **Übung 10** 3	13 Do	13 Fr	**13 Mo** Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	**14 Sa**	14 Di	14 Fr	**14 Sa**	14 Di
15 Di	15 Fr	**15 So**	15 Mi **Vorlesung 12**	**15 Sa**	**15 So**	15 Mi
16 Mi **Vorlesung 1**	**16 Sa**	16 Mo **Übung 9** 51	16 Do	**16 So**	16 Mo 12	16 Do
17 Do	**17 So**	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo **Übung 5** 47	18 Mi **Vorlesung 10**	**18 Sa**	18 Di	18 Mi	**18 Sa**
19 Sa	19 Di	19 Do	**19 So**	19 Mi	19 Do	**19 So**
20 So	20 Mi **Vorlesung 6**	20 Fr	20 Mo **Übung 11** 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo **Übung 1** 43	21 Do	**21 Sa**	21 Di	21 Fr	**21 Sa**	21 Di
22 Di	22 Fr	**22 So**	22 Mi **Vorlesung 13**	**22 Sa**	**22 So**	22 Mi
23 Mi **Vorlesung 2**	**23 Sa**	23 Mo 52	23 Do	**23 So**	23 Mo 13	23 Do
24 Do	**24 So**	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo **Übung 6** 48	**25 Mi** 1. Weihnachtstag	**25 Sa**	25 Di	25 Mi	**25 Sa**
26 Sa	26 Di	**26 Do** 2. Weihnachtstag	**26 So**	26 Mi	26 Do	**26 So**
27 So	27 Mi **Vorlesung 7**	27 Fr	27 Mo **Übung 12** 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo **Übung 2** 44	28 Do	**28 Sa**	28 Di	28 Fr	**28 Sa**	28 Di
29 Di	29 Fr	**29 So**	29 Mi **Vorlesung 14**	**29 Sa**	**29 So**	29 Mi
30 Mi **Vorlesung 3**	**30 Sa**	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Reflexion am idealen Leiter

Parallel polarisierte ebene Welle wird an einem idealen Leiter reflektiert



Es gilt:

$r_p = -1$ und $t_p = 0$

$$\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{e,0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \mathbf{r})}$$
$$= \underline{\mathbf{E}}_0(\sin\alpha \mathbf{e}y + \cos\alpha \mathbf{e}_z) e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \mathbf{r})}$$
$$\underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{r,0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_r \mathbf{r})}$$
$$= \underline{\mathbf{E}}_0(\sin\alpha \mathbf{e}y - \cos\alpha \mathbf{e}_z) e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_r \mathbf{r})}$$

Und als Superposition der Felder im Halbraum:

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_{e,0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \mathbf{r})} + \underline{\mathbf{E}}_{r,0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_r \mathbf{r})}$$

Reflexion am idealen Leiter

Superposition der einfallenden und reflektierten Wellen im Halbraum

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \underline{\mathbf{E}}_{e,0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \mathbf{r})} + \underline{\mathbf{E}}_{r,0} e^{j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_r \mathbf{r})}$$

Mit

$$E_y(\mathbf{r},t) = 2E_0 \sin\alpha \cos(k_0 y \cos\alpha) e^{j(\omega t - k_0 z \sin\alpha)}$$

$$E_z(\mathbf{r},t) = j2E_0 \cos\alpha \sin(k_0 y \cos\alpha) e^{j(\omega t - k_0 z \sin\alpha)}$$

$$H_x(\mathbf{r},t) = -2\frac{E_0}{Z_0} \cos(k_0 y \cos\alpha) e^{j(\omega t - k_0 z \sin\alpha)}$$

Und den Wellenzahlen

$$k_y = k_0 \cos\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_y} \quad \text{und} \quad k_z = k_0 \sin\alpha = \frac{2\pi}{\lambda_z}$$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Allgemein gilt: $v_{ph} = \frac{\omega}{\beta}$ und $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$

Welle in z-Richtung mit reellem $k_z = \beta_z$

$$v_{phz} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k_0 \sin\alpha} \boxed{= \frac{c_0}{\sin\alpha} > c_0 \,.}$$

$$v_{gz} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k_z} = \boxed{c_0 \sin\alpha < c_0}$$

$$v_{phz} \cdot v_{gz} = c_0^2 \,.$$

Verstoß gegen das Postulat der Relativitätstheorie ?

Nein!

Phasengeschwindigkeit ist keine Signal- oder Energiegeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit gibt die Ausbreitung der Phase längs der Koordinate z an

Entscheidend für die Übertragung von Signal oder Energie ist die Geschwindigkeit der Wellenfront

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Widerspruch zur Relativitätstheorie ?

Impuls eines Teilchens das sich mit der Phasengeschwindigkeit ausbreitet:

$$v_p = f\lambda = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

Mit $E = mc^2 = m_0 \gamma c^2$ und $p = m_0 \gamma v$ folgt:

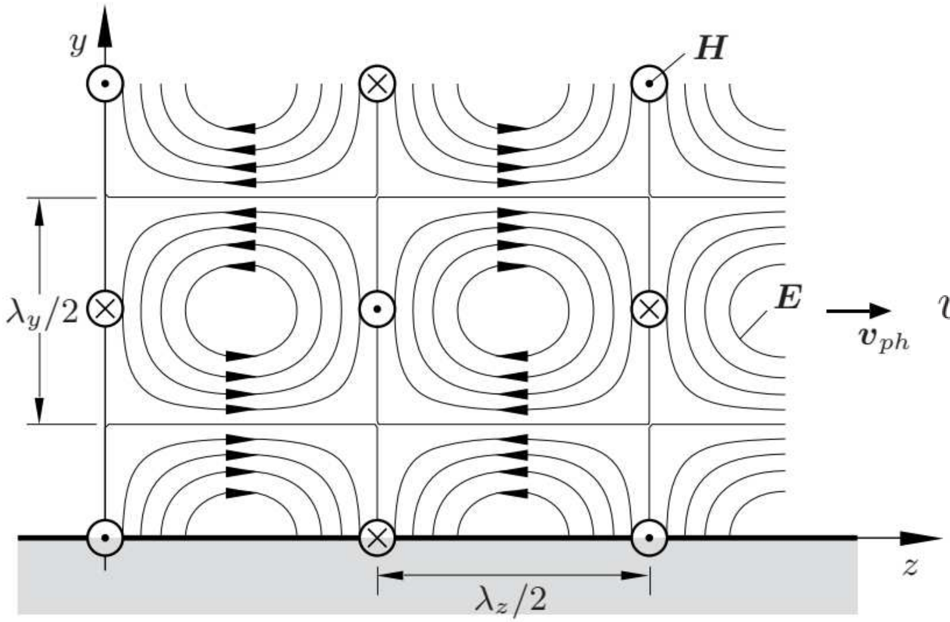
$$v_p = \frac{m_0 \gamma c^2}{m_0 \gamma v_g} = \frac{c^2}{v_g}$$

Für $v_g < c$ ist $v_p > c$

Propagation von einem Punkt gleicher Phase

Propagation mit Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit

Reflexion am idealen Leiter



$$v_{phz} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{\omega}{k_0 \sin\alpha} = \frac{c_0}{\sin\alpha} > c_0 \ .$$

Für $y = n\frac{\lambda_y}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$ verschwindet die z-Kompnente des elektrischen Feldes $E_z = 0$

- In diesen Ebenen kann eine ideal leitende Platte eingezogen warden, ohne das sich das elektromagnetische Feld verändert
- Parallelplattenleitung mit Plattenabstand $d = \frac{n\lambda_y}{2}$

TEM-Wellen

Superposition der einfallenden und reflektierten ebenen Welle

$$E_y(\mathbf{r},t) = 2E_0 \sin\alpha \cos(k_0 y \cos\alpha) e^{j(\omega t - k_0 z \sin\alpha)}$$

$$E_z(\mathbf{r},t) = j2E_0 \cos\alpha \sin(k_0 y \cos\alpha) e^{j(\omega t - k_0 z \sin\alpha)}$$

$$H_x(\mathbf{r},t) = -2\frac{E_0}{Z_0} \cos(k_0 y \cos\alpha) e^{j(\omega t - k_0 z \sin\alpha)}$$

Spezialfall: $\alpha \to \pi/2$

- TEM-Welle

$$E_y(\mathbf{r},t) = 2E_0 e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

$$E_z(\mathbf{r},t) = 0$$

$$H_x(\mathbf{r},t) = -2\frac{E_0}{Z_0} e^{j(\omega t - k_0 z)}$$

Das Magnetfeld als auch das elektrische Feld besitzen nur Transverslkomponenten

TEM-Wellen

$\left\{E_x, E_y, H_x, H_y, H_z\right\} \triangleq$ TE-Wellen

Transversal-elektrischer Wellentyp

$$E_z = 0,\ H_z \neq 0$$

$\left\{H_x, H_y, E_x, E_y, E_z\right\} \triangleq$ TM-Wellen

Transversal-magnetischer Wellentyp

$$H_z = 0,\ E_z \neq 0$$

Die TM-Welle kann beschrieben werden durch:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \mu\epsilon - k_z^2) E_z = 0$$

und

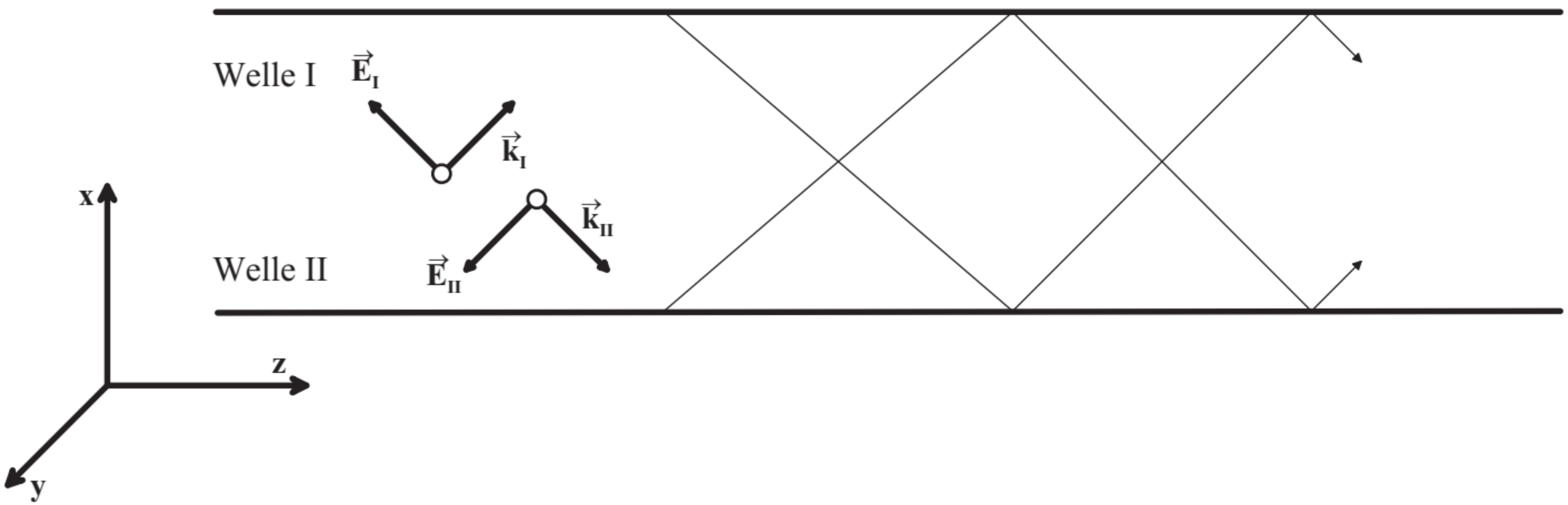
$$E_x = \frac{-jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$E_y = \frac{-jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_x = \frac{j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$H_y = \frac{-j\omega\epsilon}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

Zu Aufgabe 9 d)

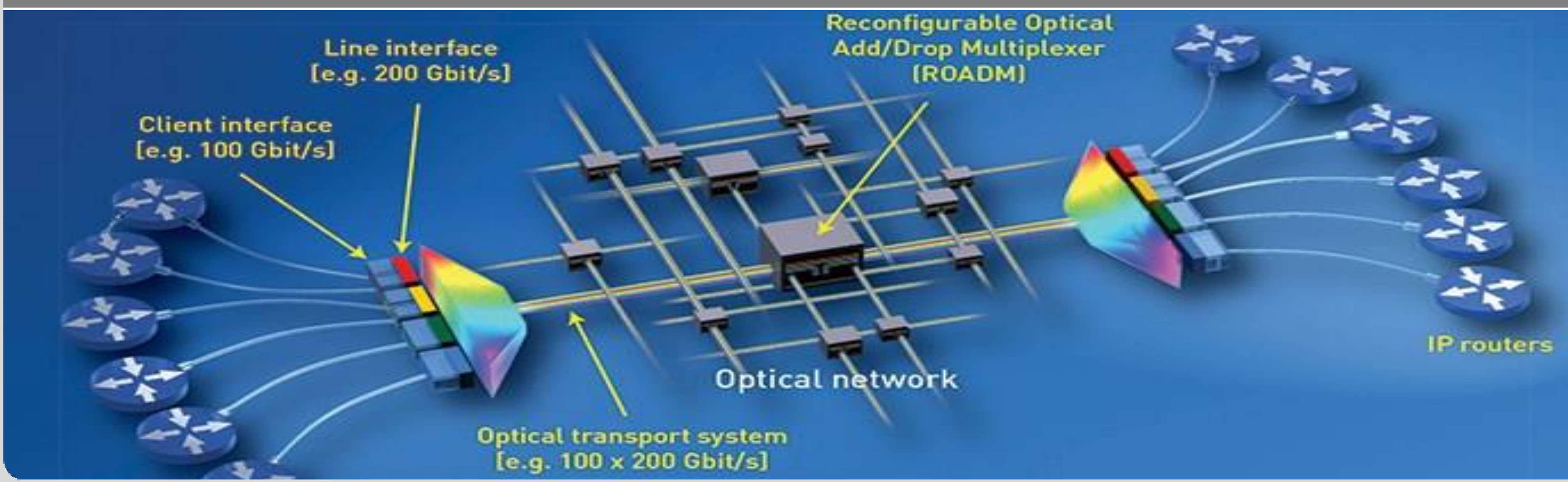


Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 9

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Kalender

2019			2020			
Oktober	November	Dezember	Januar	Februar	März	April
1 Di	1 Fr Allerheiligen	1 So 1. Advent	1 Mi Neujahr	1 Sa	1 So	1 Mi Klausur
2 Mi	2 Sa	2 Mo Übung 7 49	2 Do	2 So	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	3 So	3 Di	3 Fr	3 Mo Übung 13 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo Übung 3 45	4 Mi Vorlesung 8	4 Sa	4 Di	4 Mi	4 Sa
5 Sa	5 Di	5 Do	5 So	5 Mi Vorlesung 15	5 Do	5 So
6 So	6 Mi Vorlesung 4	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	7 Sa	7 Di	7 Fr	7 Sa	7 Di
8 Di	8 Fr	8 So	8 Mi Vorlesung 11	8 Sa	8 So	8 Mi
9 Mi	9 Sa	9 Mo Übung 8 50	9 Do	9 So	9 Mo 11	9 Do
10 Do	10 So	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	10 Fr Karfreitag
11 Fr	11 Mo Übung 4 46	11 Mi Vorlesung 9	11 Sa	11 Di	11 Mi	11 Sa
12 Sa	12 Di	12 Do	12 So	12 Mi	12 Do	12 So Ostern
13 So	13 Mi Vorlesung 5	13 Fr	13 Mo Übung 10 3	13 Do	13 Fr	13 Mo Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	14 Sa	14 Di	14 Fr	14 Sa	14 Di
15 Di	15 Fr	15 So	15 Mi Vorlesung 12	15 Sa	15 So	15 Mi
16 Mi Vorlesung 1	16 Sa	16 Mo Übung 9 51	16 Do	16 So	16 Mo 12	16 Do
17 Do	17 So	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo Übung 5 47	18 Mi Vorlesung 10	18 Sa	18 Di	18 Mi	18 Sa
19 Sa	19 Di	19 Do	19 So	19 Mi	19 Do	19 So
20 So	20 Mi Vorlesung 6	20 Fr	20 Mo Übung 11 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo Übung 1 43	21 Do	21 Sa	21 Di	21 Fr	21 Sa	21 Di
22 Di	22 Fr	22 So	22 Mi Vorlesung 13	22 Sa	22 So	22 Mi
23 Mi Vorlesung 2	23 Sa	23 Mo 52	23 Do	23 So	23 Mo 13	23 Do
24 Do	24 So	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo Übung 6 48	25 Mi 1. Weihnachtstag	25 Sa	25 Di	25 Mi	25 Sa
26 Sa	26 Di	26 Do 2. Weihnachtstag	26 So	26 Mi	26 Do	26 So
27 So	27 Mi Vorlesung 7	27 Fr	27 Mo Übung 12 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo Übung 2 44	28 Do	28 Sa	28 Di	28 Fr	28 Sa	28 Di
29 Di	29 Fr	29 So	29 Mi Vorlesung 14	29 Sa	29 So	29 Mi
30 Mi Vorlesung 3	30 Sa	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: **maxwell19**
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu

- Rückgabe der korrigierten Übungsblätter erst im Januar
- Besprechung der Evaluation am Mittwoch
- Zusammenfassung bisheriger Übungen
- Thematische Einführung: Wellenleiter
- Besprechung von Übungsblatt 8

Rückblick auf den bisherigen Stoff (I)

- Mathematische Grundlagen
  - Mehrdimensionale Integral- und Differentialrechnung
  - Skalarfeld ϕ und Vektorfeld $\boldsymbol{A}$
  - Differentialoperatoren: $\nabla\phi,\ \ \nabla\cdot\boldsymbol{A},\ \ \nabla\times\boldsymbol{A}$
  - Umrechnung zwischen diversen Koordinatensystemen

- Physikalische Grundlagen (Wiederholung aus EMF)
  - Maxwellgleichungen
  - Quellen- und Wirbelfelder
  - Elektrostatik: Poisson-Gleichung
  - Fall stationärer Ströme: Laplace-Gleichung

Institute of Photonics and Quantum Electronics — IPQ

Rückblick auf den bisherigen Stoff (II)

- Einführung elektromagnetischer Wellen
  - Phänomenologische Erklärung: Schwingung gekoppelter elektrischer und magnetischer Felder über der Zeit, die sich im Raum ausbreitet
  - Herleitung der Wellengleichung aus den Maxwellgleichungen
  - Grundlegende Lösungen der Wellengleichung
    - (Homogene) ebene Wellen
    - Zeitharmonische Wellen → Vereinfachte mathematische Handhabung durch Erweiterung zu einer komplexen Größe, dem so genannten komplexen Zeiger / Phasor
    - Kugelwellen

- Fourier-Optik: jede Welle kann als Überlagerung (unendlich) vieler ebener Wellen beschrieben werden → Beschreibung von Linsen

Field Propagation and Coherence

- Eigenschaften elektromagnetischer Wellen
  - Verhältnis von $\underline{\mathbf{E}}$-Feld und $\underline{\mathbf{H}}$-Feld: Wellenwiderstand
  - Energietransport durch elektromagnetische Wellen: reeller und komplexer Poynting-Vektor
  - Phasen- und Gruppengeschwindigkeit
  - Polarisation

- Ausbreitungsgeschwindigkeit von Information und Energie

Rückblick auf den bisherigen Stoff (III)

- Grenzflächenbetrachtungen
  - Stetigkeitsbedingungen
  - Reflexions- und Brechungsgesetz
  - Fresnelsche Formeln für Reflexions- und Transmissionsfaktor
  - Senkrechtes Auftreffen auf eine Grenzfläche
    - keine Unterscheidung der Polarisationen
  - Auftreffen auf die Grenzfläche unter einem Winkel
    - Unterscheidung von senkrechter und paralleler Polarisation
  - Überlagerung von einfallender und reflektierter Welle und stehende Wellen
  - Besondere Phänomene
    - Vollständige Reflexion am idealen Leiter
    - Totalreflexion in Dielektrika bei bestimmten Winkeln
    - Brewster-Winkel: nur senkrecht polarisierte Wellen werden reflektiert

Technische Optik

Erklärung optischer Phänomene
- Brechung von Licht unter Wasser
- Fata Morgana
- Theoretische Grundlage für Wellenleiter und Resonator (Laser)

Radartechnik

- Hohlleiter
- Faradayscher Käfig

- Glasfaserkabel

- Polarisationsfilter

Leitungstheorie → Koaxialkabel, Wanderwellen (Hochfrequenztechnik)

Rückblick auf den bisherigen Stoff (IV)

- Wellenleiter
  - Metallische Wellenleiter
    einfachster (rein theoretischer) Fall: Parallelplattenleitung
  - Dielektrische Wellenleiter
    einfachster (rein theoretischer) Fall: dielektrische Platte
  - Ausbreitung stehender Wellenbilder (Moden)
  - Unterscheidung von Polarisationen im Wellenleiter

Hohlleiter (Hochfrequenzechnik, Mikrowellentechnik)

Neu

Optische Nachrichten-technik mittels Glasfaser (Optical Waveguides & Fibers)

Ausblick auf die Zeit nach Weihnachten

- Erweiterung des Wellenleiterkonzepts auf zwei Dimensionen
  - Metallische Grenzflächen + kartesische Koordinaten: Rechteckhohlleiter
  - Dielektrika + Zylinderkoordinaten: Glasfaserkabel

Modell zur Beschreibung vieler Phänomene wie
- Reflexion
- Streuung
- Absorption
- Chromatische Dispersion

Teilweise neu

- Lorentz-Oszillator-Modell und komplexe Permittivität in Dielektrika
  - Warum ist für ein Dielektrikum die Permittivität komplex?
  - Wodurch entstehen Verluste in Dielektrika?

Optische Nachrichtentechnik

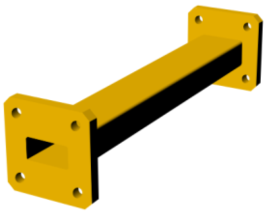
- Hertzscher Dipol
  - Anregung, Erzeugung und Abstrahlung elektromagn. Wellen

- Funktionsweise einer Antenne

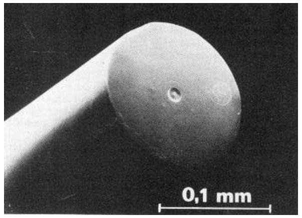
Antennentechnik (Hochfrequenztechnik)

Wellenleiter – Übersicht

	Hohlleiter	Dielektrischer Wellenleiter
Einfachster Fall	Parallelplattenleitung (theoretisches Konstrukt)	Dielektrische Platte oder auch Schicht-wellenleiter (theoretisches Konstrukt)
Materialien	Vakuum / Luft umgeben von einer metallischen Hülle	Schichtsystem aus dielektrischen Materialien, z.B. Siliziumdioxid (Quarz)
Grundprinzip	Reflexion der Welle an den metallischen Grenzflächen aufgrund der hohen (idealen) Leitfähigkeit des Metalls	Totalreflexion an den Grenzflächen zwischen den Dielektrika
Besonderheit	Felder dringen gar nicht in die metallische Außenhülle des Leiters ein	Evaneszente (exponentiell abklingende) Felder jenseits der Grenzfläche
Modenarten	TE- (⊥), TM- (∥) oder TEM-Moden	TE- (⊥) oder TM-Moden (∥)



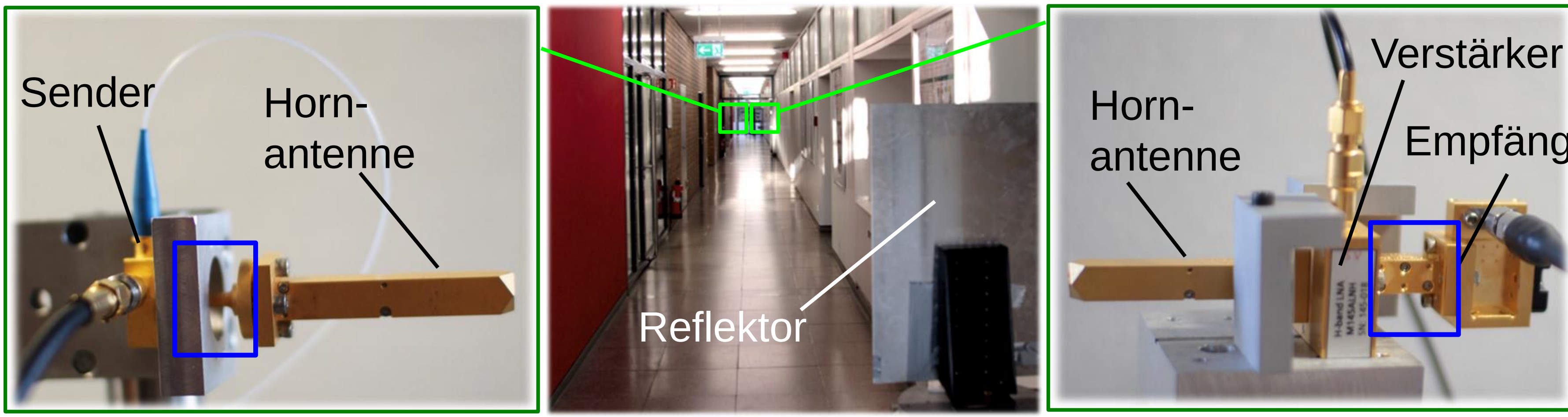
Größenordnung:
einstelliger oder
zweistelliger
cm-Bereich



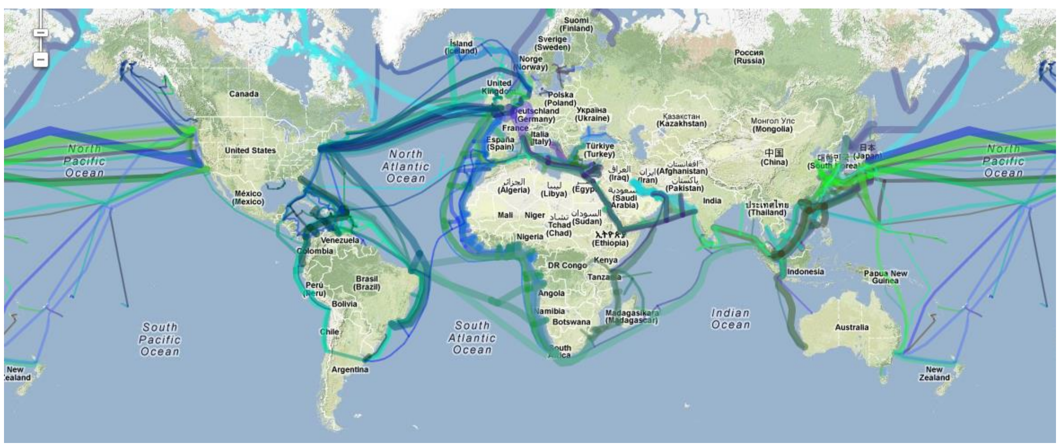
Größe:
10 µm (Kern)
125 µm (Mantel)

Wellenleiter – Anwendungsbeispiele

Hohlleiter – 110 Meter Funkübertragung mit 100 Gbit/s



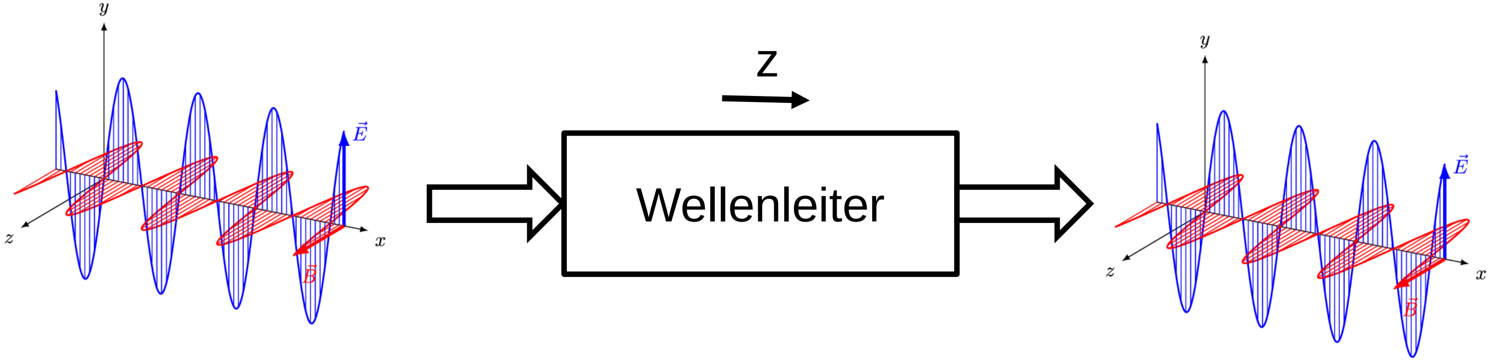
Glasfaser – transatlantische und transpazifische Telefon- / Internetübertragung



Wellenleiter – Anwendungsbeispiele

Wellenleiter – Parallelplattenleitung

- **Ziel:** Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle in eine gewünschte Richtung, wobei die Gestalt der Welle erhalten bleiben soll

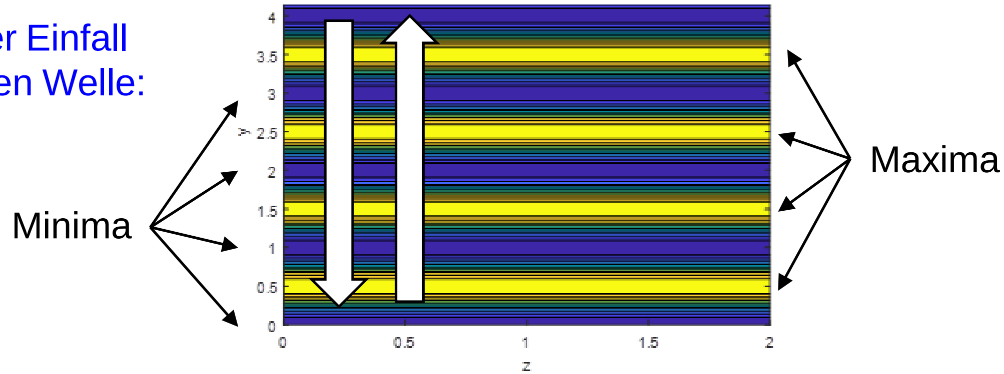


Wellenleiter – Parallelplattenleitung

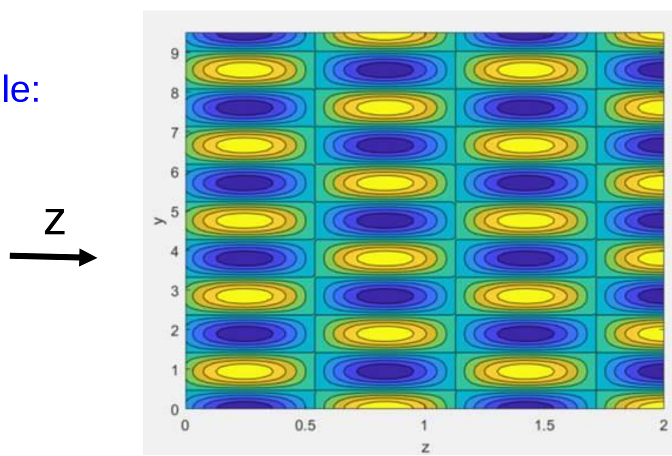
- Reflexion am idealen Leiter: aufgrund der festen Randbedingung (Verschwinden des elektrischen Feldes) ergibt die Überlagerung der einfallenden und reflektierten Welle ein festes Muster aus örtlichen Maxima und Minima, das nur noch zeitlich schwingt = stehende Welle

MATLAB

Senkrechter Einfall einer ebenen Welle:



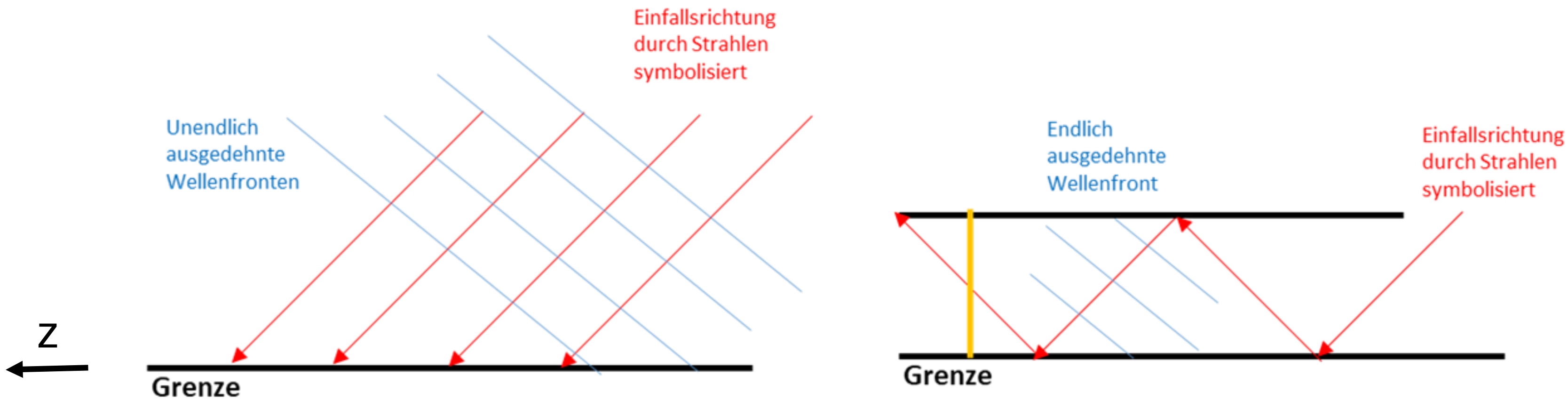
Schräger Einfall einer ebenen Welle:



An der Grenzfläche verschwindet die tangentiale Feldkomponente (z-Richtung), d.h. die Feldlinien stehen senkrecht auf dieser. Die Normalkomponente muss an der Grenzfläche trotz Feldfreiheit des idealen Leiters nicht 0 sein, da es Oberflächenladungsdichten gibt.

Wellenleiter – Parallelplattenleitung

- **Problem:** Breitet sich damit die Welle in eine definierte Richtung aus?
  - Das Wellenbild verschiebt sich zwar in z-Richtung, aber da die Wellenfront unendlich ausgedehnt ist, ist es bereits an jedem Ort von Beginn an vorhanden → keine Informationsübertragung.
  - Eine beliebige Welle endlicher Ausdehnung würde sich zusehends von der Grenzfläche entfernen und sich nicht in die gewünschte Richtung ausbreiten.
  - Der „Wellenleiter“ hat keine kompakte, handhabbare Größe.

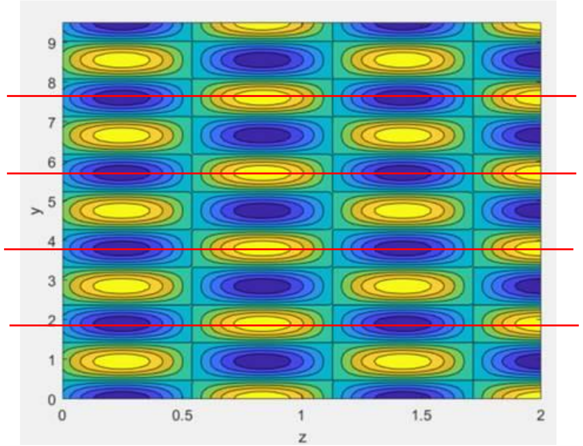


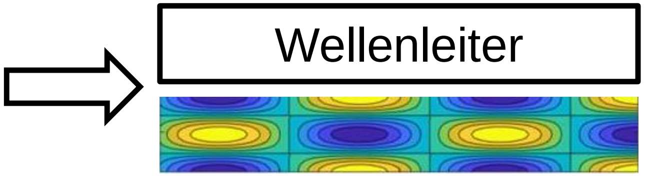
- **Lösung:** Zur Wellenführung brauchen wir eine zweite Grenzfläche (bzw. bei drei-dimensionaler Betrachtung eine den Ausbreitungsbereich umhüllende Grenzfläche) und eine Superposition zweier Wellen.

Wellenleiter – Parallelplattenleitung

- **Frage:** Wo können wir die zweite Grenzfläche platzieren, ohne dass sich die Gestalt der Welle verändert?

- **Antwort:** Es eignet sich jede Stelle, an der das Wellenbild identisch aussieht wie an der ersten Grenzfläche.

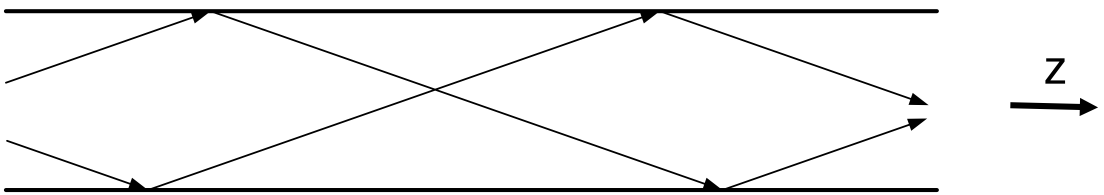




- Da sich die Gestalt der stehenden Welle aus dem Auftreffwinkel und der Frequenz der Welle ergibt und für jede Gestalt nur bestimmte Dimensionen des Wellenleiters (Positionen der zweiten Grenzfläche) erlaubt sind, kann man umgekehrt sagen: für eine feste Frequenz und Größe des Wellenleiters erfolgt die Wellenführung nur für bestimmte Winkel

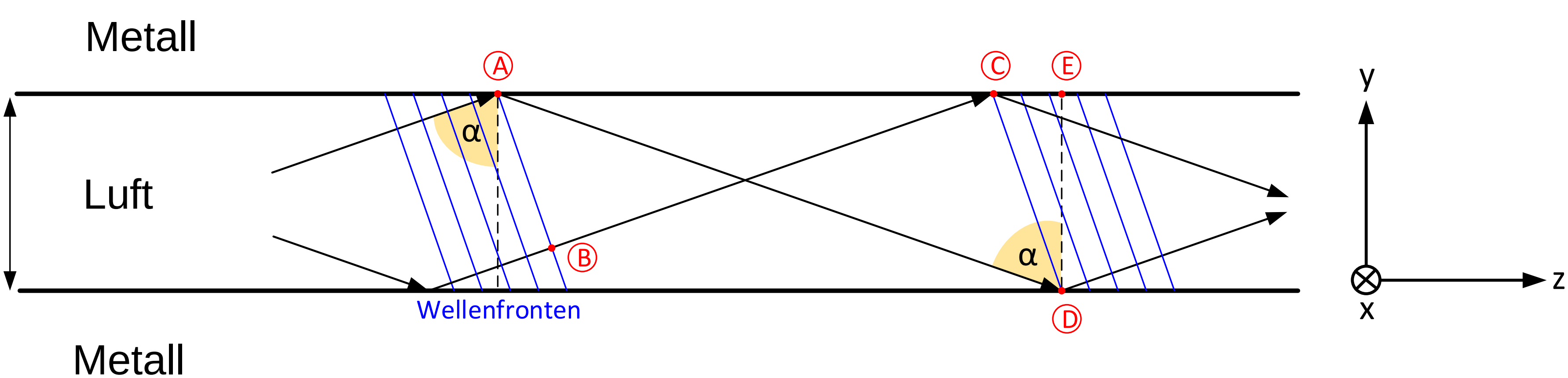
Wellenleiter – Parallelplattenleitung

- Wie kann die Wellenführung veranschaulicht und mathematisch behandelt werden?
- <u>Erster Ansatz:</u> **Strahlenmodell** → Ausbreitung der Welle entlang eines Zick-Zack-Pfades ist für jeden Winkel möglich. Nach diesem Modell wäre Wellenführung aber für jeden beliebigen Winkel möglich!



Wellenleiter – Parallelplattenleitung

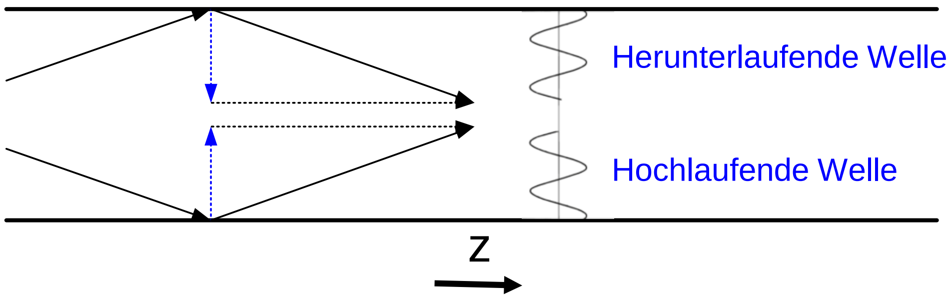
- Zweiter Ansatz: Berücksichtigung des Wellencharakters durch Betrachtung der **Wellenfronten**, vgl. Aufgabe 8a): Das feste Wellenbild (die stehende Welle) bleibt während des Durchquerens des Wellenleiters nur erhalten, wenn Punkte, die an einem Punkt (örtlich / zeitlich) auf einer Wellenfront liegen, dies auch an einem späteren Punkt noch tun, selbst wenn sie zwischenzeitlich unterschiedliche Wegstrecken zurücklegen.
- Dies ist die Selbstkonsistenzbedingung: nach zweimaliger Reflexion muss sich die Welle selbst reproduzieren.



Diese Bedingung ist bei gegebener Frequenz und Geometrie nur für bestimmte Winkel zu erfüllen!

Wellenleiter – Parallelplattenleitung

- <u>Dritter Ansatz:</u> Betrachtung der senkrecht reflektierten Anteile (blau)
  Eine konstante, stehende Welle entlang der z-Richtung ergibt sich nur, wenn sich die hoch- und herunterlaufenden Wellen (blau) konstruktiv und nicht destruktiv überlagern.



Diese Bedingung ist bei gegebener Frequenz und Geometrie nur für bestimmte Winkel zu erfüllen!

- <u>Vierter Ansatz:</u> Zur Beschreibung der Ausbreitung einer Welle im Wellenleiter kann anstelle der einfallenden und reflektierten (ebenen) Welle grundsätzlich die Überlagerung (Superposition) dieser Wellen betrachtet werden, die während der Ausbreitung in z-Richtung erhalten bleibt.

$$\underline{\mathbf{E}}(x,y,z) = \underline{\mathbf{E}}_0(x,y)e^{j(\omega t - k_z z)} = \boxed{\underline{\mathbf{E}}_x(y)}\, e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Feld an jedem Ort im Raum

Stehende Welle / festes Wellenbild

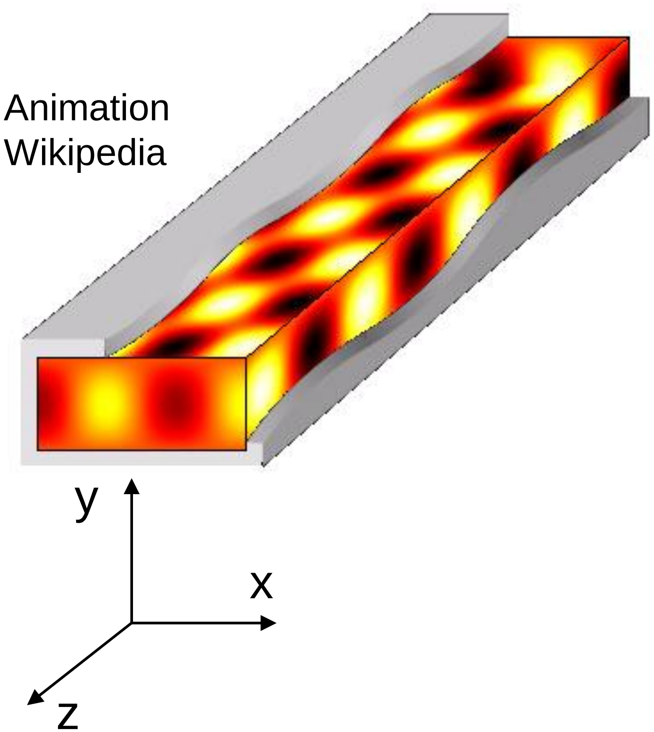
Ausbreitung in z-Richtung

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Wellenleiter – Parallelplattenleitung

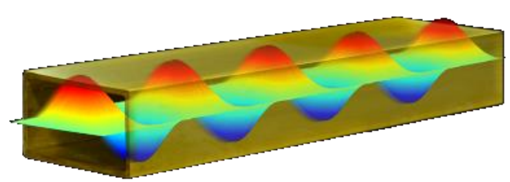
- **Ziel erreicht:** Die Gestalt der Welle sind am Eingang und Ausgang des Wellenleiters identisch, die Welle wird höchstens abgeschwächt.

Animation
Wikipedia



Das sich ausbreitende ortsfeste, transversale Wellenbild (Feldverteilung, Feldmuster, stehenden Welle) bezeichnet man als Schwingungsmodus (oder aus dem Englischen: **Mode**). Für jeden erlaubten Winkel ergibt sich somit eine korrespondierende Mode, die im Wellenleiter geführt wird.

- x-y-Ebene: Mode (Eigenfunktion des Systems)
- z-Richtung: Wanderwelle

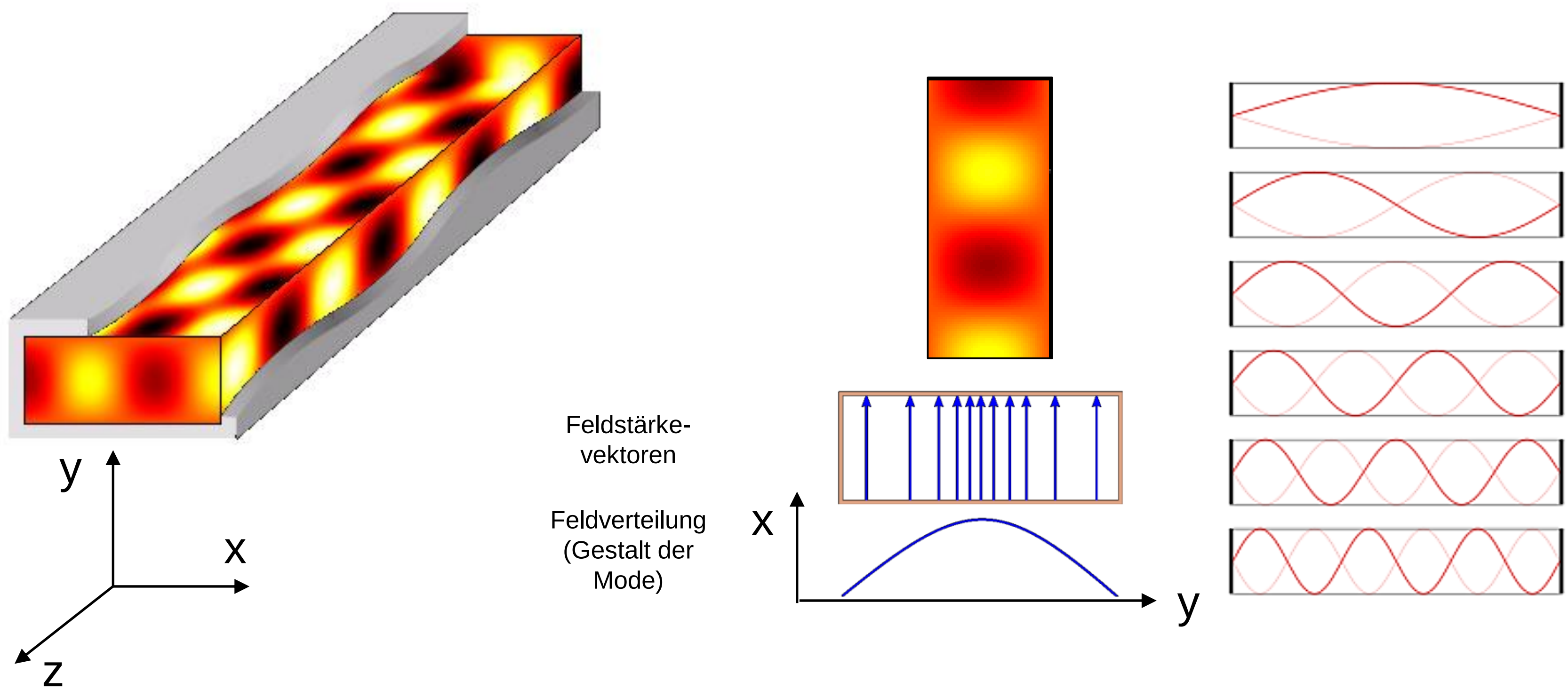


Feldstärkeverteilung der Wanderwelle (www.radartutorial.eu)

- Die Parallelplattenleitung funktioniert nach dem gleichen Prinzip, nur dass der Wellenleiter in einer Richtung unendlich ausgedehnt ist, sodass sich die Mathematik auf eine Dimension reduziert.

Wellenleiter – Parallelplattenleitung

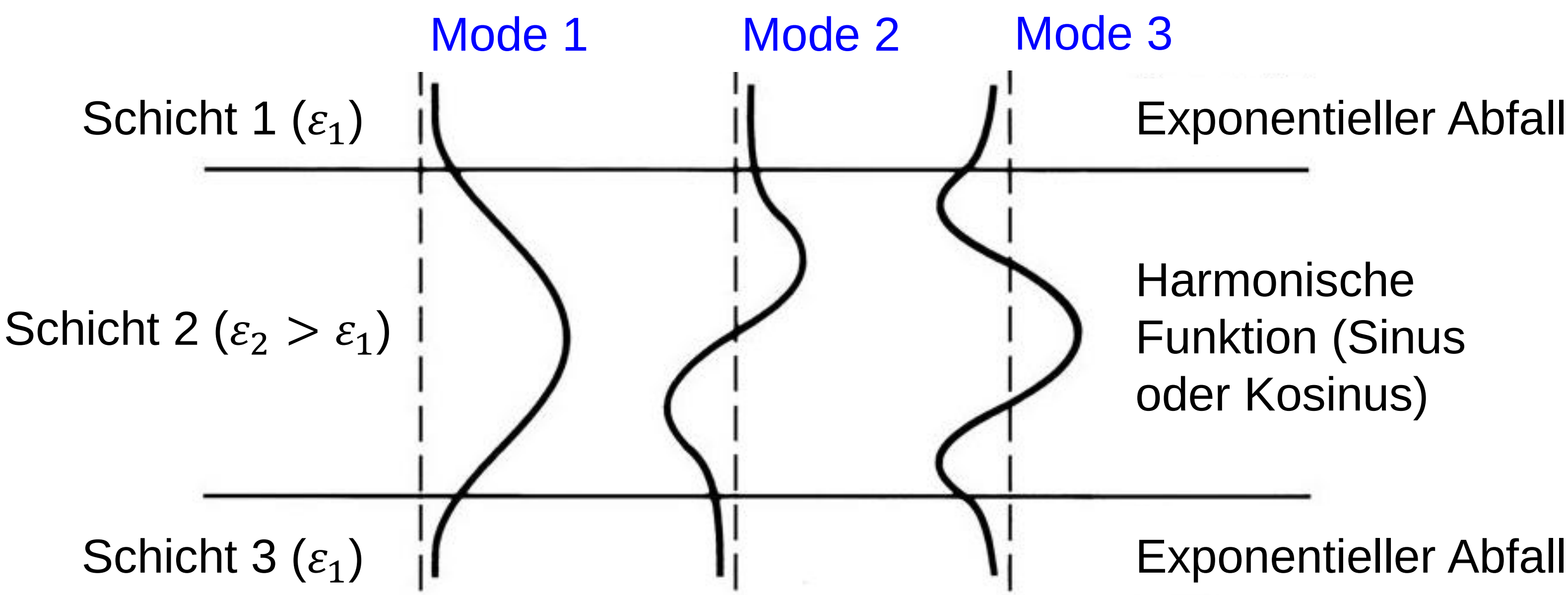
- **<u>Ziel erreicht:</u>** Die Gestalt der Welle sind am Eingang und Ausgang des Wellenleiters identisch, die Welle wird höchstens abgeschwächt.



- Die Parallelplattenleitung funktioniert nach dem gleichen Prinzip, nur dass der Wellenleiter in einer Richtung unendlich ausgedehnt ist, sodass sich die Mathematik auf eine Dimension reduziert.

Wellenleiter – Dielektrische Platte

- Gleiches Prinzip der Wellenführung, aber Totalreflexion kommt erst zustande, wenn der kritische Winkel überschritten wird.
- Ist dies nicht der Fall, so verliert die Welle entlang der z-Richtung unabhängig von möglichen Verlusten (z.B. durch Absorption im Leitermaterial) Energie aufgrund einer teilweisen Transmission.
- Aufgrund der Randbedingungen dringen die Felder auch in das Material jenseits der Grenzfläche ein, d.h. ein Teil der Energie wird dort transportiert.



Wellenleiter – Evaneszente Felder

- Aufgrund der Randbedingungen dringen die Felder auch in das Material jenseits der Grenzfläche ein, wo sie (üblicherweise innerhalb einer Wellenlänge λ) exponentiell abklingen (evaneszente Felder).
- Konsequenzen:
  - Wirkleistung (Energie) wird einzig und allein entlang der Grenzfläche transportiert. Ansonsten wäre bei Totalreflexion die Energieerhaltung verletzt.
  - In Richtung senkrecht zur Grenzfläche wird Blindleistung ausgetauscht, da die Felder nach wie vor in diese Richtung (mit)schwingen. Ansonsten wäre die Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche verletzt (und damit die Maxwellgleichungen).
  - Man bezeichnet die resultierende Welle als evanszente Welle oder Oberflächenwelle.

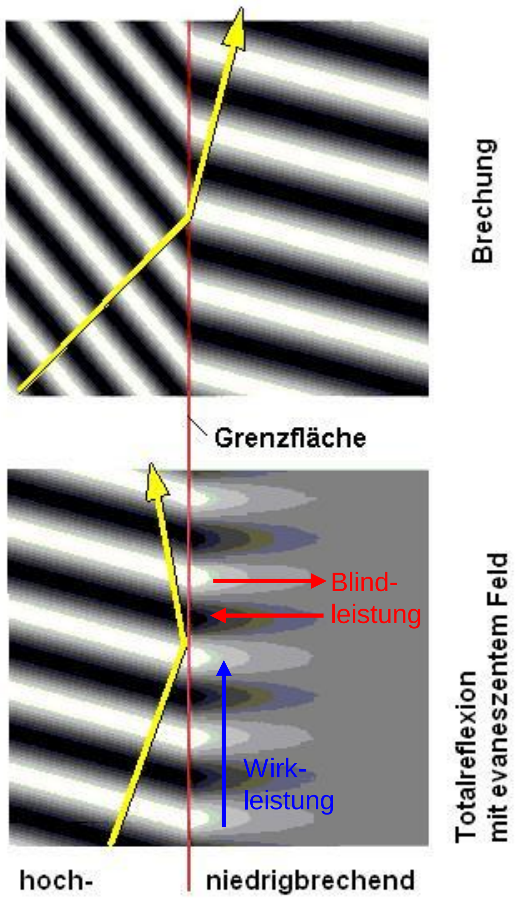
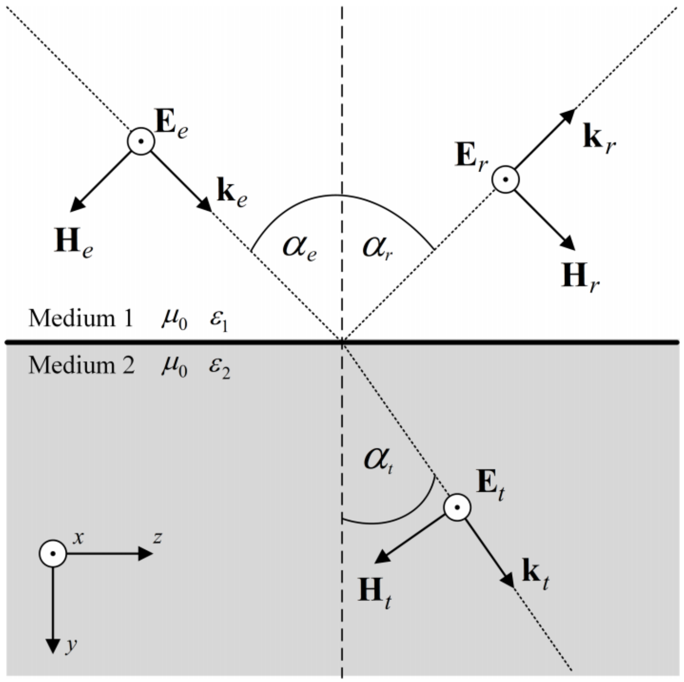


Bild: Wikipedia (Ulfbastel)

Wellenleiter – Evaneszente Felder

Ursache: Wiederholung 5. Übung
senkrechte Polarisation, Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Material
Es gilt dann: $r_s > 0$ bzw. $r_s = 1$ für Totalreflexion

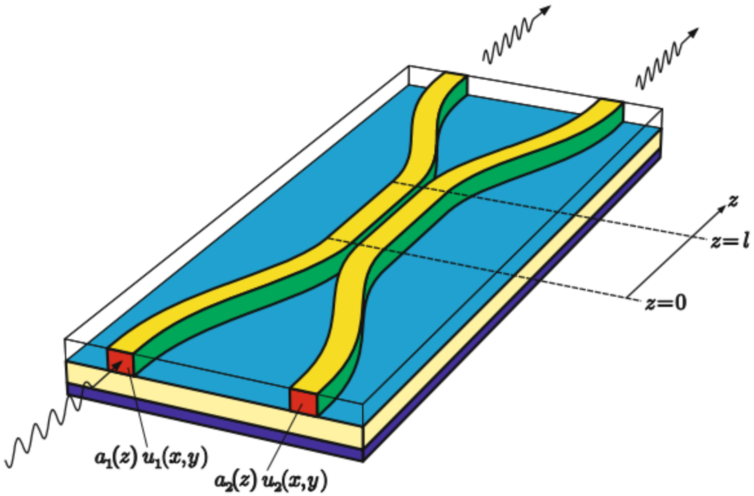


- Es müssen sowohl die Stetigkeitsbedingungen, als auch der Energieerhaltungssatz erfüllt sein.
  - Elektrische Felder der einfallenden und reflektierten Welle überlagern sich für y=0 konstruktiv. Folglich muss ein Feld auf der anderen Seite der Grenzfläche existieren.
  - Die Lösung der Maxwellgleichung darf hier aber keine propagierende Welle sein.

- z-Richtung: $\underline{k}_{e,z} = \underline{k}_{r,z} = \underline{k}_{t,z}$
- y-Richtung: $\underline{k}_{e,y} = \underline{k}_{r,y}$ reell, $\underline{k}_{t,y}$ imaginär

Wellenleiter – Evaneszente Felder

- Effekt ähnelt dem Tunneleffekt in der Quantenmechanik.
- Anwendung:
  - Je ähnlicher sich die verwendeten Dielektrika in Schicht 1, 2 und 3 sind, desto stärker dringt die Mode in das Material hinter der Grenzfläche ein. Für manche Applikationen ist dies vorteilhaft.
  - Beispiel: Kopplung von elektromagnetischen Wellen zwischen zwei Wellenleitern, die nahe genug zusammengebracht werden.



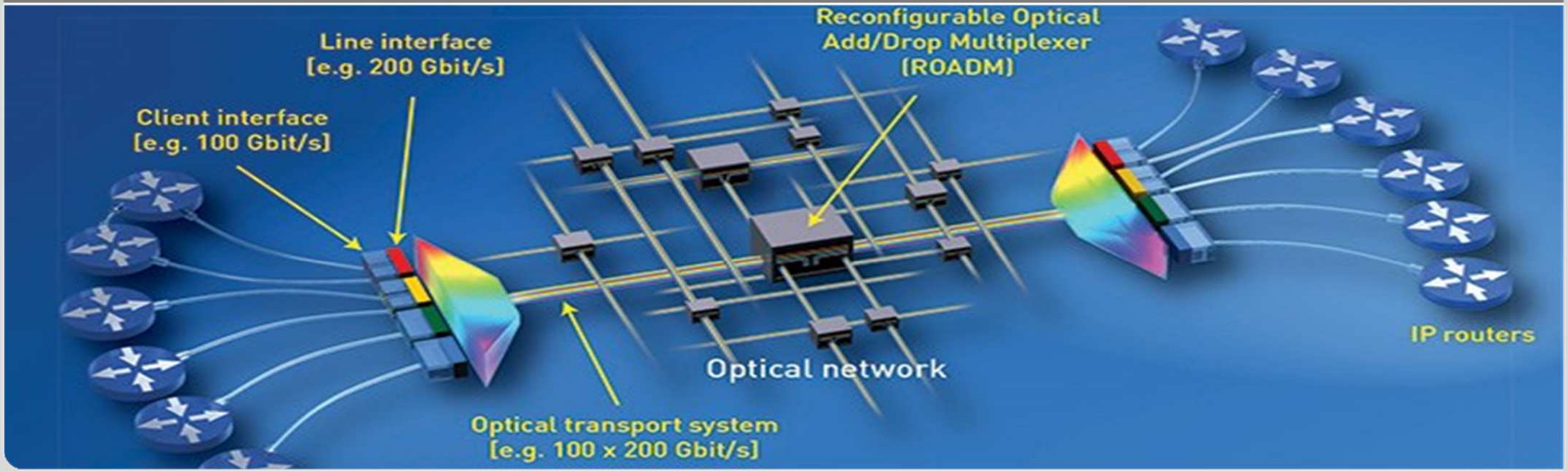
Es steckt also durchaus Energie im evaneszenten Feld, jedoch nur im Nahfeld. Es wird keine Energie in Bereiche weit weg von der Grenzfläche (Fernfeld) transportiert.

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 10

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: maxwell19
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu
- Rückgabe der korrigierten Übungsblätter
  - Bitte überprüfen Sie ob die Listen korrekt ihre Ergebnisse wiederspiegeln!
- Dielektrischer Wellenleiter
  - Theoretische Betrachtung der Kopplung (Übungsblatt 9)
  - Praktische Beispiele
    - Prisma-Koppler (Übungsblatt 9)
    - Grating-Koppler
    - Kopplungslinsen und Wellenleiter (2PP)

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Ebene und harmonische Wellen, Poynting Vektor
Übung 4	A5	Zeitharmonische ebene Wellen, Dispersionsrelation, Polarisation
Übung 5	A6	Grenzflächenübergänge (senkrechtes Auftreffen)
Übung 6	A7	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 7	A8	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 8	A9	Parallelplattenleitung, TM-Welle
Übung 9	A10	Dielektrischer Wellenleiter
Übung 10	A11	Kopplung zu dieelektrischen Wellenleitern

Karlsruhe Institute of Technology

Kalender

2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	**1 Fr** Allerheiligen	**1 So** 1. Advent	**1 Mi** Neujahr	**1 Sa**	**1 So**	1 Mi **Klausur**
2 Mi	**2 Sa**	2 Mo **Übung 7** 49	2 Do	**2 So**	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	**3 So**	3 Di	3 Fr	3 Mo **Übung 13** 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo **Übung 3** 45	4 Mi **Vorlesung 8**	**4 Sa**	4 Di	4 Mi	**4 Sa**
5 Sa	5 Di	5 Do	**5 So**	5 Mi **Vorlesung 15**	5 Do	**5 So**
6 So	6 Mi **Vorlesung 4**	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	**7 Sa**	7 Di	7 Fr	**7 Sa**	7 Di
8 Di	8 Fr	**8 So**	8 Mi **Vorlesung 11**	**8 Sa**	**8 So**	8 Mi
9 Mi	**9 Sa**	9 Mo **Übung 8** 50	9 Do	**9 So**	9 Mo 11	9 Do
10 Do	**10 So**	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	**10 Fr** Karfreitag
11 Fr	11 Mo **Übung 4** 46	11 Mi **Vorlesung 9**	**11 Sa**	11 Di	11 Mi	**11 Sa**
12 Sa	12 Di	12 Do	**12 So**	12 Mi	12 Do	**12 So** Ostern
13 So	13 Mi **Vorlesung 5**	13 Fr	13 Mo **Übung 10** 3	13 Do	13 Fr	**13 Mo** Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	**14 Sa**	14 Di	14 Fr	**14 Sa**	14 Di
15 Di	15 Fr	**15 So**	15 Mi **Vorlesung 12**	**15 Sa**	**15 So**	15 Mi
16 Mi **Vorlesung 1**	**16 Sa**	16 Mo **Übung 9** 51	16 Do	**16 So**	16 Mo 12	16 Do
17 Do	**17 So**	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo **Übung 5** 47	18 Mi **Vorlesung 10**	**18 Sa**	18 Di	18 Mi	**18 Sa**
19 Sa	19 Di	19 Do	**19 So**	19 Mi	19 Do	**19 So**
20 So	20 Mi **Vorlesung 6**	20 Fr	20 Mo **Übung 11** 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo **Übung 1** 43	21 Do	**21 Sa**	21 Di	21 Fr	**21 Sa**	21 Di
22 Di	22 Fr	**22 So**	22 Mi **Vorlesung 13**	**22 Sa**	**22 So**	22 Mi
23 Mi **Vorlesung 2**	**23 Sa**	23 Mo 52	23 Do	**23 So**	23 Mo 13	23 Do
24 Do	**24 So**	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo **Übung 6** 48	**25 Mi** 1. Weihnachtstag	**25 Sa**	25 Di	25 Mi	**25 Sa**
26 Sa	26 Di	**26 Do** 2. Weihnachtstag	**26 So**	26 Mi	26 Do	**26 So**
27 So	27 Mi **Vorlesung 7**	27 Fr	27 Mo **Übung 12** 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo **Übung 2** 44	28 Do	**28 Sa**	28 Di	28 Fr	**28 Sa**	28 Di
29 Di	29 Fr	**29 So**	29 Mi **Vorlesung 14**	**29 Sa**	**29 So**	29 Mi
30 Mi **Vorlesung 3**	**30 Sa**	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

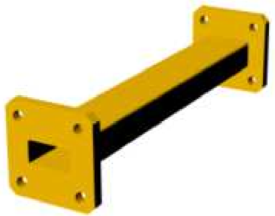
Rückgabe der eingesammelten Übungsblätter

Anmerkungen:

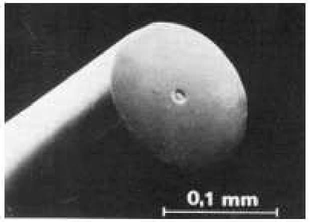
- Vorgehen zur Lösung der DGL:
  - DGL aufschreiben
  - Lösungsansatz definieren und bestätigen das diese gültig ist
  - Randbedingungen nutzen um freie Parameter zu bestimmen
- Erklärungen bei Aufgabenteil d)
  - sehr kurz und unpräzise
  - Mathematisch schön hergeileitet aber ohne Erklärung
- Kritisches Prüfen der Ergebnisse
  - Aufgabenteil c) $v_{ph} v_{gr} = c^2$

Wellenleiter Übersicht

	Hohlleiter	Dielektrischer Wellenleiter
Einfachster Fall	Parallelplattenleitung (theoretisches Konstrukt)	Dielektrische Platte oder auch Schicht-wellenleiter (theoretisches Konstrukt)
Materialien	Vakuum / Luft umgeben von einer metallischen Hülle	Schichtsystem aus dielektrischen Materialien, z.B. Siliziumdioxid (Quarz)
Grundprinzip	Reflexion der Welle an den metallischen Grenzflächen aufgrund der hohen (idealen) Leitfähigkeit des Metalls	Totalreflexion an den Grenzflächen zwischen den Dielektrika
Besonderheit	Felder dringen gar nicht in die metallische Außenhülle des Leiters ein	Evaneszente (exponentiell abklingende) Felder jenseits der Grenzfläche
Modenarten	TE- (⊥), TM- (∥) oder TEM-Moden	TE- (⊥) oder TM-Moden (∥)



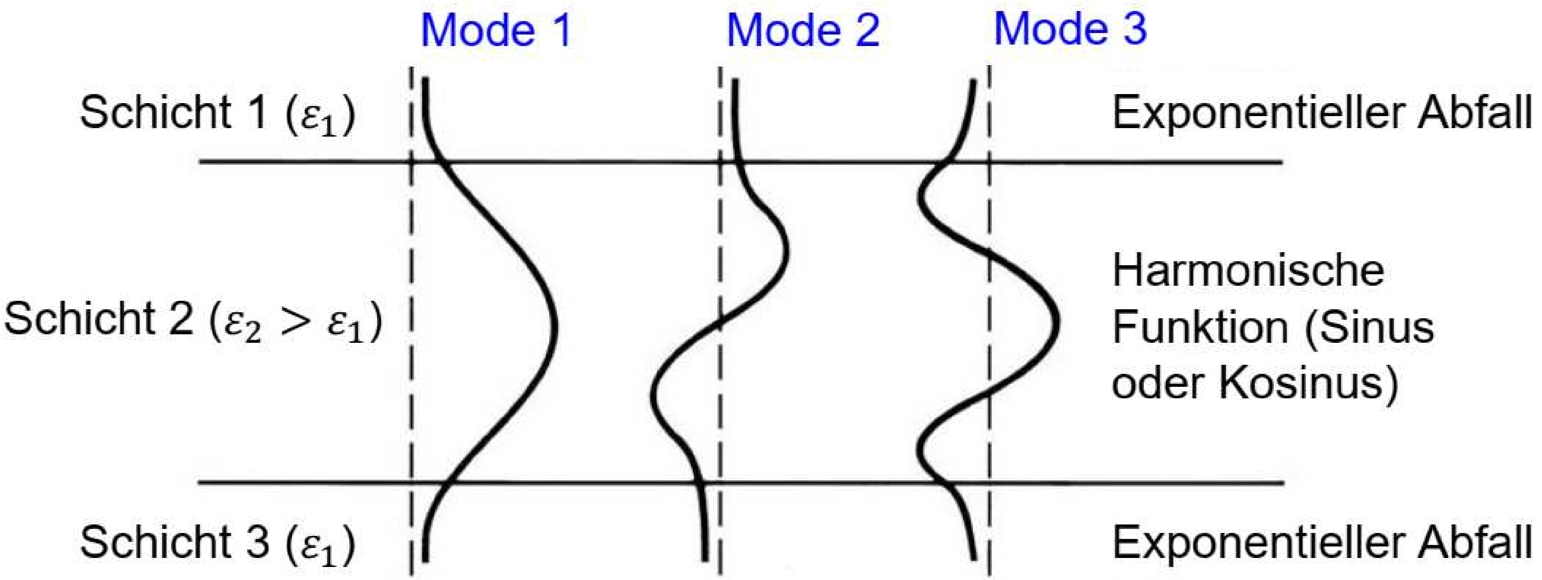
Größenordnung:
einstelliger oder
zweistelliger
cm-Bereich



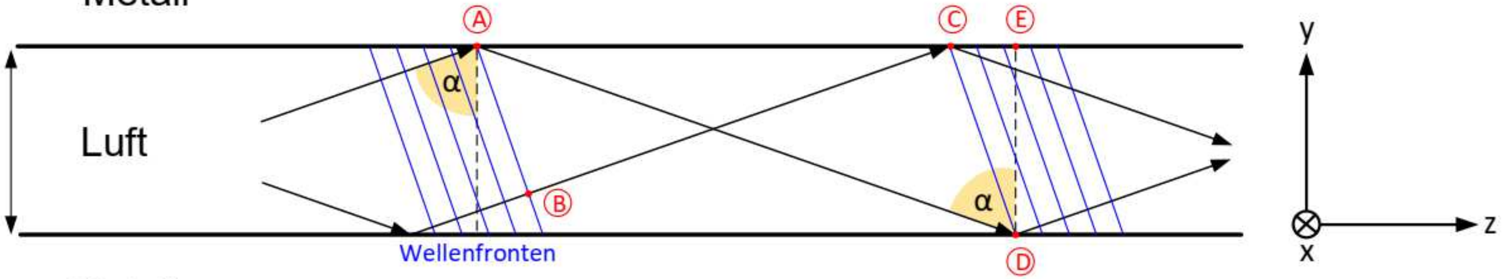
Größe:
10 µm (Kern)
125 µm (Mantel)

Wellenleiter – Dielektrische Platte

- Wellenführung wie bei Parallelplattenleitung aber Totalreflexion kommt erst oberhalb des kritsichen Winkels zustande
- Ist dies nicht der Fall, so verliert die Welle entlang der z-Richtung unabhängig von möglichen Verlusten (z.B. durch Absorption im Leitermaterial) Energie aufgrund einer teilweisen Transmission.
- Aufgrund der Randbedingungen dringen die Felder auch in das Material jenseits der Grenzfläche ein, d.h. ein Teil der Energie wird dort transportiert.



Wellenleiter – Dielektrische Platte



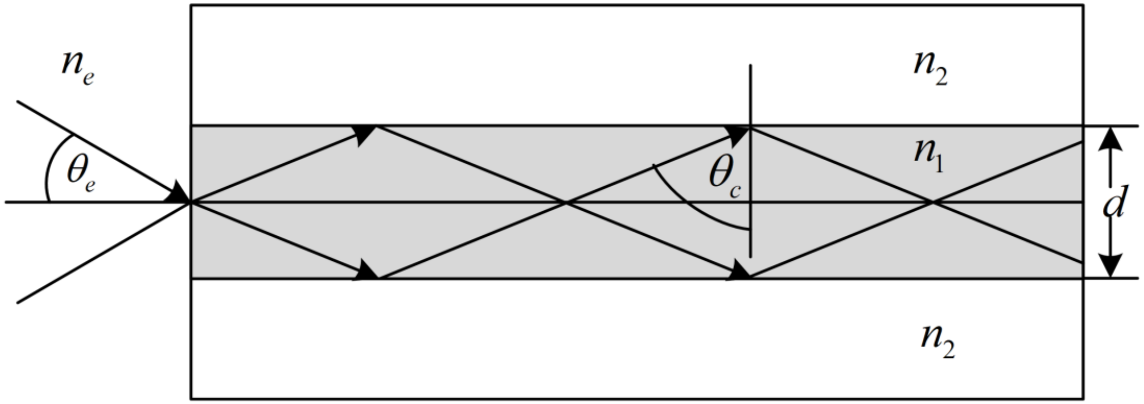
- Durch Betrachtung der **Wellenfronten**, vgl. Aufgabe 10): Das feste Wellenbild (die stehende Welle) bleibt während des Durchquerens des Wellenleiters nur erhalten, wenn Punkte, die an einem Punkt (örtlich / zeitlich) auf einer Wellenfront liegen, dies auch an einem späteren Punkt noch tun, selbst wenn sie zwischenzeitlich unterschiedliche Wegstrecken zurücklegen.

- **Selbstkonsistenzbedingung:** nach zweimaliger Reflexion muss sich die Welle selbst reproduzieren.
- Diese Bedingung ist bei gegebener Frequenz und Geometrie nur für bestimmte Winkel zu erfüllen, siehe Aufgabe 10):

$$k_1 d 2 \cos(\alpha) = -\varphi_s + m 2\pi$$

Wellenleiter – Dielektrische Platte

Aufgabe 11 a) und b)



Akzeptanzwinkel für die Einkopplung

$$\theta_e < 50.77°$$
$$NA = 0.77$$

Relevanz ?

- Dielektrische Platte mit konstantem Wellenbild das sich in z-Richtung ausbreitet

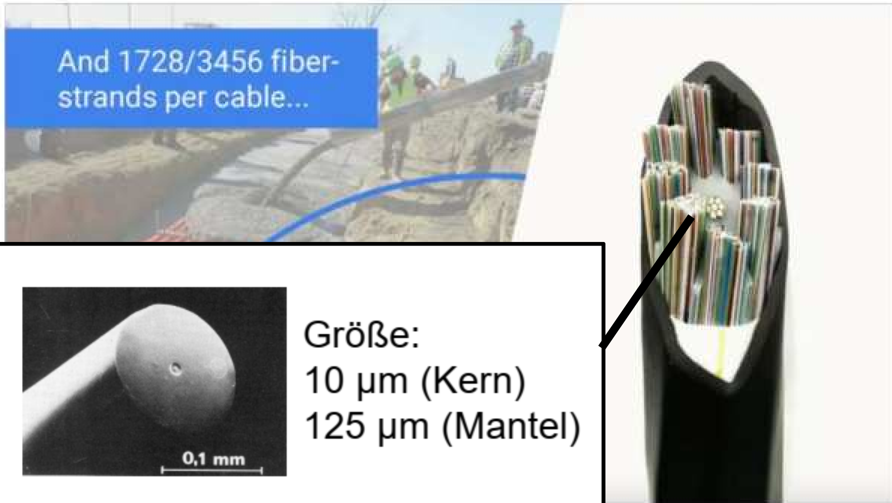
$$\cos\theta = \frac{m2\pi - \varphi_s}{2k_1 d}$$

- Brechung an der Grenzfläche

$$k_e \sin\theta_e = k_1 \sin\theta_1$$

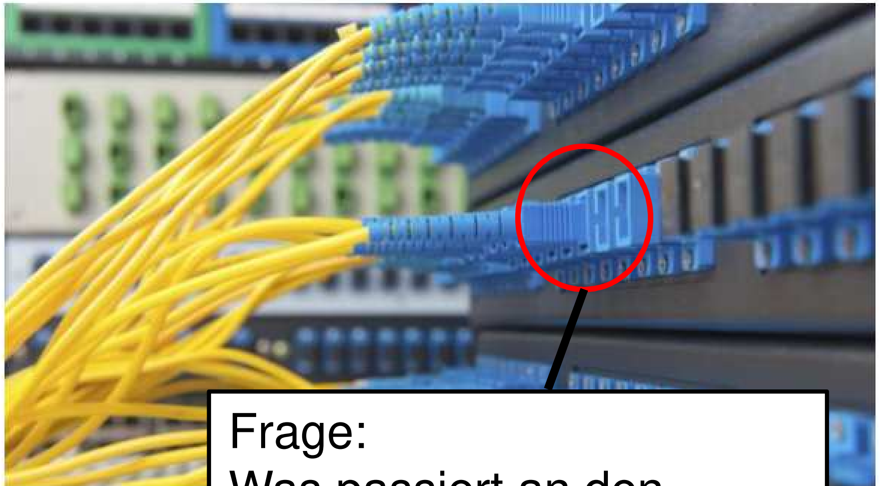
Wellenleiter – Anwendungsbeispiele

Verbindung von Datenzentren



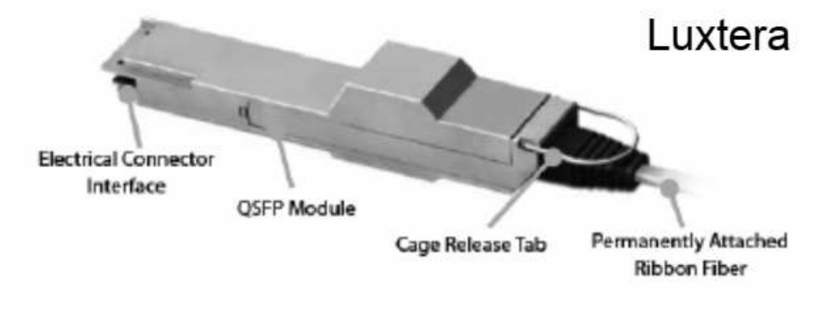
Größe:
10 µm (Kern)
125 µm (Mantel)

Verbindung innerhalb von Datenzentren

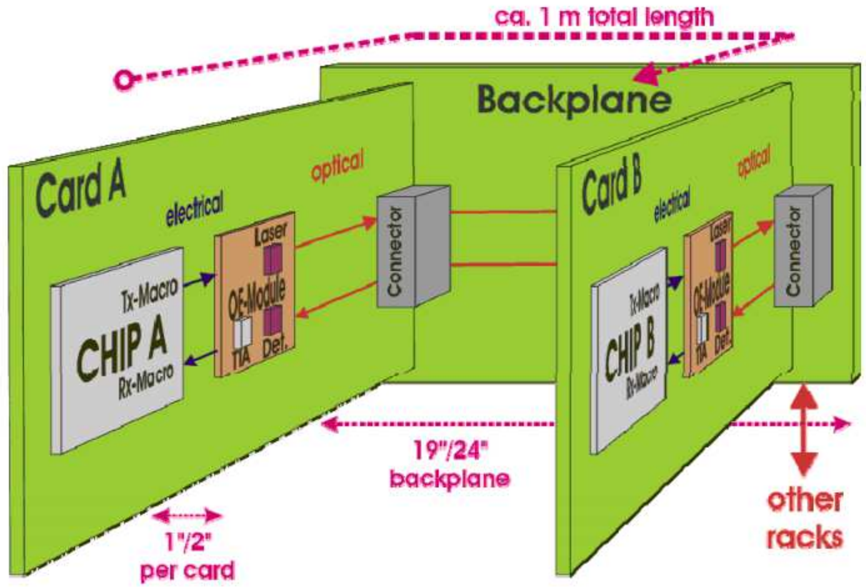


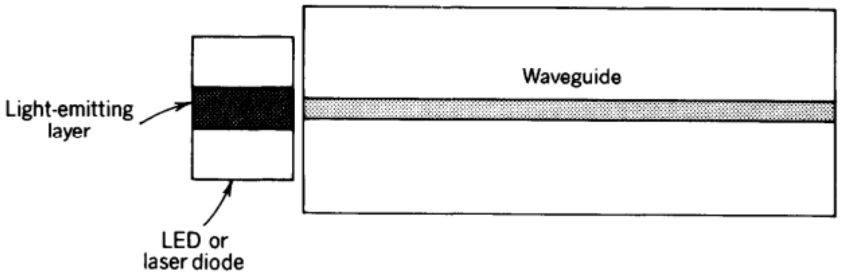
Frage:
Was passiert an den Kopplungsstellen?

Wellenleiter – Anwendungsbeispiele

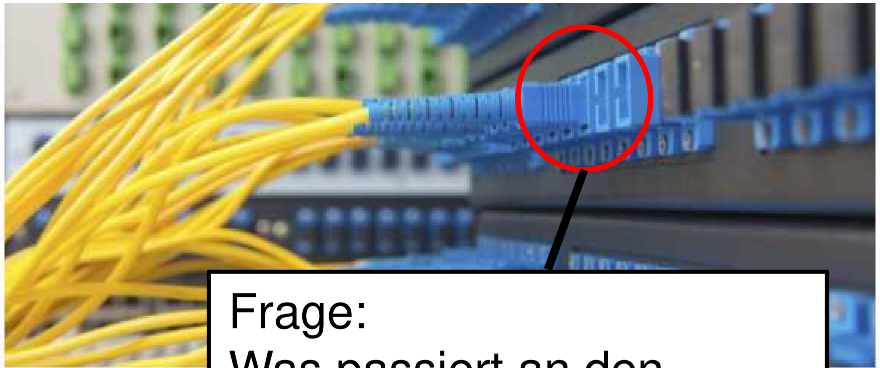


4 TRx @ 10Gbps: CMOS integrated: Si modulators+Ge detectors; Mux, VOA, CMOS drivers+TIA/LA; CDR, ADC, monitors, etc.
Co-packaged lasers and fiber couplers
2.3W total → ~50pJ/bit





Kopplung von Fasern an Laser und Photodioden



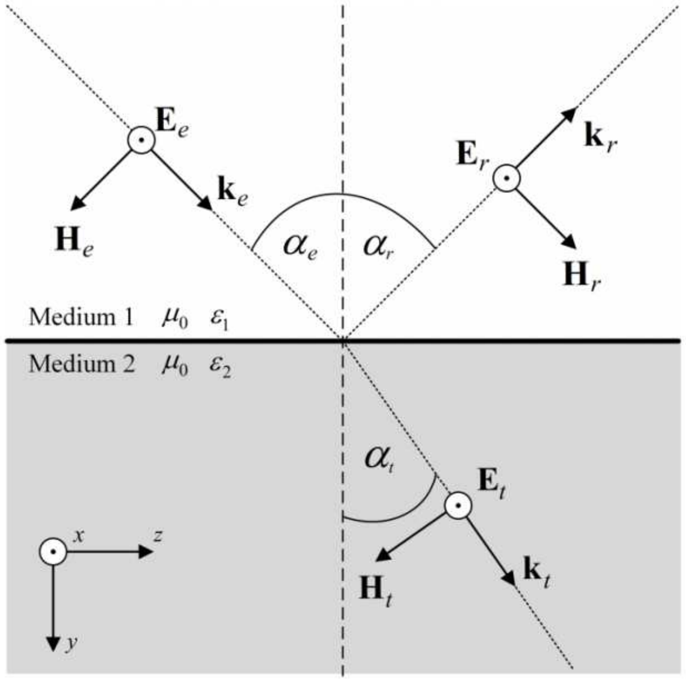
Frage:
Was passiert an den Enden der Glasfaser ?

Yuri Vlasov, 'Silicon photonics for next generation computing systems' ECOC 2008

Wellenleiter - Totalreflexion

Wiederholung Übung 9

Ursache: Wiederholung 5. Übung
senkrechte Polarisation, Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Material
Es gilt dann: $r_s > 0$ bzw. $r_s = 1$ für Totalreflexion



- Es müssen sowohl die Stetigkeitsbedingungen, als auch der Energieerhaltungssatz erfüllt sein.
  - Elektrische Felder der einfallenden und reflektierten Welle überlagern sich für y=0 konstruktiv. Folglich muss ein Feld auf der anderen Seite der Grenzfläche existieren.
  - Die Lösung der Maxwellgleichung darf hier aber keine propagierende Welle sein.

- z-Richtung: $\underline{k}_{e,z} = \underline{k}_{r,z} = \underline{k}_{t,z}$
- y-Richtung: $\underline{k}_{e,y} = \underline{k}_{r,y}$ reell, $\underline{k}_{t,y}$ imaginär

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Wellenleiter - Frustrierte Totalreflexion

- Effekt ähnelt dem Tunneleffekt in der Quantenmechanik.
- Deutlich messbar erst, wenn der Abstand kleiner als etwa die doppelte Wellenlänge der einfallenden Welle ist.

Beispiele:

- Prisma-Koppler
- Kopplung von elektromagnetischen Wellen zwischen zwei Wellenleitern, die nahe genug zusammengebracht werden
- Scanning Nearfield Optical Microscopy (SNOM)

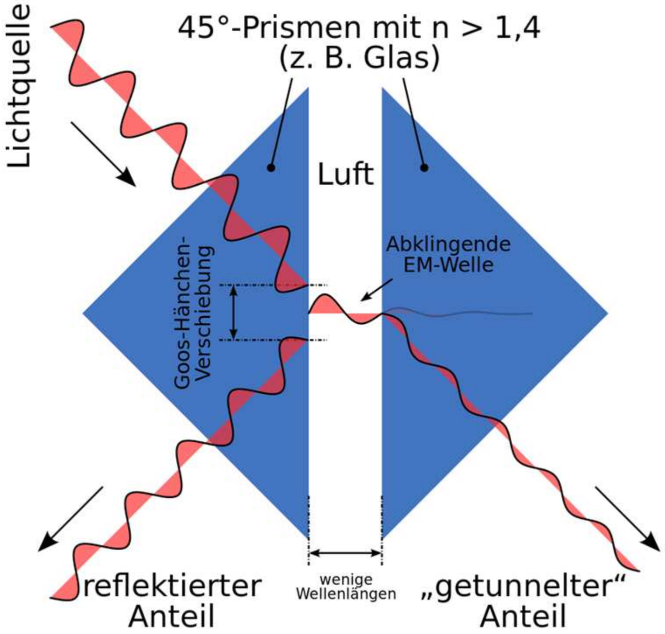
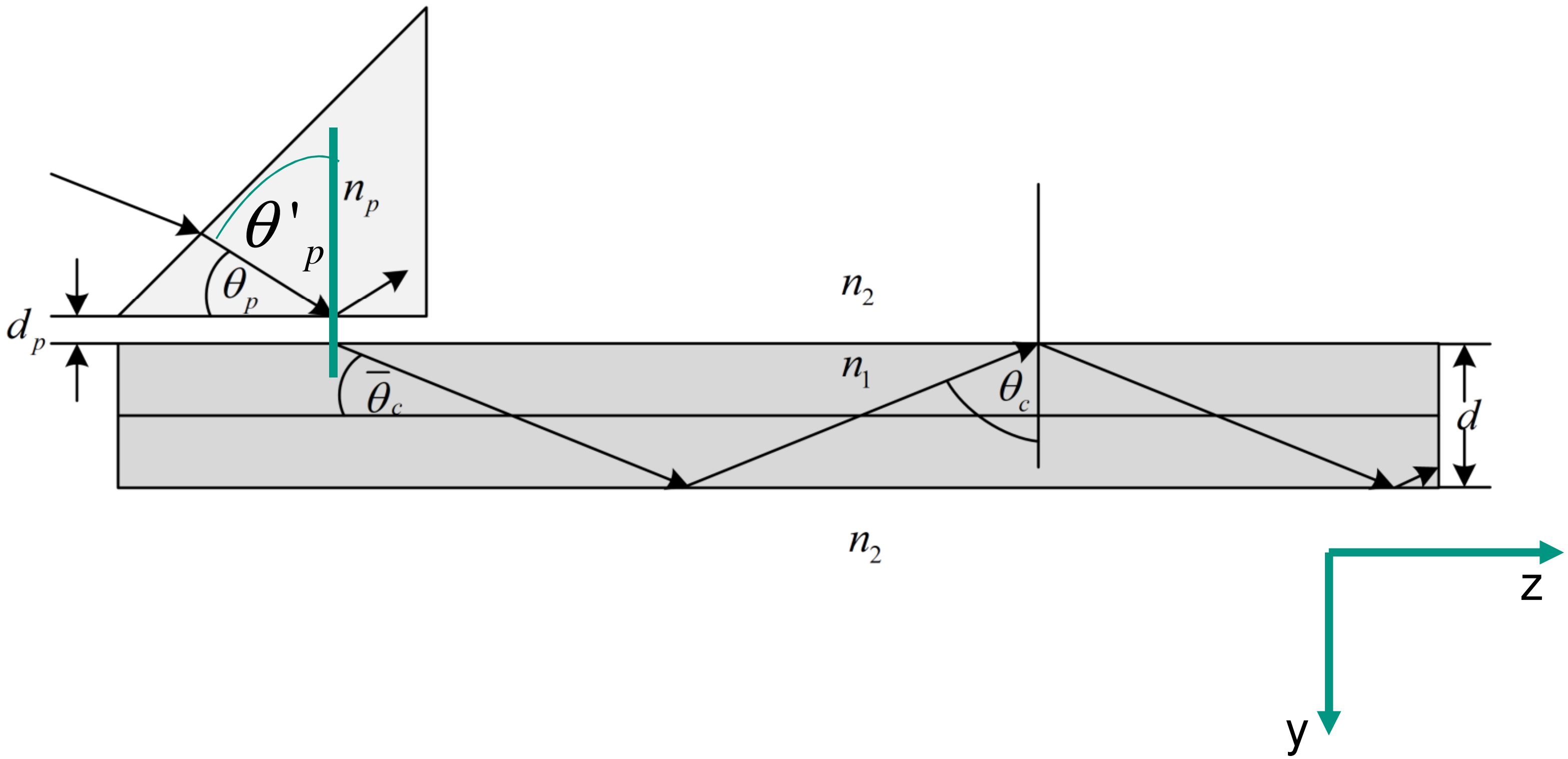


Bild: Wikipedia (Cepheiden)
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8541704

Wellenleiter – Prisma Koppler

Aufgabe 11 c) und d)



Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Wellenleiter – Prisma Koppler

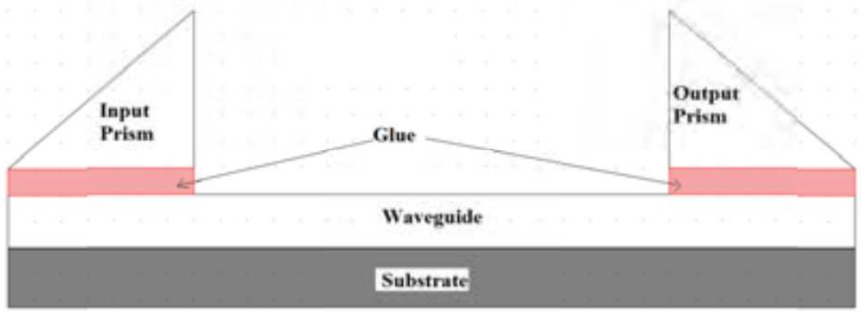
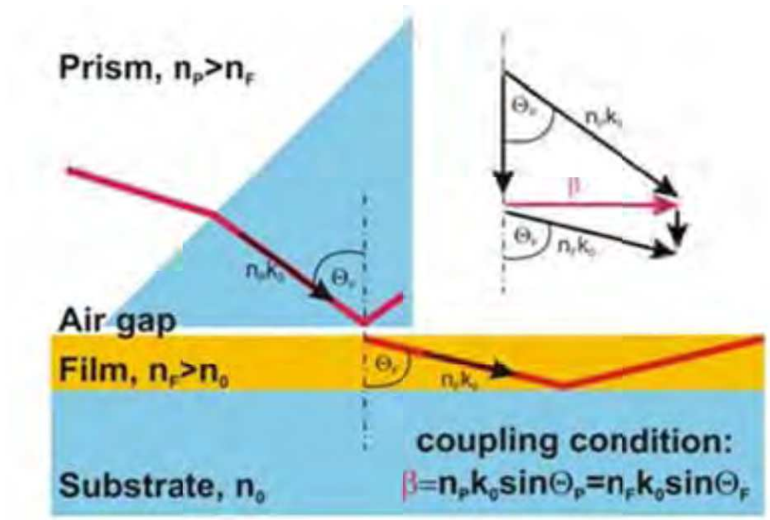
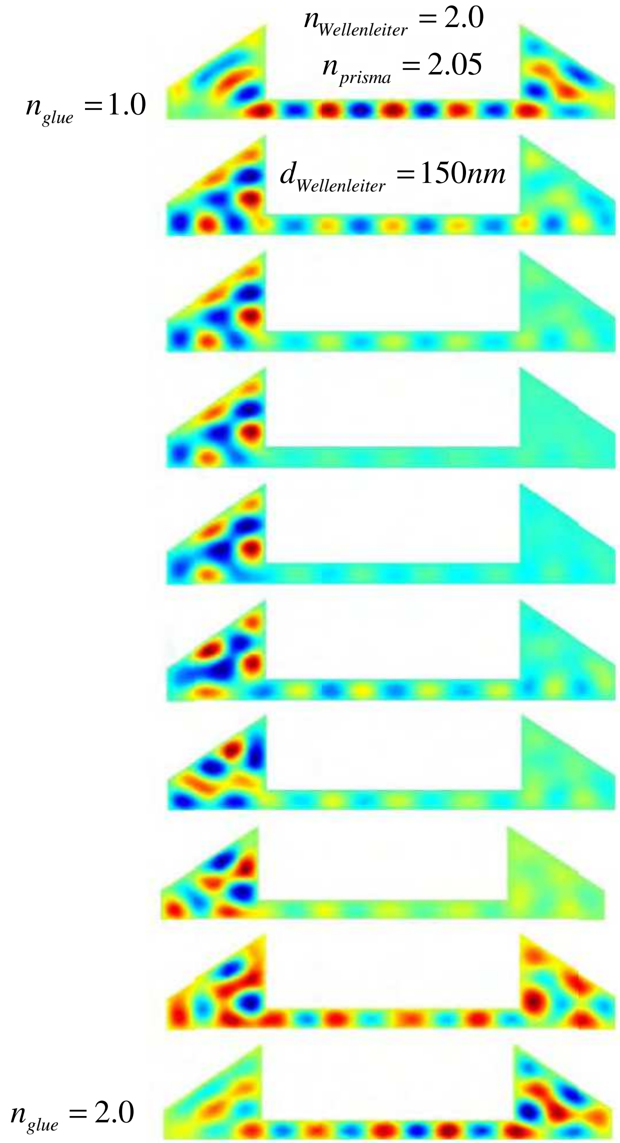


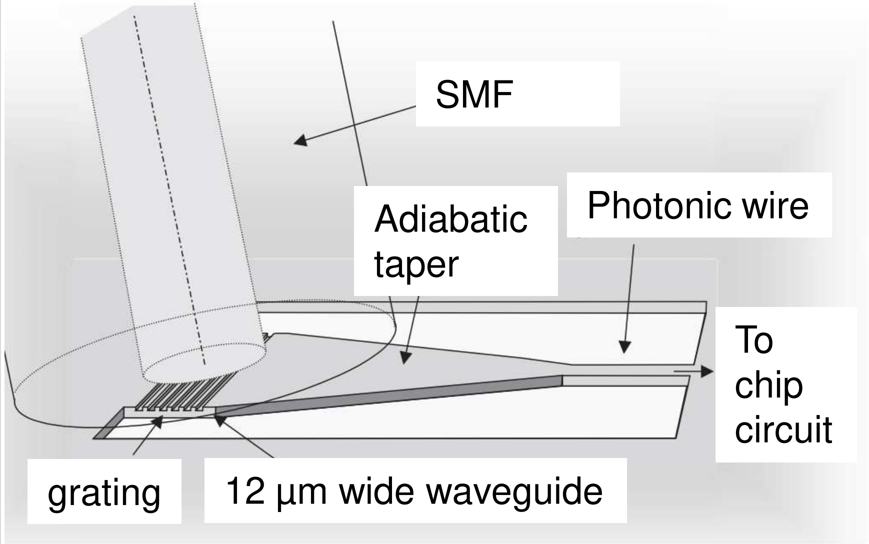
Figure 2. Basic template used for prism coupling. The strip between prism and the waveguide is glue.

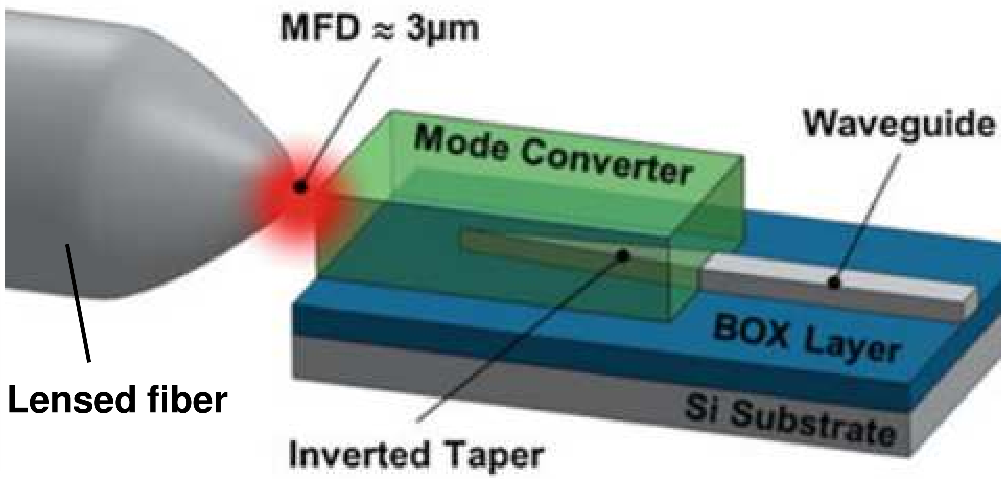


J.T. Andrews et al., COMSOL Conference 2010



Wellenleiter Kopplung– Anwendungsbeispiele





Gitter-Koppler:
Typische Verluste 2…4 dB

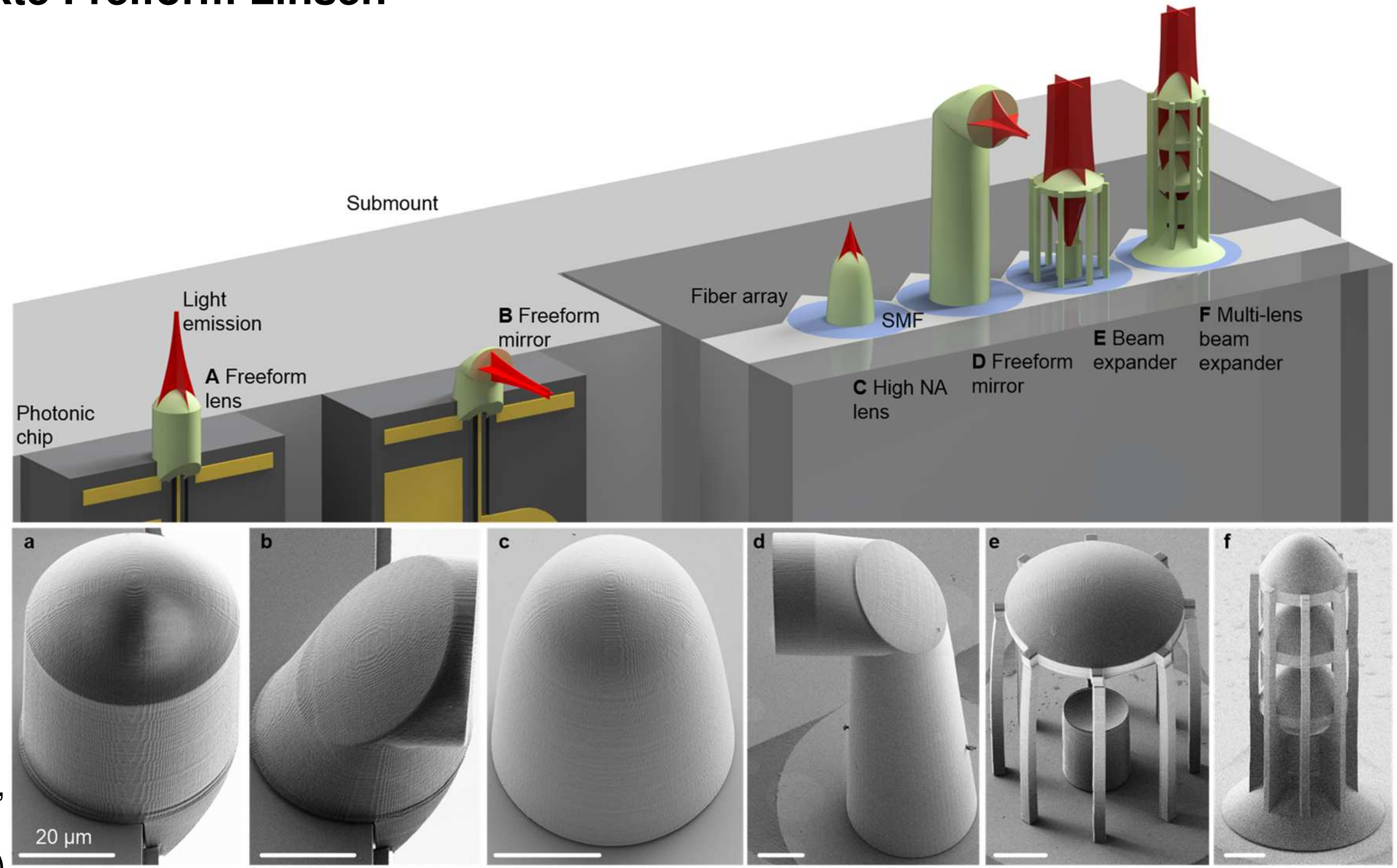
Kopplung mit Gelinsten Fasern:
Typische Verluste ~1 dB

Taillaert *et al.* Jpn. J. Appl. Phys. **45** (2006)

Pavesi and Lockwood. Silicon photonics iii., Springer (2016)

Wellenleiter Kopplung– Anwendungsbeispiele

3D-gedruckte Freiform Linsen



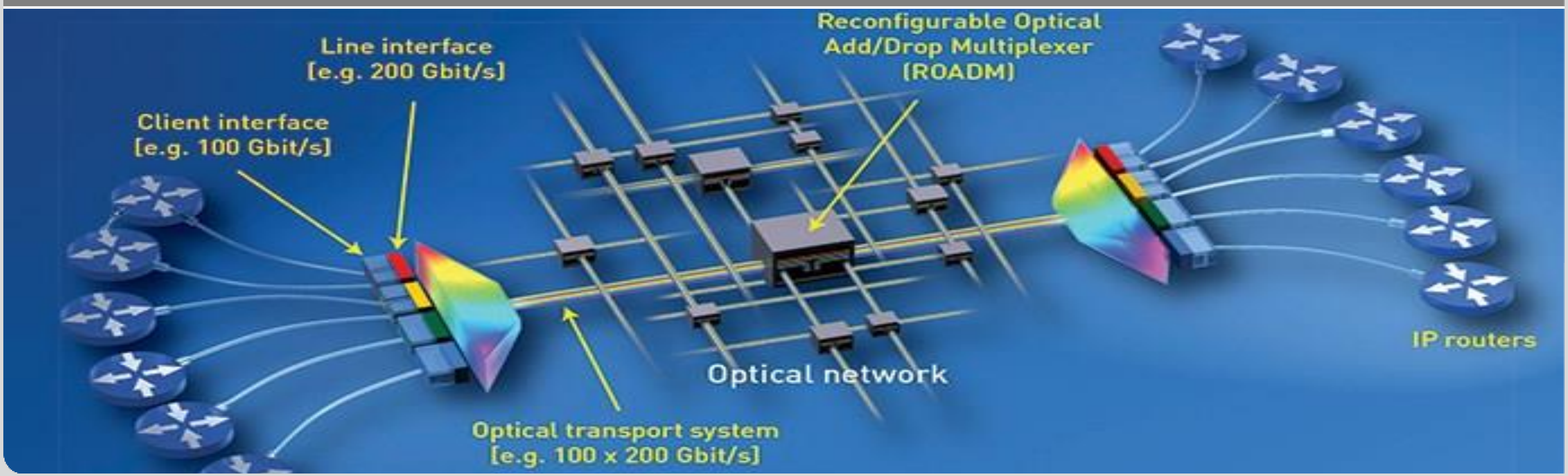
Dietrich *et al.*, Nat. Photon. **12**, 241–247 (2018)

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 11

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Theoretische Elektrotechnik (ITE) und
Institut für Regelungs- und Steuerungsysteme (IRS)

ELEKTROTECHNISCHES GRUNDLAGENPRAKTIKUM SS2020

Zielgruppe: SPO2015 Pflichtfach ab 4. Semester Bachelor ETIT (M-ETIT-102113)
SPO2018 Wahlfach ab 4. Semester Bachelor
NWT, Ingpäd. & Mechatroniker Wahlfach ab 4. Semesters Bachelor

Beginn: 04. Mai 2020 (KW19) mit Versuch 1 Oszilloskopmesstechnik

Anmeldefrist: **23.03.2020 - 26.04.2020** über das YouSubscribe Portal
First Come First Served Regelung

Versuchsanleitung: **KEIN Vorverkauf**
Nur noch pdf-Download ab **06.04.2020** über die ETGP Homepage (s.u.)
Jeder Teilnehmer benötigt eine ausgedruckte Anleitung!

Alle weiteren Details auf: http://www.ite.kit.edu/lehrveranstaltungen_etgp.php

gez.
Dr. A. Teltschik
14.01.2020

Kalender

2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	1 Fr Allerheiligen	1 So 1. Advent	1 Mi Neujahr	1 Sa	1 So	1 Mi Klausur
2 Mi	2 Sa	2 Mo Übung 7 49	2 Do	2 So	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	3 So	3 Di	3 Fr	3 Mo Übung 13 6	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo Übung 3 45	4 Mi Vorlesung 8	4 Sa	4 Di	4 Mi	4 Sa
5 Sa	5 Di	5 Do	5 So	5 Mi Vorlesung 15	5 Do	5 So
6 So	6 Mi Vorlesung 4	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	7 Sa	7 Di	7 Fr	7 Sa	7 Di
8 Di	8 Fr	8 So	8 Mi Vorlesung 11	8 Sa	8 So	8 Mi
9 Mi	9 Sa	9 Mo Übung 8 50	9 Do	9 So	9 Mo 11	9 Do
10 Do	10 So	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	10 Fr Karfreitag
11 Fr	11 Mo Übung 4 46	11 Mi Vorlesung 9	11 Sa	11 Di	11 Mi	11 Sa
12 Sa	12 Di	12 Do	12 So	12 Mi	12 Do	12 So Ostern
13 So	13 Mi Vorlesung 5	13 Fr	13 Mo Übung 10 3	13 Do	13 Fr	13 Mo Oster-montag 16
14 Mo 42	14 Do	14 Sa	14 Di	14 Fr	14 Sa	14 Di
15 Di	15 Fr	15 So	15 Mi Vorlesung 12	15 Sa	15 So	15 Mi
16 Mi Vorlesung 1	16 Sa	16 Mo Übung 9 51	16 Do	16 So	16 Mo 12	16 Do
17 Do	17 So	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo Übung 5 47	18 Mi Vorlesung 10	18 Sa	18 Di	18 Mi	18 Sa
19 Sa	19 Di	19 Do	19 So	19 Mi	19 Do	19 So
20 So	20 Mi Vorlesung 6	20 Fr	20 Mo Übung 11 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo Übung 1 43	21 Do	21 Sa	21 Di	21 Fr	21 Sa	21 Di
22 Di	22 Fr	22 So	22 Mi Vorlesung 13	22 Sa	22 So	22 Mi
23 Mi Vorlesung 2	23 Sa	23 Mo 52	23 Do	23 So	23 Mo 13	23 Do
24 Do	24 So	24 Di	24 Fr	24 Mo Rosen-montag 9	24 Di	24 Fr
25 Fr	25 Mo Übung 6 48	25 Mi 1. Weihnachtstag	25 Sa	25 Di	25 Mi	25 Sa
26 Sa	26 Di	26 Do 2. Weihnachtstag	26 So	26 Mi	26 Do	26 So
27 So	27 Mi Vorlesung 7	27 Fr	27 Mo Übung 12 5	27 Do	27 Fr	27 Mo 18
28 Mo Übung 2 44	28 Do	28 Sa	28 Di	28 Fr	28 Sa	28 Di
29 Di	29 Fr	29 So	29 Mi Vorlesung 14	29 Sa	29 So	29 Mi
30 Mi Vorlesung 3	30 Sa	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Harmonische Wellen, Poynting-Vektor
Übung 4	A5	Harmonische Wellen, Dispersionsrelation, Polarisation
Übung 5	A6	Grenzflächenübergänge (senkrechtes Auftreffen)
Übung 6	A7	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 7	A8	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 8	A9	Parallelplattenleitung (TM-Welle)
Übung 9	A10	Dielektrische Parallelplattenleitung (TE-Welle)
Übung 10	A11	Dielektrische Parallelplattenleitung, Einkopplung
Übung 11	A12	Rechteckhohlleiter
Übung 12	A13	Hertzscher Dipol
Übung 13	-	Labortour

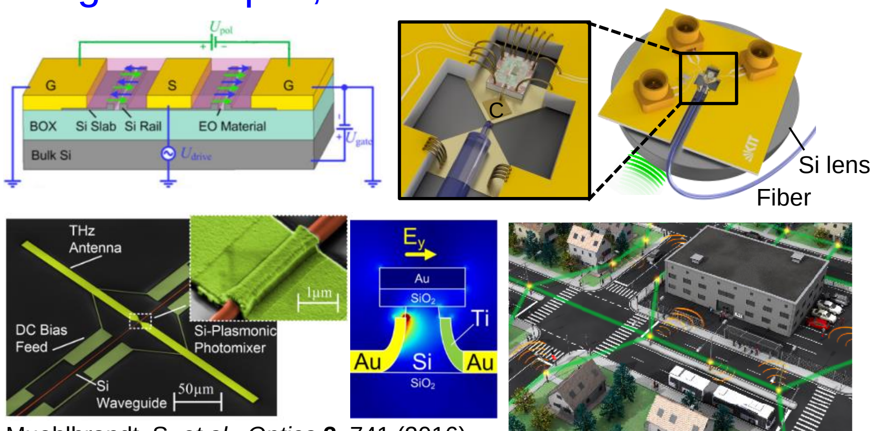
Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

IPQ Labortour am Montag, dem 03.02.2020 11:30 Uhr

Karlsruhe Institute of Technology

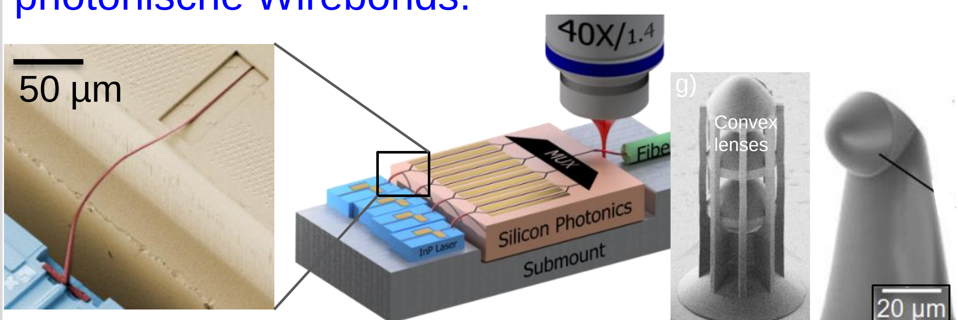
Führung durch das IPQ und Vorstellung laufender Forschungsarbeiten.
Fragen zum Institut werden bei Brezeln und Getränken beantwortet.

Integrierte Optik, Plasmonik und THz-Bauteile:



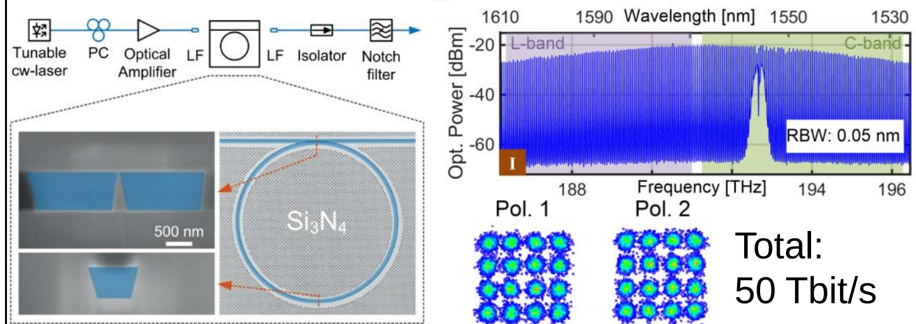
Muehlbrandt, S. *et al.*, *Optica* **3,** 741 (2016).
Harter, T. *et al.*, Nature Photonics **12**, 625-633 (2018).
Harter, T. *et al.*, Optica **6,** 1063–1070 (2019).
Ummethala, S. *et al. Nat. Photonics* **13**, 519 (2019).

3D-Nanodruck mit Zweiphotonenlithographie / photonische Wirebonds:



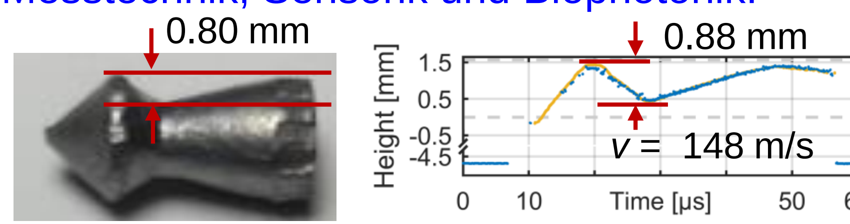
Billah, M. R. *et al.*, *ECOC'17,* Th.PDP.C.1 (2017)
Trappen, M. *et al.*, *ECOC'18,* Tu4C.2 (2018)

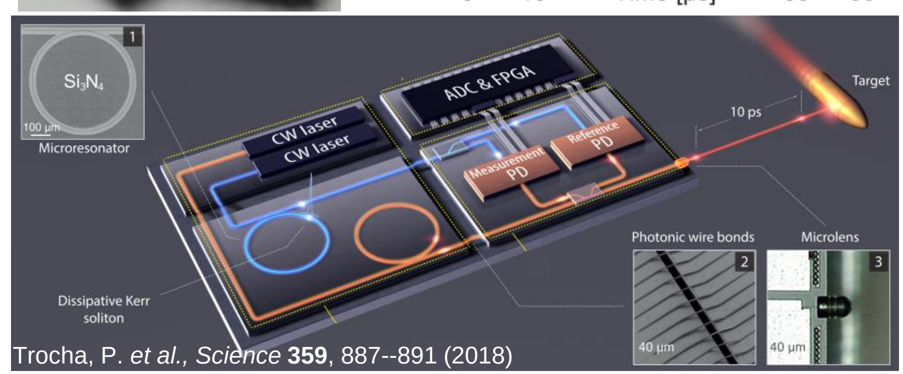
Frequenzkämme und optische Kommunikation:



Marin-Palomo, P. *et al.*, *Nature* **546,** 274–279 (2017).

Messtechnik, Sensorik und Biophotonik:

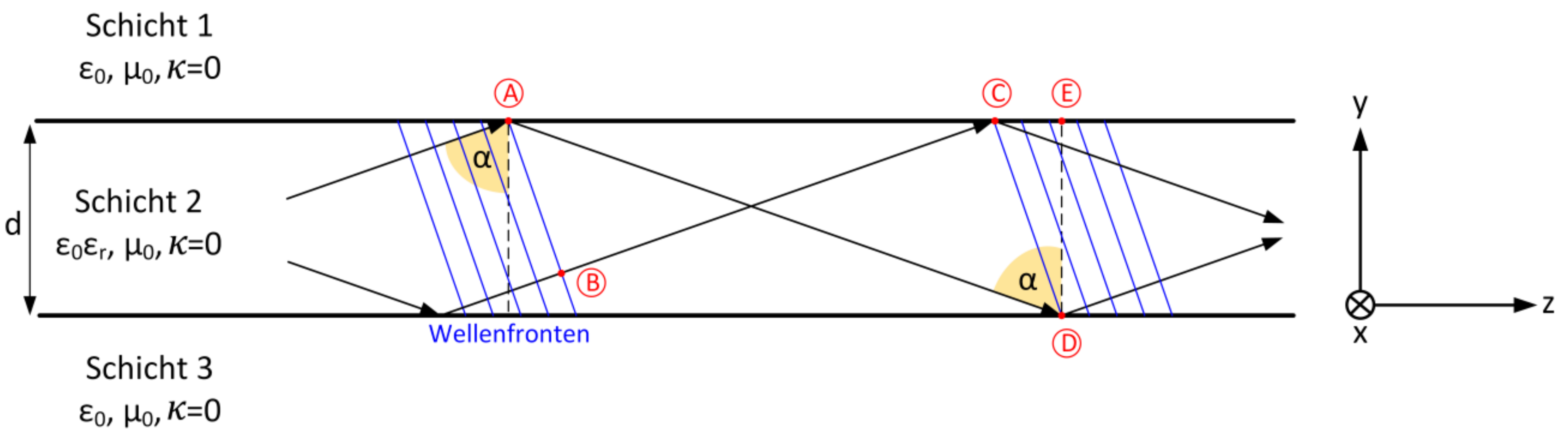




Trocha, P. *et al.*, *Science* **359**, 887--891 (2018)

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Korrektur der Lösung zur 10. Aufgabe a)



$$k_1\overline{AD} + 2\varphi_s = k_1\overline{BC} + m2\pi \Leftrightarrow$$

$$k_1\frac{d}{\cos(\alpha)} + 2\varphi_s = k_1 d\left[\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha)\right] + m2\pi \Leftrightarrow$$

$$k_1 d\left[\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} + \cos(\alpha)\right] = -2\varphi_s + m2\pi \Leftrightarrow$$

$$k_1 d\left[\frac{\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2}{\cos(\alpha)}\right] = -2\varphi_s + m2\pi \Leftrightarrow$$

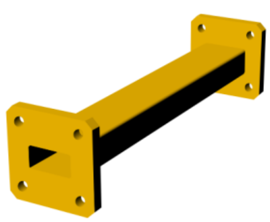
$$k_1 d 2\cos(\alpha) = -2\varphi_s + m2\pi \Leftrightarrow$$

In der zunächst hochgeladenen Version tauchte auch auf der rechten Seite der Gleichung ein φ_s auf.

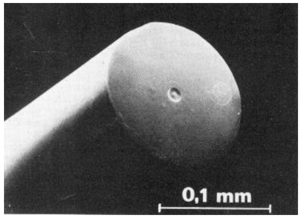
Hinweis: entlang des Weges $\overline{BC}$ tritt kein Phasensprung auf, da die gemäß Abbildung betrachtete Wellenfront für den Punkt C die Wellenfront vor der Reflexion darstellt.

Wellenleiter – Übersicht

	Hohlleiter	Dielektrischer Wellenleiter
Einfachster Fall	Parallelplattenleitung (theoretisches Konstrukt)	Dielektrische Platte oder auch Schicht-wellenleiter (theoretisches Konstrukt)
Materialien	Vakuum / Luft umgeben von einer metallischen Hülle	Schichtsystem aus dielektrischen Materialien, z.B. Siliziumdioxid (Quarz)
Grundprinzip	Reflexion der Welle an den metallischen Grenzflächen aufgrund der hohen (idealen) Leitfähigkeit des Metalls	Totalreflexion an den Grenzflächen zwischen den Dielektrika
Besonderheit	Felder dringen gar nicht in die metallische Außenhülle des Leiters ein	Evaneszente (exponentiell abklingende) Felder jenseits der Grenzfläche
Modenarten	TE- (⊥) oder TM-Moden (∥), TEM-Moden für Parallelplattenleitung	TE- (⊥) oder TM-Moden (∥)



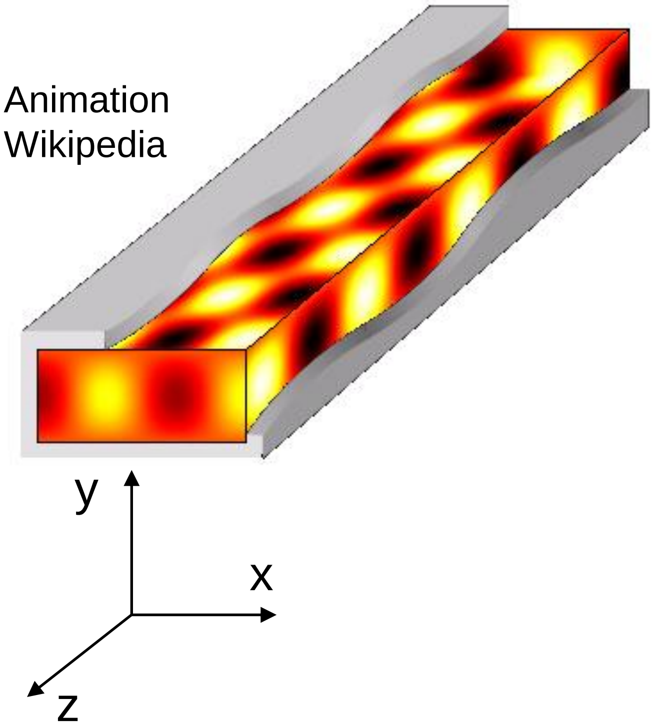
Größenordnung:
einstelliger oder
zweistelliger
cm-Bereich



Größe:
10 µm (Kern)
125 µm (Faser)

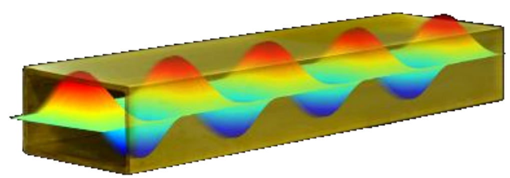
Wiederholung: Wellenleitermoden

Animation
Wikipedia

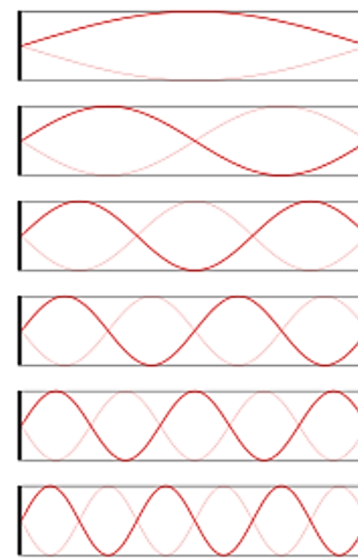


Das sich ausbreitende ortsfeste, transversale Wellenbild (Feldverteilung, Feldmuster, stehenden Welle) bezeichnet man als Schwingungsmodus (oder aus dem Englischen: **Mode**). Für jeden erlaubten Winkel ergibt sich somit eine korrespondierende Mode, die im Wellenleiter geführt wird.

- x-y-Ebene: Mode (Eigenfunktion des Systems)
- z-Richtung: Wanderwelle



Feldstärkeverteilung der Wanderwelle (www.radartutorial.eu)



Die Modenzahlen m bzw. n geben die Anzahl der Maxima in x- bzw. y-Richtung an.

Rechteckhohlleiter – Ein paar Begrifflichkeiten

- Der Realteil der Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung $\underline{k}_z$ wird auch als Ausbreitungs- oder Propagationskonstante $\beta = \Re\{\underline{k}_z\} = k_z$ bezeichnet.
- Der Imaginärteil der Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung $\underline{k}_z$ wird auch als Dämpfungskonstante α bezeichnet.
- Insgesamt ergibt sich die komplexe Ausbreitungskonstante $\underline{k}_z = \beta - j\alpha$ (siehe auch Vorlesungsfolien ab S. 57), wobei das negative Vorzeichen zu beachten ist, damit sich eine Dämpfung und keine Verstärkung ergibt. Eine alternative Schreibweise aus der Hochfrequenztechnik ist $\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$ mit $\underline{\gamma} = j\underline{k}_z$.
- Die cut-off-Frequenz f_c ist die Frequenz, ab welcher eine Mode im Wellenleiter ausbreitungsfähig wird ($f > f_c$). Sie ist von der Geometrie des Wellenleiters abhängig. Für Frequenzen unterhalb der cut-off-Frequenz ($f < f_c$) ergeben sich evaneszente Felder in Ausbreitungsrichtung aufgrund eines rein imaginären $\underline{k}_z$.
- Im Regelfall werden Hohlleiter derart designt, dass sich nur eine einzige Mode im Wellenleiter ausbreiten kann, die als Fundamentalmode oder Grundmode bezeichnet wird. Dies liegt darin begründet, dass sich für die Moden verschiedene Ausbreitungskonstanten $k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$ und Gruppengeschwindigkeiten $v_{gr}(k_z)$ ergeben. Somit lässt sich die Phase der Welle am Wellenleiterende nicht kontrollieren und/oder es kommt zum Zerfließen von Wellenpaketen infolge von Modendispersion.

Rechteckhohlleiter – Vorgehen

Karlsruhe Institute of Technology

1.) Betrachtung der Wellengleichung der longitudinalen Komponente $\underline{E}_z$ bzw. $\underline{H}_z$

2.) Separationsansatz von Bernoulli für die Wellengleichung von $\underline{E}_z$ bzw. $\underline{H}_z$

3.) Verwenden der Randbedingungen an der leitenden Wand

4.) Bestimmung der anderen Feldkomponenten aus $\underline{E}_z$ bzw. $\underline{H}_z$ mittels der Maxwellgleichungen

„Separation der Variablen“ beim elektr. Potential in der Laplace-gleichung in EMF

$$\underline{E}_x = -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right)$$

$$\underline{E}_y = -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - j\omega\mu\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right)$$

$$\underline{H}_x = -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} - j\omega\varepsilon\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}\right)$$

$$\underline{H}_y = -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}\right)$$

Rechteckhohlleiter – E- und H-Wellen

- Bei Ausbreitung einer $\underline{\mathbf{H}}$-Welle (TE-Welle) in z-Richtung gilt:

$$\underline{H}_z = H_0 \cos\left(\boxed{\frac{m\pi}{a}} x\right) \cos\left(\boxed{\frac{n\pi}{b}} y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{H}_x = \frac{jk_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{H}_y = \frac{jk_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2} \cdot \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Wellenzahl k_x

Wellenzahl k_y

$$\underline{E}_z = 0$$

$$\underline{E}_x = \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2} \cdot \frac{n\pi}{b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{E}_y = \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

mit $\omega^2\mu\varepsilon = k^2$ und $\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2 = k_c{}^2$

Für die Modenzahlen gilt:
$\boldsymbol{m = 0, 1, 2, \ldots}$
$\boldsymbol{n = 0, 1, 2, \ldots}$

Jedoch ist der Fall $m = n = 0$ nicht möglich, da dann alle Feldkomponenten außer $\underline{H}_z$ verschwänden und das Feld $\underline{H}_z$ nur exponentiell abfiele (→ keine sich ausbreitende Welle). Zudem wäre die Maxwell-Gleichung $\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = 0$ verletzt.

Als Fundamentalmode ergibt sich die **H_{10}-Welle** (für $a > b$)*.

*Für einen quadratischen Hohlleiter haben die H_{10}- und die H_{01}-Welle die gleiche cut-off-Frequenz.

Rechteckhohlleiter – E- und H-Wellen

- Bei Ausbreitung einer $\underline{\mathbf{E}}$-Welle (TM-Welle) in z-Richtung gilt:

$$\underline{H}_z = 0$$

$$\underline{H}_x = \frac{j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2} \cdot \frac{n\pi}{b} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{H}_y = -\frac{j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Wellenzahl k_x

Wellenzahl k_y

$$\underline{E}_z = E_0 \sin\left(\boxed{\frac{m\pi}{a}}x\right) \sin\left(\boxed{\frac{n\pi}{b}}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{E}_x = -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2} \cdot \frac{m\pi}{a} H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\underline{E}_y = -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2} \cdot \frac{n\pi}{b} H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{j(\omega t - k_z z)}$$

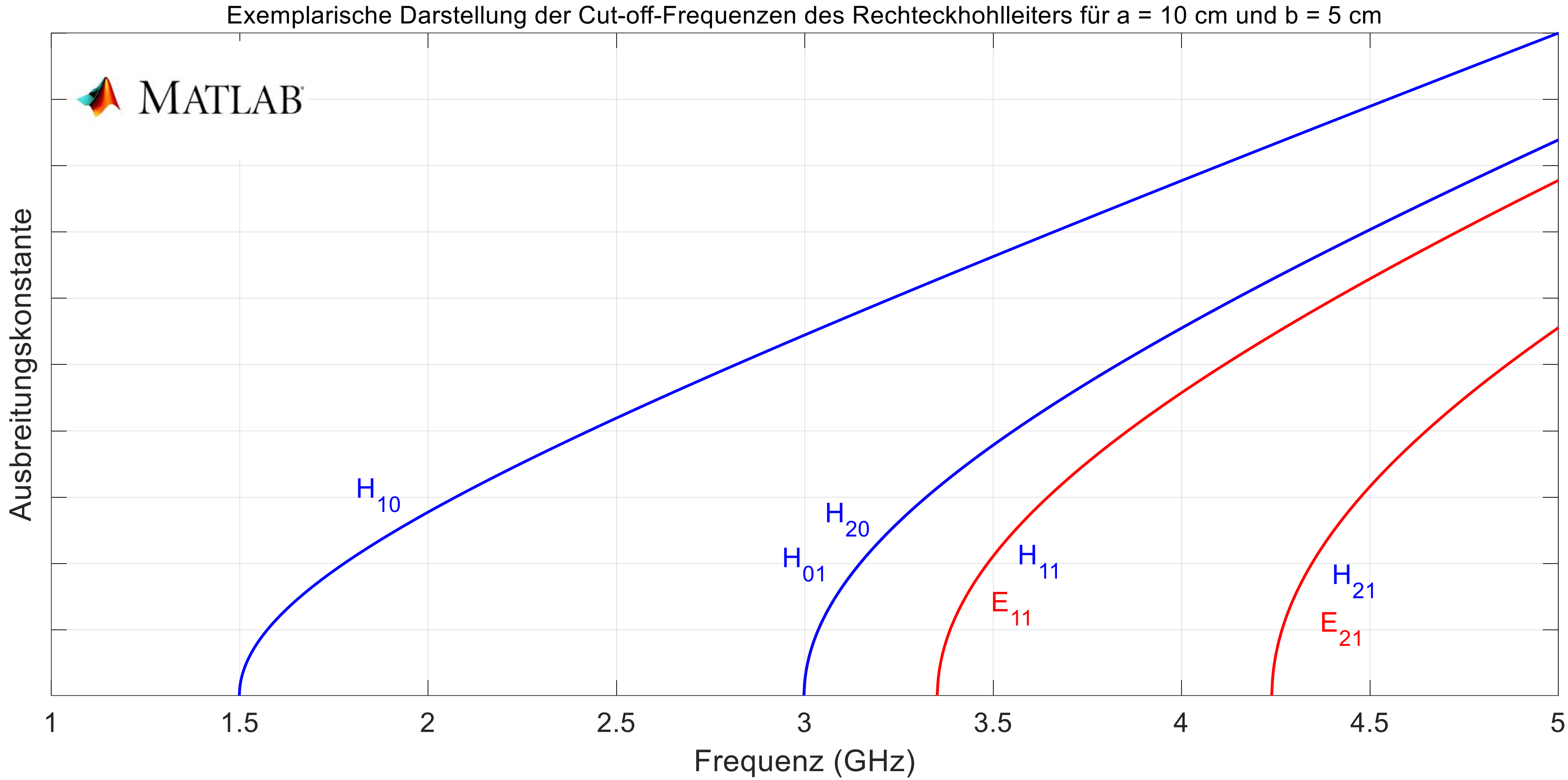
mit $\omega^2\mu\varepsilon = k^2$ und $\omega^2\mu\varepsilon - k_z{}^2 = k_c{}^2$

Für die Modenzahlen gilt:
$\boldsymbol{m} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$
$\boldsymbol{n} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots$

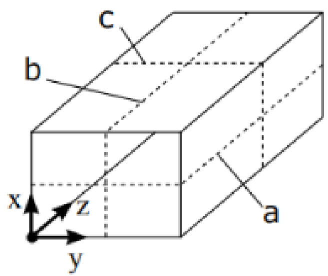
Die Fälle mit $m = 0$ oder aber $n = 0$ sind nicht möglich, da dann sämtliche Feldkomponenten verschwänden.

Als Fundamentalmode ergibt sich somit die **$\mathbf{E_{11}}$-Welle**.

Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden

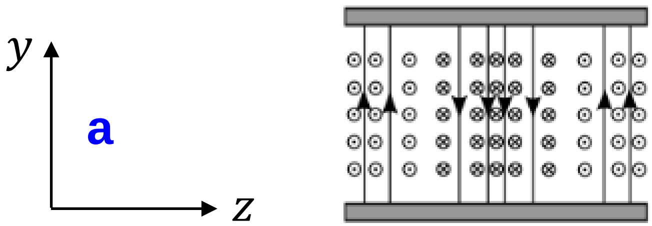


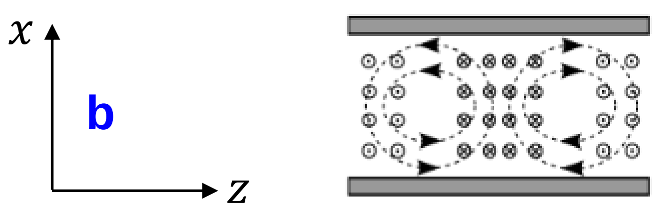
Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden

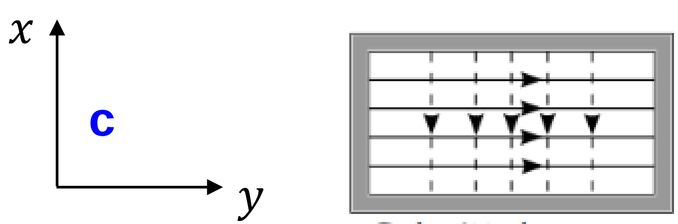


Darstellung auf dem
Übungsblatt

H_{10}-Welle





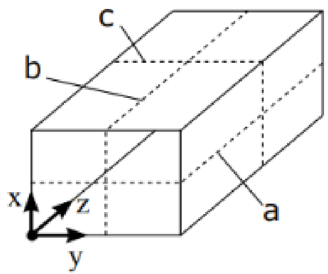


Schnittebene: c

Es gilt $\underline{E}_x = 0$ und $\underline{E}_y \neq 0$.

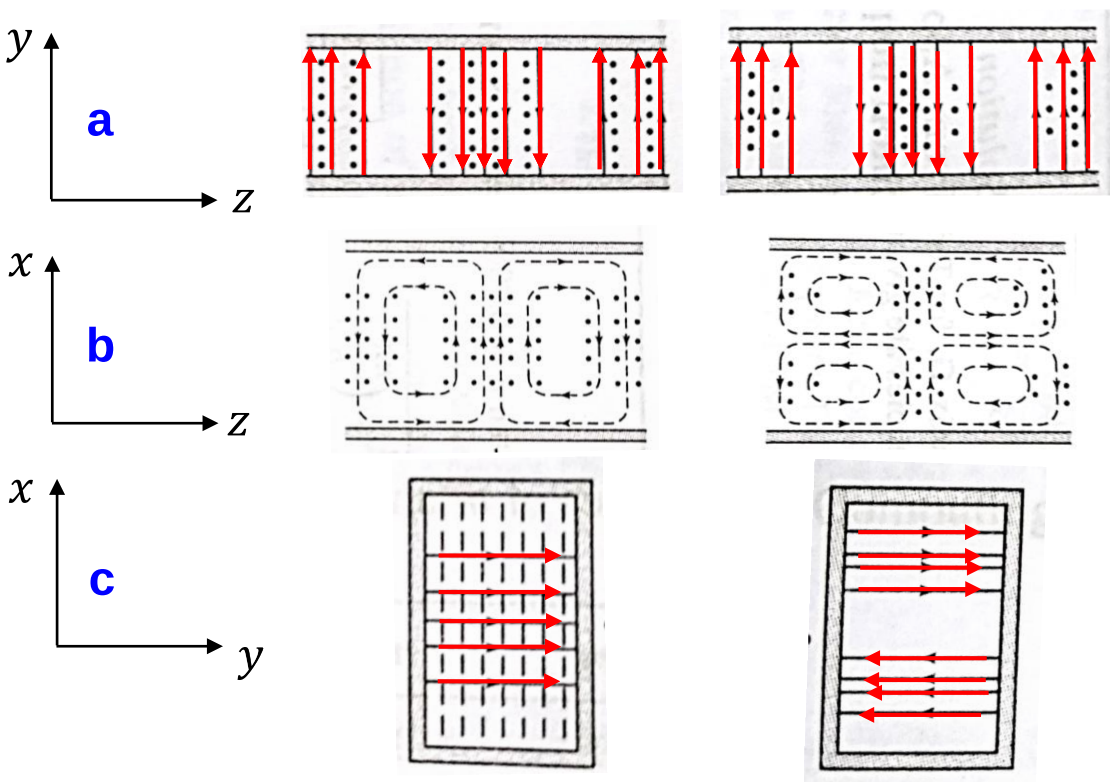
- Laufen wir in x-Richtung so begegnen wir einem Extremum (Maximum bzw. Minimum) von $\underline{E}_y$, daher ist $m = 1$.
- Laufen wir in y-Richtung so begegnen wir keinem Extremum (Maximum bzw. Minimum) von $\underline{E}_x$, daher ist n =0.

Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



Darstellung im Lehrbuch „Microwave Engineering“ (Pozar)

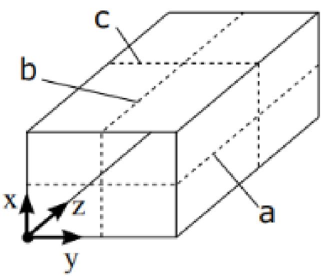
H_{10}-Welle **H_{20}-Welle**



Es gilt nach wie vor $\underline{E}_x = 0$ und $\underline{E}_y \neq 0$.

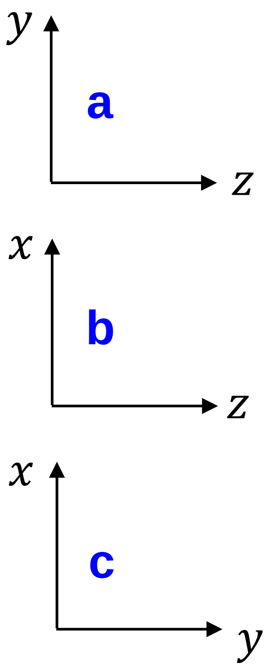
- Laufen wir in x-Richtung so begegnen wir zwei Extrema von $\underline{E}_y$, daher ist $m = 2$.
- Laufen wir in y-Richtung so begegnen wir keinem Extremum (Maximum bzw. Minimum) von $\underline{E}_x$, daher ist n =0.

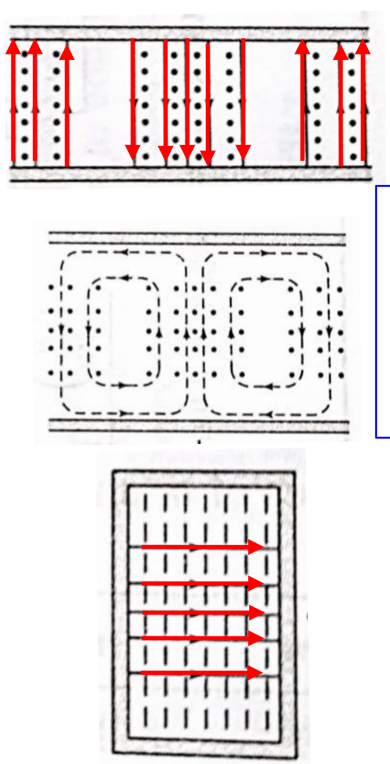
Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



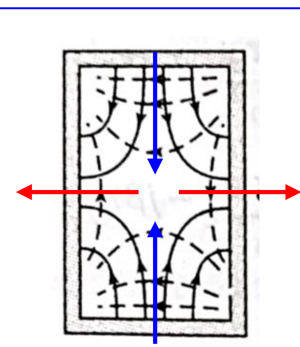
Darstellung im
Lehrbuch „Microwave
Engineering“ (Pozar)

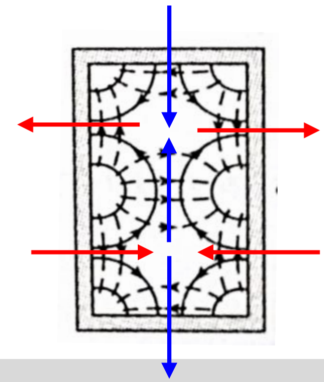
H_{10}-Welle **H_{11}-Welle** **H_{21}-Welle** **E_{11}-Welle**

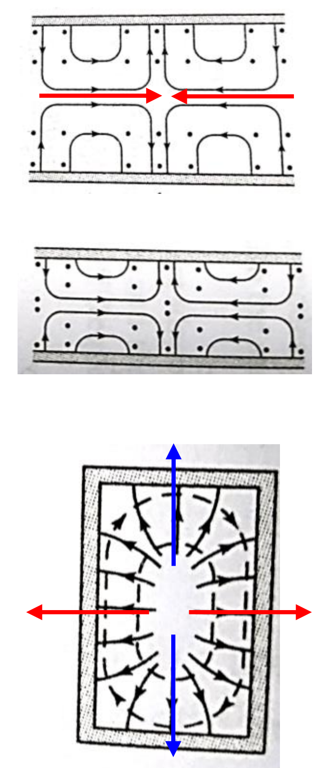




Ein Extremum in x-Richtung und ein Extremum in y-Richtung.

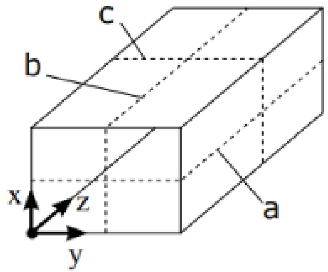






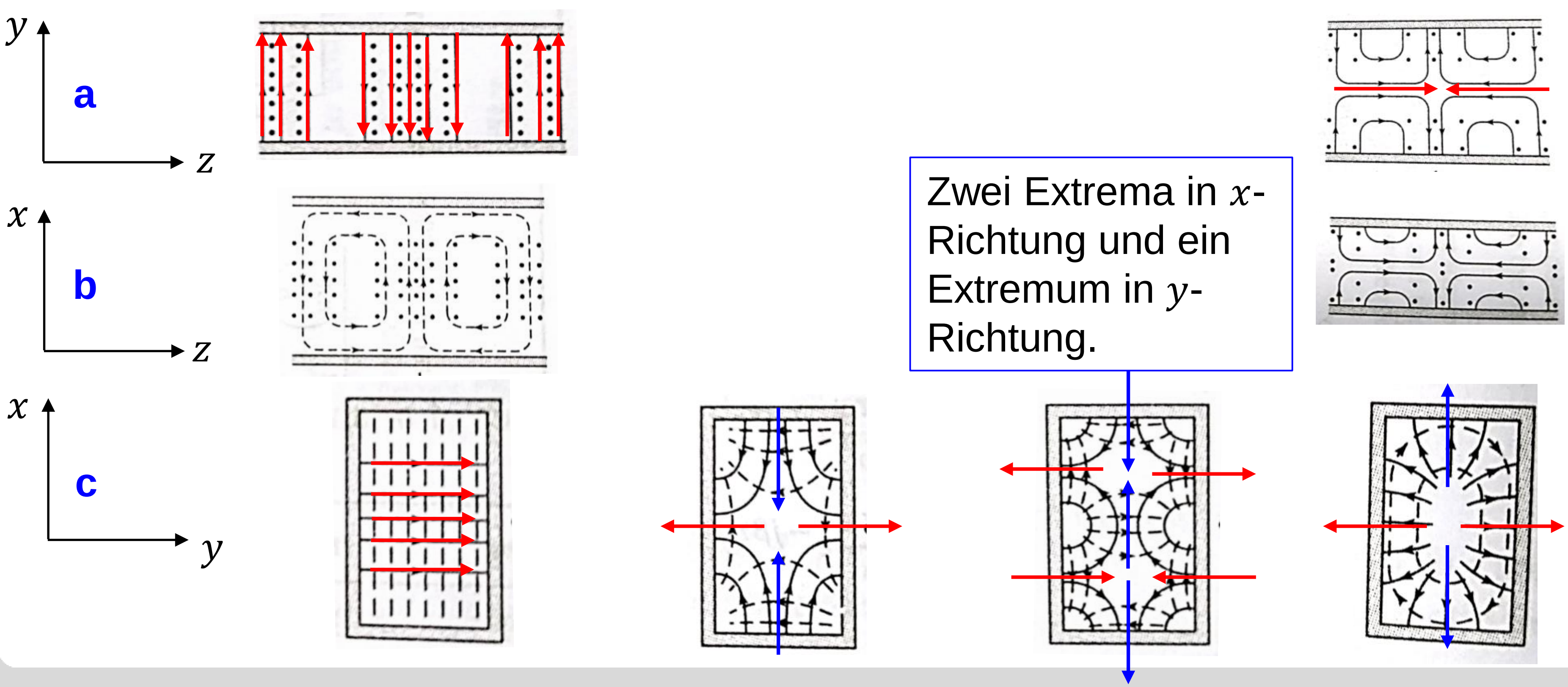
Institute of Photonics
and Quantum Electronics — IPQ

Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden

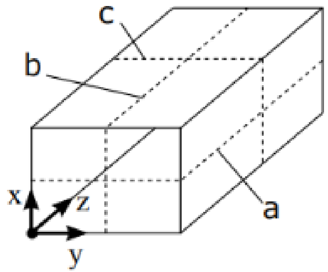


Darstellung im
Lehrbuch „Microwave
Engineering“ (Pozar)

H_{10}-Welle **H_{11}-Welle** **H_{21}-Welle** **E_{11}-Welle**

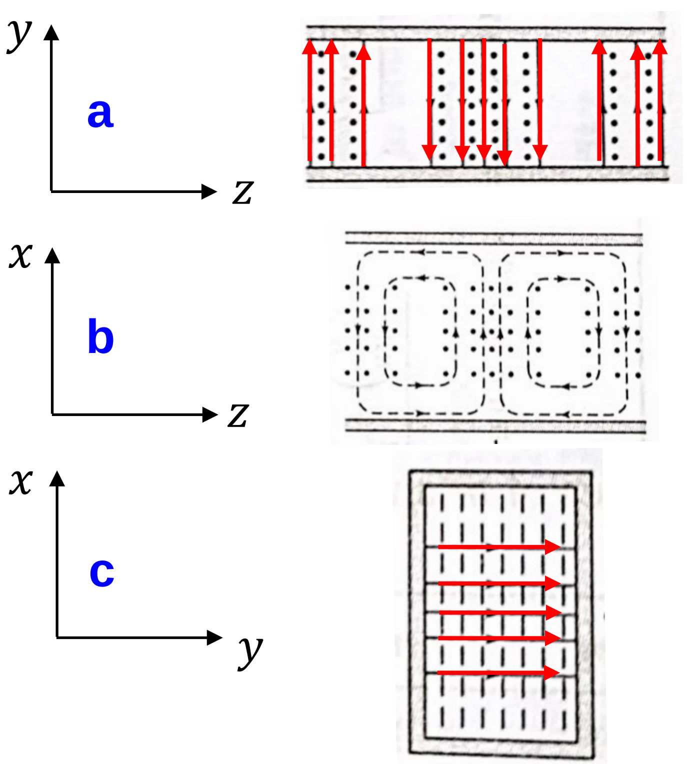


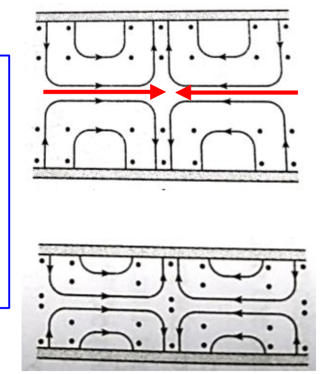
Rechteckhohlleiter – Visualisierung der Moden



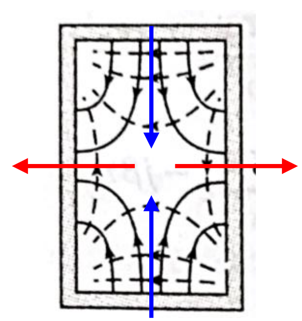
Darstellung im Lehrbuch „Microwave Engineering“ (Pozar)

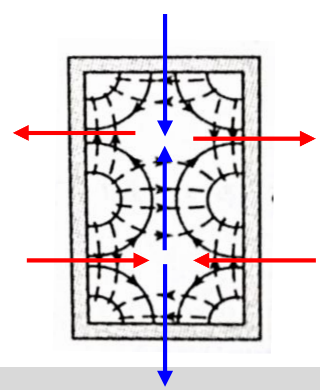
H_{10}-Welle **H_{11}-Welle** **H_{21}-Welle** **E_{11}-Welle**

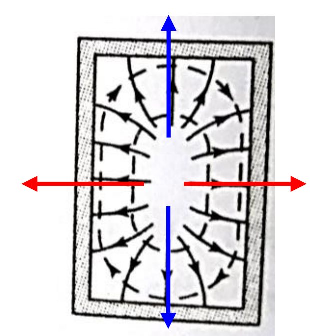




- Sichtbare z-Komponente
- Ein Extremum in x-Richtung und ein Extremum in y-Richtung.







Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

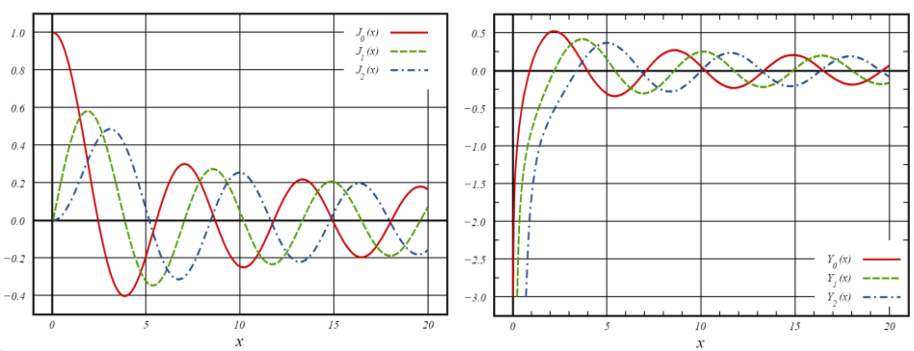
Wellenleiter – Übersicht

	Hohlleiter	Dielektrischer Wellenleiter
2D-Fall	Parallelplattenleitung (theoretisches Konstrukt) Übungsaufgabe 9	Dielektrische Platte oder Schicht-wellenleiter (theoretisches Konstrukt) Übungsaufgabe 10+11
3D-Fall (■)	Rechteckhohlleiter Übungsaufgabe 12	Nicht behandelt; nur numerisch oder semi-analytisch lösbar
3D-Fall (●)	Zylindrischer Hohlleiter / Rundhohlleiter Vorlesung 12	Dielektrischer Stab / Glasfaser Vorlesung 12

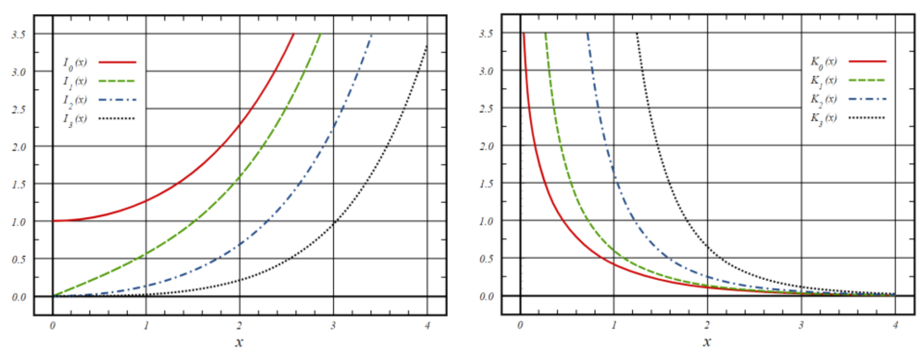
Zylindrische Wellenleiter

- Separationsansatz von Bernoulli in Zylinderkoordinaten führt auf zwei unabhängige, gewöhnliche Differentialgleichungen
  - Winkelabhängigkeit φ: einfach zu lösende DGL → Lösung: Sinus/Kosinus
  - Radiale Abhängigkeit ρ: kompliziertere DGL
    - Für reelle Wellenzahlen (Innere Schicht, z.B. Kern der Glasfaser): Besselsche DGL → Lösung: Besselfunktion 1. Art
      (Hinweis: Die 2. Art ist auch eine mathematische Lösung, jedoch keine physikalisch sinnvolle Lösung, da sie für $\rho \to 0$ divergiert)
    - Für imaginäre Wellenzahlen (Äußere Schicht, z.B. Mantel der Glasfaser): modifizierte Besselsche DGL → Lösung: modifizierte Besselfunktion 2. Art
      (Hinweis: Die 1. Art ist auch eine mathematische Lösung, jedoch keine physikalisch sinnvolle Lösung, da sie für $\rho \to \infty$ wächst, statt eine Dämpfung zu erfahren.)

Besselfunktionen 1. und 2. Art



Modifizierte Besselfunktionen 1. und 2. Art



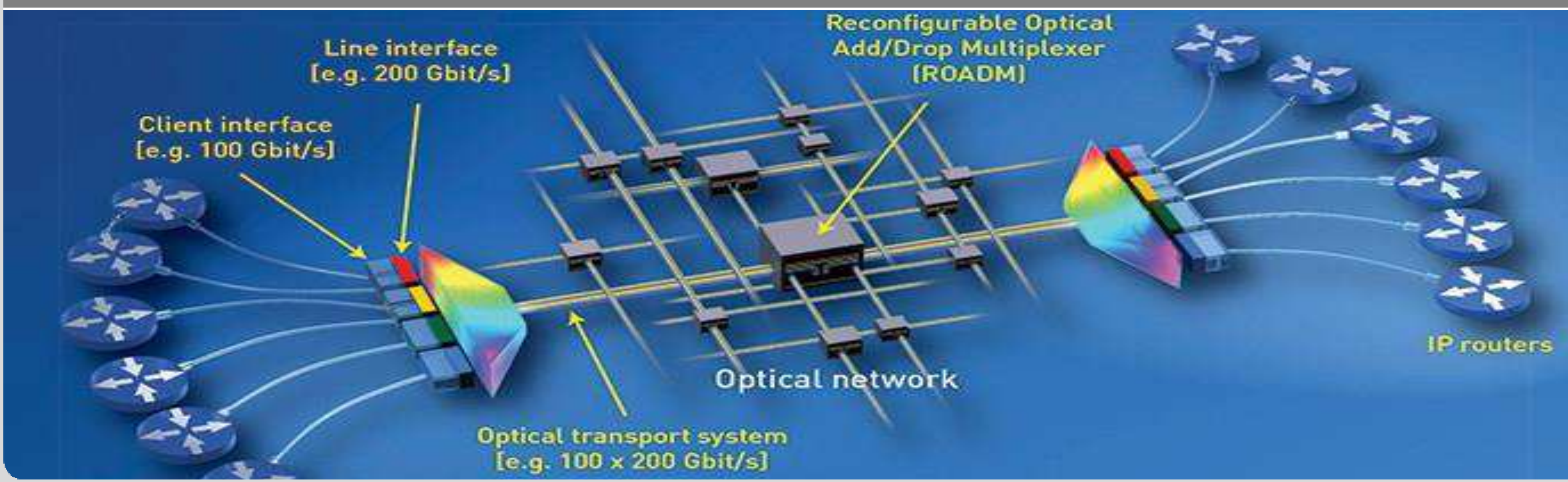
Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Besselsche_Differentialgleichung#Modifizierte_Bessel-Funktionen

Elektromagnetische Wellen (EMW)
Übung 12

WS 2019/2020

Christoph Füllner und Mareike Trappen

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), Department of Electrical Engineering and Information Technology (ETIT)



Kalender

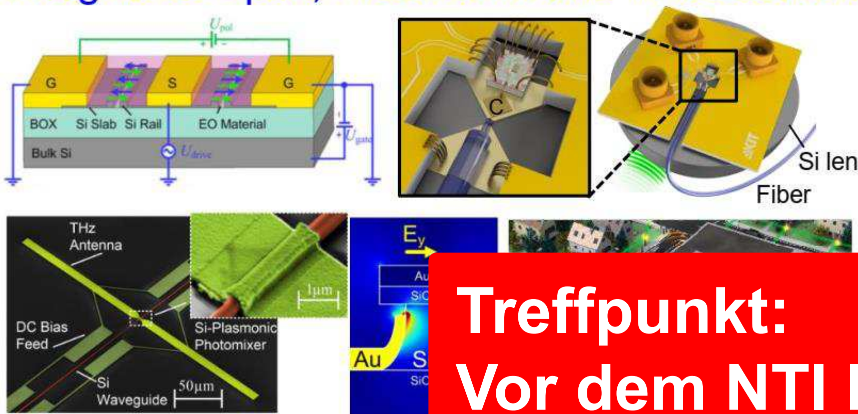
2019			2020			
Oktober	**November**	**Dezember**	**Januar**	**Februar**	**März**	**April**
1 Di	**1 Fr** Allerheiligen	**1 So** 1. Advent	**1 Mi** Neujahr	**1 Sa**	**1 So**	1 Mi **Klausur**
2 Mi	**2 Sa**	2 Mo **Übung 7** 49	2 Do	**2 So**	2 Mo 10	2 Do
3 Do Tag der Dt. Einheit	**3 So**	3 Di	3 Fr	3 Mo **Labortour**	3 Di	3 Fr
4 Fr	4 Mo **Übung 3** 45	4 Mi **Vorlesung 8**	**4 Sa**	4 Di	4 Mi	**4 Sa**
5 Sa	5 Di	5 Do	**5 So**	5 Mi **Vorlesung 15**	5 Do	**5 So**
6 So	6 Mi **Vorlesung 4**	6 Fr	6 Mo Hl. Drei Könige 2	6 Do	6 Fr	6 Mo 15
7 Mo 41	7 Do	**7 Sa**	7 Di	7 Fr	**7 Sa**	7 Di
8 Di	8 Fr	**8 So**	8 Mi **Vorlesung 11**	**8 Sa**	**8 So**	8 Mi
9 Mi	**9 Sa**	9 Mo **Übung 8** 50	9 Do	**9 So**	9 Mo 11	9 Do
10 Do	**10 So**	10 Di	10 Fr	10 Mo 7	10 Di	**10 Fr** Karfreitag
11 Fr	11 Mo **Übung 4** 46	11 Mi **Vorlesung 9**	**11 Sa**	11 Di	11 Mi	**11 Sa**
12 Sa	12 Di	12 Do	**12 So**	12 Mi	12 Do	**12 So** Ostern
13 So	13 Mi **Vorlesung 5**	13 Fr	13 Mo **Übung 10** 3	13 Do	13 Fr	**13 Mo** Ostermontag 16
14 Mo 42	14 Do	**14 Sa**	14 Di	14 Fr	**14 Sa**	14 Di
15 Di	15 Fr	**15 So**	15 Mi **Vorlesung 12**	**15 Sa**	**15 So**	15 Mi
16 Mi **Vorlesung 1**	**16 Sa**	16 Mo **Übung 9** 51	16 Do	**16 So**	16 Mo 12	16 Do
17 Do	**17 So**	17 Di	17 Fr	17 Mo 8	17 Di	17 Fr
18 Fr	18 Mo **Übung 5** 47	18 Mi **Vorlesung 10**	**18 Sa**	18 Di	18 Mi	**18 Sa**
19 Sa	19 Di	19 Do	**19 So**	19 Mi	19 Do	**19 So**
20 So	20 Mi **Vorlesung 6**	20 Fr	20 Mo **Übung 11** 4	20 Do	20 Fr	20 Mo 17
21 Mo **Übung 1** 43	21 Do	**21 Sa**	21 Di	21 Fr	**21 Sa**	21 Di
22 Di	22 Fr	**22 So**	22 Mi **Vorlesung 13**	**22 Sa**	**22 So**	22 Mi
23 Mi **Vorlesung 2**	**23 Sa**	23 Mo 52	23 Do	**23 So**		23 Do
24 Do	**24 So**	24 Di	24 Fr	24 Mo		24 Fr
25 Fr	25 Mo **Übung 6** 48	**25 Mi** 1. Weihnachtstag	**25 Sa**	25 Di		**25 Sa**
26 Sa	26 Di	**26 Do** 2. Weihnachtstag	**26 So**	26 Mi		**26 So**
27 So	27 Mi **Vorlesung 7**	27 Fr	27 Mo **Übung 12** 5	27 Do		27 Mo 18
28 Mo **Übung 2** 44	28 Do	**28 Sa**	28 Di	28 Fr		28 Di
29 Di	29 Fr	**29 So**	29 Mi **Vorlesung 14**	**29 Sa**	**29 So**	29 Mi
30 Mi **Vorlesung 3**	**30 Sa**	30 Mo 1	30 Do		30 Mo 14	30 Do
31 Do		31 Di	31 Fr		31 Di	

Fragestunde zur Klausur vsl. im März

IPQ Labortour am Montag, dem 03.02.2020 11:30 Uhr

Führung durch das IPQ und Vorstellung laufender Forschungsarbeiten.
Fragen zum Institut werden bei Brezeln und Getränken beantwortet.

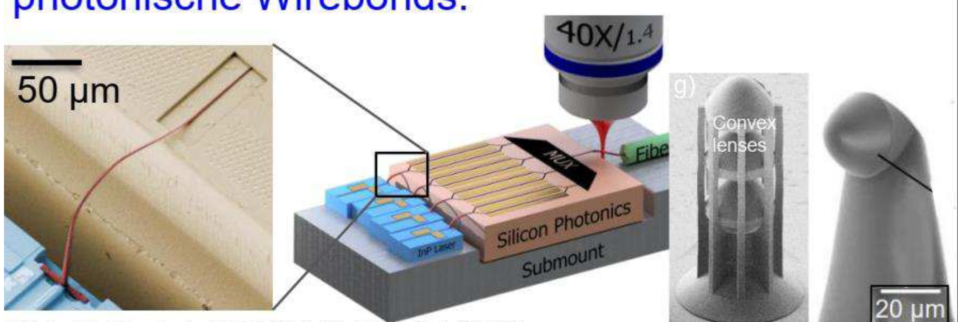
Integrierte Optik, Plasmonik und THz-Bauteile:



Treffpunkt:
Vor dem NTI Hörsaal(30.10)

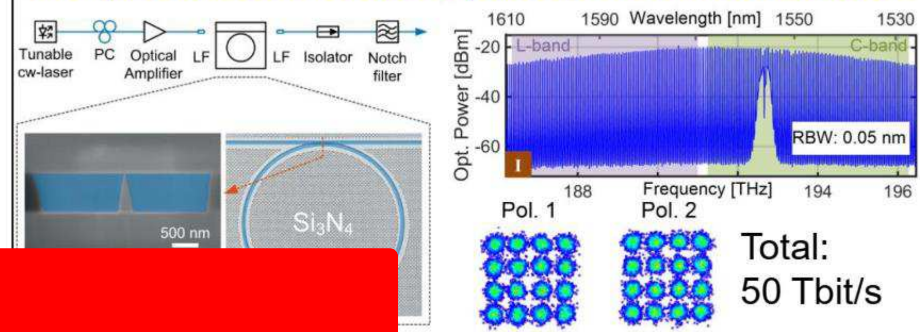
Muehlbrandt, S. *et al.*, *Optica* **3**, 741 (20
Harter, T. *et al.*, Nature Photonics **12**, 625-633 (2018).
Harter, T. *et al.*, Optica **6**, 1063–1070 (2019).
Ummethala, S. *et al. Nat. Photonics* **13**, 519 (2019).

3D-Nanodruck mit Zweiphotonenlithographie / photonische Wirebonds:



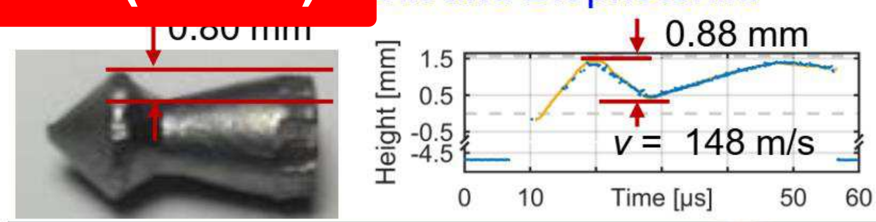
Billah, M. R. *et al.*, *ECOC'17*, Th.PDP.C.1 (2017)
Trappen, M. *et al.*, *ECOC'18*, Tu4C.2 (2018)

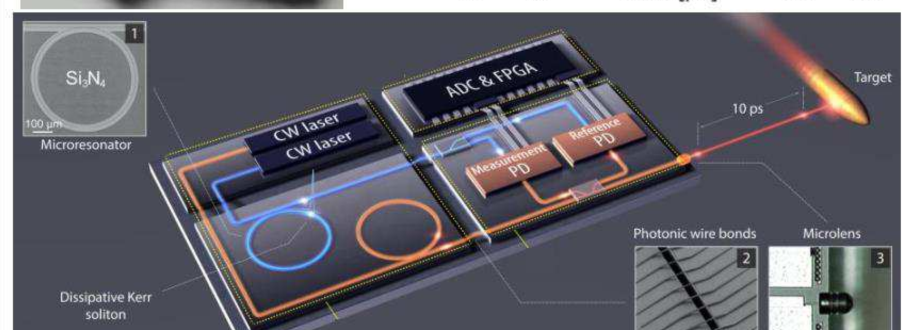
Frequenzkämme und optische Kommunikation:



6, 274–279 (2017).

rik und Biophotonik:





Trocha, P. *et al.*, *Science* **359**, 887--891 (2018)

Klausur

Schriftliche Prüfung "Elektromagnetische Wellen"		
type:		**links:**
place:	tba	
date:	01.04.2020	
time:	11:00	
duration:	2 Std	
semester:	WS2019/20	
examiner:	Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel und Mitarbeiter	

Aktuelles

Anmeldung:

ab sofort bis zum **23.03.2020** über das Campus Management System möglich!
Bei Problemen bitte Studierendenservice (SLE) kontaktieren!

Abmeldung:

bis zum **23.03.2020** über das Campus Management System möglich!

ab **23.03.2020** per E-Mail office@ipq.kit.edu oder im Sekretariat des IPQ, Zimmer 3.44 oder direkt vor der Prüfung persönlich möglich.

- Fragestunde zur Klausur vsl. im März

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 1	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 2	A1 und A2	Partielle DGL, Ebene Wellen
Übung 3	A3 und A4	Ebene und harmonische Wellen, Poynting Vektor
Übung 4	A5	Zeitharmonische ebene Wellen, Dispersionsrelation, Polarisation
Übung 5	A6	Grenzflächenübergänge (senkrechtes Auftreffen)
Übung 6	A7	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 7	A8	Grenzflächenübergänge mit Winkel $\alpha \neq 0$
Übung 8	A9	Parallelplattenleitung, TM-Welle
Übung 9	A10	Dielektrischer Wellenleiter
Übung 10	A11	Kopplung zu dieelektrischen Wellenleitern
Übung11	A12	Rechteckhohlleiter
Übung 12	A13	Hertzscher Dipol
Übung 13	-	Labortour

Agenda der heutigen Übung

- Administratives
  - Unterlagen zur Vorlesung und Übung sind zu finden unter www.ipq.kit.edu/lectures_EMW.php
  - Neues Universal-Passwort für alle Unterlagen: maxwell19
  - Kontaktdaten für Fragen und Einreichung der Übungsaufgaben
    Mareike Trappen mareike.trappen@kit.edu
    Christoph Füllner christoph.fuellner@kit.edu
- Rückgabe der korrigierten Übungsblätter
  - Bitte überprüfen Sie ob die Listen korrekt ihre Ergebnisse wiederspiegeln!
- Hetzscher Dipol

Rückgabe der eingesammelten Übungsblätter

Anmerkungen:

a) Randbedingungen

$$\underline{E}_x(x,0,z,t)=0, \qquad \underline{E}_y(0,y,z,t)=0$$
$$\underline{E}_x(x,b,z,t)=0, \qquad \underline{E}_y(a,y,z,t)=0$$

$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right|_{y=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right|_{x=0}=0$$
$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right|_{y=b}=0, \qquad \left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right|_{x=a}=0$$

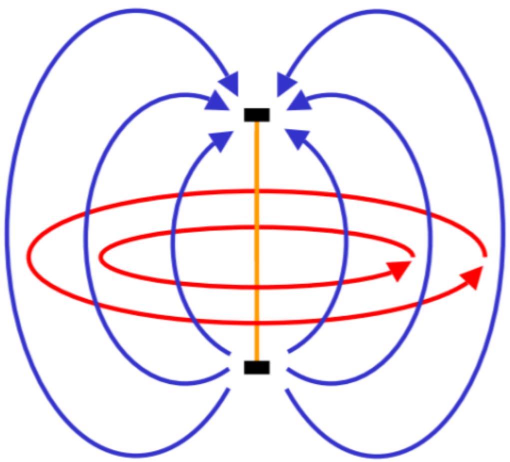
c) Grundmode $m=0, n=1$ oder $m=1, n=0$

e) Reihenfolgen der Moden $f_{c10}<f_{c01}$ $\quad f_{c10}<f_{c02}$ $\quad f_{c10}<f_{c11}$

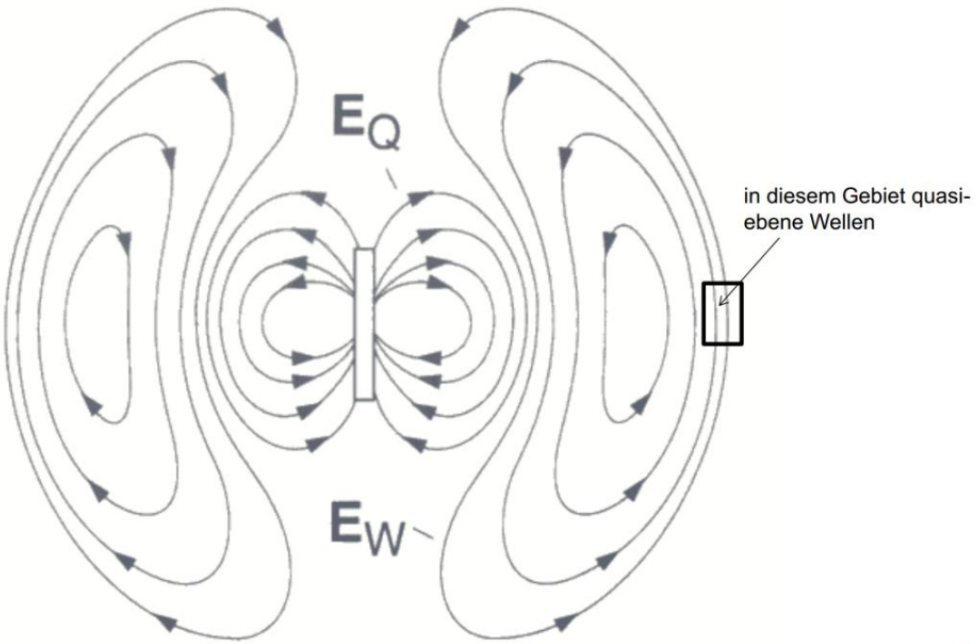
Grundprinzip der Antenne

Eine Antenne ist ein offener elektromagnetischer Schwingkreis, der leitungsgebundene elektro-magnetische Wellen in Freiraumwellen umwandelt. Der Antennendraht hat kapazitive und induktive Wirkung.

Wichtig: Nah- und Fernfeld co-existieren in jedem Punkt im Raum, aber aufgrund der unterschiedlichen Ortsabhängigkeiten dominiert in der direkten Umgebung der Antenne das Nahfeld, während in großer Entfernung das Fernfeld dominiert.



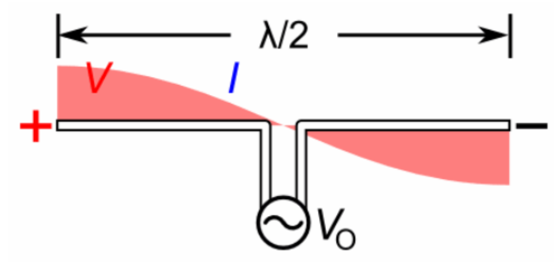
Quelle: Uni Kassel ExpPh II

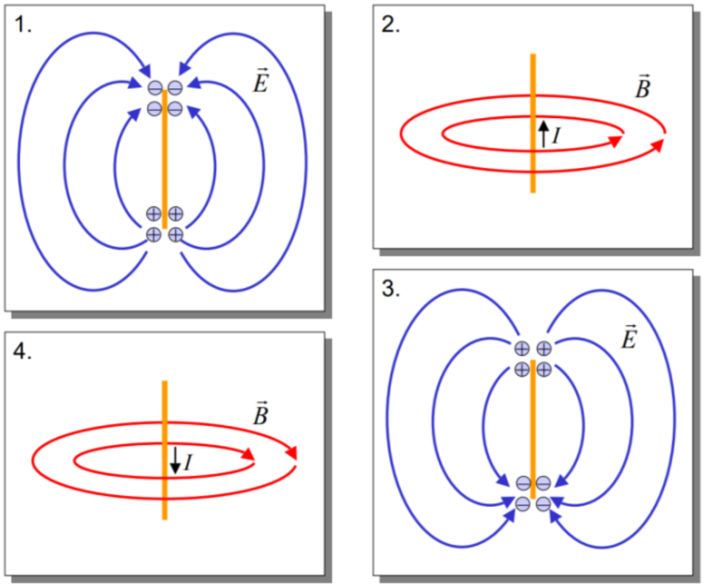


Grundprinzip der Antenne

Nahfeld (elektromagnetisches Feld / Blindfeld)

- Anlegen einer elektrischen Spannung in Plusrichtung: Stromfluss bewirkt ein elektr. und magnet. Feld
  - ① Separation elektrischer Ladungen (elektr. Dipol) → elektrisches Quellenfeld das mit Entfernung zum Leiter abnimmt); $\sim\frac{1}{r^2}$ bzw. $\sim\frac{1}{r^3}$
  - ② Stromdurchflossener Leiter → magnetisches Wirbelfeld, das mit Entfernung zum Leiter abnimmt (magnet. Dipol); $\sim\frac{1}{r^2}$ bzw. $\sim\frac{1}{r^3}$
- Umpolung der Wechselspannung, d.h. Spannung in Minusrichtung: Umorientierung des Stromflusses kehrt die Orientierungen von E- und H-Feld um
- Angelegte Spannung führt Energie zu und hält die Oszillation der Felder aufrecht
- Keine Abstrahlung, es pendelt nur Blindleistung zwischen der Antenne und Umgebung hin & her (unter bestimmten Bedingungen kann ein Empfänger der Antenne aber Wirkleistung entziehen)





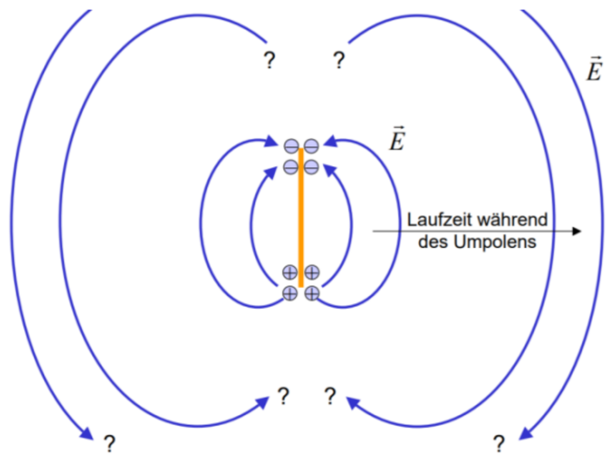
Quelle: Uni Kassel ExpPh II

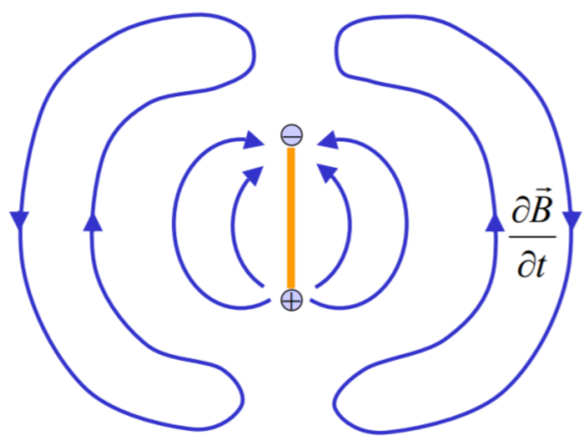
Grundprinzip der Antenne

Karlsruhe Institute of Technology

Fernfeld (elektromagnetische Welle)

- Anregung / Umpolung mit der Resonanzfrequenz: gemäß der Maxwellgleichungen ist ein räumlich variierendes E-Feld mit einem zeitlich veränderlichen H-Feld assoziiert / verknüpft und umgekehrt → Entstehung von gekoppelten Wirbelfeldern
- In ausreichender Entfernung zur Quelle (Leiter) ist das elektromagnetische Feld (mit geschlossenen Feldlinien) unabhängig von einer Rückkopplung / Feedback mit den Ladungen und Strömen.
  Räumliche Abhängigkeit: $\sim\frac{1}{r}$
- Anschauung: sich ausbreitendes Feld verliert am Randbereich die Kopplung an die Antenne, wenn sich die Richtung der Feldvektoren umkehrt. Die Felder werden durch die Umkehr abgestoßen.
- Unabhängig von Sender und Empfänger, d.h. es wird immer Wirkleistung „verbraucht“





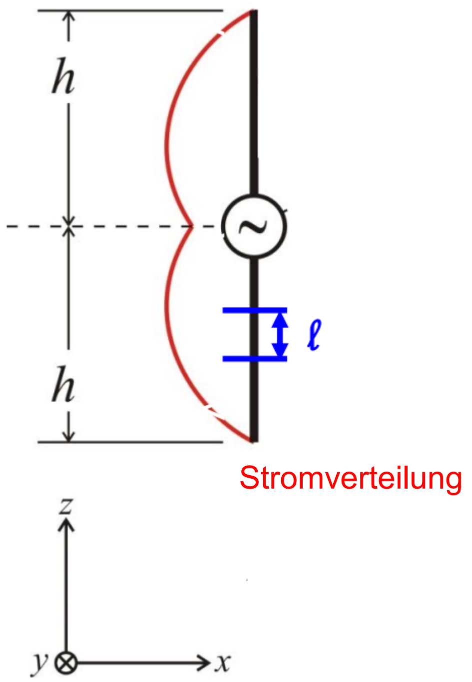
Quelle: Uni Kassel ExpPh II

Hertzscher Dipol

- Strom entlang der Antennendrähte nimmt nach außen hin ab: $I(z,t) = I_o e^{j\omega t} f(z)$, mit : $I(z = h, t) = 0$

- Hertzscher Dipol: für einen infinitesimal kleinen Ausschnitt der Antenne kann der Stromfluss als konstant angesehen werden. Dieser Ausschnitt stellt aufgrund der räumlichen Ladungsverschiebungen im Draht ebenfalls einen Dipol dar.
- Jeder Hertzsche Dipol liefert einen Beitrag zum Nah- und Fernfeld, sodass sich das Gesamtfeld als Überlagerung aller Teil-Felder der einzelnen Hertzschen Dipole ergibt:

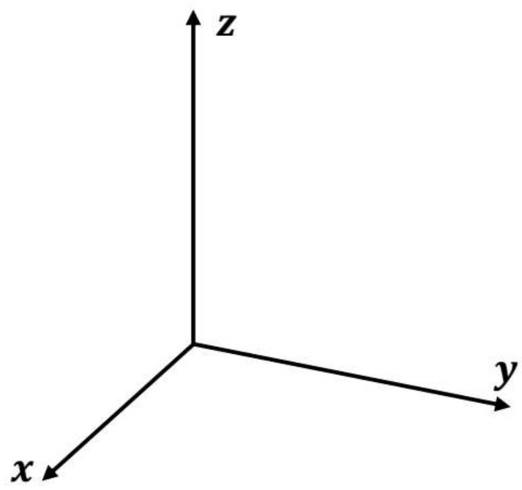
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_i \vec{E}_i(\vec{r},t) = \int \vec{E}_i(\vec{r},t)dz$$

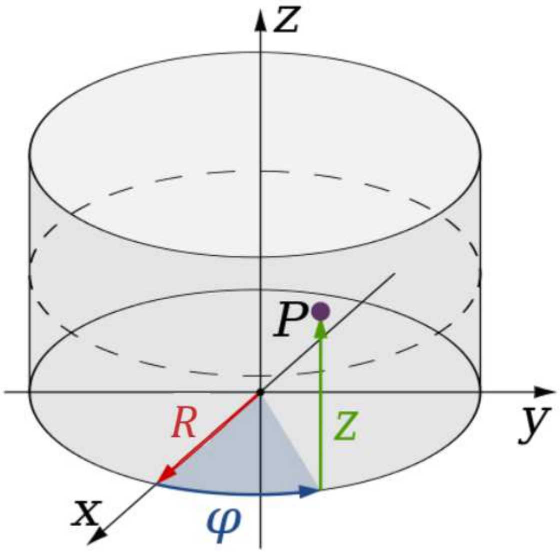


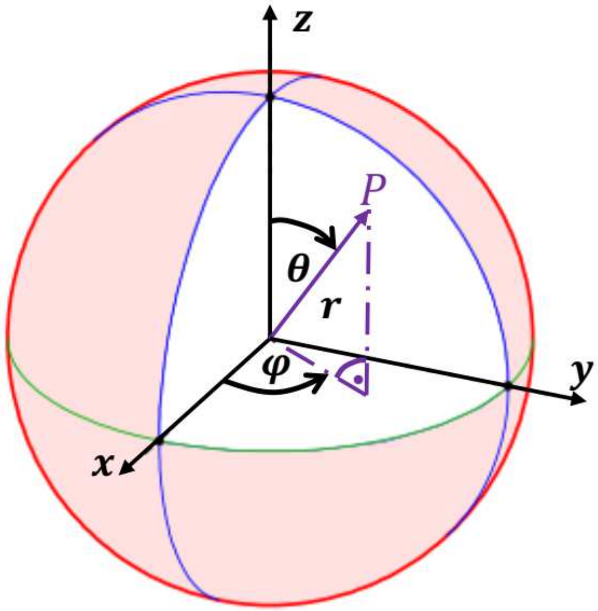
Wiederholung

Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
x, y, z	R, φ, z	r, θ, φ
Ausbreitung ebener Wellen	Metalldraht (Antenne) Spezialfall: unendlich dünner, unendlich ausgedehnter Draht	Ausbreitung von Kugelwellen







Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Wiederholung

EMF-Formelsammlung: Differentialoperatoren

Kartesische Koordinaten		Zylinderkoordinaten		Kugelkoordinaten

$$\operatorname{grad}\Phi = \vec{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \vec{e}_R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \vec{e}_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}$$

$$\operatorname{div}A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(R\cdot A_r\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\vartheta \sin\vartheta\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

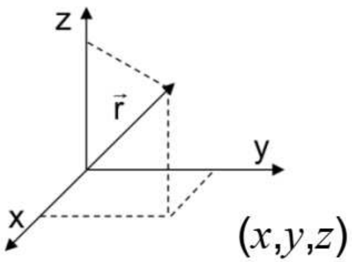
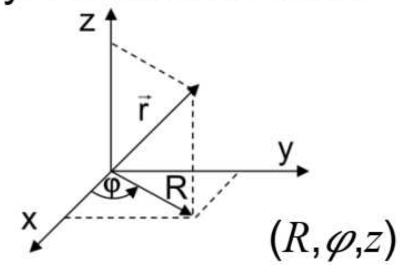
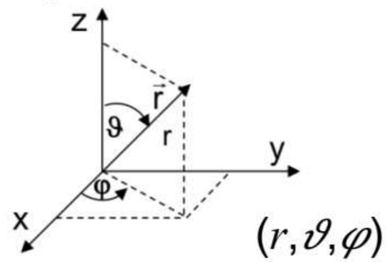
$$= \vec{e}_x\left(\frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_y\left(\frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\cdot A_\varphi\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}\right)$$

$$= \vec{e}_x \frac{1}{r\cdot\sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\varphi\cdot\sin\vartheta\right) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot A_\varphi\right)\right) + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot A_\vartheta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial\Phi}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{r^2}\frac{f}{fr}\left(r^2\frac{f\Phi}{fr}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\vartheta}\frac{f^2\Phi}{f\varphi^2}$$

Wiederholung

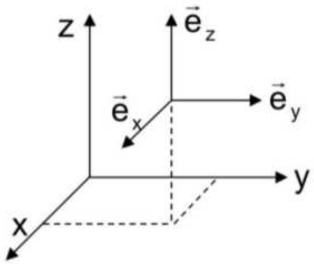
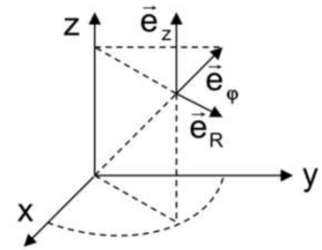
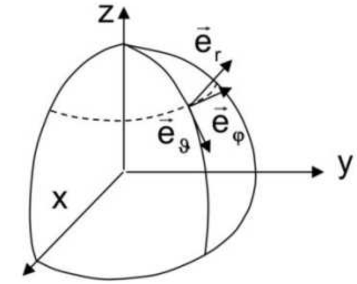
EMF-Formelsammlung: Ortsvektoren

Kartesische Koordinaten		Zylinderkoordinaten		Kugelkoordinaten
				
x	$=$	$R\cdot\cos\varphi$	$=$	$r\cdot\sin\vartheta\cdot\cos\varphi$
y	$=$	$R\cdot\sin\varphi$	$=$	$r\cdot\sin\vartheta\cdot\sin\varphi$
z	$=$	z	$=$	$r\cdot\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2}$	$=$	R	$=$	$r\cdot\sin\vartheta$
$\arctan\frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ
z	$=$	z	$=$	$r\cdot\cos\vartheta$
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$=$	$\sqrt{R^2+z^2}$	$=$	r
$\arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$	$=$	$\arctan\frac{R}{z}$	$=$	ϑ
$\arctan\frac{y}{x}$	$=$	φ	$=$	φ

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Wiederholung

EMF-Formelsammlung: Feldkomponenten

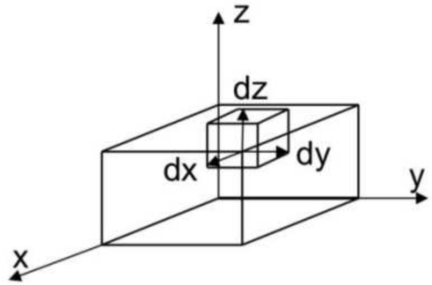
Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
		
$\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z$	$A_R\vec{e}_R + A_\varphi\vec{e}_\varphi + A_z\vec{e}_z$	$A_r e_r + A_\vartheta e_\vartheta + A_\varphi e_\varphi$
A_x =	$A_r\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi$ =	$A_r\sin\vartheta\cos\varphi + A_\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi - A_\varphi\sin\varphi$
A_y =	$A_r\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi$ =	$A_r\sin\vartheta\sin\varphi + A_\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi + A_\varphi\cos\varphi$
A_z =	A_z =	$A_r\cos\vartheta - A_\vartheta\sin\vartheta$
$A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi$ =	A_R =	$A_r\sin\vartheta + A_\vartheta\cos\vartheta$
$-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$ =	A_φ =	A_φ
A_z =	A_z =	$A_r\cos\vartheta - A_\vartheta\sin\vartheta$
$A_x\sin\vartheta\cos\varphi + A_y\sin\vartheta\sin\varphi + A_z\cos\vartheta$ =	$A_r\sin\vartheta + A_z\cos\vartheta$ =	A_r
$A_x\cos\vartheta\cos\varphi + A_y\cos\vartheta\sin\varphi - A_z\sin\vartheta$ =	$A_r\cos\vartheta - A_z\sin\vartheta$ =	A_ϑ
$-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$ =	A_φ =	A_φ

Zielspalte mit Kugelkoordinaten

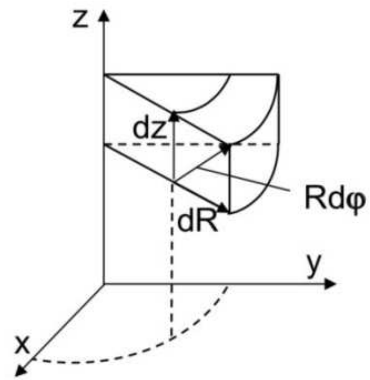
EMF-Formelsammlung: Flächen- & Volumenelemente

Karlsruhe Institute of Technology

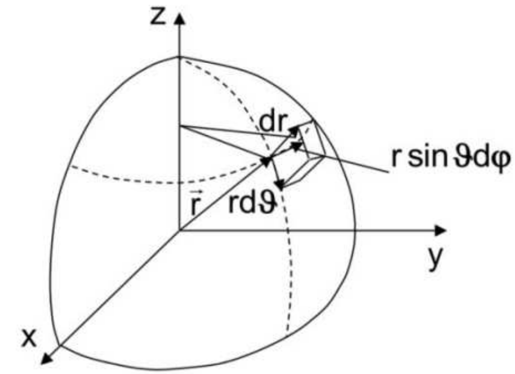
Kartesische Koordinaten



Zylinderkoordinaten



Kugelkoordinaten



$$\mathrm{d}\vec{s}=\vec{e}_x\,\mathrm{d}x+\vec{e}_y\,\mathrm{d}y+\vec{e}_z\,\mathrm{d}z \;=\; \vec{e}_R\cdot\mathrm{d}R+\vec{e}_\varphi\cdot R\cdot\mathrm{d}\varphi+\vec{e}_z\cdot\mathrm{d}z \;=\; \vec{e}_r\cdot\mathrm{d}r+\vec{e}_\vartheta\cdot r\cdot\mathrm{d}\vartheta+\vec{e}_\varphi\cdot r\cdot\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}\varphi$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{f}=\vec{e}_x\cdot\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & & \vec{e}_R\cdot R\cdot\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z & & \vec{e}_r\cdot r^2\cdot\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\\ +\vec{e}_y\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z & \;=\; & +\vec{e}_\varphi\cdot\mathrm{d}R\,\mathrm{d}z & \;=\; & +\vec{e}_\vartheta\cdot r\cdot\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ +\vec{e}_z\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & & +\vec{e}_z\cdot R\cdot\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi & & +\vec{e}_\varphi\cdot r\cdot\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \;=\; R\cdot\mathrm{d}R\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \;=\; r^2\cdot\sin\vartheta\cdot\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi$$

Aufgabe 13 – Teil I

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{A_z}\mathbf{e}_z$$
$$\underline{A_z} = \frac{\mu}{4\pi r} \cdot l \cdot \widehat{I} \cdot \exp\left(j \cdot \omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

a) Stellen Sie das Vektorpotential **A** in Kugelkoordinaten dar.

b) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential **A** die magnetische Feldstärke **H**. In welchem Abstand r zum Dipol sind die Anteile des Nah- und des Fernfeldes gleich groß?
Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Vektorpotentiales in Kugelkoordinaten.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{A} = \quad & \vec{e}_x \frac{1}{r \cdot \sin\vartheta}\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_\varphi \cdot \sin\vartheta\right) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right) \\
& + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot A_\varphi\right)\right) \\
& + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r \cdot A_\vartheta\right) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 13 – Teil I

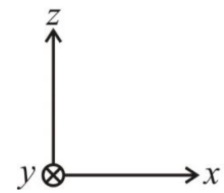
c) Berechnen Sie den Pointing-Vektor im Fernfeld des beschriebenen Dipols. Für die magnetische Feldstärke gelte:

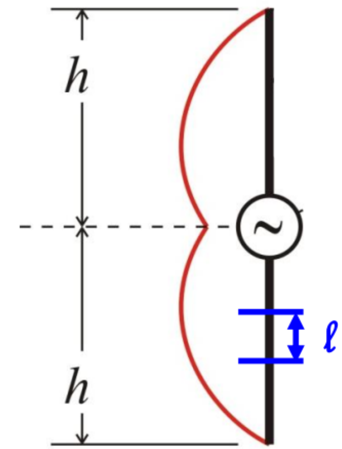
$$\underline{H_r} = 0$$
$$\underline{H_\theta} = 0$$
$$\underline{H_\phi} = \frac{1}{4\pi} \cdot l \cdot \widehat{I} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{j\omega}{r \cdot c} \cdot \exp\left(j \cdot \omega\left(t - k \cdot r\right)\right)$$

Aufgabe 13 – Teil II

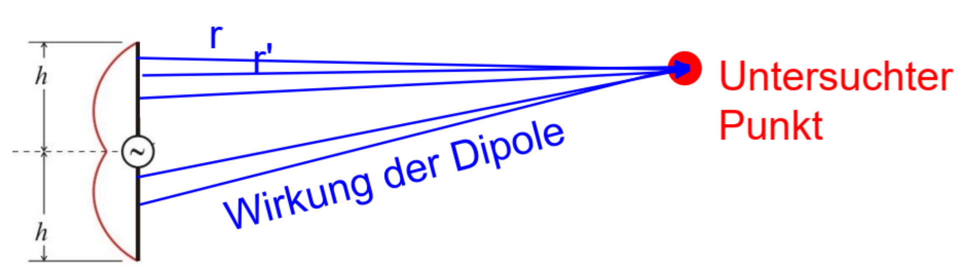
- Gegeben sei eine lineare Dipolantenne
  - Länge: 2h
  - Stromverteilung: $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(h - |z|)\right)$
  - Fernfeld des Hertzschen Dipols:

$$d\underline{E}_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon} I \sin\theta \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - kr)} dz$$





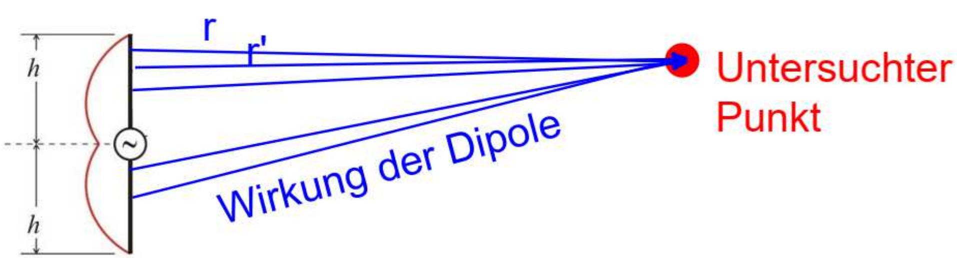
- Gesucht: elektrisches Feld für jeden beliebigen Punkt im Raum in großer Entfernung r zur Antenne (Fernfeld)
- In jedem Punkt im Raum überlagert sich die Wirkung aller Hertzschen Dipole.

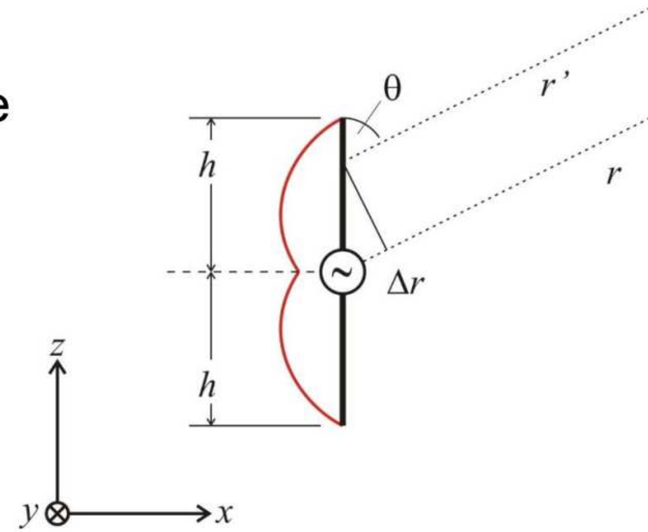


Aufgabe 13 – Teil II - Fernfeld

Berechnen Sie das Fernfeld für große r, indem Sie die einzelnen Dipolbeläge über die Höhe aufintegrieren. Beachten Sie, dass die Amplitude des Stroms von z abhängt und dass mit zunehmenden z ein Wegunterschied Δr zu berücksichtigen ist. Hinweis: $\int_{z=0}^{h} \sin\left(k(h-z)\right)\cos\left(kz\cos\theta\right)dz = \frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos kh}{k\sin^2\theta}$

- Gesucht: elektrisches Feld für jeden beliebigen Punkt im Raum in großer Entfernung r zur Antenne (Fernfeld)
- In jedem Punkt im Raum überlagert sich die Wirkung aller Hertzschen Dipole.





- Aufgrund der großen Distanz zum untersuchten Punkt (●) sind die betrachteten blauen Linien (-) näherungsweise parallel zueinander und ihre Längenunterschiede sind vernachlässigbar, $r \approx r'$.

Aufgabe 13 – Teil II - Fernfeld

- Fernfeld des Hertzschen Dipols:

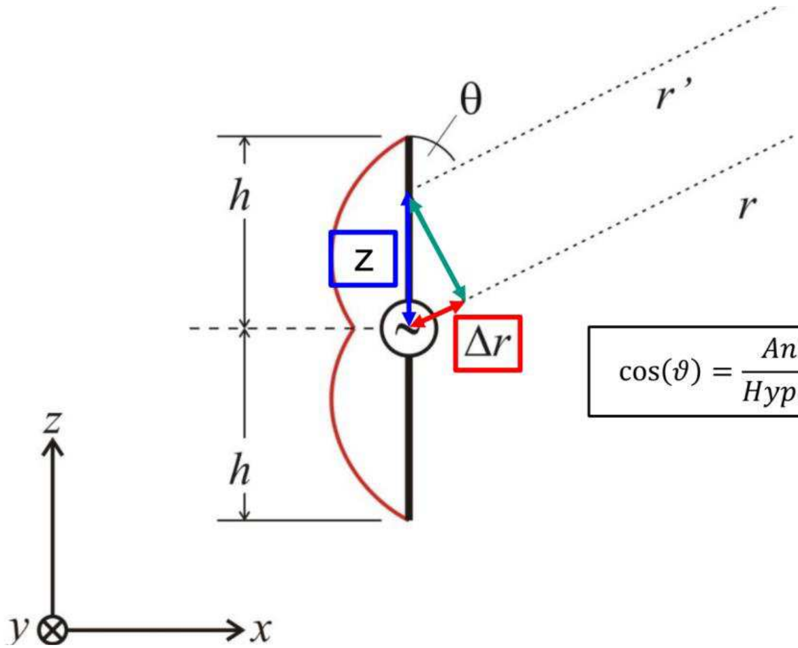
$$dE_\vartheta = \frac{1}{4\pi\varepsilon} I \sin(\vartheta) \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - kr)} dl$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon} I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(h - |z|)\right) \sin(\vartheta) \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - kr)} dl$$

- Integration über alle Hertzschen Dipole, d.h. in z-Richtung:

$$E_\vartheta = \int_{-h}^{h} \frac{1}{4\pi\varepsilon} I_0 \sin(k(h - |z|)) \sin(\vartheta) \frac{\omega}{c_0^2 r'} e^{j(\omega t - kr')} dz$$

Aufgabe 13 – Teil II - Fernfeld



$$\cos(\vartheta) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} = \frac{\Delta r}{z}$$

- Wir integrieren dazu über das retardierende Element r', welches die Entfernung jedes einzelnen Dipols zum untersuchten Punkt angibt. Bezogen auf unseren Koordinatenursprung (Spannungsquelle) hat der Punkt die Koordinate r, wobei sich für den Wegunterschied folgender Zusammenhang ergibt: $r' = r - \Delta r = r - z\cos(\vartheta)$, der im Phasenterm zu berücksichtigen ist.

$$E_\vartheta = \int_{-h}^{h} \frac{1}{4\pi\varepsilon} I_0 \sin(k(h - |z|)) \sin(\vartheta) \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - k(r - z\cos(\vartheta)))} dz$$

Aufgabe 13 – Teil II - Fernfeld

- Umformen des Integrals

$$E_\vartheta = \int_{-h}^{h} \frac{1}{4\pi\varepsilon} I_0 \sin(k(h-|z|)) \sin(\vartheta) \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - k(r - z\cos(\vartheta)))} dz$$

$$= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \int_{-h}^{h} \sin(k(h-|z|))\, e^{jkz\cos(\vartheta)} dz$$

- Wir drücken die komplexe Exponentialfunktion durch Sinus und Kosinus aus, um die Stammfunktion aus dem gegebenen Hinweis nutzen zu können.

$$= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \int_{-h}^{h} \sin(k(h-|z|)) \left[\cos(kz\cos(\vartheta)) + j\sin(kz\cos(\vartheta))\right] dz$$

$$= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \int_{-h}^{h} \sin(k(h-|z|)) \cos(k\cos(\vartheta)\, z)\, dz$$

$$+ j \frac{I_0}{4\pi\varepsilon} \frac{\omega}{c_0^2 r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \int_{-h}^{h} \sin(k(h-|z|)) \sin(kz\cos(\vartheta))\, dz$$

Aufgabe 13 – Teil II - Fernfeld

Karlsruhe Institute of Technology

$$E_\vartheta = \frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\sin(\vartheta)e^{j(\omega t-kr)}\boxed{\int_{-h}^{h}\sin(k(h-|z|))\cos(k\cos(\vartheta)\,z)\,dz}$$

Hinweis in Aufgaben-stellung

$$+j\frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\sin(\vartheta)e^{j(\omega t-kr)}\int_{-h}^{h}\underbrace{\underbrace{\sin(k(h-|z|))}_{\text{Gerade Fkt. (wegen }|z|)}\underbrace{\sin(kz\cos(\vartheta))}_{\text{Ungerade Fkt.}}}_{\text{Ungerade Fkt.}}\,d0z$$

Integration ungerader Funktionen über symmetrische Grenzen ergibt 0!

$$\Rightarrow E_\vartheta = \frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\sin(\vartheta)e^{j(\omega t-kr)}\frac{\cos(kh\cos(\vartheta))-\cos(kh)}{k\sin(\vartheta)^2}$$

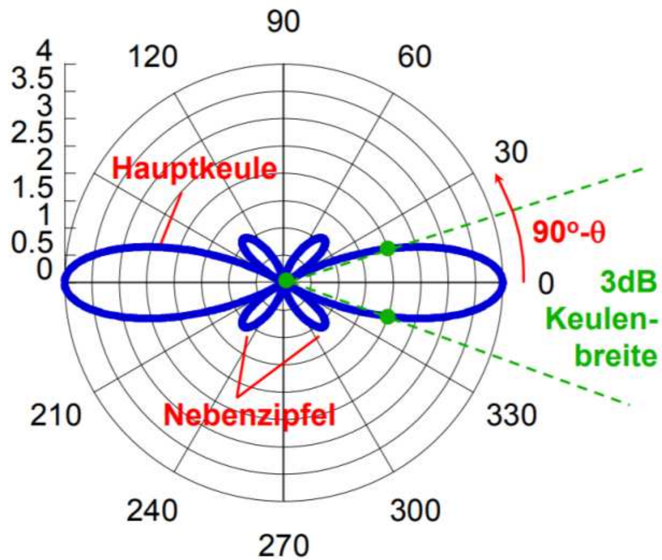
$$= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\frac{\cos(kh\cos(\vartheta))-\cos(kh)}{k\sin(\vartheta)}e^{j(\omega t-kr)}$$

Aufgabe 13 – Teil II - Richtcharakterisitik

Für den Pointingvektor gilt: $S \sim E^2$. Skizieren Sie die Richtcharakteristik ($S(\theta)$) der Dipolantenne für $h = \lambda/4$, $h = \lambda/2$, $h = \lambda 3/4$, $h = \lambda$ in einem Polardiagramm (z.B. mit Maple). Hinweis: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

- Gesucht: Richtcharakteristik der Antenne
  - beschreibt die Winkelabhängigkeit (φ, ϑ) der Stärke empfangener oder gesendeter elektromagnetischer Wellen
  - abhängig von der Geometrie (z.B. Form und Länge) der Antenne
  - meist normiert auf den Maximalwert in Hauptstrahlrichtung

ϑ-Abhängigkeit*



Beispiel: 4 λ/2-Dipole in einer Spalte, Vertikaldiagramm von |E|.

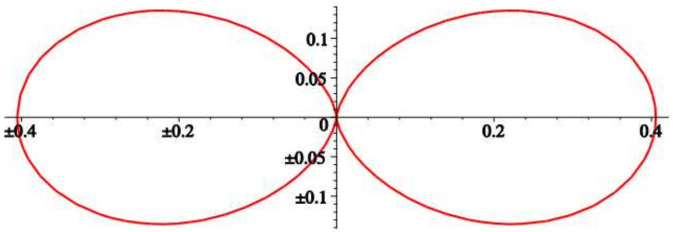
- Poynting-Vektor

$$\vec{S}(r,\vartheta) = E_\vartheta H_\vartheta \vec{e}_r \;\Rightarrow\; S(r,\vartheta) \sim E_\vartheta^{\;2}$$

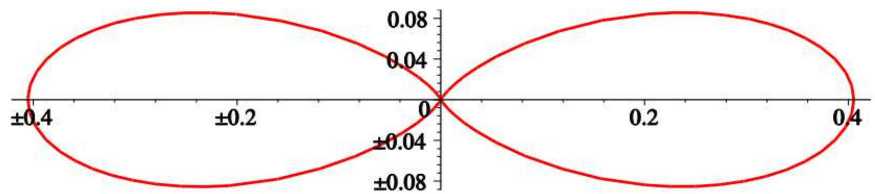
$$S(r,\vartheta) = \left(\frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\right)^2 \left(\frac{\cos(kh\cos(\vartheta)) - \cos(kh)}{k\sin(\vartheta)}\right)^2 e^{j2(\omega t - kr)}$$

Aufgabe 13 – Teil II - Polardarstellung

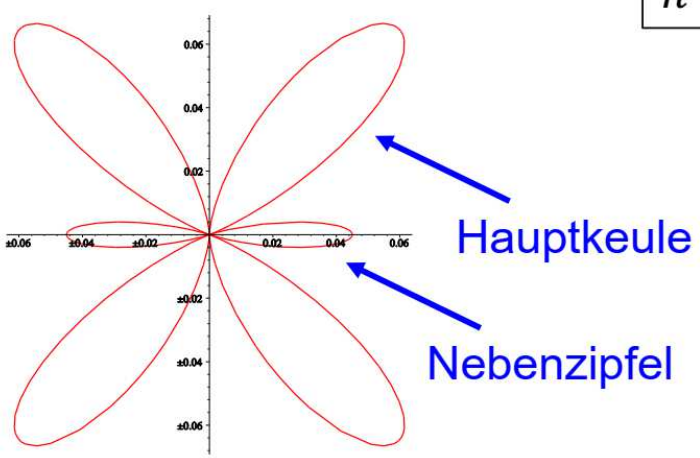
$$h = \frac{\lambda}{4}$$



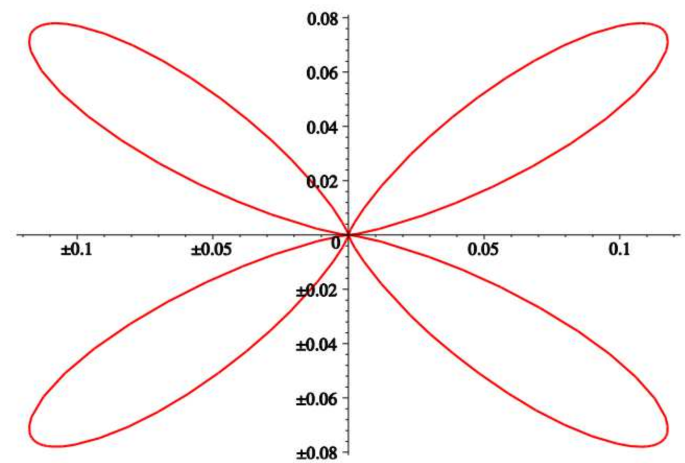
$$h = \frac{\lambda}{2}$$



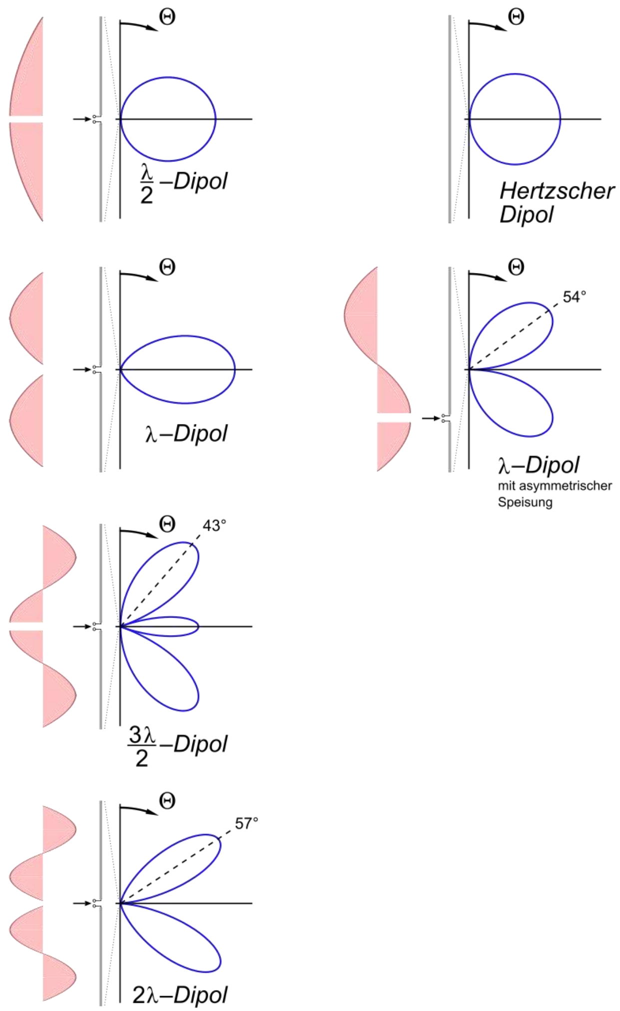
$$h = \frac{3\lambda}{4}$$



$$h = \lambda$$



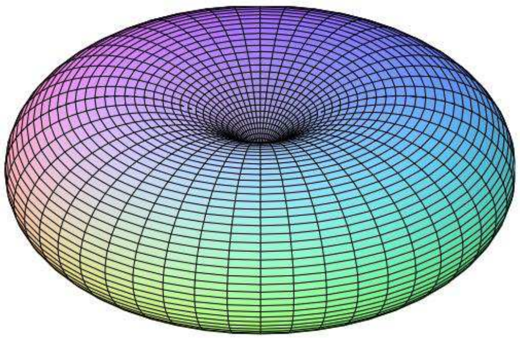
Aufgabe 13 – Teil II - Polardarstellung



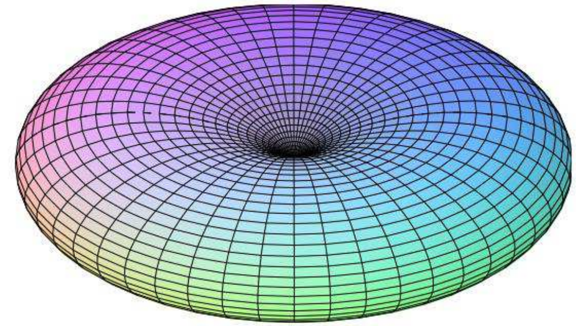
Wikipedia.org Benutzer: Averse

Aufgabe 13 – Teil II – 3D-Darstellung

$h = \frac{\lambda}{4}$

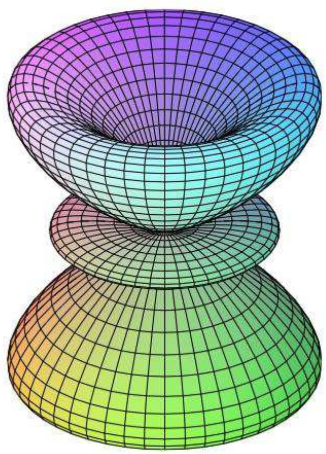


$h = \frac{\lambda}{2}$

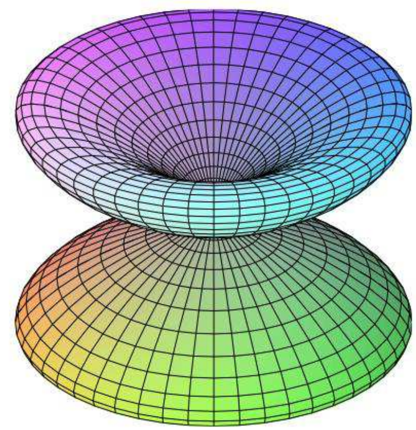


Rotationskörper da S unabh. von ϕ

$h = \frac{3\lambda}{4}$



$h = \lambda$



Anmerkung zur Richtcharakteristik

Karlsruhe Institute of Technology

- Die Übungsaufgabe diente lediglich dem Grundverständnis. Aus der Formel für $S(r,\vartheta)$ ließ sich nicht direkt die Gestalt der Richtcharakteristik ablesen, sodass Software zu Hilfe genommen wurde. Für die Klausur relevant sind nur
  - diese Richtcharakteristiken typischer Dipolantennen, die man sich einprägen kann
  - Richtcharakteristiken, bei denen sich die Gestalt unmittelbar der Formel entnehmen lässt, vgl. z.B. Aufgabe 5e) in der Klausur WS1718.

> e) Für den Poyntingvektor des Fernfeldes gilt für einen konstanten Radius r:
> $\vec{S} = S_r \vec{e}_r$ mit $S_r = A \cdot (\sin(\theta))^2$
> Zeichnen Sie die Richtcharakteristika $\frac{S_r(\theta,\varphi=0^\circ)}{A}$ und $\frac{S_r(\theta=90^\circ,\varphi)}{A}$ qualitativ in die vorbereiteten Diagramme in Abbildungen 11 ein.

Im ersten Fall ergibt sich ein Verlauf wie bei der sin²-Funktion. Es ist schnell ersichtlich, dass
$[\sin(0)]^2 = [\sin(\pi)]^2 = 0$
$[\sin(\pi/2)]^2 = [\sin(3\pi/2)]^2 = 1$
$[\sin(\pi/4)]^2 = [\sin(3\pi/4)]^2 = 0.5$
$[\sin(5\pi/4)]^2 = [\sin(7\pi/4)]^2 = 0.5$
Dies lässt sich leicht einzeichnen.

Im zweiten Fall ergibt sich eine Konstante.

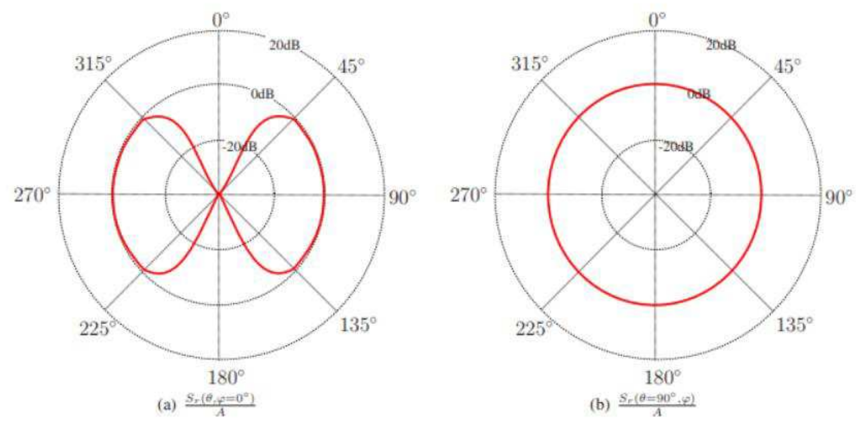


Abbildung 12: Richtcharakteristika der Dipolantenne