Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Übungsblatt 1

Abgabe bis zum 28.10.2019 um 11:30Uhr

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Vektorfelder **E** und **H** für eine Flächenladung σ die sich in der xy-Ebene befindet. Die Ladung σ ist zunächst in Ruhe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll sie eine Geschwindigkeit u in x-Richtung annehmen bis sie für $t \geq T$ wieder in Ruhe ist (siehe Abb. 1). Benutzen Sie den Gaußschen und den Stokesschen Satz für Ihre Herleitung. Hierbei muss die z-Ausdehnung des umspannten Volumens bzw. der umspannten Fläche klein gewählt werden ($\delta \to 0$). Zum Zeitpunkt $t = 0$ entsteht ein Strombelag

$$\mathbf{i}' = \sigma u \mathbf{e_x} \tag{1}$$

Nehmen Sie an dass der umfasste Verschiebungsstrom verschwindet. Verwenden Sie die folgenden Lösungsansatz:

$$E_x^{\pm} = Zf(z \mp ct), \qquad H_y^{\pm} = \pm f(z \mp ct) \tag{2}$$

mit dem Wellenwiderstand Z um die Feldpakete zu beschreiben.

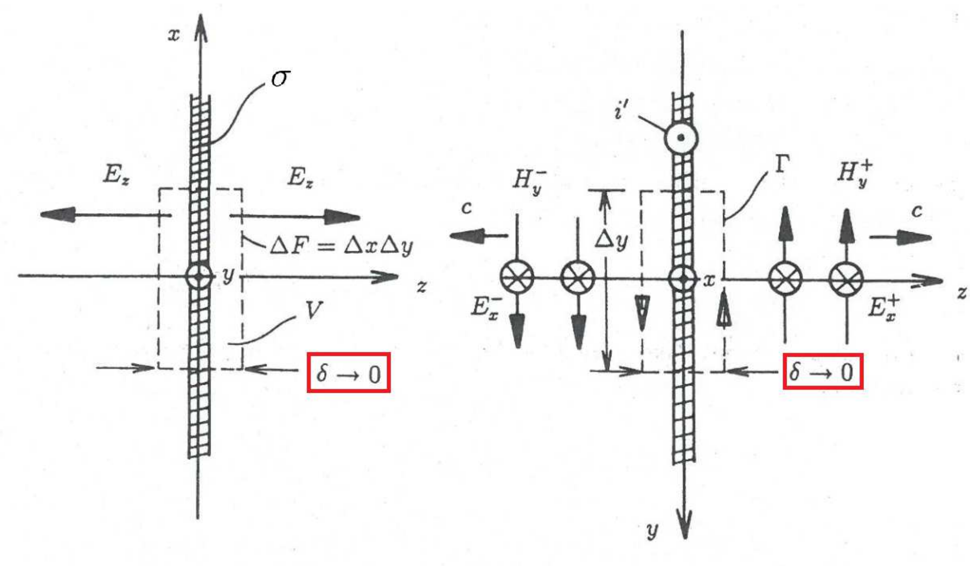


Abbildung 1: Felder einer ungleichförmig bewegten Flächenladung

Lösung

Der allgemeine Gaußsche Satz ist definiert als:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \oint_F \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dF \tag{3}$$

Damit ergibt sich für das elektrische Feld $\mathbf{E}$:

$$\oint_F \mathbf{E}\, d\mathbf{F} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{4}$$

Wir betrachten ein Volumen V wie in Abb. 1 dargestellt:

$$\epsilon_0 \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \epsilon_0 \oint_F \mathbf{E}\, d\mathbf{F} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Die, das Volumen umschließende Fläche F ist für $\delta \to 0$ gegeben mit $2 \cdot \Delta F = 2 \cdot \Delta x \Delta y$. Damit ergibt sich:

$$\epsilon_0 \oint_F \mathbf{E}\, d\mathbf{S} = 2 \cdot \epsilon_0 \int_{\Delta x} \int_{\Delta y} E_z\, dx\, dy \tag{7}$$

$$= 2\epsilon_0 \Delta x \Delta y E_z(z = +0) \tag{8}$$

Und zudem mit der Flächenladung $\sigma = \frac{Q}{\Delta F}$:

$$\epsilon_0 \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \int_V \rho\, dV = \sigma \Delta x \Delta y \tag{9}$$

Damit erhalten wir:

$$E_z(z = +0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{10}$$

Nun verwenden wir den Satz von Stokes um des Magnetfeld zu bestimmen. Allgemein gilt für eine Fläche F, den Normalenvektor $\mathbf{n}$ auf der Fläche und den Rand dieser Γ

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{A})\mathbf{n}\, dF = \int_\Gamma \mathbf{A}\, d\mathbf{r} \tag{11}$$

Damit ergibt sich für die in Abb. 1 dargestellte Fläche F mit dem Rand Γ und $\delta \to 0$:

$$\int_\Gamma \mathbf{H}\, d\mathbf{r} = -H_y^+(z = +0) \cdot \Delta y + H_y^-(z = -0) \cdot \Delta y \tag{12}$$

und

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{H})\mathbf{n}\, dA = \int_F (\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t})\mathbf{n}\, dA \tag{13}$$

Für $\delta \to 0$ verschwindet der Verschiebungstrom und wir erhalten

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{H})\mathbf{n}\, dA = \int_F \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dA \tag{14}$$

$$= \int_F \rho \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, dA \tag{15}$$

$$= \int_F \rho \cdot u\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x\, dA \tag{16}$$

$$= \sigma \cdot u \cdot \Delta y \tag{17}$$

Damit erhalten wir

$$-H_y^+(z=+0)\cdot\Delta y + H_y^-(z=-0)\cdot\Delta y = \sigma\cdot u\cdot\Delta y \tag{18}$$

und aufgrund der Symmetrie der Anordnung $-H_y^+(z=+0) = H_y^-(z=-0)$folgt

$$H_y^+(z=+0) = -\frac{1}{2}\sigma\cdot u \tag{19}$$

Der Lösungsansatz der ebenen Welle ist

$$E_x^{\pm} = a\cdot Zf(z-ct), \qquad H_y^{\pm} = a\cdot f(z-ct) \tag{20}$$

Die Bewegung der Flächenladung kann durch die Heaviside Funktion Θ

$$\Theta(x) = \begin{array}{ll} 0 & \text{für}\, x<0 \\ 1 & \text{für}\, x>0 \end{array} \tag{21}$$

definiert werden mit:

$$u(t) = u\cdot[\Theta(t)-\Theta(t-T)] \tag{22}$$

Die Randbedinungen bei $z=0$ liefern:

$$H_y^+(z=+0) = -H_y^-(z=-0) = -\frac{1}{2}\sigma\cdot u = a\cdot f(-ct) \tag{23}$$

$$\rightarrow a = -\frac{1}{2}\sigma\cdot u \tag{24}$$

und eine Sprungfunktion an $z=0$. Wir erhalten damit:

$$f(z-ct) = \Theta(z-ct)-\Theta(z-ct-cT) \tag{25}$$

Damit können wir die Felder definieren durch:

$$H_y^+(z,t) = \frac{1}{2}\sigma u\,[\Theta(z-ct)-\Theta(z-ct-cT)] \tag{26}$$

$$E_x^+(z,t) = Z\cdot H_y^+(z,t) \tag{27}$$

Ein entsprechendes Paket (mit umgekehrter Richtung für H_y)läuft in negative z-Richtung.

2. Aufgabe

Eine ebene Welle breitet sich im Vakuum in z-Richtung aus $\left(\frac{\partial}{\partial x}=0, \frac{\partial}{\partial y}=0\right)$. In der Vorlesung wurden die Wellengleichungen im Vakuum aus den Maxwellgleichungen hergeleitet:

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \tag{28}$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{29}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{30}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{31}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \tag{32}$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \tag{33}$$

a) Zeigen Sie dass jede Funktion $f\,(z \pm ct)$ die Wellengleichungen für diesen Fall erfüllt.

b) Können sich longitudinale Wellen ausbreiten? (Gehen Sie von $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varrho = 0$ aus.)

Lösung

b) Lösung der Wellengleichungen z.B. für E_x sind sämtliche Funktionen der Form

$$E_x = f\,(z - ct) + g\,(z + ct)$$

Berechnet man die Ableitungen erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial z} &= f'\,(z - ct) + g'\,(z + ct)\\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} &= f''\,(z - ct) + g''\,(z + ct)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= (-c)f'\,(z - ct) - cg'\,(z + ct)\\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= c^2 f''\,(z - ct) + c^2 g''\,(z + ct)\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Ableitungen Gleichung (10) erfüllen.

c) Geht man von

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho = 0\\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

aus und berücksichtigt, dass alle Ableitung in x- und y-Richtung 0 sind. Erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial z} &= 0 \Rightarrow E_z = \text{const.} = 0\\ \frac{\partial H_z}{\partial z} &= 0 \Rightarrow H_z = \text{const.} = 0\end{aligned}$$

Eine ebene Welle hat also keine longitudinale Komponente.

Fragen und Kommentare

Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M.Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 2

3. Aufgabe

a) Im Vakuum gilt die Wellengleichung für homogene und lineare Medien. Für ebene Wellen ergibt sich aufgrund der unendlichen Ausdehnung der Wellenfront $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$. In diesem Fall lautet die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Zur Bestimmung der partiellen Ableitung nutzen wir zunächst die trigonometrische Beziehung, wonach $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$. Damit vereinfacht sich die in der Aufgabenstellung gegebene Beschreibung des elektrischen Feldes zu

$$\mathbf{E} = E_0 f\left(\omega t - kz\right) \mathbf{e}_x, \quad f(a) = \begin{cases} \sin\left(a\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3a\right), & 0 \le a < \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Kettenregel ergibt sich dann

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -E_0 \mathbf{e}_x k \begin{cases} \cos(\omega t - kz) + \cos(3(\omega t - kz)), & 0 \le \omega t - kz < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} = -E_0 \mathbf{e}_x k^2 \begin{cases} \sin(\omega t - kz) + 3\sin(3(\omega t - kz)), & 0 \le \omega t - kz < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und ebenso

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = E_0 \mathbf{e}_x \omega \begin{cases} \cos(\omega t - kz) + \cos(3(\omega t - kz)) & 0, \le \omega t - kz < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

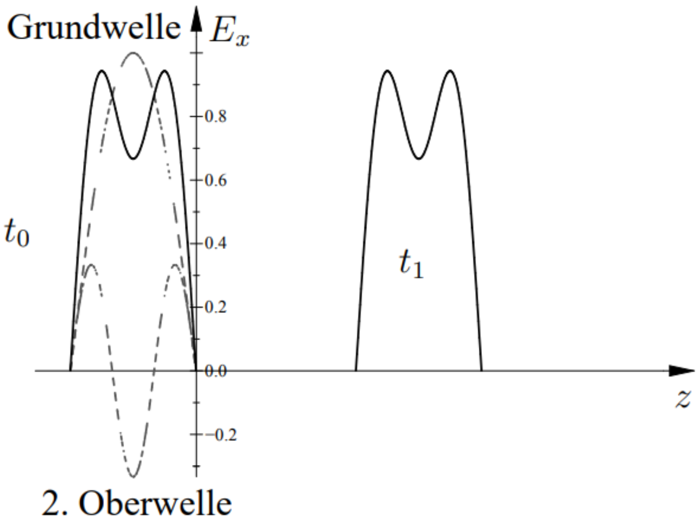
$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -E_0 \mathbf{e}_x \omega^2 \begin{cases} \sin(\omega t - kz) + 3\sin(3(\omega t - kz)), & 0 \le \omega t - kz < \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen in die Wellengleichung führt zu

$$\begin{cases} k^2 - \epsilon\mu\omega^2 = 0, & 0 \le \omega t - kz < \pi \\ 0 = 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Bedingung ist in beiden Fällen stets erfüllt, da $k = \sqrt{\epsilon\mu\omega^2} = \sqrt{\epsilon\mu}\omega = \frac{\omega}{c}$ gerade die Definition der Wellenzahl ist.

b) Die Welle bewegt sich entlang der positiven z-Richtung und das E-Feld hat nur positive Werte. Durch die Überlagerung der beiden ebenen, harmonischen Wellen entsteht ein elektrisches Feld mit zwei Maxima.



c) Da das magnetische und elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle gemeinsam angeregt werden, kann für das Magnetfeld der gleiche harmonische Ansatz gewählt werden wie zuvor schon für das elektrische Feld. Jedoch müssen die beiden Felder zusammen mit der Ausbreitungsrichtung (positive z-Richtung) ein mathematisches Rechtssystem (Rechtsschraubensystem) bilden, woraus sich ergibt, dass das magnetische Feld in y-Richtung schwingt:

$$\mathbf{H} = H_0 f\left(\omega t - kz\right) \mathbf{e}_y$$

Die Amplitude H_0 kann mit dem Induktionsgesetz $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ ermittelt werden. In kartesischen Koordinaten ergibt sich für die Rotation für den nicht-trivialen Fall $0 \leq \omega t - kz < \pi$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_0 \sin\left(\omega t - kz\right) + \frac{1}{3} E_0 \sin\left(3\left(\omega t - kz\right)\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial z} \left[E_0 \sin\left(\omega t - kz\right) + \frac{1}{3} E_0 \sin\left(3\left(\omega t - kz\right)\right) \right] \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x \\
&= -kE_0 \left[\cos\left(\omega t - kz\right) + \cos\left(3\left(\omega t - kz\right)\right)\right] \mathbf{e}_y
\end{aligned}$$

Unter Einbeziehung des trivialen Falls lässt sich das Ergebnis schreiben als

$$\nabla \times \mathbf{E} = -kE_0\, \mathbf{e}_y \begin{cases} \cos(\omega t - kz) + \cos(3(\omega t - kz)), & 0 \leq \omega t - kz < \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die rechte Seite der Maxwellgleichung folgt entsprechend

$$-\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu\omega H_0\,\mathbf{e}_y \begin{cases} \cos(\omega t - kz) + \cos(3(\omega t - kz)), & 0 \le \omega t - kz < \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Einsetzen in die Maxwellgleichung liefert

$$H_0 = E_0\frac{k}{\mu\omega} = E_0\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{E_0}{\Gamma}$$

mit dem Wellenwiderstand Γ, der nicht mit einem ohmschen Widerstand zu verwechseln ist.

d) Der reelle Poynting-Vektor ergibt sich als das Vektorprodukt des elektrischen Feldes $\mathbf{E}$ und des magnetischen Feldes $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{e}_z\frac{E_0^2}{\Gamma} \begin{cases} \left[\sin(\omega t - kz) + \frac{1}{3}\sin(3(\omega t - kz))\right]^2, & 0 \le \omega t - kz < \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Aufgabe

Gegeben ist das komplexe magnetische Feld $\underline{\mathbf{H}}$ einer harmonischen Welle im Vakuum ($\rho = 0,\ \mathbf{J} = 0$) in Kugelkoordinaten. Das $\underline{\mathbf{H}}$-Feld hat nur eine φ-Komponente und hängt lediglich von r und θ ab. Der gegebene Ansatz lässt sich auf unterschiedliche Weise anordnen und strukturieren.

i)

$$\underline{\mathbf{H}} = \underbrace{H_0\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \sin(\theta)}_{\substack{\text{komplexe Feldkomponente } \underline{H}_\varphi(r,\theta) \\ \text{(komplexer Zeiger / Phasor)}}} \quad \underbrace{\mathbf{e}_\varphi}_{\text{Richtung}}$$

ii)

$$\underline{\mathbf{H}} = \underbrace{\underbrace{H_0 \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \sin(\theta)}_{\text{Amplitude}}\, \underbrace{e^{-jkr}}_{\text{Phase}}}_{\substack{\text{komplexe Amplitude} \\ \text{(komplexe Einhüllende)}}} \quad \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeitabh.}} \quad \underbrace{\mathbf{e}_\varphi}_{\text{Richtung}}$$

iii)

$$\underline{\mathbf{H}} = \underbrace{H_0\, e^{-jkr} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \sin(\theta) \mathbf{e}_\varphi}_{\substack{\text{komplexes Vektorfeld } \underline{\mathbf{H}}(r,\theta) \\ \text{(komplexe Amplitude + Richtung)}}} \quad \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeitabh.}}$$

a) Wir wählen den harmonischen Ansatz für das das elektrische Feld der Schreibweise in iii) entsprechend, mit $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}(r,\theta)e^{j\omega t}$. Damit vereinfacht sich die zeitliche Ableitung des elektrischen Feldes zu einer Multiplikation mit dem Vorfaktor $j\omega$.

Das $\underline{\mathbf{E}}$-Feld wird berechnet mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes für lineare, homogene Medien und komplexe Zeiger $\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j\omega\epsilon\underline{\mathbf{E}}$. Zur Bestimmung der Rotation des magnetischen Feldes $\underline{\mathbf{H}}$ gibt es im Folgenden zwei verschiedene Lösungsansätze:

(1) **Herleitung mit der Rotation in Kugelkoordinaten:** Wir entnehmen die Formel für die Rotation in Kugelkoordinaten einer Formelsammlung, z.B. der EMF-Formelsammlung. Demnach gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{e}_r \frac{1}{r\sin(\theta)} &\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\underline{H}_\varphi \sin(\theta)\right) - \frac{\partial \underline{H}_\theta}{\partial\varphi}\right] \\ + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} &\left[\frac{1}{sin(\theta)}\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{H}_\varphi\right)\right] \\ + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r} &\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{H}_\theta\right) - \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial\theta}\right]\end{aligned}$$

Mit $\underline{H}_r = \underline{H}_\theta = 0$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\mathrm{rot}(\underline{\mathbf{H}}) = \mathbf{e}_r \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\underline{H}_\varphi \sin(\theta)\right) - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{H}_\varphi\right) = j\omega\epsilon\underline{\mathbf{E}}$$

Einsetzen von $\underline{H}_\varphi$ und Bestimmen der partiellen Ableitungen (siehe unten bei **Fortsetzung der eigentlichen Aufgabe**) führt auf das gesuchte Ergebnis.

(2) **Herleitung mit dem Nabla-Operator in Kugelkoordinaten:** Alternativ kann die Rotation wie in der Vorlesung mit Hilfe des Nabla-Operators ∇ ausgedrückt werden, was eine kompaktere Schreibweise erlaubt.

Für den Nabla-Operator ∇ gilt in Kugelkoordinaten allgemein:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

Bei der Berechnung von $\nabla\times\underline{\mathbf{H}}$ ist nun aber Vorsicht geboten. Bei der Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld in Zylinder- oder Kugelkoordinaten ist zu beachten, dass die Einheitsvektoren (Basisvektoren) $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\varphi$ von den Koordinaten abhängen und ebenfalls zu differenzieren sind. Dies wird wie folgt klar.

- Ausgangspunkt sei das Durchflutunggesetz

$$\nabla\times\underline{\mathbf{H}} = \left[\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\right]\times\left[\underline{H}_r\mathbf{e}_r + \underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta + \underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]$$

- Mit der Bilinearität des Kreuzproduktes $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ erhält man

$$\begin{aligned}\nabla\times\underline{\mathbf{H}} = &\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r\times\left[\underline{H}_r\mathbf{e}_r + \underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta + \underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]\\ &+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\times\left[\underline{H}_r\mathbf{e}_r + \underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta + \underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]\\ &+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\times\left[\underline{H}_r\mathbf{e}_r + \underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta + \underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]\end{aligned}$$

bzw. durch erneute Anwendung sogar 9 Kreuzterme

$$\begin{aligned}\nabla\times\underline{\mathbf{H}} = &\left[\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r\times\underline{H}_r\mathbf{e}_r\right] + \left[\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r\times\underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta\right] + \left[\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r\times\underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]\\ &+\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\times\underline{H}_r\mathbf{e}_r\right] + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\times\underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta\right] + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta\times\underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]\\ &+\left[\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\times\underline{H}_r\mathbf{e}_r\right] + \left[\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\times\underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta\right] + \left[\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi\times\underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right]\end{aligned}$$

- Aufgrund der Bilinearität gilt für Skalare β oder Operatoren wiederum auch $\beta\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\beta\mathbf{c}$. Durch dieses Gesetz wird deutlich, dass die partiellen Ableitungen unbedingt vor dem Kreuzprodukt durchzuführen sind. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}\nabla\times\underline{\mathbf{H}} = &\left[\mathbf{e}_r\times\frac{\partial}{\partial r}\left(\underline{H}_r\mathbf{e}_r\right)\right] + \left[\mathbf{e}_r\times\frac{\partial}{\partial r}\left(\underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta\right)\right] + \left[\mathbf{e}_r\times\frac{\partial}{\partial r}\left(\underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right)\right]\\ &+\left[\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\underline{H}_r\mathbf{e}_r\right)\right] + \left[\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta\right)\right] + \left[\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right)\right]\\ &+\left[\frac{1}{r\sin(\theta)}\mathbf{e}_\varphi\times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\underline{H}_r\mathbf{e}_r\right)\right] + \left[\frac{1}{r\sin(\theta)}\mathbf{e}_\varphi\times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\underline{H}_\theta\mathbf{e}_\theta\right)\right]\\ &+\left[\frac{1}{r\sin(\theta)}\mathbf{e}_\varphi\times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\underline{H}_\varphi\mathbf{e}_\varphi\right)\right]\end{aligned}$$

- Die partiellen Ableitungen beziehen sowohl die Feldkomponenten, als auch die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\varphi$ mit ein. Mittels Produktregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial r} \mathbf{e}_r + \underline{H}_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} \right) + \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \underline{H}_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} \right) \\
&+ \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi + \underline{H}_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \left(\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \underline{H}_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \right) \\
&+ \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\theta}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \underline{H}_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi + \underline{H}_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r + \underline{H}_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\theta}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta + \underline{H}_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \underline{H}_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right)
\end{aligned}$$

- Ursache dessen ist die Tatsache, dass die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\varphi$ selbst von den Koordinaten abhängen mit

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_r &= \sin(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \sin(\theta)\sin(\varphi)\mathbf{e}_y + \cos(\theta)\mathbf{e}_z, \\
\mathbf{e}_\theta &= \cos(\theta)\cos(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\theta)\sin(\varphi)\mathbf{e}_y - \sin(\varphi)\mathbf{e}_z, \\
\mathbf{e}_\varphi &= -\sin(\varphi)\mathbf{e}_x + \cos(\varphi)\mathbf{e}_y,
\end{aligned}$$

wie man sich mit Hilfe geometrischer Beziehungen leicht herleiten kann.

- Als partielle Ableitungen der Basisvektoren ergeben sich

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin(\theta)\mathbf{e}_\varphi \\
\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} = 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_r & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos(\theta)\mathbf{e}_\varphi \\
\frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial r} = 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 & \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\left(\sin(\theta)\mathbf{e}_r + \cos(\theta)\mathbf{e}_\theta\right)
\end{array}$$

- Mit den verschwindenden partiellen Ableitungen und mit $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_\varphi = 0$ vereinfacht sich die obige Gleichung zu

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right) + \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi \right) \\
&+ \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \left(\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \underline{H}_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \left(\underline{H}_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} \mathbf{e}_r + \underline{H}_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\theta}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\theta + \underline{H}_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} \right) \\
&+ \frac{1}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\underline{H}_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right)
\end{aligned}$$

- Mit $\underline{H}_r = \underline{H}_\theta = 0$ und den Rechenregeln für das Kreuzprodukt $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ vereinfacht sich die Gleichung weiter zu

$$\begin{aligned}
\nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \mathbf{e}_r \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\varphi \right) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \times \left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\varphi \right) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_\varphi \times \left(\underline{H}_\varphi \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\
&= -\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin(\theta)} \mathbf{e}_\varphi \times \left(-\underline{H}_\varphi \left(\sin(\theta)\mathbf{e}_r + \cos(\theta)\mathbf{e}_\theta \right) \right) \\
&= -\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \underline{H}_\varphi \mathbf{e}_\theta + \frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \underline{H}_\varphi \mathbf{e}_r \\
&= \mathbf{e}_r \left(\frac{\cos(\theta)}{r \sin(\theta)} \underline{H}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \theta} \right) - \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \underline{H}_\varphi \right)
\end{aligned}$$

- In einem letzten Schritt werden die Terme $\frac{1}{r\sin(\theta)}$ (linke Klammer) und $\frac{1}{r}$ (rechte Klammer) ausgeklammert und die innere und äußere Ableitung in einem Differential zusammengefasst.

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{H}} &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r\sin(\theta)} \left(\cos(\theta)\underline{H}_\varphi + \sin(\theta)\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \theta}\right) - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial r} + \underline{H}_\varphi\right)\\ &= \mathbf{e}_r \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\underline{H}_\varphi \sin(\theta)\right) - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{H}_\varphi\right)\end{aligned}$$

Wir erhalten in diesem Fall also das gleiche Ergebnis wie bei der Herleitung mit der Rotation in Kugelkoordinaten. Damit zeigt sich einmal mehr, dass die Schreibweisen $\mathrm{rot}(\underline{\mathbf{H}})$ und $\nabla \times \underline{\mathbf{H}}$ äquivalent sind. Die Schreibweise mit dem Nabla-Operator bietet sich insbesondere für allgemeine Definitionen und Herleitungen an, bei denen Wellen unabhängig von einem bestimmten Koordinatensystem betrachtet werden. Für eine sinnvolle Berechnung der EMW-Aufgaben sollte dagegen gleich die korrekte Formel für $\mathrm{rot}(\underline{\mathbf{H}}) = \nabla \times \underline{\mathbf{H}}$ in einer Formelsammlung nachgeschlagen werden, weil die Rechnung sonst unangenehm lang wird.

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{e}_r \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\underline{H}_\varphi \sin(\theta)\right) - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\underline{H}_\varphi\right) = j\omega\epsilon\underline{\mathbf{E}}$$

Fortsetzung der eigentlichen Aufgabe:
Das elektrische Feld besitzt eine r- und eine θ-Komponente. Diese ergeben sich durch Einsetzen von $\underline{H}_\varphi$ und Bilden der partiellen Ableitungen zu

$$\begin{aligned}j\omega\epsilon\underline{E}_r &= \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(H_0\, e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin(\theta)\sin(\theta)\right)\\ &= H_0\, e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin^2(\theta)\\ &= H_0\, e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r\sin(\theta)}\\ &= H_0\, e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{2\cos(\theta)}{r}\\ \Rightarrow \underline{E}_r &= \frac{2\cos(\theta)H_0}{\omega\epsilon}\, e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}j\omega\epsilon\underline{E}_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_0\, e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\sin(\theta)\right)\\ &= -H_0\sin(\theta)\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\, e^{j(\omega t - kr)}\left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2}\right)\right)\\ &= -H_0\sin(\theta)\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{j(\omega t - kr)}\left(jk + \frac{1}{r}\right)\right)\\ &= -H_0\sin(\theta)\,\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(jke^{j(\omega t - kr)} + \frac{1}{r}e^{j(\omega t - kr)}\right)\\ &= -H_0\sin(\theta)\,\frac{1}{r}\left(jk(-jk)e^{j(\omega t - kr)} - \frac{jk}{r}e^{j(\omega t - kr)} - \frac{1}{r^2}e^{j(\omega t - kr)}\right)\\ &= H_0\sin(\theta)e^{j(\omega t - kr)}\left(-\frac{k^2}{r} + \frac{jk}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{E}_\theta = \frac{H_0}{j\omega\epsilon}\,\sin(\theta) e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk^2}{r} + \frac{k}{r^2} - \frac{j}{r^3}\right)$$

b) Für große Werte für r dominieren die Terme mit $\frac{1}{r}$, wohingegen sich die Terme mit $\frac{1}{r^2}$ und $\frac{1}{r^2}$ vernachlässigen lassen. Das Gebiet in welchem diese Näherung sinnvoll ist, wird in der Antennentechnik auch als Fernfeld bezeichnet. Die magnetischen und elektrischen Feldkomponenten vereinfachen sich dort zu

$$\begin{aligned}
\underline{H}_\varphi &\simeq H_0\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r}\right) \sin(\theta) \\
\underline{E}_\theta &\simeq \frac{H_0}{\omega\epsilon} e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk^2}{r}\right) \sin(\theta) \\
\underline{E}_r &\simeq 0
\end{aligned}$$

Geschicktes Umformen der Gleichung für die Komponente $\underline{E}_\theta$ mit $k = \frac{\omega}{c}$ und $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ ergibt, dass sich die magnetische und elektrische Feldkomponente gerade durch den Wellenwiderstand $\Gamma = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \frac{k}{\omega\epsilon}$ unterscheiden. Dies ist äquivalent zum Fall der ebenen Wellen.

$$\begin{aligned}
\underline{E}_\theta &\simeq \frac{k}{\omega\epsilon} H_0\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r}\right) \sin(\theta) \\
&= \Gamma H_0\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r}\right) \sin(\theta) \\
&= \Gamma \underline{H}_\varphi
\end{aligned}$$

Der komplexe Poynting-Vektor beträgt

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2}\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2}\underline{E}_\theta\,\mathbf{e}_\theta \times \underline{H}_\varphi^*\,\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{2}\Gamma \underline{H}_\varphi\,\mathbf{e}_\theta \times \underline{H}_\varphi^*\,\mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{2}\Gamma |\underline{H}_\varphi|^2\,\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi \\
&= \frac{1}{2}\Gamma \left[H_0\, e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{jk}{r}\right) \sin(\theta)\mathbf{e}_\theta\right] \times \left[H_0\, e^{-j(\omega t - kr)} \left(\frac{-jk}{r}\right) \sin(\theta)\mathbf{e}_\varphi\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2}\Gamma H_0^2 \sin^2(\theta)\,\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2}\Gamma H_0^2 \sin^2(\theta)\,\mathbf{e}_r
\end{aligned}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass beim Bilden des komplex konjugierten Feldes lediglich das Vorzeichen des Phasenterms und der imaginären Einheit j gedreht werden müssen. Weiterhin fand Anwendung, dass $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\theta$ und $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r$ im Sinne eines mathematischen Rechtssystems.
Die mittlere abgestrahlte Leistungsdichte (oder Energieflussdichte) ergibt sich als Realteil des komplexen Poynting-Vektors, der hier allerdings bereits rein reell ist.

$$\Re\{\underline{\mathbf{S}}\} = \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2}\Gamma H_0^2 \sin(\theta)^2\,\mathbf{e}_r$$

Leistung wird durch die Welle in Ausbreitungsrichtung (radiale Richtung $\mathbf{e}_r$) transportiert. Das äquivalente Ergebnis erhält man auch durch Berechnung des reellen Poynting-Vektors und zeitliche Mittelung, d.h. mit

$$\overline{\mathbf{S}} = \overline{\Re\{\underline{\mathbf{E}}\} \times \Re\{\underline{\mathbf{H}}^*\}} = \overline{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}$$

Die im Mittel abgestrahlte Leistung ergibt sich als das Oberflächenintegral der mittleren abgestrahlten Leistungsdichte über eine Kugeloberfläche. Aus der Formelsammlung entnehmen wir das Flächenelement in Kugelkoordinaten $d\mathbf{F} = \mathbf{e}_r r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$, da für eine Kugeloberfläche nur der in radiale Richtung $\mathbf{e}_r$ gerichtete Anteil des Flächenelements zu berücksichtigen ist.

$$\begin{aligned}
P &= \oint \Re\{\underline{\mathbf{S}}\} d\mathbf{F} \\
&= \iint \frac{1}{2}\frac{k^2}{r^2}\Gamma H_0^2 \sin^2(\theta)\, \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \\
&= \iint \frac{1}{2} k^2 \Gamma H_0^2 \sin^3(\theta)\, d\theta d\varphi \\
&= \frac{1}{2} k^2 \Gamma H_0^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3(\theta)\, d\theta d\varphi \\
&= \pi k^2 \Gamma H_0^2 \int_0^{\pi} \sin^3(\theta)\, d\theta \\
&= \pi k^2 \Gamma H_0^2 \left[-\cos(\theta) + \frac{1}{3}\cos^3(\theta) \right]_0^{\pi} \\
&= \pi k^2 \Gamma H_0^2 \left[1 - \frac{1}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) \right] \\
&= \frac{4}{3}\pi k^2 \Gamma H_0^2
\end{aligned}$$

Die Stammfunktion kann folgendermaßen hergeleitet werden:
Ausnutzung des Satzes des Pythagoras $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ ergibt

$$\int \sin^3(\theta)\, d\theta = \int \sin(\theta) \left(1 - \cos^2(\theta)\right)\, d\theta$$

Substitution von $u = \cos(\theta), du = -\sin(\theta) d\theta$ resultiert in

$$\int 1 - \cos^2(u)\, du$$

Anwendung der Rechenregeln zur Integration von ganzrationalen Funktionen (Polynomen) ergibt die Stammfunktion

$$\Rightarrow \frac{u^3}{3} - u + C$$

Rücksubstitution ergibt somit

$$\frac{\cos^3(\theta)}{3} - \cos(\theta) + C$$

c) In großer Entfernung r zum Ursprung der Kugelwelle ist die Krümmung der Wellenfront für kleine Änderungen des Ortes vernachlässigbar klein. Lokal lässt sich die Kugelwelle daher als eine ebene Welle approximieren. Das ist vorteilhaft, da die ebene Welle die mathematisch einfachste Lösung der Wellengleichung darstellt. Die mathematische Behandlung der Wellenausbreitung einer komplizierteren Wellenform wird damit auf ein simples mathematisches Problem reduziert.

Ein passendes Bild findet sich in den Präsentationsfolien zur Übung auf Seite 7.

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Übungsblatt 3

Abgabe bis zum 11.11.2019 um 11:30Uhr

5. Aufgabe

In der Ebene $z = 0$ fließen zwei phasenverschobene, harmonische Flächenströme

$$\mathbf{J}_{F1} = J_{F0}\cos(\omega t)\,\mathbf{e}_x, \qquad \mathbf{J}_{F2} = p\cdot J_{F0}\cos(\omega t+\varphi)\,\mathbf{e}_y \tag{1}$$

Der Gesamtraum habe die Leitfähigkeit κ und ansonsten die Materialeigenschaften von Vakuum (ϵ_0, μ_0).

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Helmholtz-Gleichung das elektromagnetische Feld, das sich in Form einer gedämpften, ebenen Welle ausbreiten wird. Benutzen Sie die komplexe Zeigerdarstellung für das **E**- und **H**-Feld.

Lösung:
Wie in der Vorlesung vom 30.10.2019 gezeigt gilt in der komplexen Zeigerschreibweise

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j(\omega t+\varphi)} \tag{2}$$
$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j(\omega t+\varphi)} \tag{3}$$
$$\frac{\partial\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = j\omega\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) \tag{4}$$
$$\frac{\partial\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = j\omega\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r},t) \tag{5}$$
$$\tag{6}$$

Damit ergibt sich für die Helmholtzgleichung:

$$\Delta\underline{\mathbf{H}} + k^2\underline{\mathbf{H}} = 0 \tag{7}$$

Die Flächenströme $\mathbf{J}_{F1}$ und $\mathbf{J}_{F2}$ rufen somit elektromagnetische Felder hervor, die beschrieben werden durch

$$\frac{\partial^2 H_{y1}}{\partial z^2} = -k^2 H_{y1}, \qquad \frac{\partial^2 H_{x2}}{\partial z^2} = -k^2 H_{x2}, \text{mit} \qquad k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0\left(1 - j\frac{\kappa}{\omega\epsilon_0}\right) \tag{8}$$

und durch den Ansatz ebener wellen gelöst werden können mit

$$H_{y1} = -\mathrm{sign}(z)A_1 e^{-jk|z|}, \qquad H_{x2} = \mathrm{sign}(z)A_2 e^{-jk|z|}, \tag{9}$$

Die unbekannten Amplituden lassen sich mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen bestimmen mit

$$-H_{y1}(z=+0) + H_{y1}(z=-0) = J_{F1} \qquad \rightarrow \qquad A_1 = \frac{1}{2} J_{F0} \tag{10}$$

$$-H_{x2}(z=+0) + H_{x2}(z=-0) = J_{F2} \qquad \rightarrow \qquad A_1 = \frac{1}{2} p J_{F0} e^{j\delta} \tag{11}$$

Damit ist das Magnetfeld

$$H_{y1} = -\text{sign}(z) \frac{1}{2} J_{F0} e^{-jk|z|}, \qquad H_{x2} = \text{sign}(z) \frac{1}{2} p J_{F0} e^{j\delta} e^{-jk|z|}, \tag{12}$$

Das elektrishce Feld kann aus dem Magnetfeld durch Multiplikation mit dem Wellenwiderstand gewonnen werden, wobei das Vorzeichen durch die Richtung des Poynting-Vektors bestimmt werden kann. Dieser zeigt in Richtung der Ausbreitung der Welle, also im oberen Halbraum in $+z$-Richtung und im unteren Halbraum in $-z$-Richtung.

$$\mathbf{E} = Z(\mathbf{H} \times \mathbf{e}_z) \tag{13}$$

$$E_{x1} = -Z \frac{1}{2} J_{F0} e^{-jk|z|} \tag{14}$$

$$E_{y2} = -Z \frac{1}{2} p J_{F0} e^{j\delta} e^{-jk|z|} \tag{15}$$

$$\text{mit} \qquad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} \tag{16}$$

Das gesamte elektromagnetisch Feld setzt sich damit zusammen zu:

$$\mathbf{E}_{ges} = E_{x1}\mathbf{e}_x + E_{y2}\mathbf{e}_y, \qquad \mathbf{H}_{ges} = H_{y1}\mathbf{e}_y + H_{x2}\mathbf{e}_x \tag{17}$$

b) Zeigen Sie für den Fall $\kappa = 0$, dass die Spitze des reellen elektrischen Feldvektors in Abhängigkeit von der Zeit auf Ellipsenbahnen umläuft.
Definieren Sie zur Vereinfachung zunächst die Hilfsgrößen:

$$E_o = -Z \frac{J_{F0}}{2}, \qquad f_x = \cos(\omega t - k|z|), \qquad f_y = p \cdot \cos(\omega t - k|z| + \delta) \tag{18}$$

und zeigen Sie dann das f_y durch geschicktes Umformen in die allgemeine Gleichung für Kegelschnitte umgewandelt werden kann:

$$a f_x^2 + b\, f_x f_y + c\, f_y^2 + d\, f_x + e\, f_y + f = 0 \tag{19}$$

Bestimmen Sie dann die Lage (Mittelpunkt der Ellipse) und die Halbachsen dieser Ellipse explizit als Funktion von p und δ.
Hinweis:
Es ist hilfreich die Gleichung des Kegelschnittes zunächst in eine Matrizenform zu überführen. Für diese gilt im Allgemeinen

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} + d\, f_x + e\, f_y + f = 0 \tag{20}$$

Durch eine Drehung um den Winkel φ kann die Matrix dann in das Hauptachsensystem $(f_\epsilon,\ f_\nu)$ überführt werden. In dieser hat die Ellipsengleichung nur quadratische

Terme f_ϵ^2, f_ν^2. Durch Angabe des Winkels φ und der Eigenwerte λ ist die Ellipse hier vollständig beschrieben.

Lösung:
Wegen $\kappa = 0$ sind k und Z reell und somit können wir das zeitabhängige elektrische Feld schreiben als:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{ges} &= \Re\left\{(E_{x1}\mathbf{e}_x + E_{y2}\mathbf{e}_y)e^{j\omega t}\right\} && (21)\\
&= -Z\frac{J_{F0}}{2}\left\{\cos(\omega t - k|z|)\mathbf{e}_x + p\cos(\omega t - k|z| + \delta)\mathbf{e}_y\right\} && (22)\\
&= E_0\left(f_x\mathbf{e}_x + f_y\mathbf{e}y\right) && (23)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Additionstheorems $\cos(x \pm y) = \cos x\,\cos y \mp \sin x\,\sin y$ lässt sich f_y umformen zu

$$f_y = p\cos(\omega t - k|z|)\cos\delta - p\sin(\omega t - k|z|)\sin\delta \tag{24}$$

$$\Longleftrightarrow\; [f_y - p\cos(\omega t - k|z|)\cos\delta]^2 = [p\sin(\omega t - k|z|)\sin\delta]^2 \tag{25}$$

$$\Longleftrightarrow\; [f_y - pf_x\cos\delta]^2 = [p\sqrt{1-f_x^2}\sin\delta]^2 \tag{26}$$

Damit erhält man nach umformen die Gleichung einer Ellipse

$$p^2 f_x^2 - 2p\cos\delta\, f_x f_y + f_y^2 - p^2\sin^2(\delta) = 0 \tag{27}$$

Diese Ellipse hat ihren Mittelpunkt im Ursprung bei $f_x = f_y = 0$ und die Halbachsen der Ellipse sind gegenüber den f_x- bzw. f_y-Achsen um einen Winkel φ verdreht. Da f_x und f_y durch eine Ellipsengleichung beschreibbar sind und diese wiederum $\mathbf{E}_{ges}$ bestimmen, ist somit die elliptische Polarisation nachgewiesen.

Um nun die Halbachsen der Ellipse explizit als Funktion von p und δ darzustellen überführen wir die Ellipsengleichung zunächst in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} + d\,f_x + e\,f_y + f = 0 \tag{28}$$

mit

$$a = p^2, \qquad b = 2p\cos\delta, \qquad c = 1, \qquad d = 0, \qquad e = 0, \qquad f = -p^2\sin^2\delta \tag{29}$$

Nun können wir durch eine Drehung um den Winkel φ die Matrix ins Hauptachsensystem überführen (f_ϵ, f_ν). Die Drehmatrix ist hierbei gegeben durch

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} f_\epsilon \\ f_\nu \end{pmatrix}, \tag{30}$$

Durch Transformation erhalten wir also die Form

$$\begin{pmatrix} f_\epsilon & f_\nu \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C} \begin{pmatrix} f_\epsilon \\ f_\nu \end{pmatrix} + f = 0 \tag{31}$$

wobei die Matrix **C** Diagonalform hat und auf der Diagonalen die Eigenwerte der ursprünglichen Matrix A stehen.

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

$$\begin{pmatrix} f_\epsilon & f_\nu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_\epsilon \\ f_\nu \end{pmatrix} + d\, f_\epsilon + e\, f_\nu + f = 0 \tag{33}$$

Explizit ausgeführt liefert uns das de Gleichung der Ellipse mit

$$\left(\frac{\lambda_1}{p^2 \sin^2 \delta}\right) f_\epsilon^2 + \left(\frac{\lambda_2}{p^2 \sin^2 \delta}\right) f_\nu^2 = 1 \tag{34}$$

Damit sind die Längen der beiden Halbachsen a und b der Ellipse gegeben mit

$$f_\epsilon : \qquad \frac{1}{a^2} = \left(\frac{\lambda_1}{p^2 \sin^2 \delta}\right) \tag{35}$$

$$f_\nu : \qquad \frac{1}{b^2} = \left(\frac{\lambda_2}{p^2 \sin^2 \delta}\right) \tag{36}$$

Um die Halbachsen zu bestimmen, müssen wir nun noch die Eigenwerte λ_1 und λ_2 bestimmen.

$$\det\{\mathbf{A} - \mathbb{1}\} = \begin{vmatrix} p^2 - \lambda & -p\cos\delta \\ -p\cos\delta & 1 - \lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \tag{37}$$

$$\rightarrow \qquad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1 + p^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(1 + p^2)^2 + p^2 \cos^2 \delta} \tag{38}$$

Zur Bestimmung des Wikels φ, der die Orientierung der Ellipse bestimmt, betrachten wir die Definition der Drehmatrix und Diagonalmatrix noch einmal

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{39}$$

Durch explizites ausführen der Multiplikationen erhalten wir vier einzelne Gleichungen. Wir betrachten eine der Gleichungen mit verschwindender rechter Seite (oben rechts)

$$-p^2 \sin\varphi \cos\varphi + p \sin^2\varphi \cos\delta - p\cos^2\varphi \cos\delta + \sin\varphi\cos\varphi = 0 \tag{40}$$

Mit $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ und $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ erhalten wir so den Drehwinkel

$$\tan 2\varphi = \frac{2p\cos\delta}{1 - p^2} \tag{41}$$

c) Berechnen Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit für $\kappa = 55 \cdot 10^6 \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ und $f = 50\mathrm{Hz}$.

Aus der Vorlesung sind die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit definiert mit

$$v_{ph} = \frac{\omega(\beta)}{\beta} = c\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \beta_r^2}} = c\sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega T_r)^2}}}} \approx 3{,}01\mathrm{m/s} \tag{42}$$

$$v_{gr}(\beta) = \frac{\mathrm{d}\omega(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = v_{ph}(\beta)\left(1 + \frac{\beta_r^2}{\beta^2 + \beta_r^2}\right) \tag{43}$$

$$\text{mit} \qquad \beta = \frac{1}{2cT_r} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\frac{\kappa}{2} \tag{44}$$

Damit ergibt sich

$$v_{gr} \approx 2 \cdot v_{ph} \approx 6\,\mathrm{m/s} \tag{45}$$

Fragen und Kommentare

Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M.Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 4

6. Aufgabe

a) Zunächst gilt es das Magnetfeld der hinlaufenden Welle $\underline{\mathbf{H}}_e$ und das Magnetfeld der reflektierten Welle $\underline{\mathbf{H}}_r$ zu berechnen. Um ein magnetisches Feld aus einem elektrischen Feld zu bestimmen (oder umgekehrt) kann stets das gleiche Verfahren angewendet werden.

> 1.) **Aufstellen eines Ansatzes für das gesuchte Feld:**
> Wenn die elektrische Feldstärke harmonisch schwingt, dann muss dies auch für die magnetische Feldstärke gelten, da die beiden Felder in der Welle miteinander verkoppelt sind. Wichtig ist, dass Schwingungsrichtung und Ausbreitungsrichtung sinnvoll definiert sind.
>
> 2.) **Ausdrücken der Amplitude des gesuchten Feldes durch jene des bekannten Feldes:**
> Die Berechnung der Amplitude des gesuchten Feldes erfolgt über eine der Maxwellgleichungen, in denen $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ verknüpft sind (Durchflutungsgesetz und Induktionsgesetz). Das Resultat ist für ebene Wellen stets der Wellenwiderstand Z (bzw. Γ je nach Literatur) mit korrektem Vorzeichen. Der zweite Schritt kann demnach abgekürzt werden, indem direkt der Wellenwiderstand unter Berücksichtigung des korrekten Vorzeichens und der Materialeigenschaften ε und μ verwendet wird.

Gegeben ist laut Aufgabenstellung das elektrische Feld für die hinlaufende und reflektierte Welle.

$$\underline{\mathbf{E}}_e = E_e \, e^{j(\omega t - k_e z)} \mathbf{e}_y,$$
$$\underline{\mathbf{E}}_r = E_r \, e^{j(\omega t + k_e z)} \mathbf{e}_y$$

Das positive Vorzeichen vor der Wellenzahl k_e stammt daher, dass sich die reflektierte Welle in negative z-Richtung ausbreitet. Es gilt also $\mathbf{k}_r = -\mathbf{k}_e$.

Für die beiden gesuchten magnetischen Felder gilt mit dem gleichen harmonischen Ansatz

$$\underline{\mathbf{H}}_e = H_e \, e^{j(\omega t - k_e z)} \mathbf{e}_x,$$
$$\underline{\mathbf{H}}_r = H_r \, e^{j(\omega t + k_e z)} \mathbf{e}_x.$$

Die Vorzeichen der Wellenzahl verändern sich im Vergleich zum elektrischen Feld nicht, weil sie die Ausbreitungsrichtung der gesamten Welle definieren. Jedoch ändert sich die Schwingungsrichtung, da das magnetische Feld sowohl senkrecht zur Ausbreitungsrichtung (positive z-Richtung), als auch senkrecht zum elektrischen Feld (y-Richtung) schwingen muss. Ob das Magnetfeld in positive oder negative x-Richtung schwingt, ist uns noch nicht bekannt. Wir gehen in unserem Ansatz von einer positiven Schwingungsrichtung aus.

Bei der Berechnung des Wellenwiderstands dient das Induktionsgesetz für lineare, homogene Medien und harmonische Anregung $\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}$ als Ausgangspunkt. Da für homogene, ebene Wellen die partiellen örtlichen Ableitungen in x- und y-Richtung verschwinden, $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$, und das elektrische Feld lediglich eine y-Komponente aufweist, ergibt sich für die Rotation in kartesischen Koordinaten

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{E}_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z}\mathbf{e}_x$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$-\frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z}\mathbf{e}_x = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}}$$

Diese Gleichung muss für alle t, z erfüllt sein. Sie bestätigt unseren Ansatz für die Richtung des magnetischen Feldes. Nur, wenn das Feld in x-Richtung zeigt, kann die Gleichung überhaupt erfüllt sein.

<u>Hinlaufende Welle</u>

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)}}{\partial z}\mathbf{e}_x &= -j\omega\mu H_e\, e^{j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_x \\ \Leftrightarrow\ jk_e E_e e^{j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_x &= -j\omega\mu H_e\, e^{j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_x \\ \Leftrightarrow\ k_e E_e &= -\omega\mu H_e \\ \Leftrightarrow\ H_e &= -\frac{k_e E_e}{\omega\mu} = -\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_e = -\frac{1}{Z_e}E_e, \end{aligned}$$

wobei $k = \frac{\omega}{c}$ und $c = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ ausgenutzt wurde.

<u>Reflektierte Welle</u>

$$\begin{aligned} -\frac{\partial E_r\, e^{j(\omega t + k_e z)}}{\partial z}\mathbf{e}_x &- j\omega\mu H_r\, e^{j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_x \\ \Leftrightarrow\ -jk_e E_r e^{j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_x &= -j\omega\mu H_e\, e^{j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_x \\ \Leftrightarrow\ k_e E_r &= \omega\mu H_r \\ \Leftrightarrow\ H_r = \frac{k_e E_r}{\omega\mu} &= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_r = \frac{1}{Z_0}E_r \end{aligned}$$

Der Wert des Wellenwiderstands Z_0 unterscheidet sich für die hinlaufende und reflektierte Welle nicht, da sich die beiden Wellen im gleichen Medium (Gebiet 1) ausbreiten.

Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_e &= E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_y, \\ \underline{\mathbf{E}}_r &= E_r\, e^{j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_y, \\ \underline{\mathbf{H}}_e &= -\frac{1}{Z_0}E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_x, \\ \underline{\mathbf{H}}_r &= \frac{1}{Z_0}E_r\, e^{j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

Bei der Wahl des Vorzeichens des Wellenwiderstnades muss man beachten, dass das elektrische Feld $\mathbf{E}$, das magnetische Feld $\mathbf{H}$ und der Poyntingvektor $\mathbf{S}$ ein mathematisches Rechtssystem bilden, siehe Skizze der Aufgabenstellung. Dabei zeigt der Poyntingvektor immer in Ausbreitungsrichtung. Ein positives Vorzeichen des Wellenwiderstandes bedeutet damit, dass beide Felder entweder in positive oder in negative Koordinatenrichtung schwingen. Im Falle eines negativen Vorzeichens schwingt dagegen eines der Felder in positive Koordinatenrichtung und das andere Feld in negative Koordinatenrichtung.

b) Noch kann keine Aussage darüber gemacht werden, ob $\mathbf{E}_e$ und $\mathbf{E}_r$ in dieselbe oder entgegengesetzte Richtung zeigen, d.h., ob der Reflexionsfaktor $\underline{r}$ positiv oder negativ ist. Dies kann aus den Stetigkeitsbedingungen der Felder an der Grenzfläche gefolgert werden.

1.) **Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes**
Das elektrische Feld schwingt in y-Richtung, d.h. es gibt ausschließlich Tangentialkomponenten. Auf der linken Seite der Grenzfläche (Gebiet 1) ergibt sich das elektrische Gesamtfeld als Superposition von $\mathbf{E}_e$ und $\mathbf{E}_r$ und auf der rechten Seite der Grenzfläche (Gebiet 2) wirkt nur das elektrische Feld der durchgelassenen Welle $\mathbf{E}_t$, das bisher noch nicht näher betrachtet wurde.

$$\begin{aligned} E_{tan,1} &= E_{tan,2}\,|_{z=0} \\ \Leftrightarrow E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)} + E_r\, e^{j(\omega t + k_e z)} &= E_t\, e^{j(\omega t - k_t z)}\,|_{z=0} \\ \Leftrightarrow E_e + E_r &= E_t \end{aligned} \tag{1}$$

2.) **Stetigkeit der Tangentialkomponente des magnetischen Feldes**
Wegen $\kappa = 0$ treten keine Oberflächenströme $\mathbf{J}$ an der Grenzfläche auf und es gilt analog zur Begründung oben

$$\begin{aligned} H_{tan,1} &= H_{tan,2}\,|_{z=0} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{Z_0} E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)} + \frac{1}{Z_0} E_r\, e^{j(\omega t + k_e z)} &= H_t\, e^{j(\omega t - k_t z)}\,|_{z=0} \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{Z_0} E_e + \frac{1}{Z_0} E_r = H_t \Leftrightarrow -\frac{E_e}{Z_0} + \frac{E_r}{Z_0} &= -\frac{E_t}{Z_1} \end{aligned} \tag{2}$$

Die letzte Umformung auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich wie in Aufgabe a). Der Wellenwiderstand $Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}$ verknüpft die Amplituden des elektrischen Feldes E_t und des magnetischen Feldes H_t und muss ein negatives Vorzeichen aufweisen, damit sich ein mathematisches Rechtssystem ergibt.

Die Gleichungen (1) und (2) bilden ein lineares Gleichungssystem (LGS) mit 2 Unbekannten. Der Reflexionsfaktor $\underline{r}$ kann bestimmt werden, in dem das LGS nach E_r aufgelöst wird. Dazu wird Gleichung (1) für E_t auf der rechten Seite von Gleichung (2) eingesetzt. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
-\frac{E_e}{Z_0} + \frac{E_r}{Z_0} &= -\frac{E_e}{Z_1} - \frac{E_r}{Z_1} \\
\Leftrightarrow E_r \left(\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1}\right) &= E_e \left(\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1}\right) \\
\Leftrightarrow \underline{r} = \frac{E_r}{E_e} &= \frac{\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1}} \\
\Leftrightarrow \underline{r} = \frac{E_r}{E_e} &= \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}} \\
\Leftrightarrow \underline{r} = \frac{E_r}{E_e} &= \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1}}
\end{aligned}$$

In diesem Fall ist der Reflexionsfaktor rein reell, $\underline{r} = r$, da das Material verlustfrei ist ($\kappa = 0$ und damit Z_0, Z_1 rein reell). Alternativ kann das Ergebnis auch leicht umgeformt werden zu

$$\begin{aligned}
\underline{r} = \frac{E_r}{E_e} &= \frac{\frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1}}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1}} \\
\Leftrightarrow \underline{r} = \frac{E_r}{E_e} &= \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0}
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Transmissionsfaktors $\underline{t}$ wird das LGS stattdesssen nach E_t aufgelöst, indem zunächst Gleichung (1) zu $E_r = E_t - E_e$ umgeformt und dann wiederum in Gleichung (2) eingesetzt wird. Es folgt

$$\begin{aligned}
-\frac{E_e}{Z_0} + \frac{E_t}{Z_0} - \frac{E_e}{Z_0} &= -\frac{E_t}{Z_1} \\
\Leftrightarrow E_t \left(\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1}\right) &= E_e \frac{2}{Z_0} \\
\Leftrightarrow \underline{t} = \frac{E_t}{E_e} &= \frac{\frac{2}{Z_0}}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1}} \\
\Leftrightarrow \underline{t} = \frac{E_t}{E_e} &= \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_0}}} \\
\Leftrightarrow \underline{t} = \frac{E_t}{E_e} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{\varepsilon_1}}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\underline{t} = \frac{E_t}{E_e} &= \frac{\frac{2}{Z_0}}{\frac{1}{Z_0} + \frac{1}{Z_1}} \\
\Leftrightarrow \underline{t} = \frac{E_t}{E_e} &= \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_0}
\end{aligned}$$

Auch der Transmissionsfaktor ist in diesem Fall rein reell, d.h. $\underline{t} = t$. Aufgrund der Verwechslungsgefahr mit der Zeit t werden wir im Folgenden jedoch weiterhin $\underline{t}$ schreiben. Es lässt sich leicht zeigen, dass $1 + \underline{r} = \underline{t}$, was ja gerade der Stetigkeitsbedingung entspricht: Die Amplitude der Superposition der elektrischen Felder der hinlaufenden und reflektierten Welle entspricht der Amplitude des elektrischen Feldes der transmittierten Welle.

Damit können nun alle Feldgrößen nach E_e ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{E}}_e &= E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_y, \\
\underline{\mathbf{E}}_r &= \underline{r}E_e\, e^{j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_y, \\
\underline{\mathbf{E}}_t &= \underline{t}E_e\, e^{j(\omega t - k_t z)}\mathbf{e}_y, \\
\underline{\mathbf{H}}_e &= -\frac{1}{Z_0}E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_x, \\
\underline{\mathbf{H}}_r &= \frac{1}{Z_0}\underline{r}E_e\, e^{j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_x, \\
\underline{\mathbf{H}}_t &= -\frac{1}{Z_1}\underline{t}E_e\, e^{j(\omega t - k_t z)}\mathbf{e}_x.
\end{aligned}$$

Anmerkungen:

- Auf den ersten Blick scheinen nun sowohl $\underline{\mathbf{E}}_e$, als auch $\underline{\mathbf{E}}_r$ in positive y-Richtung zu schwingen, was der Abbildung der Aufgabenstellung widerspricht. Ebenso scheint das magnetische Feld bei der Reflexion sein Vorzeichen zu wechseln, da $\underline{\mathbf{H}}_e$ in negative x-Richtung gerichtet ist, $\underline{\mathbf{H}}_r$ jedoch in negative x-Richtung. Dies ist aber ein Trugschluss und die Abbildung ist korrekt. Für $\varepsilon_1 = 3\,\varepsilon_0$ wie in Aufgabe c) gegeben (Übergang vom *dünneren* ins *dichtere* Material) ist der Reflexionsfaktor $\underline{r} < 0$! Im Falle eines Üebergangs der Welle vom *dichteren* ins *dünnere* Material würde wegen $\underline{r} > 0$ dagegen das magnetische Feld bei der Reflexion sein Vorzeichen wechseln.
- Negative Vorzeichen von Wellenwiderstand, Transmissions- und Reflexionsfaktor können entweder der Amplitude oder der Schwingungsrichtung des jeweiligen Feldes zugeordnet werden. Ein sinusförmig in positive x-Richtung schwingendes Feld mit negativer Amplitude ist identisch zu einem in negative x-Richtung schwingenden Feld mit positiver Amplitude.

c) Mit $\varepsilon_1 = 3\,\varepsilon_0$ vereinfachen sich der Reflexions- und Tranmissionsfaktor zu

$$\underline{r} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} - \sqrt{3\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_0} + \sqrt{3\varepsilon_0}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = -2+\sqrt{3} < 0$$

$$\underline{t} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_0}}{(1+\sqrt{3})\sqrt{\varepsilon_0}} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$

Die mittlere, reelle Leistungsdichte $\overline{\mathbf{S}}$ ergibt sich als Realteil des komplexen Poynting-Vektors $\overline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\Re\,(\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*)$.

Hinlaufende Welle:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{S}}_e &= \frac{1}{2}\Re\,(\underline{\mathbf{E}}_e \times \underline{\mathbf{H}}_e^*) = \frac{1}{2}\Re\left(E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_y \times \left(-\frac{1}{Z_0}\right) E_e\, e^{-j(\omega t - k_e z)}\mathbf{e}_x\right) \\
&= \frac{1}{2}\Re\left(\frac{E_e^2}{Z_0}\right)\mathbf{e}_z = \frac{E_e^2}{2Z_0}\mathbf{e}_z
\end{aligned}$$

Reflektierte Welle:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{S}}_r &= \frac{1}{2}\Re\left(\underline{\mathbf{E}}_r \times \underline{\mathbf{H}}_r^*\right) = \frac{1}{2}\Re\left(\underline{r}E_e\, e^{j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_y \times \frac{1}{Z_0}\underline{r}E_e\, e^{-j(\omega t + k_e z)}\mathbf{e}_x\right) \\
&= -\frac{1}{2}\Re\left(\underline{r}^2 \frac{E_e^2}{Z_0}\right)\mathbf{e}_z = -\frac{\underline{r}^2 E_e^2}{2Z_0}\mathbf{e}_z = -\overline{\mathbf{S}}_e\left(7 - 4\sqrt{3}\right) \approx -0,072\,\overline{\mathbf{S}}_e
\end{aligned}$$

Durchgelassene Welle:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{S}}_t &= \frac{1}{2}\Re\left(\underline{\mathbf{E}}_t \times \underline{\mathbf{H}}_t^*\right) = \frac{1}{2}\Re\left(\underline{t}E_e\, e^{j(\omega t - k_t z)}\mathbf{e}_y \times \left(-\frac{1}{Z_1}\right)\underline{t}E_e\, e^{-j(\omega t - k_t z)}\mathbf{e}_x\right) \\
&= \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\underline{t}^2 E_e^2}{Z_1}\right)\mathbf{e}_z = \frac{\underline{t}^2 E_e^2}{2Z_1}\mathbf{e}_z = \overline{\mathbf{S}}_e\left(\frac{4\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}}\right) \approx 0,928\,\overline{\mathbf{S}}_e
\end{aligned}$$

Damit gilt $|\overline{\mathbf{S}}_e| = |\overline{\mathbf{S}}_r| + |\overline{\mathbf{S}}_t|$ und das Gesetz der Energieerhaltung ist erfüllt. Der mittlere Energiefluss des Systems ist vor und nach dem Auftreffen der Welle auf die Grenzfläche identisch, teilt sich nach dem Auftreffen jedoch auf die reflektierte (ca. 7.2%) und durchgelassene Welle (ca. 92,8 %) auf.

d) Die Welle trifft auf einen idealen Leiter mit $\kappa \to \infty$. In einem solchen Leiter kann kein elektrisches Feld existieren, da sich die Ladungsträger innerhalb der Relaxationszeit rearrangieren und das Feld abschirmen. Die Tatsache, dass im Leiter kein $\mathbf{E}$-Feld existiert, fordert, daß das $\mathbf{E}$-Feld auch im Medium 1 für $z = 0$ verschwinden muß. Das elektrische Gesamtfeld bestehend aus dem elektrischen Feld der einfallenden Welle $\mathbf{E}_e$ und dem elektrischen Feld der reflektierten Welle $\mathbf{E}_r$ muss daher bei $z = 0$ null sein und es gilt für den Transmissionsfaktor $\underline{t} = 0$.

Bei Vernachlässigung von Oberflächenströmen an der Grenzfläche ergeben sich die Stetigkeitsbedingungen zu

1.) **Stetigkeit der Tangentialkomponente des elektrischen Feldes**

$$\begin{aligned}
E_{t,1} = E_{t,2} &= 0\,|_{z=0} \\
\Leftrightarrow E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)} + E_r\, e^{j(\omega t + k_e z)} &= 0\,|_{z=0} \\
\Leftrightarrow E_e + E_r &= 0
\end{aligned} \tag{3}$$

2.) **Stetigkeit der Tangentialkomponente des magnetischen Feldes**

$$\begin{aligned}
H_{t,1} = H_{t,2} &= 0\,|_{z=0} \\
\Leftrightarrow -\frac{1}{Z_0}E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)} + \frac{1}{Z_0}E_r\, e^{j(\omega t + k_e z)} &= 0|_{z=0} \\
\Leftrightarrow -\frac{E_e}{Z_0} + \frac{E_r}{Z_0} &= 0
\end{aligned} \tag{4}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass auch das magnetische Feld im Medium 2 den Wert 0 annehmen muss, wenn das mit ihm verkoppelte elektrische Feld verschwindet. Wir sehen, dass die beiden Gleichungen (3) und (4) zueinander im Widerspruch stehen. Unsere Annahme vernächlässigbarer Oberflächenströme führt zu diesem Widerspruch. Für eine korrekte Stetigkeitsbedingung (4) müssten Oberflächenströme berücksichtigt werden.

Der Reflexionsfaktor lässt sich aus Gleichung (3) leicht bestimmen zu $E_r = -E_e \Leftrightarrow \underline{r} = \frac{E_r}{E_e} = -1$. Damit kann die Übersicht aller Feldgrößen aus b) angepasst werden:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{E}}_e &= E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)} \mathbf{e}_y, \\
\underline{\mathbf{E}}_r &= -E_e\, e^{j(\omega t + k_e z)} \mathbf{e}_y, \\
\underline{\mathbf{E}}_t &= 0, \\
\underline{\mathbf{H}}_e &= -\frac{1}{Z_0} E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)} \mathbf{e}_x, \\
\underline{\mathbf{H}}_r &= -\frac{1}{Z_0} E_e\, e^{j(\omega t + k_e z)} \mathbf{e}_x, \\
\underline{\mathbf{H}}_t &= 0.
\end{aligned}$$

e) Im Medium 1 kommt es zu einer Überlagerung der hinlaufenden und reflektierten Welle mit identischer Amplitude. Für die Superposition der elektrischen Felder gilt

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{E}}_{sup} &= \underline{\mathbf{E}}_e + \underline{\mathbf{E}}_r \\
&= E_e\, e^{j(\omega t - k_e z)} \mathbf{e}_y - E_e\, e^{j(\omega t + k_e z)} \mathbf{e}_y \\
&= E_e\, e^{j\omega t} \left(e^{-jk_e z} - e^{jk_e z} \right) \mathbf{e}_y \\
&= -2j E_e\, e^{j\omega t} \sin(k_e z)\, \mathbf{e}_y
\end{aligned}$$

wegen $\sin(x) = \frac{1}{2j}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right)$. Für das reelle Feld gilt damit

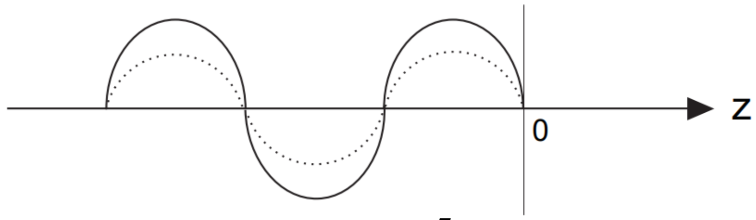
$$\begin{aligned}
\Re\{\underline{\mathbf{E}}_{sup}\} &= \Re\{-2jE_e\ (\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\sin(k_e z)\}\mathbf{e}_y \\
&= 2E_e\ \sin(\omega t)\sin(k_e z)\, \mathbf{e}_y.
\end{aligned}$$

Für die Superposition der magnetischen Felder gilt analog

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{H}}_{sup} &= \underline{\mathbf{H}}_e + \underline{\mathbf{H}}_r \\
&= -\frac{E_e}{Z_0}\, e^{j(\omega t - k_e z)} \mathbf{e}_y - \frac{E_e}{Z_0}\, e^{j(\omega t + k_e z)} \mathbf{e}_x \\
&= -\frac{E_e}{Z_0}\, e^{j\omega t} \left(e^{jk_e z} + e^{-jk_e z} \right) \mathbf{e}_x \\
&= -2\frac{E_e}{Z_0}\, e^{j\omega t} \cos(k_e z)\, \mathbf{e}_x
\end{aligned}$$

wegen $\sin(x) = \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)$. Für das reelle Feld gilt damit

$$\begin{aligned}
\Re\{\underline{\mathbf{H}}_{sup}\} &= \Re\{-2\frac{E_e}{Z_0}\ (\cos(\omega t) + j\sin(\omega t))\cos(k_e z)\}\mathbf{e}_y x \\
&= -2\frac{E_e}{Z_0}\ \cos(\omega t)\cos(k_e z)\, \mathbf{e}_x.
\end{aligned}$$



Es entsteht eine stehende Welle mit einem Schwingungsknoten für das elektrische Feld bei $z = 0$ (siehe Skizze), da sich die elektrischen Felder der hinlaufenden und reflektierten Welle destruktiv überlagern. Die vollständige Reflexion an einem idealen Leiter entspricht damit einem idealen Kurzschluss im Sinne der Leitungstheorie (vgl. Vorlesung *Grundlagen der Hochfrequenztechnik*), wohingegen ein Reflexionsfaktor von $\underline{r} = 1$ einem idealen Leerlauf gleichkommt, bei dem an der Grenzfläche ein Schwingungsbauch entsteht (konstruktive Überlagerung). Zwischen den beiden Feldern $\underline{\mathbf{E}}_{sup}$ und $\underline{\mathbf{H}}_{sup}$ besteht eine Phasenverschiebung von $\frac{\pi}{2}$, d.h. für die Überlagerung der hin- und rücklaufenden Welle schwingen $\mathbf{E}$- und $\mathbf{H}$-Feld nicht mehr in Phase.

Für den komplexen Poynting-Vektor folgt

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}}_{sup} &= \frac{1}{2}\Re\{\underline{\mathbf{E}}_{sup} \times \underline{\mathbf{H}}^*_{sup}\}\\ &= 4j\frac{E_e^2}{Z_0}\sin(kz)\cos(kz)\, e^{j\omega t}e^{-j\omega t}\mathbf{e}_z\\ &= 4j\frac{E_e^2}{Z_0}\sin(kz)\cos(kz)\,\mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Der komplexe Poynting-Vektor ist also rein imaginär. Der zeitliche Mittelwert der Wirkleistungsdichte ist $\Re\{\underline{\mathbf{S}}_{sup}\} = 0$. Eine stehende Welle transportiert keine Wirkleistung. Dies ist äquivalent zur Blindleistung bei Wechselstromschaltungen.

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 5

Abgabe bis zum 25.11.2019 um 11:30Uhr

7. Aufgabe

a) Die Tangentialkomponente muss stetig sein ($t = 0$ und $\vec{r} = z\vec{e}_z$):

$$E_e e^{-jk_1 \sin\alpha_e z} + E_r e^{-jk_1 \sin\alpha_r z} = E_d e^{-jk_2 \sin\alpha_t z}$$

Die Gleichung is nichtlinear in z und kann nur für alle z erfüllt sein wenn gilt:

$$-jk_1 \sin\alpha_e z = -jk_1 \sin\alpha_r z = -jk_2 \sin\alpha_t z$$

Daraus folgt dann:

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \alpha_e \\ \sin\alpha_t &= \frac{k_1}{k_2}\sin\alpha_e \end{aligned}$$

b) Mit $\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y$ und $\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$ erhält man schnell:

$$\begin{aligned} \vec{H}_e &= \frac{1}{Z}\vec{e}_{k_e} \times \vec{E} \\ &= \frac{1}{Z_1}E_e\left(-\cos\alpha_e\vec{e}_z + \sin\alpha_e\vec{e}_y\right) \\ \vec{H}_t &= \frac{1}{Z_2}E_d\left(-\cos\alpha_t\vec{e}_z + \sin\alpha_t\vec{e}_y\right) \\ \vec{H}_r &= \frac{1}{Z_1}E_r\left(\cos\alpha_r\vec{e}_z + \sin\alpha_r\vec{e}_y\right) \end{aligned}$$

c) Stetigkeitsbedingungen für $t = 0$ und $\vec{r} = \vec{0}$:

$$\begin{aligned} E\text{-tangential} &\Rightarrow & E_e + E_r &= E_d \\ H\text{-tangential} &\Rightarrow & -\frac{1}{Z_1}E_e\cos\alpha_e + \frac{1}{Z_1}E_r\cos\alpha_r &= -\frac{1}{Z_2}E_t\cos\alpha_t \\ B\text{-orthogonal} &\Rightarrow & \left(\frac{1}{Z_1}E_e\sin\alpha_e + \frac{1}{Z_1}E_r\sin\alpha_r\right. &= \left.\frac{1}{Z_2}E_t\sin\alpha_t\right) \end{aligned}$$

Setzt man die Winkelrelationen aus a) ein, wird die letzte Gleichung gleich der ersten. Es bleibt also folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$E_e + E_r = E_t$$
$$-E_e \cos\alpha_e + E_r \cos\alpha_e = -\frac{Z_1}{Z_2} E_t \cos\alpha_t$$

$$\begin{aligned}
&E_r = E_t - E_e \\
&\Rightarrow - E_e \cos\alpha_e + (E_d - E_e)\cos\alpha_e = -\frac{Z_1}{Z_2} E_t \cos\alpha_t \\
&\Rightarrow 2E_e \cos\alpha_e = \frac{Z_1}{Z_2} E_t \cos\alpha_t + E_t cos\alpha_e \\
&\Rightarrow E_t = \frac{2\cos\alpha_e}{\frac{Z_1}{Z_2}\cos\alpha_t + cos\alpha_e} E_e \\
&\Rightarrow E_t = \frac{2Z_2\cos\alpha_e}{Z_1\cos\alpha_t + Z_2 cos\alpha_e} E_e \\
&\Rightarrow E_r = \left(\frac{2Z_2\cos\alpha_e}{Z_1\cos\alpha_t + Z_2\cos\alpha_e} - 1\right) E_e \\
&\Rightarrow E_r = \frac{Z_2\cos\alpha_e - Z_1 cos\alpha_t}{Z_2\cos\alpha_e + Z_1\cos\alpha_t} E_e
\end{aligned}$$

c) Der kritische Winkel wird erreicht, wenn $\sin\alpha_e \frac{k_1}{k_2} > 1$. In diesem Fall kann kein reelles α_t die Bedingungen erfüllen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn Medium 1 optisch dichter als Medium 2 ist, also $\varepsilon_{r1} \geq \varepsilon_{r2}$. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_e \frac{k_1}{k_2} &> 1 \\
\sin\alpha_e &> \frac{k_2}{k_1} \\
\alpha_{e,\text{kritisch}} &= \arcsin\frac{k_2}{k_1}
\end{aligned}$$

Hinweis: Für den Fall $\alpha_e \geq \alpha_{e,kritisch}$ tritt Totalreflexion ein. Jedoch ist auch in diesem Fall im zweiten Medium eine exponentiell abfallende Welle vorhanden, da sonst die Stetigkeitsbedingungen verletzt wären. Die Lösung kann über einen komplexen Ansatz für α_t hergeleitet werden. α_t kann dann allerdings nicht mehr als Winkel interpretiert werden. Das Phänomen der Totalreflektion wird im Besonderen in der Optischen Kommunikation mit Hilfe von Glasfaserkabeln gebraucht.

d) Beim Übergang von Quartzglas zu Luft ändert sich der Brechungsindex und es ergibt sich als kritischer Winkel:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{e,\text{kritisch}} &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r,\text{Luft}}}{\epsilon_{r,\text{Quartzglas}}}}\right) \\
&= \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{3.7}}\right) \\
&= 31.32^\circ
\end{aligned}
$$

Fragen und Kommentare

Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M.Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)

Elektromagnetische Wellen

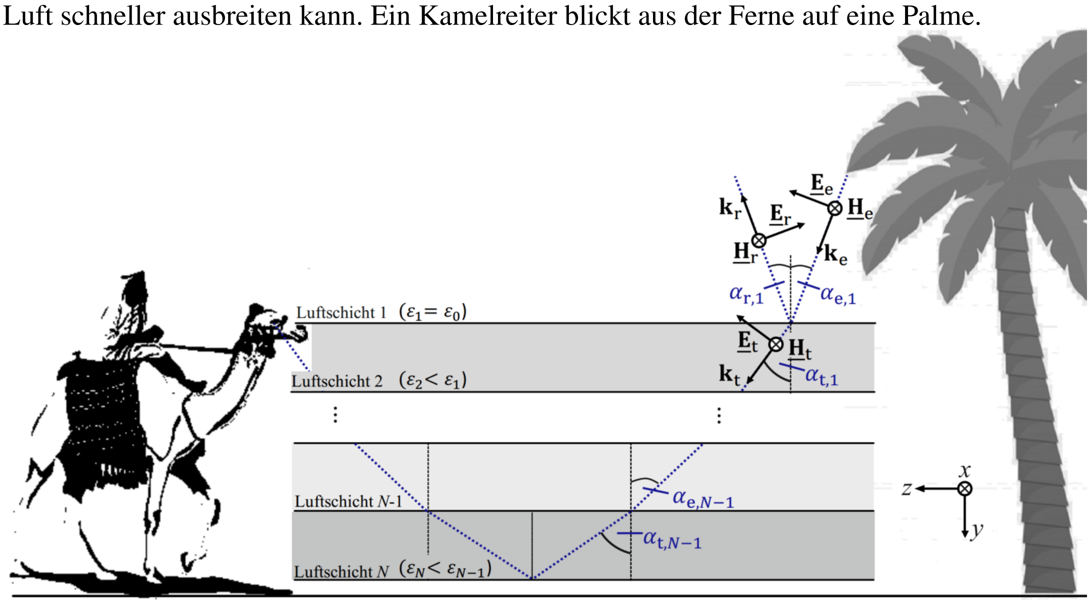
WS 2019/20

Übungsblatt 6

Abgabe bis zum 02.12.2019 um 11:30 Uhr

8. Aufgabe

Achtung: Aktualisierte Version vom 29.11.2019, Anpassung von Aufgabe c)
Im Folgenden soll die Ausbreitung von Licht in der Sahara-Wüste untersucht werden. An einem Sommertag bilden sich über dem heißen Sand N Luftschichten mit unterschiedlichen Temperaturen, siehe Abbildung. Eine höhere Temperatur entspricht einem verringerten Brechungsindex n bzw. einer verringerten Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, sodass sich das Licht in warmer Luft schneller ausbreiten kann. Ein Kamelreiter blickt aus der Ferne auf eine Palme.



Zur Vereinfachung der Mathematik wird das Licht als eine ebene, linear polarisierte Welle betrachtet, die sich in der obersten Luftschicht ausbreitet und unter dem Winkel $\alpha_{e,1}$ bei $y = 0$ auf die erste Grenzfläche zu einem optisch dünneren Medium trifft. Es gelte im gesamten Raum $\mu = \mu_0$ und $\kappa = 0$. Gegeben sei folgender Ansatz für das magnetische Feld der Welle.

Hinlaufende Welle:

$$\underline{\mathbf{H}}_e = H_e e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_x$$
$$\mathbf{k}_e = k_1 \left(\cos \alpha_{e,1} \mathbf{e}_y + \sin \alpha_{e,1} \mathbf{e}_z\right)$$

Reflektierte Welle:

$$\underline{\mathbf{H}}_r = H_r e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_x$$
$$\mathbf{k}_r = k_1 \left(-\cos \alpha_{r,1} \mathbf{e}_y + \sin \alpha_{r,1} \mathbf{e}_z\right)$$

Durchgelassene Welle:

$$\underline{\mathbf{H}}_t = H_t e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_x$$
$$\mathbf{k}_t = k_2 \left(\cos\alpha_{t,1} \mathbf{e}_y + \sin\alpha_{t,1} \mathbf{e}_z\right),$$

mit dem Wellenvektor $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\mathbf{e}_k$ und dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$. Gehen Sie zunächst vor wie in der 7. Aufgabe auf Übungsblatt 5. Beachten Sie, dass das elektrische Feld hier parallel polarisiert ist.

a) Verwenden Sie für den Fall $t = 0$ und $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$ die Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponente des $\underline{\mathbf{H}}$-Feldes, um die Reflexions- und Transmissionswinkel zu berechnen. Hinweis: Die Gleichung muss für alle z eine Lösung haben.

b) Bestimmen Sie für den Fall $t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ mit folgendem Zusammenhang das $\underline{\mathbf{E}}$-Feld:

$$\underline{\mathbf{E}} = Z\underline{\mathbf{H}} \times \mathbf{e}_k$$

Hinweis: Da $\sin^2 + \cos^2 = 1$ ist, gilt z.B. $\mathbf{e}_{k_e} = \cos\left(\alpha_{e,1}\right) \mathbf{e}_y + \sin\left(\alpha_{e,1}\right) \mathbf{e}_z$.

Die folgenden Teilaufgaben widmen sich einem berühmten physikalischen Phänomen.

c) Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis aus Aufgabe a) eine allgemeine Darstellung für den Brechungswinkel $\alpha_{t,i}$ an einer beliebigen Grenzfläche i ab. Wie viele Grenzschichten sind notwendig, damit es am N-ten Übergang zu einer Totalreflexion kommt, wenn der Einfallswinkel $\alpha_e = 45°$ beträgt und die dielektrische Permittivität von Luftschicht zu Luftschicht um $\Delta\varepsilon_r = 0,05$ abnimmt (Beispiel: $\varepsilon_{r,2} = \varepsilon_{r,1} - \Delta\varepsilon_r$)?
Hinweis: Vernachlässigen Sie Mehrfachreflexionen an den Grenzflächen.

d) Skizzieren Sie, was der Kamelreiter sieht, wenn er die Palme betrachtet. Wie wird dieses Phänomen genannt?

e) Welcher Anteil der auf die erste Grenzfläche auftreffenden optischen Leistung kommt beim Kamelreiter an? Betrachten Sie dazu den Transmissionskoeffizienten für die jeweiligen Grenzübergänge und gehen Sie davon aus, dass Licht einzig und allein über den in der Abbildung skizzierten optischen Pfad den Reiter erreicht, auf dem alle N Luftschichten durchquert werden.

f) Wie verändert sich der in e) berechnete Wert, wenn anstelle der parallelen Polarisation eine senkrechte Polarisation gewählt wird? Welche der Polarisationen liefert demnach den dominanten Beitrag zu dem beobachteten Phänomen?

Fragen und Kommentare

Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M. Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 6

8. Aufgabe

Gegeben sind in der Aufgabenstellung Ansätze für das magnetische Feld der hinlaufenden, der reflektierten sowie der transmittierten Welle an der Grenzschicht zwischen der ersten und zweiten Luftschicht.
Hinlaufende Welle:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_e &= H_e e^{j(\omega t - \mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{k}_e &= k_1 \left(\cos \alpha_{e,1} \mathbf{e}_y + \sin \alpha_{e,1} \mathbf{e}_z\right) = k_1 \mathbf{e}_{k,e} \end{aligned}$$

Reflektierte Welle:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_r &= H_r e^{j(\omega t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{k}_r &= k_1 \left(-\cos \alpha_{r,1} \mathbf{e}_y + \sin \alpha_{r,1} \mathbf{e}_z\right) = k_1 \mathbf{e}_{k,r} \end{aligned}$$

Durchgelassene Welle:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_t &= H_t e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{k}_t &= k_2 \left(\cos \alpha_{t,1} \mathbf{e}_y + \sin \alpha_{t,1} \mathbf{e}_z\right) = k_2 \mathbf{e}_{k,t}, \end{aligned}$$

mit dem Wellenvektor $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\mathbf{e}_k$ und dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$.

a) Es kann analog zu Aufgabe 7 auf dem vorherigen Übungsblatt vorgegangen werden. Da in allen Luftschichten $\kappa = 0$ gilt, treten keine Oberflächenströme an der Grenzfläche auf und die Tangentialkomponente des magnetischen Feldes muss stetig sein mit $H_{tan,1} = H_{tan,2}$. Gemäß Ansatz schwingt das magnetische Feld $\underline{\mathbf{H}}$ in x-Richtung und hat damit ausschließlich tangentiale Komponenten. Mit $t = 0$ und $\mathbf{r} = z\mathbf{e}_z$ folgt

$$\begin{aligned} &H_e e^{-j\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}} + H_r e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}} = H_t e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}} \Leftrightarrow \\ &H_e e^{-jk_1(\cos \alpha_{e,1}\mathbf{e}_y + \sin \alpha_{e,1}\mathbf{e}_z)\cdot z\mathbf{e}_z} + H_r e^{-jk_1(-\cos \alpha_{r,1}\mathbf{e}_y + \sin \alpha_{r,1}\mathbf{e}_z)\cdot z\mathbf{e}_z} \\ &= H_t e^{-jk_2(\cos \alpha_{t,1}\mathbf{e}_y + \sin \alpha_{t,1}\mathbf{e}_z)\cdot z\mathbf{e}_z} \Leftrightarrow \\ &H_e e^{-jk_1 \sin(\alpha_{e,1})z} + H_r e^{-jk_1 \sin(\alpha_{r,1})z} = H_t e^{-jk_2 \sin(\alpha_{t,1})z} \end{aligned} \tag{1}$$

Für die letzte Umformung wurde dabei das Skalarprodukt ausgenutzt, wonach $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x = 0, \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y = 0$ und $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1$. Die Gleichung ist nichtlinear in z und kann nur für alle z erfüllt sein, wenn gilt:

$$-jk_1 \sin(\alpha_{e,1})z = -jk_1 \sin(\alpha_{r,1})z = -jk_2 \sin(\alpha_{t,1})z$$

Daraus folgt dann:

$$\alpha_{r,1} = \alpha_{e,1}$$
$$k_1 \sin(\alpha_{e,1}) = k_2 \sin(\alpha_{t,1})$$

Die beiden Gleichungen sind gerade das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz.

Hinweis:
Die letzten Umformungsschritte werden klar, wenn man sich die unendliche Ausdehnung der Wellenfront der ebenen Welle vergegenwärtigt. Aufgrund dieser muss die Gleichung für alle beliebigen z-Werte gelten und damit auch für $z = 0$. In diesem Fall lässt sich die Gleichung vereinfachen zu

$$H_e + H_r = H_t. \tag{2}$$

Einsetzen von Gleichung (2) in (1) resultiert in

$$H_e e^{-jk_1 \sin(\alpha_{e,1})z} + H_r e^{-jk_1 \sin(\alpha_{r,1})z} = H_e e^{-jk_2 \sin(\alpha_{t,1})z} + H_r e^{-jk_2 \sin(\alpha_{t,1})z}.$$

Ein Vergleich der Terme auf der linken und der rechten Seite der Gleichung führt dann auf das Reflexions- und das Brechungsgesetz wie oben.

b) Mit $t = 0$ und $\mathbf{r} = 0$ vereinfachen sich die gegebenen Gleichungen für das magnetische Feld zunächst zu:

$$\underline{\mathbf{H}}_e = H_e \mathbf{e}_x$$
$$\underline{\mathbf{H}}_r = H_r \mathbf{e}_x$$
$$\underline{\mathbf{H}}_t = H_t \mathbf{e}_x$$

Mit $\underline{\mathbf{E}} = Z\underline{\mathbf{H}} \times \mathbf{e}_k$ und unter Ausnutzung von $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_e &= Z_1 H_e \, \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_{k,e} \\ &= Z_1 H_e \mathbf{e}_x \times (\cos(\alpha_{e,1})\,\mathbf{e}_y + \sin(\alpha_{e,1})\,\mathbf{e}_z) \\ &= Z_1 H_e (\cos(\alpha_{e,1})\,\mathbf{e}_z - \sin(\alpha_{e,1})\,\mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

Reflektierte Welle:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_r &= Z_1 H_r \, \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_{k,r} \\ &= -Z_1 H_r \mathbf{e}_x \times (\cos(\alpha_{r,1})\,\mathbf{e}_y + \sin(\alpha_{r,1})\,\mathbf{e}_z) \\ &= -Z_1 H_r (\cos(\alpha_{e,1})\,\mathbf{e}_z + \sin(\alpha_{e,1})\,\mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

Durchgelassene Welle:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_t &= Z_2 H_t \, \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_{k,t} \\ &= Z_2 H_t \mathbf{e}_x \times (\cos(\alpha_{t,1})\,\mathbf{e}_y + \sin(\alpha_{t,1})\,\mathbf{e}_z) \\ &= Z_2 H_t (\cos(\alpha_{t,1})\,\mathbf{e}_z - \sin(\alpha_{t,1})\,\mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

c) Aus der Abbildung im Aufgabentext lässt sich schnell erkennen, dass der Brechungswinkel bzw. Transmissionswinkel $\alpha_{t,i}$ einer Grenzschicht i gerade dem Einfallswinkel $\alpha_{e,i+1}$ des Grenzübergangs $i+1$ entspricht. Der Brechungswinkel an einem beliebigen Übergang kann daher iterativ berechnet werden. Wenden wir dieses Prinzip auf die ersten zwei Grenzschichten an, so ergibt sich

Grenzschicht 1:

$$\begin{aligned} k_1 \sin(\alpha_{e,1}) &= k_2 \sin(\alpha_{t,1}) \Leftrightarrow \\ \omega\sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_{r,1}} \sin(\alpha_{e,1}) &= \omega\sqrt{\mu\epsilon_0\epsilon_r, 2} \sin(\alpha_{t,1}) \Leftrightarrow \\ \sqrt{\epsilon_r, 1} \sin(\alpha_{e,1}) &= \sqrt{\epsilon_{r,2}} \sin(\alpha_{t,1}) \Leftrightarrow \\ \sin(\alpha_{t,1}) &= \sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,2}}} \sin(\alpha_{e,1}) \Leftrightarrow \\ \alpha_{t,1} &= \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,2}}} \sin(\alpha_{e,1})\right] \\ \alpha_{e,2} &= \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,2}}} \sin(\alpha_{e,1})\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Grenzschicht 2: Hier gilt analog

$$\begin{aligned} k_2 \sin(\alpha_{e,2}) &= k_3 \sin(\alpha_{t,2}) \Leftrightarrow \\ \alpha_{t,2} &= \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,2}}{\epsilon_{r,3}}} \sin(\alpha_{e,2})\right] \end{aligned} \tag{4}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3) in (4) führt jedoch auf

$$\begin{aligned} \alpha_{t,2} &= \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,2}}{\epsilon_{r,3}}} \sin(\alpha_{e,2})\right] \Leftrightarrow \\ \alpha_{t,2} &= \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,2}}{\epsilon_{r,3}}} \sin\left(\arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,2}}} \sin(\alpha_{e,1})\right]\right)\right] \Leftrightarrow \\ \alpha_{t,2} &= \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,2}}{\epsilon_{r,3}}}\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,2}}} \sin(\alpha_{e,1})\right] \Leftrightarrow \\ \alpha_{t,2} &= \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,2}}{\epsilon_{r,3}}} \sin(\alpha_{e,1})\right] \end{aligned} \tag{5}$$

Wir können dies verallgemeinern zu

$$\alpha_{e,i+1} = \alpha_{t,i} = \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,i+1}}} \sin(\alpha_{e,1})\right],$$

und haben damit eine Gleichung gefunden, aus der sofort der Brechungswinkel $\alpha_{t,i}$ für jede beliebige Grenzschicht berechnet werden kann.

Da die relative dielektrische Permittivität der Luft mit sinkender Höhe abnimmt (siehe Abbildung), erfolgt die Brechung des Licht stets an einem Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium. Wie aus der Schulphysik bekannt ist, wird in diesem Fall der Strahl vom Lot weggebrochen und es gilt $\alpha_{e,i+1} > \alpha_{e,i}$. Im Folgenden soll berechnet werden, bei welchem Übergang N der kritische Winkel $\alpha_{e,\text{kritisch}}$ überschritten wird ($\alpha_{e,N} > \alpha_{e,\text{kritisch}}$), sodass der Brechungswinkel $\alpha_{t,N} > 90°$ beträgt und es somit zur Totalreflexion kommt. Wie in Übungsaufgabe 7 c) bereits hergeleitet, ist der kritische Winkel definiert als

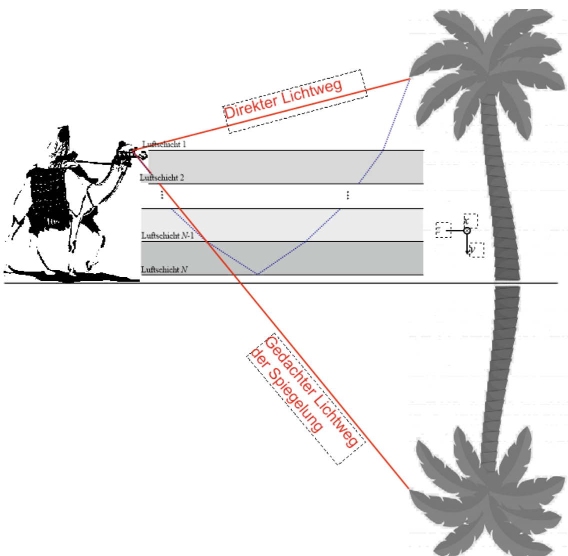
$$\alpha_{e,kritisch} = \alpha_{e,N} = \arcsin\left(\frac{k_{N+1}}{k_N}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r,N+1}}{\epsilon_{r,N}}}\right).$$

Die beiden zu erfüllenden Bedingungen für $\alpha_{e,N}$ lassen sich in einer Gleichung zusammenfassen zu

$$\begin{aligned}
\alpha_{e,N} = \arcsin\left[\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,N}}}\sin\left(\alpha_{e,1}\right)\right] &> \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r,N+1}}{\epsilon_{r,N}}}\right) \Leftrightarrow \\
\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,N}}}\sin\left(\alpha_{e,1}\right) &> \sqrt{\frac{\epsilon_{r,N+1}}{\epsilon_{r,N}}} \Leftrightarrow \\
\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\epsilon_{r,N}}}\sin\left(\alpha_{e,1}\right) &> \sqrt{\frac{\epsilon_{r,N+1}}{\epsilon_{r,N}}} \Leftrightarrow \\
\sqrt{\epsilon_{r,1}}\sin\left(\alpha_{e,1}\right) &> \sqrt{\epsilon_{r,N+1}} \Leftrightarrow \\
\epsilon_{r,N+1} &< \epsilon_{r,1}\sin^2\left(\alpha_{e,1}\right)
\end{aligned}$$

Für den gegebenen Zahlenwert $\alpha_e = 45°$ ergibt sich eine erforderliche relative Permittivität von $\epsilon_{r,N+1} \leq 0,5$. Mit $\epsilon_{r,1} = 1$ und $\Delta\varepsilon_r = 0,05$ sind zur Erfüllung der Bedingung also $N = 10$ oder $N = 11$ Grenzübergänge notwendig, je nachdem, ob man einen Brechungswinkel von 90 ° bereits als Totalreflexion bezeichnet oder nicht. Streng genommen ist dies nicht der Fall, da in diesem Fall der Brechungswinkel noch rein reell ist. Für andere Einfallswinkel, z.B. $\alpha_e = 50°$ ergibt sich ein eindeutiges Ergebnis. Der Fall für $\alpha_e = 45°$ ist ein Spezialfall.

d) Der Kamelreiter sieht eine Luftspiegelung der Palme, wobei die Palme auf dem Kopf zu stehen scheint. Dieser optische Effekt ist unter dem Namen *Fata Morgana* bekannt. Es handelt sich dabei jedoch nicht um eine optische Täuschung. Neben einfachen Spiegelungen sind auch Mehrfachspiegelungen möglich, die das Objekt wieder aufrechtstehend erscheinen lassen oder sogar Vergrößerungen. Eine berühmte Fata Morgana ist der aus der Seefahrt überlieferte Fliegende Holländer.
Anmerkung: Im realen Fall liegt ein kontinuierlicher Temperaturübergang in der Luft vor, sodass sich ein gekrümmter optischer Pfad ergibt. Zudem sind die Reflexionen an den höheren Luftschichten $i < N$ nicht ohne Weiteres vernachlässigbar.



e) Im Folgenden soll berechnet werden, welcher Anteil, der auf die erste Grenzfläche auftreffenden optischen Leistung den Kamelreiter über den in der Abbildung des Aufgabentextes skizzierten optischen Pfad erreicht. Dafür wird für jede vom Lichtstrahl passierte Grenzfläche i der Reflexionsfaktor $r_{p,i}$ berechnet und die Beziehung $1 - |r_{p,i}|^2 = 1 - R_i = T_i$ ausgenutzt, um den Anteil der transmittierten Leistung an der einfallenden Leistung $T = \frac{P_t}{P_e}$ zu bestimmen. Die Größen R und T werden auch als Reflexions- und Transmissionsgrad bezeichnet. Achtung: $T \neq |t_{p,i}|^2$!
Der prozentuale Anteil der Leistung, der am Ende des gesamten in der Abbildung skizzierten optischen Pfades ankommt, ergibt sich als Multiplikation aller relevanten Transmissionsfaktoren. Die Ergebnisse können tabellarisch zusammengefasst werden.

Aufgabe 7 e) – Parallele Polarisation, Hinweg

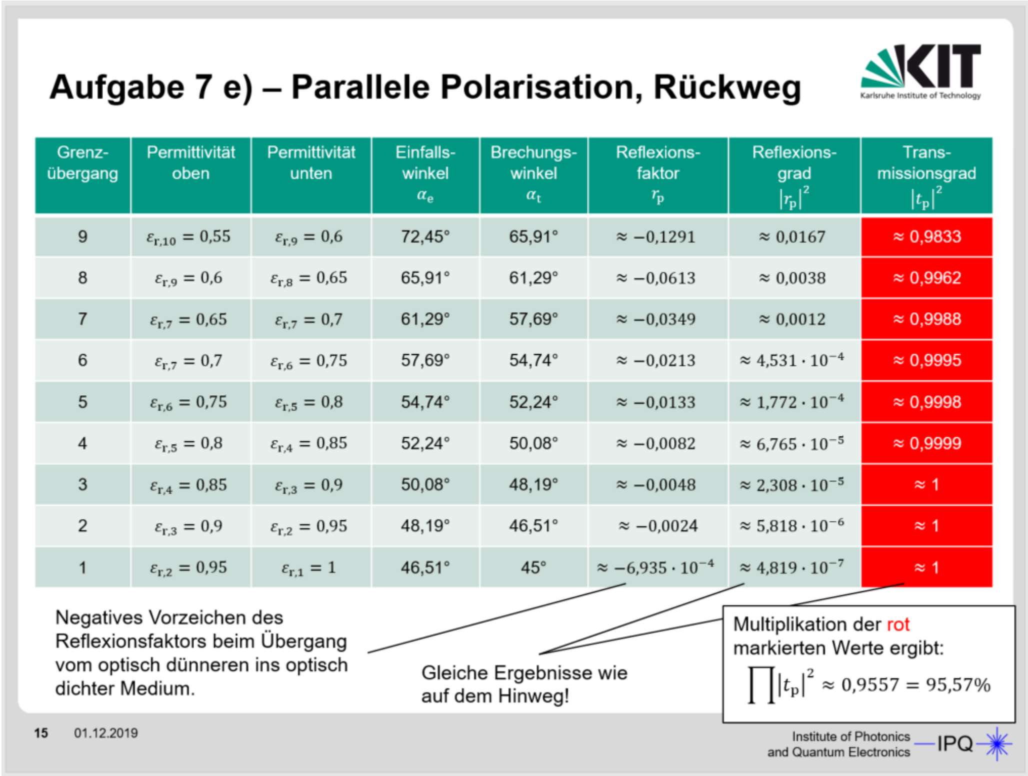
KIT Karlsruhe Institute of Technology

Grenzübergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfallswinkel α_e	Brechungswinkel α_t	Reflexionsfaktor r_p	Reflexionsgrad $\lvert r_p\rvert^2$	Transmissionsgrad $\lvert t_p\rvert^2$
1	$\varepsilon_{r,1} = 1$	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	45°	46,51°	$\approx 6{,}935 \cdot 10^{-4}$	$\approx 4{,}819 \cdot 10^{-7}$	≈ 1
2	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	46,51°	48,19°	$\approx 0{,}0024$	$\approx 5{,}818 \cdot 10^{-6}$	≈ 1
3	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	48,19°	50,08°	$\approx 0{,}0048$	$\approx 2{,}308 \cdot 10^{-5}$	≈ 1
4	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	50,08°	52,24°	$\approx 0{,}0082$	$\approx 6{,}765 \cdot 10^{-5}$	≈ 0,9999
5	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	52,24°	54,74°	$\approx 0{,}0133$	$\approx 1{,}772 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9998
6	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	54,74°	57,69°	$\approx 0{,}0213$	$\approx 4{,}531 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9995
7	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	57,69°	61,29°	$\approx 0{,}0349$	$\approx 0{,}0012$	≈ 0,9988
8	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	61,29°	65,91°	$\approx 0{,}0613$	$\approx 0{,}0038$	≈ 0,9962
9	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	65,91°	72,45°	$\approx 0{,}1291$	$\approx 0{,}0167$	≈ 0,9833
10	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{r,11} = 0{,}5$	72,45°	90,00°	1	1	0

Ausfallswinkel $\alpha_r = 72{,}45°$

Allgemein gilt: $1 + |r_p|^2 = |t_p|^2$

14 01.12.2019 Institute of Photonics and Quantum Electronics — IPQ



Aufgabe 7 e) – Parallele Polarisation, Rückweg

Grenzübergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfallswinkel α_e	Brechungswinkel α_t	Reflexionsfaktor r_p	Reflexionsgrad $\lvert r_p\rvert^2$	Transmissionsgrad $\lvert t_p\rvert^2$
9	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	72,45°	65,91°	$\approx -0{,}1291$	$\approx 0{,}0167$	≈ 0,9833
8	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	65,91°	61,29°	$\approx -0{,}0613$	$\approx 0{,}0038$	≈ 0,9962
7	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}65$	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	61,29°	57,69°	$\approx -0{,}0349$	$\approx 0{,}0012$	≈ 0,9988
6	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	57,69°	54,74°	$\approx -0{,}0213$	$\approx 4{,}531 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9995
5	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	54,74°	52,24°	$\approx -0{,}0133$	$\approx 1{,}772 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9998
4	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	52,24°	50,08°	$\approx -0{,}0082$	$\approx 6{,}765 \cdot 10^{-5}$	≈ 0,9999
3	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	50,08°	48,19°	$\approx -0{,}0048$	$\approx 2{,}308 \cdot 10^{-5}$	≈ 1
2	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	48,19°	46,51°	$\approx -0{,}0024$	$\approx 5{,}818 \cdot 10^{-6}$	≈ 1
1	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{r,1} = 1$	46,51°	45°	$\approx -6{,}935 \cdot 10^{-4}$	$\approx 4{,}819 \cdot 10^{-7}$	≈ 1

Negatives Vorzeichen des Reflexionsfaktors beim Übergang vom optisch dünneren ins optisch dichter Medium.

Gleiche Ergebnisse wie auf dem Hinweg!

Multiplikation der rot markierten Werte ergibt:

$$\prod |t_p|^2 \approx 0{,}9557 = 95{,}57\%$$

15 01.12.2019

Institute of Photonics and Quantum Electronics — IPQ

Unter der Annahme, dass sich das Auge des Kamelreiters bzw. Kamels in der ersten Luftschicht befindet, werden nach der Totalreflexion alle Luftschichten erneut durchquert. Es ergeben sich dabei exakt die gleichen Winkel wie auf dem Hinweg, da diese einzig und allein durch die Materialeigenschaften beeiflusst werden. Der Reflexionsfaktor r hat dann ein negatives Vorzeichen, da die Übergänge vom optisch dünneren ins optisch dichtere Material erfolgen und daher für die verwendeten Winkel $\sqrt{\epsilon_i + 1}\cos(\alpha_{e,i}) - \sqrt{\epsilon_i}\cos(\alpha_{t,i}) < 0$ gilt. Der Anteil der am Kamelreiter ankommenden optischen Leistung ergibt sich durch Multiplikation aller im Bild rot markierten Werte.

f) Für die senkrechte Polarisation ist das Vorgehen exakt das gleiche, zumal die Winkel für beide Polarisationen identisch sind. Es unterscheidet sich lediglich die Fresnel-Formel, welche zur Berechnung des Reflexionsfaktors $r_{s,1}$ herangezogen wird, von jener die zur Bestimmung von $r_{p,1}$ verwendet wurde. Die Beziehung $1 - |r_{s,i}|^2 = 1 - R_i = T_i$ ist nach wie vor gültig.

Aufgabe 7 f) – Senkrechte Polarisation, Hinweg

Für den Fall der senkrechten Polarisation endet sich lediglich die Fresnel-Formel.

Grenz-übergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfalls-winkel α_e	Brechungs-winkel α_t	Reflexions-faktor r_p	Reflexions-grad $\lvert r_p \rvert^2$	Trans-missionsgrad $\lvert t_p \rvert^2$
1	$\varepsilon_{r,1} = 1$	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	45°	46,51°	$\approx 0{,}0263$	$\approx 6{,}935 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9993
2	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	46,51°	48,19°	$\approx 0{,}0294$	$\approx 8{,}666 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9991
3	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	48,19°	50,08°	$\approx 0{,}0334$	$\approx 0{,}0011$	≈ 0,9989
4	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	50,08°	52,24°	$\approx 0{,}0385$	$\approx 0{,}0015$	≈ 0,9985
5	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	52,24°	54,74°	$\approx 0{,}0455$	$\approx 0{,}0021$	≈ 0,9979
6	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	54,74°	57,69°	$\approx 0{,}0557$	$\approx 0{,}0031$	≈ 0,9969
7	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	57,69°	61,29°	$\approx 0{,}0718$	$\approx 0{,}0052$	≈ 0,9948
8	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	61,29°	65,91°	$\approx 0{,}1010$	$\approx 0{,}0102$	≈ 0,9898
9	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	65,91°	72,45°	$\approx 0{,}1716$	$\approx 0{,}0294$	≈ 0,9706
10	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{r,11} = 0{,}5$	72,45°	90,00°	1	1	0

Ausfallswinkel $\alpha_r = 72{,}45°$

16 01.12.2019

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Aufgabe 7 f) – Senkrechte Polarisation, Hinweg

Für den Fall der senkrechten Polarisation endet sich lediglich die Fresnel-Formel.

Grenz-übergang	Permittivität oben	Permittivität unten	Einfalls-winkel α_e	Brechungs-winkel α_t	Reflexions-faktor r_p	Reflexions-grad $\lvert r_p \rvert^2$	Trans-missionsgrad $\lvert t_p \rvert^2$
1	$\varepsilon_{r,1} = 1$	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	45°	46,51°	$\approx 0{,}0263$	$\approx 6{,}935 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9993
2	$\varepsilon_{r,2} = 0{,}95$	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	46,51°	48,19°	$\approx 0{,}0294$	$\approx 8{,}666 \cdot 10^{-4}$	≈ 0,9991
3	$\varepsilon_{r,3} = 0{,}9$	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	48,19°	50,08°	$\approx 0{,}0334$	$\approx 0{,}0011$	≈ 0,9989
4	$\varepsilon_{r,4} = 0{,}85$	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	50,08°	52,24°	$\approx 0{,}0385$	$\approx 0{,}0015$	≈ 0,9985
5	$\varepsilon_{r,5} = 0{,}8$	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	52,24°	54,74°	$\approx 0{,}0455$	$\approx 0{,}0021$	≈ 0,9979
6	$\varepsilon_{r,6} = 0{,}75$	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	54,74°	57,69°	$\approx 0{,}0557$	$\approx 0{,}0031$	≈ 0,9969
7	$\varepsilon_{r,7} = 0{,}7$	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	57,69°	61,29°	$\approx 0{,}0718$	$\approx 0{,}0052$	≈ 0,9948
8	$\varepsilon_{r,8} = 0{,}65$	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	61,29°	65,91°	$\approx 0{,}1010$	$\approx 0{,}0102$	≈ 0,9898
9	$\varepsilon_{r,9} = 0{,}6$	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	65,91°	72,45°	$\approx 0{,}1716$	$\approx 0{,}0294$	≈ 0,9706
10	$\varepsilon_{r,10} = 0{,}55$	$\varepsilon_{r,11} = 0{,}5$	72,45°	90,00°	1	1	0

Ausfallswinkel $\alpha_r = 72{,}45°$

16 01.12.2019

Institute of Photonics and Quantum Electronics IPQ

Da die senkrecht polarisierten Anteile des Lichts an den Grenzübergängen stärker reflektiert werden, erreicht ein größerer Anteil der ursprünglichen Leistung nicht den Kamelreiter als im Falle von Aufgabe e) zumindest unter der Bedingung, dass Mehrfachreflexionen vernachlässigt werden). Das gespiegelte Bild erscheint daher intensiver, wenn das Licht rein polarisiert ist. Natürliches Licht ist im Normalfall jedoch unpolarisiert, d.h. sowohl parallele als auch senkrechte Polarisationsanteile tragen zum Phänomen der Fata Morgana bei.

Hinweis:
Obwohl der Effekt der *Fata Morgana* in der Realität auftritt, handelt es sich bei dem behandelten System aus Grenzflächen um ein theoretisches Konstrukt. So wurde die relative Permittivität der ersten Luftschicht $\epsilon_{r,1} = 1$ gewählt, obwohl Luft tatsächlich eine etwas größere Permittivität aufweist als Vakuum ($\epsilon_{r,1} \approx 1,00059$). Auch der Unterschied der relativen Permittivität zweier aufeinanderfolgender Grenzschichten wurde deutlich größer gewählt als üblich, nämlich $\Delta\varepsilon_r = 0,05$ statt $\Delta\varepsilon_r \approx 10^{-6}$. Dies hat den Vorteil, dass es nach einer relativ kleinen Anzahl N von Luftschichten bereits zur Totalreflexion kommt. Andererseits ist dies ein unphysikalisches Szenario, weil die relative Permittivität ϵ_r damit bereits für die zweite Schicht unter jenen Wert von Vakuum fällt. Dielektrische Materialien, die optisch dünner als Vakuum sind, kommen in der Natur aber nicht vor. Jedoch gibt es Experimente mit Metamaterialien, bei denen derartige relative Permittivitäten erreicht wurden und auch für Plasmen kann dies passieren. Auch negative Werte für ϵ_r sind durchaus möglich, beispielsweise in Metallen.
Ziel der Aufgabe war es, den Umgang mit Grenzflächensystemen bestehend aus mehr als einer Grenzschicht an einem praktischen Beispiel (*Fata Morgana*) zu erlernen. Wie in der Lösung dargestellt, verlangt die Behandlung eines komplizierten Systems aus Grenzflächen lediglich die gleichen mathematischen Konzepte wie die Behandlung einer einzelnen Grenzfläche.

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 7

Abgabe bis zum 9.12.2019 um 11:30Uhr

9. Aufgabe

Die Felder im Wellenleiter haben die Form

$$\underline{\mathbf{E}}(x,y,z,t) = \underline{\mathbf{E}}_0(x,y)e^{j(\omega t - k_z z)},$$
$$\underline{\mathbf{H}}(x,y,z,t) = \underline{\mathbf{E}}_0(x,y)e^{j(\omega t - k_z z)}.$$

Aus der Aufgabenstellung gegeben für TM-Wellen gilt (Berechnet werden $\vec{E}_0$ und $\vec{H}_0$, der Subskript 0 wird weggelassen)

$$E_x = \frac{-jk_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$
$$E_y = \frac{-jk_z}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$
$$H_x = \frac{j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}$$
$$H_y = \frac{-j\omega\varepsilon}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$\frac{\partial}{\partial y} = 0$ wegen der unendlich Ausdehnung in y-Richtung $\Rightarrow$ nur E_x und H_y existieren.

a) Wellengleichung für E_z

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + (\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2)E_z = 0$$

Mit $k_x^2 = \omega^2\mu\varepsilon - k_z^2$ haben die Lösungen dieser Gleichung die Form

$$E_z = A\sin k_x x + B\cos k_x x$$

E_z ist die Tangentialkomponente des $\vec{E}$-Feldes. Für $x = 0$ und $x = a$ gilt die Randbedingung $E_z = 0$

$$E_z = 0 \text{ für } x = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$E_z = 0 \text{ für } x = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ (kein Feld)}$$
$$\text{oder}$$
$$k_x a = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
$$k_x = \frac{n\pi}{a}$$

$$E_z = A \sin \frac{n\pi x}{a}$$

Aus E_z werden die transversalen Komponenten der Felder berechnet

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-jk_z}{k_x^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{-jk_z}{k_x} A \cos k_x x = \frac{-jk_z a}{n\pi} A \cos \frac{n\pi x}{a} \\ H_y &= \frac{-j\omega\varepsilon}{k_x^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{-j\omega\varepsilon}{k_x} A \cos k_x x = \frac{-j\omega\varepsilon a}{n\pi} A \cos \frac{n\pi x}{a} \end{aligned}$$

b) Berechnung von k_z

$$\begin{aligned} \omega^2\mu\varepsilon - k_z^2 &= k_x^2 \\ \omega^2\mu\varepsilon - k_z^2 &= \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ k_z^2 &= \omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \\ k_z &= \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \\ k_z &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

k_z wird als positiv angenommen, negatives k_z ändert nur die Ausbreitungsrichtung. Eine Welle existiert nur, wenn k_z reell ist.

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \frac{1}{\mu\varepsilon}} \\ \Rightarrow \omega &> \frac{n\pi}{a}\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \end{aligned}$$

Es gibt also eine sogenannte Cut-Off-Frequenz ω_c, unterhalb der keine Wellenausbreitung möglich ist. Die Cut-Off-Frequenz hängt von der Dimension a und der Modennummer n ab.

$$\omega_{cn} = \frac{n\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}a} = \frac{n\pi c_0}{a}$$

c) Phasengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_{ph} &= \frac{\omega}{k_z} \\ &= \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{c_0\,\omega}\sqrt{\omega^2 - \left(\frac{n\pi c_0}{a}\right)^2}} \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c_0}{\omega a}\right)^2}} > c_0 \end{aligned}$$

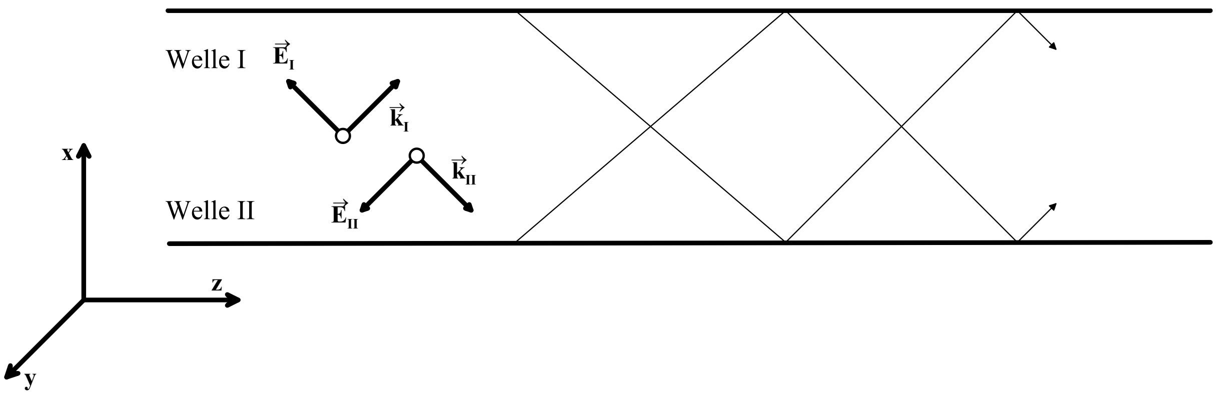
c_0 ist die Lichtgeschwindigkeit im Medium zwischen den Platten. Berechnung der

Gruppengeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}
v_g = \frac{d\omega}{dk_z} &= \frac{1}{\frac{dk_z}{d\omega}} \\
&= \left(2\mu\varepsilon\omega \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}} \right)^{-1} \\
&= \frac{c_0^2}{\omega} \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \\
&= c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c_0}{\omega a}\right)^2} < c_0
\end{aligned}$$

Es gilt $v_{ph}\, v_g = c_0^2$. Die Gruppengeschwindigkeit ist demnach kleiner als die Vakuumslichtgeschwindigkeit und die Phasengeschwindigkeit ist größer als die Vakuumslichtgeschwindigkeit.

d) Die Phase der TM-Welle in z-Richtung kann als Überlagerung zweier ebener Vakuumswellen betrachtet werden, die an den Wänden reflektiert werden. Die Phasengeschwindigkeit der TM-Welle ist die Geschwindigkeit mit der sich das Feldbild (Superposition der Wellen) in z-Richtung bewegt, welches sich mit $v_{ph} > c_0$ auszubreiten scheint. Anhand der Abbildung unten ist aber anschaulich klar, dass sich ein Wellenpaket nur mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g < c_0$ in z-Richtung ausbreiten kann, da die einzelnen Wellen aufgrund des schrägen Einfalls einen längeren Weg zurücklegen müssen.



Mathematisch kann dies hergeleitet werden aus der Betrachtung der TM-Well in vektorieller Form:

$$\mathbf{E} = A \begin{pmatrix} -j\frac{k_z}{k_x}\cos k_x x \\ 0 \\ \sin k_x x \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{-j}{2}\left(e^{jx} - e^{-jx}\right) \\
\cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{jx} + e^{-jx}\right)
\end{aligned}$$

lässt sich schreiben:

$$\mathbf{E} = A \begin{pmatrix} \frac{-j}{2}\frac{k_z}{k_x}\left(e^{jk_xx} + e^{-jk_xx}\right) \\ 0 \\ \frac{-j}{2}\left(e^{jk_xx} - e^{-jk_xx}\right) \end{pmatrix} e^{j(\omega t - k_z z)}$$

$$\mathbf{E} = \frac{-jA}{2}\left[\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{k_z}{k_x}e^{j(\omega t - k_xx - k_zz)} \\ 0 \\ -e^{j(\omega t - k_xx - k_zz)} \end{pmatrix}}_{\text{Welle } I} + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{k_z}{k_x}e^{j(\omega t + k_xx - k_zz)} \\ 0 \\ e^{j(\omega t + k_xx - k_zz)} \end{pmatrix}}_{\text{Welle } II}\right]$$

Die TM-Welle lässt sich in zwei schräg laufende Wellen I und II zerlegen. Die Wellenzahl wird bei schräg laufenden Wellen zu einem Wellenvektor:

Welle I:

$$\mathbf{E}_I = \frac{-jA}{2}\begin{pmatrix} \frac{k_z}{k_x} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{j\left(\omega t - \vec{r}\vec{k}_I\right)}$$

$$\mathbf{k}_I = \begin{pmatrix} k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

Welle II:

$$\mathbf{E}_{II} = \frac{-jA}{2}\begin{pmatrix} \frac{k_z}{k_x} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{j\left(\omega t - \vec{r}\vec{k}_{II}\right)}$$

$$\mathbf{k}_{II} = \begin{pmatrix} -k_x \\ 0 \\ k_z \end{pmatrix}$$

Die Wellenvektoren stehen senkrecht auf dem E-Feld und sind parallel zum Pointingvektor. Dies lässt sich zeigen, indem man das Skalarprodukt zwischen E-Feld und Wellenvektor bildet:

$$\mathbf{E}_I \cdot \mathbf{k}_I \sim \left(\frac{k_z}{k_x}k_x - k_z\right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_I \perp \mathbf{k}_I$$

$$\mathbf{E}_{II} \cdot \mathbf{k}_{II} \sim \left(-\frac{k_z}{k_x}k_x + k_z\right) = 0 \Rightarrow \mathbf{E}_{II} \perp \mathbf{k}_{II}$$

Berechnet man den Betrag des Wellenvektors, erhält man:

$$|\mathbf{k}_I| = |\mathbf{k}_{II}| = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$
$$= \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c_0}$$

Daraus folgt für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten:

$$v_{ph,I} = v_{ph,II} = \frac{\omega}{|\mathbf{k}_I|} = c_0$$

$$v_{gI} = v_{gII} = \frac{d\omega}{d|\mathbf{k}_I|} = \left(\frac{d|\mathbf{k}_I|}{d\omega}\right)^{-1} = c_0$$

d) Leistungsdichte der Moden: Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\Re\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right) = \frac{1}{2}\Re\left((E_x\vec{e}_x + E_z\vec{e}_z)\times H_y^*\vec{e}_y\right)$$

Der Poynting-Vektor besteht aus zwei Teilen

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Re\left(E_x\mathbf{e}_x\times H_y^*\mathbf{e}_y\right) &= \frac{1}{2}\Re\left(\frac{-jk_za}{n\pi}A\cos\frac{n\pi x}{a}e^{j(\omega t-k_zz)}\cdot\frac{j\omega\varepsilon a}{n\pi}A\cos\frac{n\pi x}{a}e^{-j(\omega t-k_zz)}(\mathbf{e}_x\times\ \mathbf{e}_y)\right)\\ &= \frac{1}{2}\frac{k_z\omega\varepsilon a^2}{n^2\pi^2}A^2\cos^2\frac{n\pi x}{a}\,\mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Energie wird in z-Richtung transportiert.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Re\left(E_z\mathbf{e}_z\times H_y^*\mathbf{e}_y\right) &= \frac{1}{2}\Re\left(\frac{jk_za}{n\pi}A^2\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi x}{a}\ \mathbf{e}_x\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

E_z ist reell, H_y imaginär. In x Richtung wird keine Energie transportiert (nur Blindleistung).

Fragen und Kommentare

Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M.Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)

Elektromagnetische Wellen

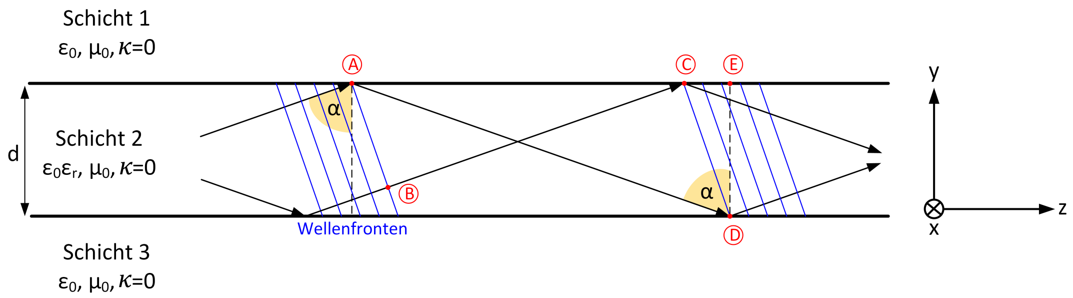
WS 2019/20

Übungsblatt 8

Abgabe bis zum 16.12.2019 um 11:30 Uhr

10. Aufgabe

Gegeben sei ein dielektrischer Plattenleiter, der sich aus drei übereinander geschichteten Dielektrika zusammensetzt und die einfachste Form eines optischen Wellenleiters darstellt. Längs dieses Wellenleiters breite sich eine elektromagnetische Welle aus. Die Wellenausbreitung kann anhand einer ebenen Welle anschaulich gemacht werden, die an den Grenzflächen wiederholt reflektiert wird.



a) Stellen Sie mit Hilfe der Abbildung zunächst die Bedingung dafür auf, dass sich ein konstantes in z-Richtung laufendes Wellenbild / Feldmuster ergibt. Gehen Sie davon aus, dass der in der Abbildung gegebene Winkel α größer als der kritische Winkel zur Totalreflexion ist. Welche Konsequenz ergibt sich aus der hergeleiteten Bedingung für den Einfallswinkel α der ebenen Welle?

Aus a) wird ersichtlich, dass sich nur dann eine elektromagnetische Welle im Wellenleiter ausbreiten kann, wenn sich einfallende und reflektierte Wellenanteile derart überlagern, dass sich eine stehende Welle ausbildet. Das entstehende konstante Wellenbild / Feldmuster, das sich in z-Richtung ausbreitet wird auch als Modus (englisch: mode) bezeichnet.

b) Gehen Sie vom Durchflutungsgesetz und Induktionsgesetz aus und zeigen Sie, dass es zwei Modenfamilien (senkrechte und parallele Polarisation oder in der Literatur auch TM- und TE-Moden) gibt, die sich unabhängig voneinander im Wellenleiter ausbreiten können. Nutzen Sie dazu die Tatsache, dass der Wellenleiter in x-Richtung unendlich ausgedehnt ist.
<u>Hinweis:</u> Nehmen Sie die Vorlesungsunterlagen (S. 31 und 32) zu Hilfe, wenn Sie nicht auf den richtigen Lösungsweg kommen.

Eine Welle mit senkrechter Polarisation (TE-Mode) mit dem elektrischen Feld $\underline{\mathcal{E}}_x$ breitet sich in z-Richtung aus. Demnach gilt für das elektrische Feld an jedem beliebigen Ort

$$\underline{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \underline{\mathcal{E}}_0(x, y)e^{j(\omega t - k_z z)} = \underline{\mathcal{E}}_x(y)e^{j(\omega t - k_z z)}\mathbf{e}_x = \underline{E}_x\mathbf{e}_x, \quad (1)$$

wobei $\mathcal{E}$ kennzeichnet, dass sich um das ortsfeste Feldmuster (Mode) handelt.

c) Leiten Sie eine allgemeine Gleichung für das elektrische Feld $\underline{\mathcal{E}}_x$ der TE-Mode her. Starten Sie dazu von der Wellengleichung aus, welche die TE-Mode erfüllen muss. Wählen Sie dann einen geeigneten Ansatz für die Lösung der Wellengleichung in den verschiedenen dielektrischen Schichten und verwenden Sie die Randbedingungen (bzw. Stetigkeitsbedingungen) an den Grenzflächen.

d) Skizzieren Sie das elektrische Feld $\underline{\mathcal{E}}_x$ der ersten drei TE-Moden, welche sich im Wellenleiter ausbreiten können, über der y-Achse. Welcher wesentliche Unterschied besteht gegenüber der in der 9. Aufgabe diskutierten Parallelplattenleitung mit ideal leitfähigen Platten?

e) Berechnen Sie die zugehörigen magnetischen Felder $\underline{\mathcal{H}}_y$ und $\underline{\mathcal{H}}_z$ der TE-Mode.

Fragen und Kommentare

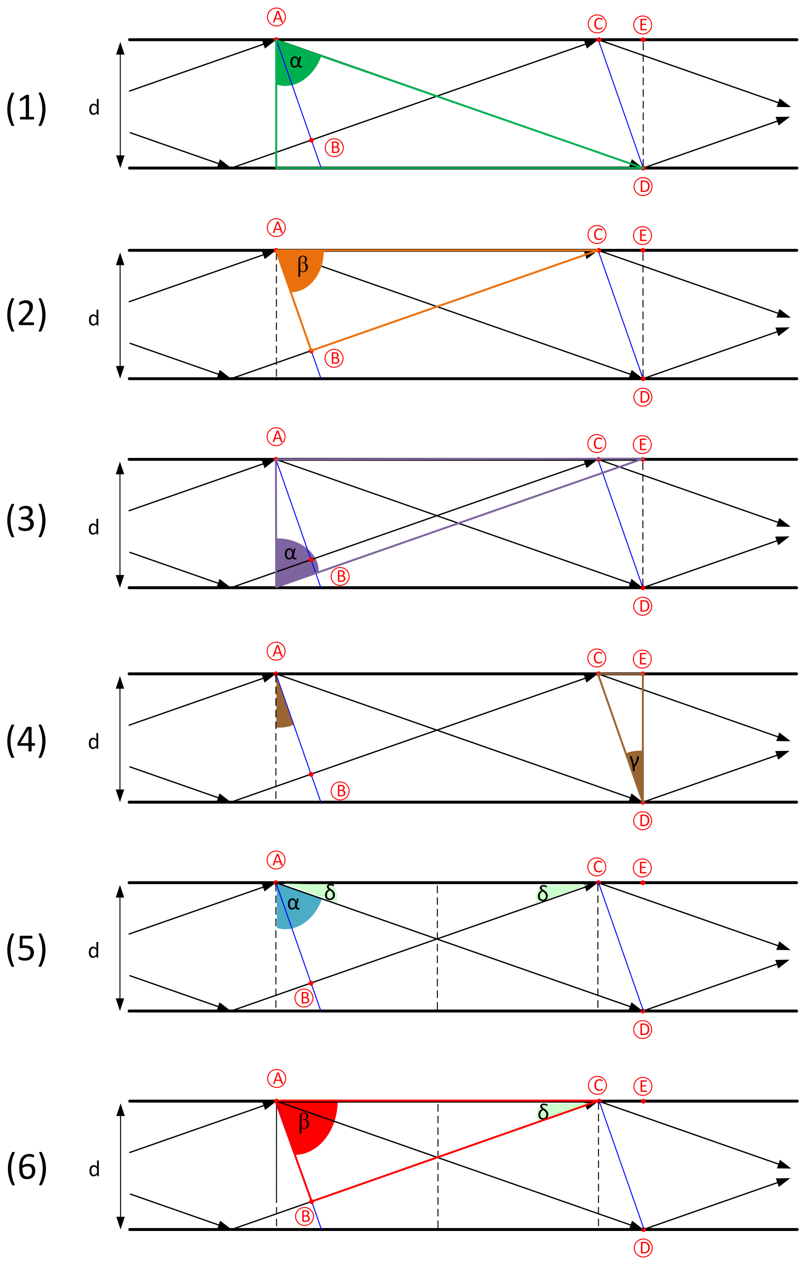
Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M. Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 8

10. Aufgabe



a)

– Aus Abbildung (1) entnehmen wir unter Ausnutzung des Reflexionsgesetzes, dass die Distanz $\overline{\mathrm{AD}}$ gerade durch den Kosinus ausgedrückt werden kann mit $\overline{AD} = \frac{d}{\cos(\alpha)}$.
– Für die Distanz $\overline{\mathrm{BC}}$ gilt nach Abbildung (2) hingegen, dass $\overline{\mathrm{BC}} = \sin(\beta)\overline{\mathrm{AC}}$. Jedoch kennen wir diese Strecke $\overline{\mathrm{AC}}$ noch nicht.
– Wir können die unbekannte Strecke $\overline{\mathrm{AC}}$ ausdrücken durch $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AE}} - \overline{\mathrm{CE}}$, wobei $\overline{\mathrm{AE}} = \tan(\alpha)d$ gemäß Abbildung (3) und $\overline{\mathrm{CE}} = \tan(\gamma)d$ gemäß Abbildung (4). Dort sehen wir auch, dass $\gamma = 90° - \alpha$ gelten muss. Damit folgt: $\overline{\mathrm{BC}} = \sin(\beta)d\,[\tan(\alpha) - \tan(\gamma)]$
– Noch sind die Winkel β und γ unbekannt, doch zeigen die Abbildungen (5) und (6), dass $\delta = \gamma$ und dass sowohl $\delta = 90° - \alpha$ gilt, als auch $\delta = 90° - \beta$. Dies resultiert in $\beta = \alpha$.
– Insgesamt ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{BC}} &= \sin(\alpha)d\,[\tan(\alpha) - \tan(90° - \alpha)] \\
&= \sin(\alpha)d\left[\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)}\right] \\
&= d\left[\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\right] \\
&= d\left[\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha)\right]
\end{aligned}$$

Der Phasenunterschied zwischen beiden Wegen $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ muss ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ergeben. Die Phase resultiert aus den Phasensprüngen bei der Reflexion an der Grenzfläche φ_s, sowie dem Skalarprodukt der zurückgelegten Strecke und dem Wellenvektor $\mathbf{k}_2\mathbf{r} = |k_2||r|$. Somit erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned}
k_1\overline{AD} + 2\varphi_s &= k_1\overline{BC} + m2\pi \Leftrightarrow \\
k_1\frac{d}{\cos(\alpha)} + 2\varphi_s &= k_1 d\left[\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} - \cos(\alpha)\right] + m2\pi \Leftrightarrow \\
k_1 d\left[\frac{1}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)} + \cos(\alpha)\right] &= -2\varphi_s + m2\pi \Leftrightarrow \\
k_1 d\left[\frac{\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2}{\cos(\alpha)}\right] &= -2\varphi_s + m2\pi \Leftrightarrow \\
k_1 d 2\cos(\alpha) &= -2\varphi_s + m2\pi \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Hinweis: entlang des Weges $\overline{BC}$ tritt kein Phasensprung auf, da die gemäß Abbildung betrachtete Wellenfront für den Punkt C die Wellenfront vor der Reflexion darstellt.

b) Für ein homogenes, nichtleitendes und raumladungsfreies Medium lauten das Durchflutungsgesetz und Induktionsgesetz in komplexer Zeigerschreibweise

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \varepsilon\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} = \varepsilon\begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial t} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \\ \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -\mu \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} = -\mu \begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Aufgrund der unendlichen Ausdehnung der Wellenfronten der einfallenden und reflektierten Wellen in x-Richtung erstreckt sich auch das Wellenbild (die Mode) unendlich weit in dieser Dimension. Damit gilt $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ und es ergeben sich letztlich zwei unabhängige Paare gekoppelter Differentialgleichungen wie schon im Fall ebener Wellen (vgl. Vorlesungsunterlagen S. 31 und 32). Das erste Paar enthält die Feldkomponenten $\{E_x, H_y, H_z\}$, wird aufgrund der rein transversalen elektrischen Feldkomponente als **TE-Polarisation** bezeichnet und ist identisch zur **senkrechten Polarisation**. Hingegen setzt sich das zweite aus den Feldkomponenten $\{H_x, E_y, E_z\}$ zusammen und wird aufgrund der rein transversalen magnetischen Feldkomponente als **TM-Polarisation** oder **parallele Polarisation** bezeichnet.

TE-Polarisation	TM-Polarisation
$\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} = -\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial t}$	$\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial t}$
$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial t}$	$\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial t}$
$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial t}$	$-\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial t}$

c) Das elektrische Feld im Wellenleiter $\underline{\mathbf{E}}(x, y, z, t) = \underline{\mathcal{E}}_x(y) e^{j(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_x = \underline{E}_x \mathbf{e}_x$ muss die Wellengleichung erfüllen. Da bei Einsetzen von $\underline{E}_x$ aus (1) der Exponentialterm auf beiden Seiten der Wellengleichung gleichermaßen auftauchen würde, kann die Wellengleichung auf die Mode $\underline{\mathcal{E}}_x$ reduziert werden. Die Wellengleichung ist allgemein definiert als

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} - \epsilon_i \mu \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial t^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial z^2} - \epsilon_i \mu \frac{\partial^2 \underline{E}_x}{\partial t^2} &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{E}}_x}{\partial y^2} + \left(\omega^2 \mu \epsilon_i - k_z^2\right) \underline{\mathcal{E}}_x &= 0 \Leftrightarrow \\ \frac{\partial^2 \underline{\mathcal{E}}_x}{\partial y^2} + \left(k_i^2 - k_z^2\right) \underline{\mathcal{E}}_x &= 0, \end{aligned}$$

wobei k_i und ϵ_i die Wellenzahl und Permittivität der i-ten dielektrischen Schicht enthalten, mit $i \epsilon \{1, 2, 3\}$. Die zweite partielle Ableitung nach der Variable x entfällt aufgrund der unendlichen Ausdehnung des Wellenleiters und damit auch der Mode in diese Richtung. Wie immer bei Totalreflexion ist die Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung identisch, $k_z = k_{z,1} = k_{z,2} = k_{z,3}$. Aus der Symmetrie der Anordnung (Schicht 1 = Schicht 3) ergibt sich zudem $k_1 = k_3$. Im Allgemeinen gilt für die Wellenzahl der zweiten Schicht $|\mathbf{k}_2| = \sqrt{k_{x,2}^2 + k_{y,2}^2 + k_{z,2}^2} = \sqrt{k_{y,2}^2 + k_{z,2}^2}$ und aufgrund der Symmetrie der Anordnung $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_3| = \sqrt{k_{x,1}^2 + k_{y,1}^2 + k_{z,1}^2} = \sqrt{k_{y,1}^2 + k_{z,1}^2}$.

Die Lösung der Wellengleichung unterscheidet sich von Schicht zu Schicht. Jenseits der Grenzflächen (Schichten 1 und 3) muss das elektrische Feld aufgrund der Totalreflexion exponentiell mit y abklingen (evaneszentes Feld), wohingegen zwischen den beiden Grenzflächen (Schicht 2) eine stehende Welle entstehen muss, damit sich die Welle ausbreiten kann. In diesem Fall wählen wir daher einen harmonischen Ansatz.

$$\underline{\mathcal{E}}_x = \begin{cases} B\exp(k_B y), & y < -\frac{d}{2} \\ A\cos(k_A y), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ C\exp(-k_C y), & y > \frac{d}{2} \end{cases}$$

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass dich die Höhe des Wellenleiters gleichmäßig auf den positiven und negativen y-Bereich verteilt. Da das Feldstärkemaximum der ersten Mode in diesem Fall bei $y = 0$ liegt, bietet sich ein Kosinus als harmonische Funktion an. Zur Bestimmung der Unbekannten k_A, k_B, k_C setzen wir die Lösungsansätze zunächst einzeln in die Wellengleichung ein.

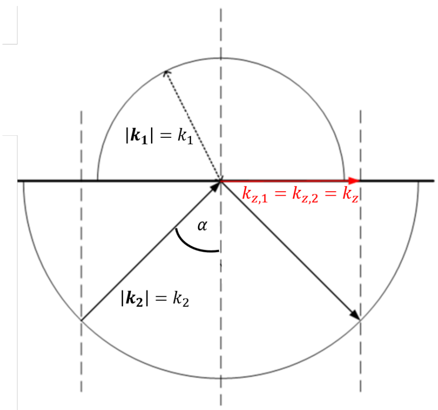
Fall 1: $-\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}$, $k_i = k_2$

$$-Ak_A^2\cos(k_A y) + \left(k_2^2 - k_z^2\right) A\cos(k_A y) = 0 \Leftrightarrow$$
$$k_A^2 = k_2^2 - k_z^2 = k_{2,y}^2$$

Da die Wellenzahl $k_{2,y}$ rein reell ist, treten in diesem Fall keine Komplikationen auf.

In Fall 2 und 3 ergibt sich jedoch eine Besonderheit.

- Der kritische Winkel der Totalreflexion ergibt sich aus dem Brechungsgesetz $k_2\sin(\alpha) = k_1\sin(\alpha_t)$ für einen Transmissionswinkel $\alpha_t = 90°$ mit $k_2\sin(\alpha_{\text{krit}}) = k_1$. Da die Sinusfunktion für wachsende Winkel $\alpha\,\epsilon\,[0°, 90°]$ größer wird, gilt für Winkel $\alpha > \alpha_{\text{krit}}$ demnach, dass $k_2\sin(\alpha) > k_1$
- Aus der Abbildung in der Aufgabenstellung lässt sich durch trigonometrische Beziehungen erkennen, dass $k_{z,2} = k_2\sin(\alpha)$.
- Wie bereits zuvor erwähnt, gilt aufgrund der Totalreflexion $k_z = k_{z,1} = k_{z,2} = k_{z,3}$. In Kombination mit der vorherigen Beziehung folgt daraus $k_{1,z} = k_2\sin(\alpha) > k_1$, Im Material jenseits der Grenzfläche (d.h. Schicht 1) ist die Wellenzahl in z-Richtung $k_{1,z}$ also größer als der Betrag der Wellenzahl k_1 insgesamt, siehe Abbildung unten. Folglich muss die Wellenzahl in y-Richtung rein imaginär werden, d.h. $k_{1,y} = \sqrt{k_1^2 - k_{1,z}^2} < 0 \Leftrightarrow k_{1,y} = \pm jk_{1,y}^{(i)}$, wobei der Index (i) den Imaginärteil kennzeichnet. Alternativ finden wir also den Imaginärteil unmittelbar mit $k_{1,y}^{(i)} = \sqrt{k_z^2 - k_1^2}$.
- Aus Symmetriegründen gilt die gleiche Argumentation für Schicht 3.



Fall 2: $y < -\frac{d}{2}$, $k_i = k_1$

$$
\begin{aligned}
&Bk_B^2 \exp(k_B y) + \left(k_1^2 - k_z^2\right) B \exp(k_B y) = 0 \Leftrightarrow \\
&k_B = \sqrt{k_z^2 - k_1^2} = k_{1,y}^{(i)}
\end{aligned}
$$

Fall 3: $y > d$, $k_i = k_3 = k_1$

$$
\begin{aligned}
&Ck_C^2 \exp(-k_C y) + \left(k_1^2 - k_z^2\right) C \exp(-k_C y) = 0 \Leftrightarrow \\
&k_C = \sqrt{k_z^2 - k_3^2} = k_{3,y}^{(i)} = k_{1,y}^{(i)}
\end{aligned}
$$

Fortsetzung Hauptrechnung:
Als Zwischenlösung erhalten wir somit

$$
\underline{\mathcal{E}}_x = \begin{cases} B \exp(k_{1,y}^{(i)} y), & y < -\frac{d}{2} \\ A \cos(k_{2,y} y), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ C \exp(-k_{1,y}^{(i)} y), & y > \frac{d}{2}. \end{cases}
$$

Die weiteren Unbekannten A, B, C bestimmen wir mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen. $\underline{E}_x$ bzw. $\underline{\mathcal{E}}_x$ ist eine Tangentialkomponente bzgl. der Grenzfläche und muss damit am Übergang stetig sein. Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
A \cos\left(k_{2,y} y\right) = B \exp\left(k_{1,y}^{(i)} y\right)\Big|_{y=-\frac{d}{2}} &\Leftrightarrow \\
A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2}\right) = B \exp\left(-k_{1,y}^{(i)} \frac{d}{2}\right) &\Leftrightarrow \\
B = A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2}\right) \exp\left(k_{1,y}^{(i)} \frac{d}{2}\right), &
\end{aligned}
$$

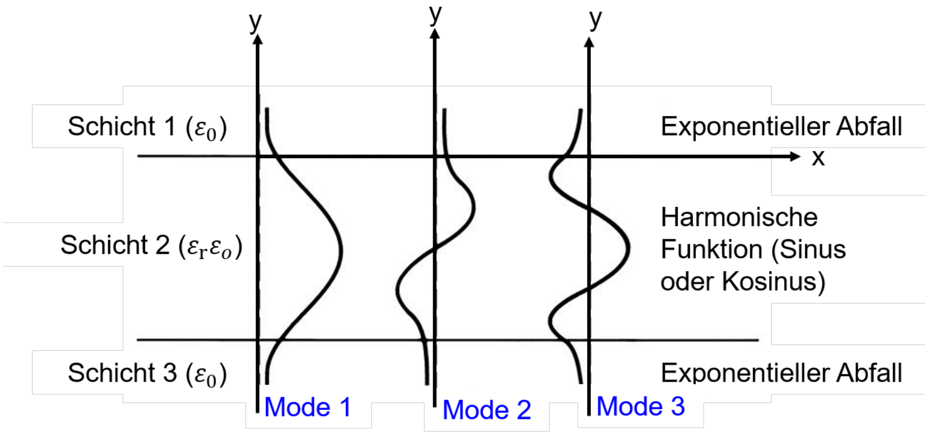
sowie

$$
\begin{aligned}
A \cos\left(k_{2,y} y\right) = C \exp\left(-k_{1,y}^{(i)} y\right)\Big|_{y=\frac{d}{2}} &\Leftrightarrow \\
A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2}\right) = C \exp\left(-k_{1,y}^{(i)} \frac{d}{2}\right) &\Leftrightarrow \\
C = A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2}\right) \exp\left(k_{1,y}^{(i)} \frac{d}{2}\right). &
\end{aligned}
$$

Daraus folgt abschließend durch Einsetzen in den Ansatz:

$$
\underline{\mathcal{E}}_x = \begin{cases} A \cos\left(-k_{2,y} \frac{d}{2}\right) \exp\left(k_{1,y}^{(i)} \left(y + \frac{d}{2}\right)\right), & y - \frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} y\right), & -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2} \\ A \cos\left(k_{2,y} \frac{d}{2}\right) \exp\left(-k_{1,y}^{(i)} \left(y - \frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2}. \end{cases}
$$

d) Im dielektrischen Wellenleiter dringen die Felder in den Bereich jenseits der Grenzfläche ein anstatt dort vollständig zu verschwinden. Anders als bei der Parallelplattenleidung mit ideal leitfähigem Platten ist die Mode hier also nicht mehr identisch zur stehenden Welle, sondern diese ist nur einer von drei Bestandteilen, da zusätzlich zwei evaneszente Felder zur Beschreibung der Mode notwendig sind.



e) Die magnetischen Feldkomponente $\underline{\mathcal{H}}_y$ und $\underline{\mathcal{H}}_z$ der TE-Mode ergeben sich aus der in c) bestimmten elektrischen Feldkomponente $\underline{\mathcal{E}}_x$ mit den in b) aus den Maxwellgleichungen gewonnen Beziehungen.

Komponente $\underline{\mathcal{H}}_y$

$$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = -\mu \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$\underline{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} = -\frac{1}{j\omega\mu}\underline{\mathcal{E}}_x \frac{\partial e^{j(\omega t - k_z z)}}{\partial z} \Leftrightarrow$$

$$\underline{H}_y = -\frac{1}{j\omega\mu}\underline{\mathcal{E}}_x \left(-jk_z\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \Leftrightarrow$$

$$\underline{\mathcal{H}}_y = \frac{k_z}{\omega\mu}\underline{\mathcal{E}}_x = \frac{k_z}{\omega\mu}\begin{cases} A\cos\left(-k_{2,y}\frac{d}{2}\right)\exp\left(k_{1,y}^{(i)}\left(y+\frac{d}{2}\right)\right), & y - \frac{d}{2} \\ A\cos\left(k_{2,y}y\right), & -\frac{d}{2} \le y \le \frac{d}{2} \\ A\cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2}\right)\exp\left(-k_{1,y}^{(i)}\left(y-\frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Komponente $\underline{\mathcal{H}}_z$

$$\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial t} \Leftrightarrow$$

$$\underline{H}_z = \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial y} = \frac{1}{j\omega\mu} e^{j(\omega t - k_z z)}\frac{\partial \underline{\mathcal{E}}_x}{\partial y} = \frac{1}{j\omega\mu}\frac{\partial \underline{\mathcal{E}}_x}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{j\omega\mu}\begin{cases} k_{1,y}^{(i)} A\sin\left(-k_{2,y}\frac{d}{2}\right)\exp\left(k_{1,y}^{(i)}\left(y+\frac{d}{2}\right)\right), & y - \frac{d}{2} \\ -Ak_{2,y}\sin\left(k_{2,y}y\right), & -\frac{d}{2} \le y \le \frac{d}{2} \\ \left(-k_{1,y}^{(i)}\right) A\cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2}\right)\exp\left(-k_{1,y}^{(i)}\left(y-\frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

$$= \frac{j}{\omega\mu}\begin{cases} -k_{1,y}^{(i)} A\sin\left(-k_{2,y}\frac{d}{2}\right)\exp\left(k_{1,y}^{(i)}\left(y+\frac{d}{2}\right)\right), & y - \frac{d}{2} \\ Ak_{2,y}\sin\left(k_{2,y}y\right), & -\frac{d}{2} \le y \le \frac{d}{2}\ . \\ k_{1,y}^{(i)} A\cos\left(k_{2,y}\frac{d}{2}\right)\exp\left(-k_{1,y}^{(i)}\left(y-\frac{d}{2}\right)\right), & y > \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 9

Abgabe bis zum 13.01.2020 um 11:30Uhr

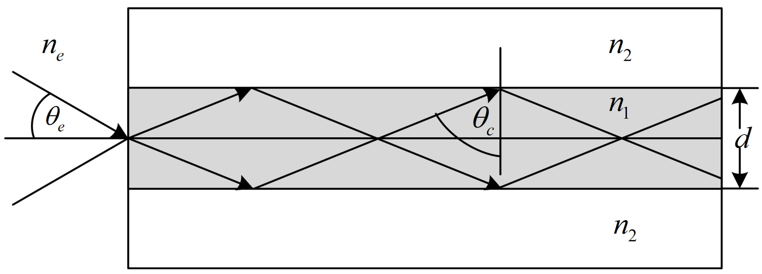
11. Aufgabe

Wir betrachten die Einkopplung von Licht in einen dielektrischen Plattenleiter der sich aus drei übereinander geschichteten Dielektrika zusammensetzt und die einfachste Form eines optischen Wellenleiters darstellt.

Für diesen Plattenleiter haben Sie bereits in Aufgabe 9 eine Bedingung für den Winkel θ hergeleitet:

$$\cos\theta = \frac{m2\pi - \varphi_s}{2k_1 d}$$

Nun betrachten wir Licht, das an der seitlichen Grenzfläche in den Plattenleiter eingekoppelt werden soll.



a) Welche Bedingung an den Einfallswinkel θ_e an der Grenzfläche muss erfüllt sein, damit im Plattenleiter sich ein konstantes in z-Richtung laufendes Wellenbild / Feldmuster ergibt.

Lösung:

Licht, das von links auf die seitliche Grenzfläche fällt wird an dieser nach dem Snellius Brechungsgesetz reflektiert und transmittiert. Es gilt:

$$k_e \sin\theta_e = k_1 \sin\theta_1$$

Damit das Licht im Wellenleiter geführt werden kann muss an der Grenzfläche zwischen den beiden Dielektrika das Licht in einem Winkel größer als der kritische Winkel auftreffen. Damit gilt für den Winkel θ_1 im Bogenmaß:

$$\theta_1 \geq \pi/2 - \theta_c$$

Damit ergibt sich für den Einfallswinkel:

$$\theta_e \geq \arcsin\left(\frac{k_1}{k_e}\sin(\pi/2 - \theta_c)\right)$$

In Aufgabe 9 haben wurde bereits eine Bedingung hergeleitet, damit sich im Plattenleiter ein konstantes in z-Richtung laufendes Wellenbild ergibt. Diese Bedingung konnen wir nun hier für θ_c verwerenden.

$$\theta_e \geq \arcsin\left(\frac{k_1}{k_e}\sin\left(\pi/2 - \arccos(\frac{m2\pi - \varphi_s}{2k_1 d})\right)\right)$$

b) Wir betrachten nun Licht mit einer Wellenlänge von $\lambda = 0.87\mu$m das in einen Plattenleiter mit Dicke $d = 2\mu$m eingekoppelt wird. Der Plattenleiter hat die Brechungsindizes $n_1 = 1.6$ und $n_2 = 1.4$. Bestimmen Sie den kritischen Winkel θ_c im Wellenleiter, den maximalen Winkel θ_e unter dem Licht aus der Luft $n_e = 1$ in den Wellenleiter eingekoppelt werden kann und die Numerische Apertur des Wellenleiters die gegeben ist durch $NA = \sin\theta_e$.

Lösung: Zunächst bestimmen wir den kritischen Winkel θ_c an der Grenzfläche zwischen den beiden Medien des Plattenleiters:

$$\begin{aligned}\theta_c &= \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\\ &= 61.04^\circ\end{aligned}$$

Aus Aufgabenteil a) ist bereits der Zusammenhang zwischen dem Einfallswinkel an der Grenzfläche und dem kritischen Winkel bekannt. Es ergibt sich somit:

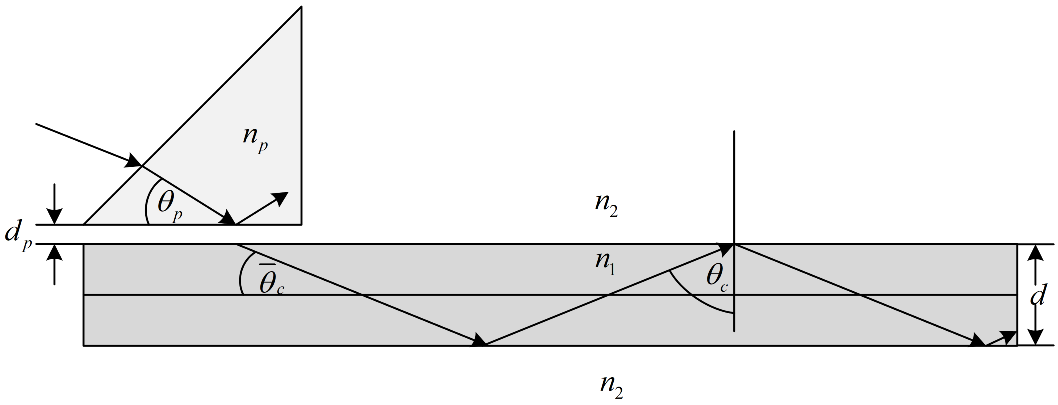
$$\begin{aligned}\theta_e &\geq \arcsin\left(\frac{k_1}{k_e}\sin(\pi/2 - \theta_c)\right)\\ &= \arcsin\left(\frac{n_1}{n_e}\sin(\pi/2 - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right))\right)\\ &= 50.77^\circ\end{aligned}$$

Die numerische Apertur des Wellenleiters ist:

$$NA = \sin\theta_e = 0.77$$

Eine weitere Form der Einkopplung in dielektrische Plattenleiter nutzt ein Prisma wie in Abb. 2 dargestellt. Hier wird die einfallende Welle zunächst an einem Prisma mit Brechungsindex n_p gebrochen und trifft dann unter einem Winkel $\theta_p > \theta_c$ auf die Grenzfläche zwischen dem Prisma und dem Material 2. Die einfallende und reflektierte Welle bilden eine in z-Richtung propagierende Welle mit $\beta_p = n_p k_0 \cos\theta_p$.

c) Erklären Sie wie Licht in den dielektrischen Plattenleiter einkoppeln kann, obwohl die einfallende Welle im Prisma Totalreflektion erfährt. Welche Bedingung muss für den Abstand d_p gelten?



Lösung:

In Vorlesung 6 haben wir die Totalreflexion betrachtet. Wir haben gezeigt, das für den transmittierten Wellenvektor k_t bei Totalreflexion gilt:

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_t &= k_2 \frac{n_1}{n_2} \sin\alpha_1 \mathbf{e}_z + jk_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2}\sin^2\alpha_1 - 1}\mathbf{e}_y \\ &= \beta\mathbf{e}_z - j\alpha\mathbf{e}_y\end{aligned}$$

Damit ist die transmittierte Welle proportional zu

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{0,t} e^{j(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r})} \\ &= \mathbf{E}_{0,t} e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha y}\end{aligned}$$

Die transmittierte Welle hat also eine exponentiell abfallende Amplitude entlang y. In unserem Beispiel betrachten wir die Grenzfläche zwischen dem Prisma (n_p) und dem Dielektrikum (n_2). Der Abstand d_p entspricht der Propgation der transmittierten Welle in z-Richtung. Der Abstand d_p muss deshalb ausreichend klein gewählt werden um einen signifikanten Anteil Ausgangsamplitude einkoppeln zu können.

d) Wie dick muss der Abstand d_p gewählt werden um noch 50% der Ausgangsamplitude zu übertragen ?

Lösung: Die Amplitude der Welle fällt exponentiell mit dem Abstand d_p ab. Um 50% der Ausangsamplitude übertragen zu können muss gelten:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{0,t} e^{j(\omega t - \beta z)} e^{-\alpha d_p} &= \mathbf{E}_{0,t} e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot 0.5 \\ \rightarrow 0.5 &= e^{-\alpha d_p} \\ \rightarrow d_p &= -\frac{\ln(0.5)}{\alpha} = \frac{\ln(0.5)\lambda_0}{n_2 2\pi \sqrt{n_p^2 \sin^2\theta_p - n_2^2}}\end{aligned}$$

e) Welche Bedingung muss für die Propagationskonstante β_p erfüllt sein damit sich im Plattenleiter ein konstantes in z-Richtung laufendes Wellenbild ergibt?

Lösung: Die einfallende und reflektierte Welle bilden eine Welle die in y-Richtung propagieren mit:

$$\beta_p = n_p k_0 \cos\theta_p$$

Um eine gute Kopplung zu erreichen muss die Welle eine Mode im Plattenleiter anregen, die die gleiche Propagationskonstante hat.

$$\beta_p \approx \beta_m$$
$$n_p k_0 \cos\theta_p \approx n_1 k_0 \cos\theta = \frac{m2\pi - \varphi_s}{2d}$$

Fragen und Kommentare

Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M.Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)

Elektromagnetische Wellen

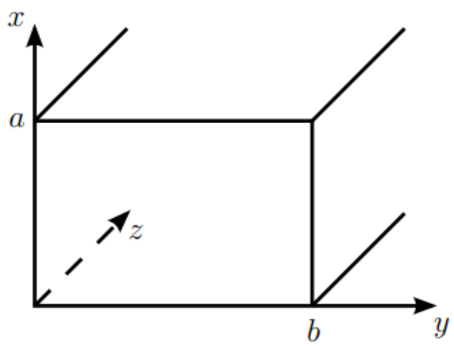
WS 2019/20

Übungsblatt 10

Abgabe bis zum 20.01.2020 um 11:30 Uhr

12. Aufgabe

Gegeben sei ein Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt und den Kantenlängen a und b. Der Hohlleiter ist mit Vakuum gefüllt und seine Randflächen bestehen aus unendlich gut leitendem Material. Im Innern des Hohlleiters breitet sich eine H-Welle (oder TE-Welle) in z-Richtung aus.



Hinweis:

$$
\begin{aligned}
\underline{E}_x &= -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} + j\omega\mu\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right)\\
\underline{E}_y &= -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - j\omega\mu\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right)\\
\underline{H}_x &= -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} - j\omega\varepsilon\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}\right)\\
\underline{H}_y &= -\frac{1}{\omega^2\mu\varepsilon - k_z^2}\left(jk_z\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} + j\omega\varepsilon\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

a) Geben Sie die Randbedingungen für das elektrische Feld $\underline{\mathbf{E}}(x, y, z, t)$ und das magnetische Feld $\underline{\mathbf{H}}(x, y, z, t)$ auf den Leiterflächen an.

b) Welche der beiden angegebenen Funktionen für $\underline{H}_z(x, y, z, t)$ genügt den Randbedingungen? Begründen Sie durch Rechnung. Welche Werte sind demnach für die Wellenzahlen k_x und k_y erlaubt? Bezeichnen Sie die Modenindizes mit m bzw. n.

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad \underline{H}_z(x, y, z, t) = H_0\cos(k_x x)\cos(k_y y)e^{j(\omega t - k_z z)}\\
&(2)\quad \underline{H}_z(x, y, z, t) = H_0\sin(k_x x)\sin(k_y y)e^{j(\omega t - k_z z)}
\end{aligned}
$$

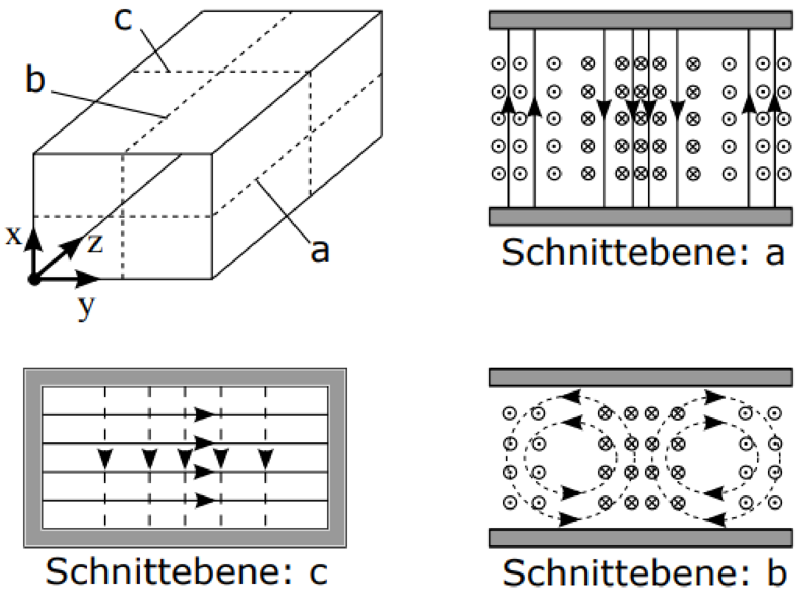
c) Bestimmen Sie für eine gegebene Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ die Wellenzahl k_z mit dem größten möglichen Wert unter der Berücksichtigung Ihrer bisherigen Ergebnisse. Starten Sie dazu von der allgemeinen Wellengleichung für homogene Materialien aus. Geben Sie alle möglichen Lösungen an.

d) Berechnen Sie die Frequenz f_{cmn} durch Setzen von $k_z = 0$. Was gilt für Frequenzen $f < f_{cmn}$?

e) In welchem Frequenzbereich $f_l < f < f_h$ muss der Wellenleiter mit H-Wellen angeregt werden, damit sich ausschließlich die niedrigste Mode (Grundmode) ausbreitet?

f) Berechnen Sie für die Grundmode alle Feldkomponenten $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$, $\underline{H}_x$, $\underline{H}_y$ und $\underline{H}_z$.

g) Um welche H_{mn}-Mode handelt es sich in der untenstehenden Abbildung? Begründen Sie. (Hinweis: Die durchgezogenen Linien zeigen das elektrische Feld, die gestrichelten das magnetische Feld.)



Fragen und Kommentare

Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M. Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 10

12. Aufgabe

a) Die Randbedingungen für den Hohlleiter ergeben sich aus den Stetigkeitsbedingungen für das elektrische Feld $\underline{\mathbf{E}}(x, y, z, t)$ und das magnetische Feld $\underline{\mathbf{H}}(x, y, z, t)$ an den Hohlleiterwänden. An diesen Grenzflächen kann aufgrund der unendlich großen Leitfähigkeit der Außenhülle ($\kappa \to \infty$) kein tangentiales E-Feld existieren. Es gibt dabei keine tangentiale Feldkomponente $\underline{E_z}$, da es sich um eine H-Welle (oder TE-Welle) handelt.

$$\underline{E}_x\,(x, 0, z, t) = 0, \qquad \underline{E}_y\,(0, y, z, t) = 0$$
$$\underline{E}_x\,(x, b, z, t) = 0, \qquad \underline{E}_y\,(a, y, z, t) = 0$$

Unter Annahme einer TE-Welle (E_z = 0) und mit dem Hinweis aus der Aufgabenstellung können die Randbedingungen für H_z bestimmt werden:

$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$$
$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right|_{y=b} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$$

b) Es kann gezeigt werden, dass nur Gleichung (1) $\underline{H}_z\,(x, y, z, t) = H_0 \cos(k_x x) \cos(k_y y)\, e^{j(\omega t - k_z z)}$ die Randbedingungen für das magnetische Feld erfüllt:

$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right|_{x=0} = -H_0 k_x \underbrace{\sin(k_x \cdot 0)}_{=0} \cos(k_y y)\, e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

Die Randbedingung

$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right|_{x=a} = -H_0 k_x \underbrace{\sin(k_x \cdot a)}_{=0} \cos(k_y y)\, e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

wird erfüllt falls gilt:

$$k_x \cdot a = m \cdot \pi \quad \to \quad k_x = \frac{m\pi}{a},\ m \in \mathrm{N}_0.$$

Die restlichen Randbedingungen können auf die gleiche Weise überprüft werden:

$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right|_{y=0} = -H_0 \cos(k_x x)\, k_y \underbrace{\sin(k_y \cdot 0)}_{=0} e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}\right|_{y=b} = -H_0 \cos(k_x x)\, k_y \underbrace{\sin(k_y \cdot b)}_{=0} e^{j(\omega t - k_z z)} = 0,$$

wenn

$$k_y \cdot b = n \cdot \pi \quad \rightarrow \quad k_y = \frac{n\pi}{b},\ n \in \mathrm{N}_0.$$

Anmerkungen:

- Der Fall $m = n = 0$ ist nicht erlaubt, da in diesem Fall die Maxwellgleichung $\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}} = \nabla \cdot \mu \underline{\mathbf{H}} = 0$ nicht mehr erfüllt ist. Durch Einsetzen der Definition der Divergenz folgt $\nabla \cdot \mu \underline{\mathbf{H}} = \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial x} + \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial z} = \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial z} \overset{!}{=} 0$, wobei das vorletzte Gleichheitszeichen aus der Tatsache folgt, dass sowohl $\underline{H}_x$ als auch $\underline{H}_y$ für $m = n = 0$ verschwinden. Dass die Maxwellgleichung dann nicht mehr erfüllt ist, lässt sich leicht zeigen:

$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial z}\right|_{m=n=0} = -jk_z H_0 e^{j(\omega t - k_z z)} \neq 0,$$

  da beide Freiheitsgrade (m und n) verloren gehen.

- Hingegen werden die Randbedingungen durch Gleichung (2) oder alternativ auch durch Ansätze mit $\cos(k_x x)\sin(k_y y)$ oder $\sin(k_x x)\cos(k_y y)$ nicht erfüllt. Beispielhaft wird dies für Gleichung (2) gezeigt.

$$\left.\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}\right|_{x=0} = H_0 k_x \underbrace{\cos(k_x \cdot 0)}_{=1} \sin(k_y y)\, e^{j(\omega t - k_z z)} = 0$$

  Mit $H_0 \neq 0$, $k_x \neq 0$ und $e^{j(\omega t - k_z z)} > 0$ folgt, dass die Gleichung nur dann erfüllt ist, wenn $\sin(k_y y) = 0$ ist und somit $k_y \cdot y = p \cdot \pi$, mit $p \in \mathrm{N}_0$. Dies ist für konstante Wellenzahlen k_y und beliebige Werte $y \in [0, b]$ aber nicht möglich. Demnach kann die Gleichung nur für bestimmte y, nicht aber im gesamten Hohlleiter erfüllt sein.

c) Die allgemeine Wellengleichung für homogene Materialien und magnetische Felder lautet

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = 0$$

Der Laplace-Operator ist ein Vektorfeld so definiert, dass er unabhängig auf alle Feldkomponenten anzuwenden ist, d.h. $\Delta \underline{\mathbf{H}} = \Delta \underline{H}_x \mathbf{e}_x + \Delta \underline{H}_y \mathbf{e}_y + \Delta \underline{H}_z \mathbf{e}_z$. Damit lässt sich die Wellengleichung nach den einzelnen Komponenten separieren, anders gesprochen muss jede einzelne Feldkomponente die Wellengleichung erfüllen. Damit erhalten wir für die z-Komponente

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial z^2} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial t^2} = 0$$

Für harmonische Anregung vereinfachen sich die zeitliche Ableitung zu einer Multiplikation mit $j\omega$ und die örtliche Ableitung zu einer Multiplikation mit $-jk_i$ für die Ableitung nach $i \in \{x, y, z\}$. Daraus folgt mit der Wellenzahl $k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$\begin{aligned} -k_x^2 \underline{H}_z - k_y^2 \underline{H}_z - k_z^2 \underline{H}_z + \mu\varepsilon\omega^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 &= 0 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen für die Wellenzahlen k_x und k_y und Wurzelziehen resultiert für die Ausbreitungskonstante (Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung)

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Die Lösung für die Wellenzahl k_z wird maximal, wenn die Subtrahenden und damit die Modenzahlen m und n minimal werden. Je nach Geometrie des Wellenleiters ergeben sich daher zwei Lösungen:

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} & m = 0, n = 1 \\ \sqrt{\omega^2\mu\varepsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} & m = 1, n = 0 \end{cases}$$

d) Die cut-off-Frequenz f_{cmn} erhält man durch Nullsetzen der Ausbreitungskonstante k_z:

$$\begin{aligned} 0 &= \omega_{cmn}^2\,\mu\varepsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right) \Leftrightarrow \\ \omega_{cmn} &= \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)} \Leftrightarrow \\ f_{cmn} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)} \end{aligned}$$

Eine gegebene Mode mit Modenzahlen m und n kann sich unterhalb der cut-off-Frequenz ($f < f_{cmn}$) nicht im Wellenleiter ausbreiten, da die Ausbreitungskonstante k_z in diesem Fall rein imaginär wird. Somit würden die Felder in z-Richtung exponentiell abklingen, was nicht mit einer sich ausbreitenden Welle vereinbar ist.

e) Unter der Annahme $a > b$ ist die Grundmode eines H-Wellenleiters ist die H_{10}- bzw. TE_{10}-Mode. In der Literatur wird in der Regel diese Annahme getroffen, das heißt das Koordinatensystem wird derart definiert, dass sich der Hohlleiter in x-Richtung weiter erstreckt als in y-Richtung. Um einzig und allein die Grundmode anzuregen, muss die gewählte Frequenz der Welle oberhalb der cut-off-Frequenz der Grundmode, jedoch unterhalb der cut-off-Frequenz der nächsthöheren Mode liegen. Letztere ist logischerweise entweder die Mode H_{20} oder die Mode H_{01}.

cut-off-Frequenz für H_{10}:

$$f_{c10} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

cut-off-Frequenz für H_{01}:

$$f_{c01} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{\pi}{b}\right)^2} = \frac{1}{2b\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

cut-off-Frequenz für H_{20}:

$$f_{c02} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2} = \frac{1}{a\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Mit $a > b$ sehen wir die Behauptung, dass H_{10} die Grundmode ist bestätigt. Sie ist die einzige sich ausbreitende Mode im Frequenzbereich zwischen $(f_l = f_{c10}) < f < (f_h = f_{c01}$ oder $(f_l = f_{c10}) < f f_{c20})$, je nachdem welche Mode die nächsthöhere ist.

f) Die H_z-Komponente ist gemäß b) gegeben durch

$$\underline{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)}.$$

Mit E_z = 0 und den Hinweisen aus dem Aufgabentext können die fehlenden Feldkomponenten berechnet werden.

$$\begin{aligned}
E_x &= -\frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0 \\
E_y &= \frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{j\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\
H_x &= -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} H_0 \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{j(\omega t - k_z z)} \\
H_y &= -\frac{jk_z}{\omega^2\mu\epsilon - k_z^2} \cdot \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0
\end{aligned}$$

g) **Abbildung 11:** In z-Richtung existiert nur ein H-Feld $\Rightarrow$ TE-Welle

$$\left.\begin{array}{l} E_x = 0 \\ E_y \neq 0 \\ H_x \neq 0 \\ H_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{k_x \neq 0}_{E_y \text{weist in der Schnittebene c für alle x in die gleiche Richtung} \Rightarrow m=1} \text{ und } \underbrace{k_y = 0}_{\Rightarrow n=0}$$

Abbildung 12: In z-Richtung existiert nur ein H-Feld $\Rightarrow$ TE-Welle

Elektromagnetische Wellen

WS 2019/20

Musterlösung Übungsblatt 11

Abgabe bis zum 27.01.2020 um 11:30Uhr

13. Aufgabe

Für das magnetische Vektorpotential eines Hertzschen Dipols gelte:

$$\vec{A} = A_z \vec{e_z}$$
$$A_z = \frac{\mu}{4\pi r} \cdot l \cdot \widehat{I} \cdot \exp\left(j \cdot \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

a) Stellen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ in Kugelkoordinaten dar.

Lösung: Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ lautet in Kugelkoordinaten:

$$\vec{A} = A_z \left(\cos(\theta)\vec{e_r} - \sin(\theta)\vec{e_\theta}\right)$$

b) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential $\vec{A}$ die magnetische Feldstärke $\vec{H}$. In welchem Abstand r zum Dipol sind die Anteile des Nah- und des Fernfeldes gleich groß? Hinweis: Verwenden Sie die Darstellung des Vektorpotentiales in Kugelkoordinaten. **Lösung:**

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} rot \vec{A}$$

Nach Einsetzen des Vektorpotentials aus a) kommt man auf:

$$H_r = 0$$
$$H_\theta = 0$$
$$H_\phi = \frac{1}{4\pi} \cdot l \cdot \widehat{I} \cdot \sin(\theta) \left[\frac{j\omega}{r \cdot c} + \frac{1}{r^2}\right] \cdot \exp\left(j\omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$$

Die Anteil des Fern- und des Nahfeldes sind gleich für:

$$\frac{\omega}{rc} = \frac{1}{r^2}$$

$\rightarrow$ An der Stelle $r = \frac{c}{\omega}$ sind die Anteile des Fern- und des Nahfeldes gleich groß.

c) Berechnen Sie den Pointing-Vektor im Fernfeld des beschriebenen Dipols. Für die magnetische Feldstärke gelte:

$$
\begin{aligned}
H_r &= 0 \\
H_\theta &= 0 \\
H_\phi &= \frac{1}{4\pi} \cdot l \cdot \widehat{I} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{j\omega}{r \cdot c} \cdot \exp\left(j \cdot \omega \left(t - k \cdot r\right)\right)
\end{aligned}
$$

Hinweis:
Im Fernfeld kann eine ebene Welle angenommen werden und es gelte:

$$
\vec{E} = \mp\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_0 \exp\left(j\left(\omega \cdot t \pm k \cdot r\right)\right) \vec{e_\theta}
$$

Verwenden Sie nur die im Fernfeld dominanten Terme.

Lösung:
Der Pointing-Vektor lautet:

$$
\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*
$$

mit dem Hinweis folgt:

$$
\begin{aligned}
E_\theta &= \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_\phi \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot l \cdot \widehat{I} \cdot \sin(\theta) \cdot \frac{j\omega}{r \cdot c^2} \exp\left(j\left(\omega t - k \cdot r\right)\right)
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich der Pointing-Vektor zu:

$$
\begin{aligned}
\vec{S} &= E_\theta \cdot H_\phi^* \vec{e_r} \\
&= \left(\frac{1}{\varepsilon \cdot c}\right) \cdot \left(\frac{\omega \cdot \widehat{I} \cdot l}{4 \cdot \pi \cdot c \cdot r}\right)^2 \cdot \sin^2\theta \cdot \vec{e_r}
\end{aligned}
$$

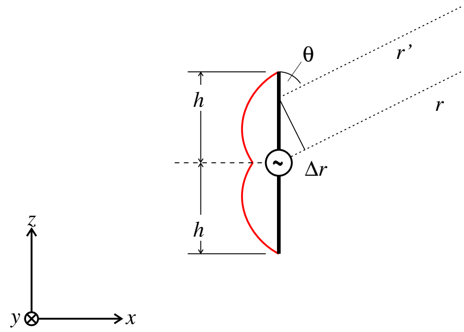
Gegeben ist nun eine lineare Dipolantenne der Höhe $2h$, mit folgender von z abhängiger Stromverteilung:

$$
I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(h - |z|)\right)
$$

d) Das Fernfeld eines infinitesimal kleinen Dipols ist:

$$
dE_\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon} I \sin\theta \frac{\omega}{c_0^2 r} e^{j(\omega t - kr)} dl
$$

Berechnen Sie das Fernfeld für große r, indem Sie die einzelnen Dipolbeläge über die Höhe aufintegrieren. Beachten Sie, dass die Amplitude des Stroms von z abhängt



und dass mit zunehmenden z ein Wegunterschied Δr zu berücksichtigen ist. Hinweis: $\int_{z=0}^{h} \sin\left(k(h-z)\right)\cos\left(kz\cos\theta\right)dz = \frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos kh}{k\sin^2\theta}$

Lösung: Da der Dipol in z-Richtung zeigt, gilt folgender Ansatz:

$$E_\theta = \int_{z=-h}^{h} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r'} I_0 \sin\left(k(h-|z|)\right) e^{j(\omega t - kr')} \sin\theta dz$$

Für große r gilt $\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'}$ jedoch muss beim Phasenterm der Wegunterschied genau beachtet werden. Für große r sind die Strahlen r und r' parallel und es gilt:

$$r' = r - z\cos\theta$$

Damit lässt sich das Integral umformen zu:

$$\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\sin\theta \int_{z=-h}^{h} \sin\left(k(h-|z|)\right) e^{j(\omega t - kr + kz\cos\theta)} dz \\
&= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\sin\theta e^{j(\omega t - kr)} \int_{z=-h}^{h} \sin\left(k(h-|z|)\right) e^{jkz\cos\theta} dz \\
&= \frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\sin\theta e^{j(\omega t - kr)} \int_{z=-h}^{h} \sin\left(k(h-|z|)\right)\left(\cos\left(kz\cos\theta\right) + j\sin\left(kz\cos\theta\right)\right) dz
\end{aligned}$$

$\sin\left(k(h-|z|)\right)$ und $\cos\left(kz\cos\theta\right)$sind gerade Funktionen. $\sin\left(kz\cos\theta\right)$ ist jedoch ungerade und hebt sich bei der Integration über symmetrische Grenzen weg. Daher kann man schreiben:

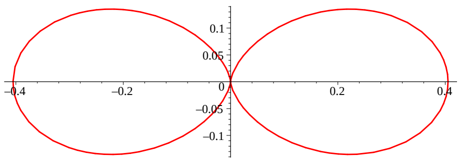
$$\begin{aligned}
E_\theta &= 2\frac{I_0}{4\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\sin\theta e^{j(\omega t - kr)} \int_{z=0}^{h} \sin\left(k(h-z)\right)\cos\left(kz\cos\theta\right) dz \\
&= \frac{I_0}{2\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r}\sin\theta e^{j(\omega t - kr)} \frac{\cos\left(kh\cos\theta\right) - \cos kh}{k\sin^2\theta} \\
&= \frac{I_0}{2\pi\varepsilon}\frac{\omega}{c_0^2 r k} e^{j(\omega t - kr)} \frac{\cos\left(kh\cos\theta\right) - \cos kh}{\sin\theta}
\end{aligned}$$

e) Für den Pointingvektor gilt: $S \sim E^2$. Skizzieren Sie die Richtcharakteristik ($S(\theta)$) der Dipolantenne für $h = \lambda/4$, $h = \lambda/2$, $h = \lambda 3/4$, $h = \lambda$ in einem Polardiagramm (z.B. mit Maple). Hinweis: $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

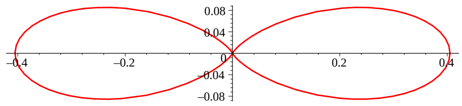
Lösung: Für die Richtcharakteristik ist nur die θ Abhängigkeit von Interesse:

$$S \sim \frac{\left(\cos\left(kh\cos\theta\right) - \cos kh\right)^2}{\sin^2\theta}$$

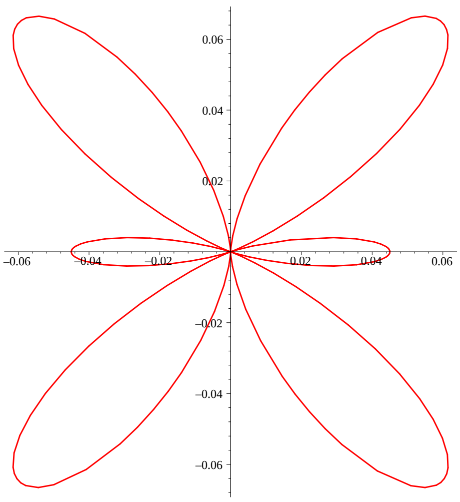
$h = \frac{\lambda}{4}$



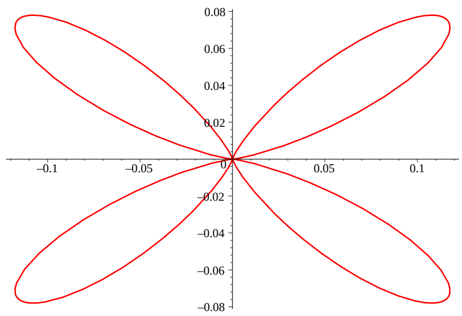
$h = \frac{\lambda}{2}$



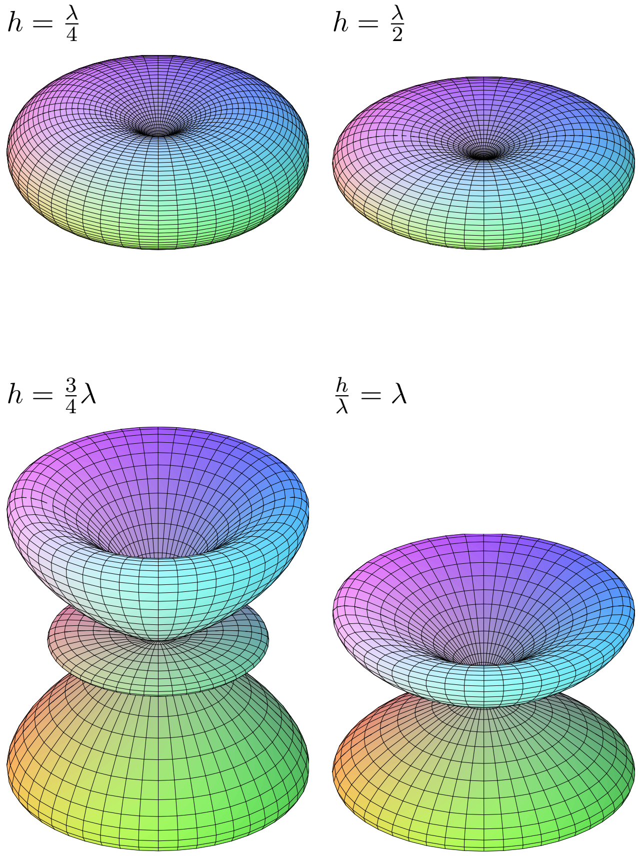
$h = \frac{3}{4}\lambda$



$h = \lambda$



Oder als Rotationskörper:



Fragen und Kommentare

Prof. Dr. Sebastian Randel (Sebastian.Randel@kit.edu)
M.Sc. Christoph Füllner (Christoph.Fuellner@kit.edu)
M. Sc. Mareike Trappen (Mareike.Trappen@kit.edu)