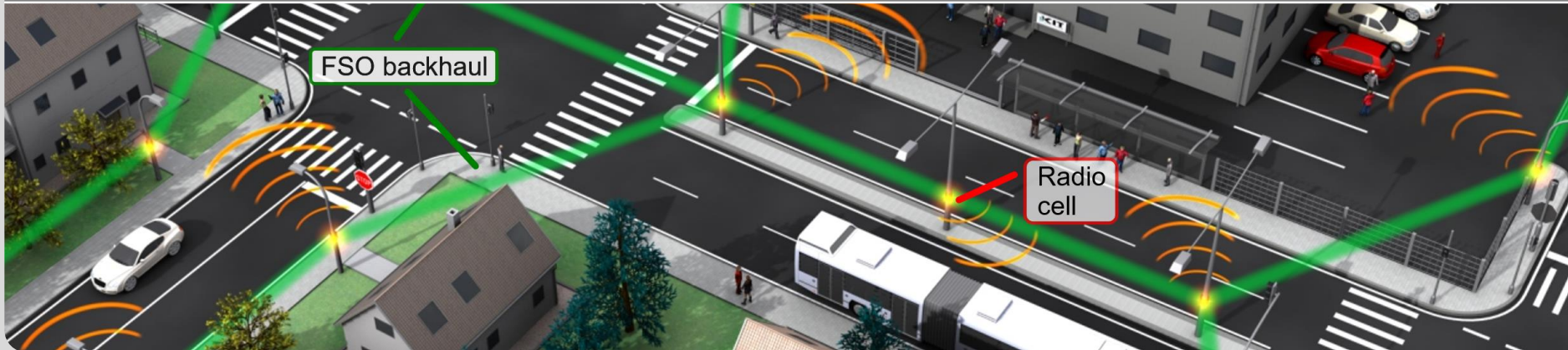


Elektromagnetische Wellen (EMW)

Übung 0

Jonas Krimmer, Patrick Matalla, Christoph Füllner und Sebastian Randel

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), KIT



Die Übung im Überblick

- Unterlagen zur Vorlesung und Übung sowie Diskussionsforen finden Sie im [ILIAS-Portal](#)
- Kontaktdaten Übungsleiter
jonas.krimmer@kit.edu
patrick.matalla@kit.edu
- Kontaktdaten zur heutigen Übung
christoph.fuellner@kit.edu

Ziele der Übung

- Veranschaulichung der Vorlesungsinhalte → [Verständnis](#)
- Zusammenfassung der Vorlesungsinhalte → [Handwerkszeug](#)
- Besprechung der Übungsaufgaben
→ [Üben, üben, üben](#)

Kalender

Oktober	November	Dezember	Januar	Februar
1 Fr	1 Mo ⁴⁴	1 Mi Vorlesung 8	1 Sa	1 Di
2 Sa	2 Di	2 Do	2 So	2 Mi Vorlesung 15
3 So	3 Mi Vorlesung 4	3 Fr	3 Mo	3 Do
4 Mo ⁴⁰	4 Do	4 Sa	4 Di	4 Fr
5 Di	5 Fr	5 So	5 Mi	5 Sa
6 Mi	6 Sa	6 Mo Übung 5 ⁴⁹	6 Do	6 So
7 Do	7 So	7 Di	7 Fr	7 Mo Übung 13 ⁶
8 Fr	8 Mo Übung 1 ⁴⁵	8 Mi Vorlesung 9	8 Sa	8 Di
9 Sa	9 Di	9 Do	9 So	9 Mi Übung 14
10 So	10 Mi Vorlesung 5	10 Fr	10 Mo Übung 9 ²	10 Do
11 Mo ⁴¹	11 Do	11 Sa	11 Di	11 Fr
12 Di	12 Fr	12 So	12 Mi Vorlesung 12	12 Sa
13 Mi	13 Sa	13 Mo Übung 6 ⁵⁰	13 Do	13 So
14 Do	14 So	14 Di	14 Fr	14 Mo ⁷
15 Fr	15 Mo Übung 2 ⁴⁶	15 Mi Vorlesung 10	15 Sa	15 Di
16 Sa	16 Di	16 Do	16 So	16 Mi
17 So	17 Mi Vorlesung 6	17 Fr	17 Mo Übung 10 ³	17 Do
18 Mo Vorlesung 1 ⁴²	18 Do	18 Sa	18 Di	18 Fr
19 Di	19 Fr	19 So	19 Mi Vorlesung 13	19 Sa
20 Mi Vorlesung 2	20 Sa	20 Mo Übung 7 ⁵¹	20 Do	20 So
21 Do	21 So	21 Di	21 Fr	21 Mo ⁸
22 Fr	22 Mo Übung 3 ⁴⁷	22 Mi Vorlesung 11	22 Sa	22 Di
23 Sa	23 Di	23 Do	23 So	23 Mi
24 So	24 Mi Vorlesung 7	24 Fr	24 Mo Übung 11 ⁴	24 Do
25 Mo Übung 0 ⁴³	25 Do	25 Sa	25 Di	25 Fr
26 Di	26 Fr	26 So	26 Mi Vorlesung 14	26 Sa
27 Mi Vorlesung 3	27 Sa	27 Mo ⁵²	27 Do	27 So
28 Do	28 So	28 Di	28 Fr	28 Mo Rosenmontag ⁹
29 Fr	29 Mo Übung 4 ⁴⁸	29 Mi	29 Sa	
30 Sa	30 Di	30 Do	30 So	
31 So		31 Fr	31 Mo Übung 12 ⁵	

- Die Benennung der Übungen ergibt sich aus der Nummer des besprochenen Übungsblattes.
- Es wird während der vorlesungsfreien Zeit eine Fragestunde zur Klausur geben.
- Der Klausurtermin steht noch nicht fest.

Füllner / Krimmer / Randel

Wintersemester 21/22

Übungsbonus EMW

Allgemeine Informationen

- Die Lösungen zu den Übungsblättern werden dreimal pro Semester unangekündigt zu Beginn der Übung um 12:00 Uhr eingesammelt.
- Wer jeweils mehr als zwei Drittel eines Übungsblattes **sinnvoll** bearbeitet hat, bekommt für diese Abgabe 2 Punkte in der schriftlichen Prüfung gutgeschrieben.
- Insgesamt können also bis zu 6 Punkte gesammelt werden.
- Die Punkte müssen in einem Semester erworben werden, eine Addition der Punkte aus zwei Semestern ist nicht möglich.
- Die gesammelten Punkte verfallen nach einem Jahr. Beispiel: Wurden die Übungsblätter im WS 20/21 abgegeben, können die daraus resultierenden Punkte letztmalig zur Klausur im Frühjahr 2022 angerechnet werden.
- Pro Person muss eine **handschriftlich angefertigte, individuelle** Lösung eingereicht werden. Dennoch darf gerne in Gruppen gearbeitet werden.

Anforderungen an die Einreichungen

- Die Lösungen müssen via ILIAS als pdf-Datei eingereicht werden. Das Hochladen mehrerer Bilddateien wird nicht akzeptiert.
- Die Berücksichtigung der Abgaben für das Bonussystem setzt eine **sinnvolle** Bearbeitung voraus. Stellen Sie dazu bitte sicher, dass
 - ihre Aufschriebe leserlich sind.
 - das Aufgabenblatt klar beschriftet ist mit Namen, Matrikelnummer und Aufgaben-Nr.
 - jede Lösung mit einer klaren Auflistung dessen, was gegeben ist (geg.: ...), und eine mathematische Umsetzung dessen, was gesucht ist (ges.: ...) enthält.
 - die Lösung aus einem mathematischen Ansatz und einer Lösung bzw. einem sinnvollen Lösungsversuch besteht.

- Die pdf-Daten sind nach folgendem Schema zu benennen

`{Nachname}_{Matrikelnummer}_EMW_{XX}.pdf`

wobei die Platzhalter durch den Nachnamen, die Matrikelnummer, sowie die Nummer des Übungsblattes zu ersetzen sind.

Bei Missachtung der Richtlinien behalten wir uns vor, Ihre Einreichung nicht zu berücksichtigen.

Ilias-System

- Das erste Übungsblatt und die Formelsammlung sind zeitnah im **ILIAS** abrufbar.

ÜBUNGSBONUS

Abgabe der Übungsblätter
Abgabefrist: 7 Tage, 37 Minuten, 35 Sekunden

Richtlinien Übungsbonus EMW
pdf 108,9 KB Heute, 11:02 Anzahl Seiten: 1

Magazin » Organisationseinheiten » KIT-Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik » WS 20/21 » Elektromagnetische Wellen » Abgabe der Übungsblätter

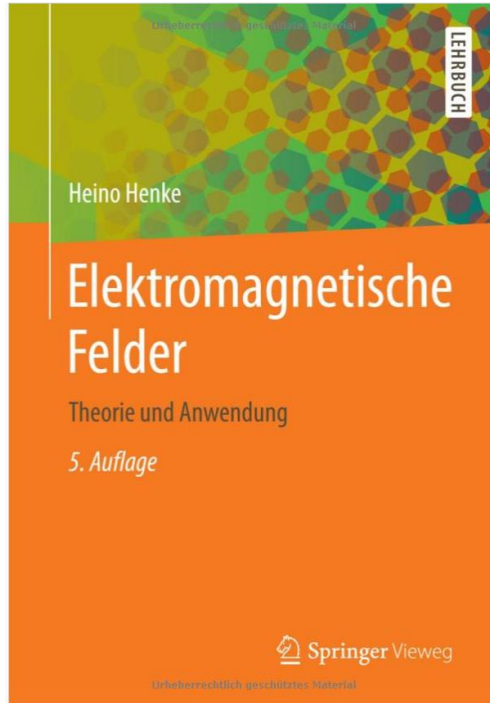
Abgabe der Übungsblätter

Übungseinheiten Info Einstellungen Abgaben und Noten Lernfortschritt Export Rechte

Zeigen Bearbeiten

- ▶ ● Übungsblatt 01
Beendet am: 23. Nov 2020, 12:00
- ▶ ● Übungsblatt 02
Beendet am: 30. Nov 2020, 12:00
- ▶ ● Übungsblatt 03
Beendet am: 07. Dez 2020, 12:00
- ▶ ● Übungsblatt 04
Beendet am: 14. Dez 2020, 12:00
- ▶ ● Übungsblatt 05
Beendet am: 21. Dez 2020, 12:00
- ▶ ● Übungsblatt 06
Beendet am: 11. Jan 2021, 12:00
- ▶ ● Übungsblatt 07
Beendet am: 18. Jan 2021, 12:00
- ▶ ● Übungsblatt 08
Beendet am: 25. Jan 2021, 12:00
- ▶ ● Übungsblatt 09
Beendet am: 01. Feb 2021, 12:00

Literaturhinweis



Innerhalb des KIT-Netzes als PDF zum
kostenlosen Download verfügbar unter
www.bibliothek.kit.edu

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen

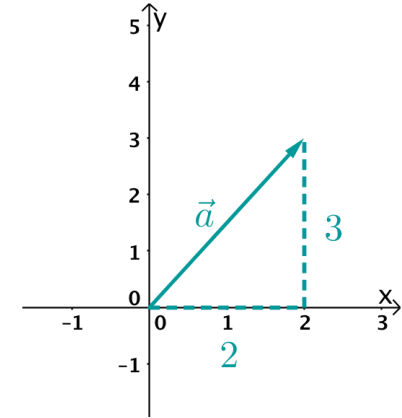
■ Mathematische Grundlagen

- Skalarfelder und Vektorfelder
- Differentialoperatoren
- Koordinatensysteme
- Mehrdimensionale Integralrechnung
- ~~Komplexe Zahlen~~ (folgt später)

■ Physikalische Grundlagen: Maxwellgleichungen

Skalare und Vektoren

- Skalar: durch einen Zahlenwert charakterisiert
- Vektor: durch einen Zahlenwert und eine Richtung charakterisiert; durch Pfeil oder fettierte Schreibweise gekennzeichnet



$$\vec{v} = \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x(x, y, z) \\ v_y(x, y, z) \\ v_z(x, y, z) \end{pmatrix} = v_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + v_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + v_z(x, y, z) \mathbf{e}_z$$

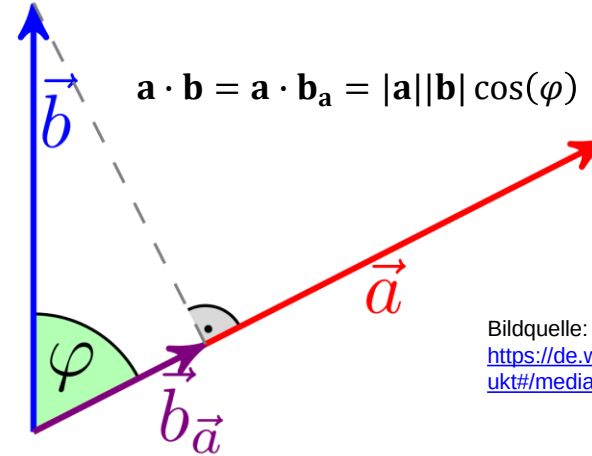
Die Position im Spaltenvektor gibt die Richtung der Komponente an

Skalare Vektorkomponente, die an jedem Punkt im Raum einen anderen Wert annehmen kann und daher im Allgemeinen von allen Koordinaten x, y, z abhängt

Der Einheitsvektor gibt die Richtung der Komponente an, z.B. gilt $\mathbf{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Skalarprodukt

- Das Skalarprodukt ordnet zwei Vektoren einen Skalar zu.
- **Bedeutung:** Es ist ein Maß dafür, wie sehr zwei Vektoren in ihrer Richtung übereinstimmen.
- **Anschauung in 2D:** Multiplikation eines Vektors $\mathbf{a}$ mit der senkrechten Projektion eines zweiten Vektors $\mathbf{b}$.
- Das Skalarprodukt zueinander orthogonaler Vektoren ist 0.



Bildquelle:

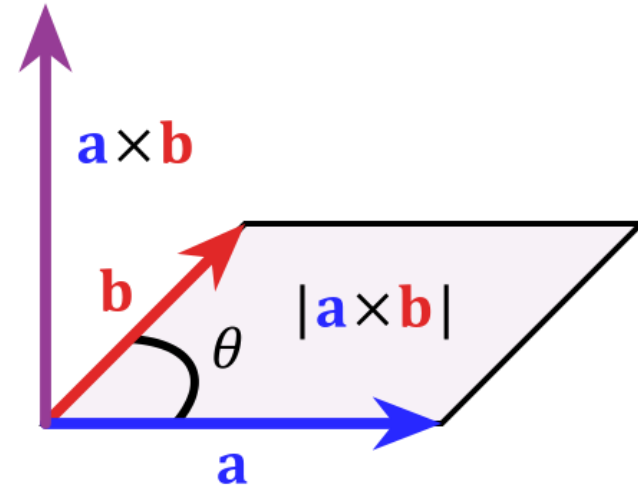
<https://de.wikipedia.org/wiki/Skalarprodukt#/media/Datei:Dot-product-2.svg>

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \\
 &= (a_x b_x) \underbrace{\mathbf{e}_x \mathbf{e}_x}_{1} + (a_y b_y) \underbrace{\mathbf{e}_y \mathbf{e}_y}_{1} + (a_z b_z) \underbrace{\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z}_{1}
 \end{aligned}$$

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

- Das Vektorprodukt ordnet zwei Vektoren einen Vektor zu.
- Das Vektorprodukt ordnet zwei Eingangsvektoren einen Vektor zu, der senkrecht zu diesen beiden Eingangsvektoren steht.
- Es ergibt sich ein mathematisches Rechtssystem (Rechtsschraube) → „Dreifinger-Regel der rechten Hand“.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

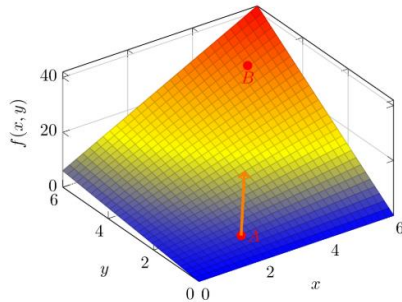


Bildquelle:
https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Cross_product_parallelogram.svg

Differentialrechnung

- **Richtungsableitung:** Ableitung einer von mehreren Variablen abhängigen Funktion entlang einer beliebigen Richtung, vorgegeben durch einen Vektor

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{v}} = \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}$$



Bildquelle:
https://www.massmatics.de/merkzettel/#!203:Die_Richtungsableitung

- **Partielle Ableitung:** Spezialfälle der Richtungsableitungen, bei denen entlang der kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ differenziert wird.
- Beispiel: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, \text{const}, \text{const})}{\partial x} = 2x + 2yz$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(\text{const}, y, \text{const})}{\partial y} = 2y + 2xz$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial f(\text{const}, \text{const}, z)}{\partial z} = 2z + 2xy$$

Der Nabla-Operator

- Operator, der eine kompakte Notation für die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator erlaubt
- Der Nabla-Operator kann als Vektor interpretiert werden und wird daher in der Literatur auch häufig mit einem Pfeil gekennzeichnet. $\nabla = \vec{\nabla} = \vec{\nabla}$
- Die Darstellung des Operators ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\text{grad}(\phi) = \nabla \phi$$

$$\text{div}(\mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\text{rot}(\mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A}$$

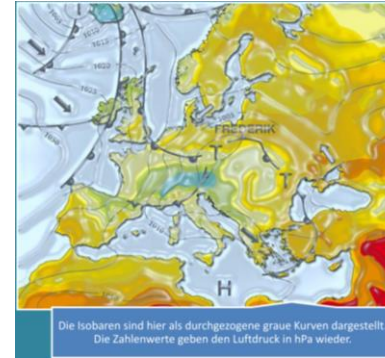
$$\Delta(\mathbf{A}) = \nabla^2(\mathbf{A})$$

Skalarfelder und Gradient

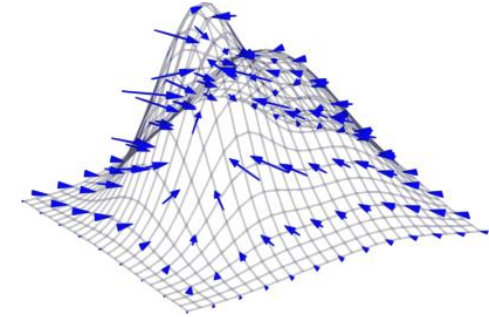
- Ein Skalarfeld ordnet jedem Punkt im Raum einen skalaren Wert zu, z.B. ein elektrisches Potential oder eine Temperatur ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)
- Beispiel: $\phi(x, y, z) = x^2 + 2y - 3z$

Gradient (Steigung)

- Vektorfeld, das die partiellen Ableitungen als Komponenten enthält
- Anschauung: zeigt an jedem Punkt in die Richtung der maximalen Steigung des Skalarfelds



Bildquelle: <https://www.abiweb.de/physik-ladungen-felder/feldkonzept-allgemeiner-ueberblick/skalarfeld.html>



Bildquelle: <http://ip.uni-goettingen.de/get/image/2320>

$$\text{grad}(\phi) = \nabla \phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Nabla-Operator

Vektorfelder

- Ein Vektorfeld ordnet jedem Punkt im Raum einen Vektor zu, z.B. eine elektrische Feldstärke ($f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$)

- Beispiel:

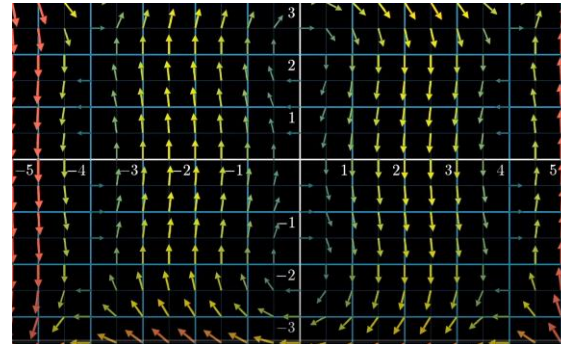
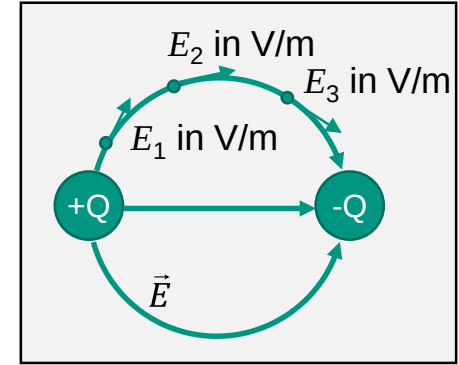
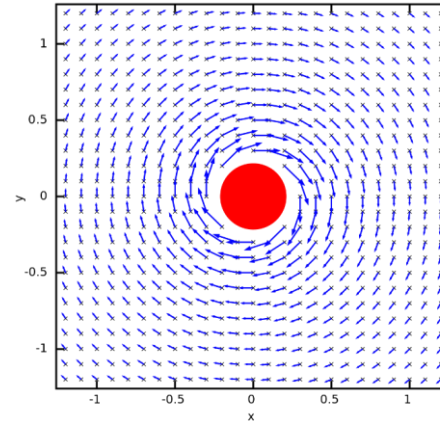
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{pmatrix} E_x(x, y, z) \\ E_y(x, y, z) \\ E_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x - 4y + z \\ -2y + 3z \end{pmatrix}$$

- Feldlinien repräsentieren keine krummen Vektoren, sondern ein Vektorfeld. Die Krümmung der Feldlinien entsteht aus der Hintereinanderzeichnung der Einheitsvektoren.

Bildquelle:

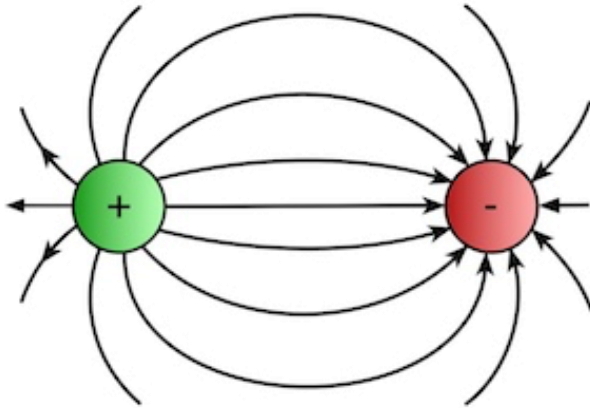
<https://de.wikipedia.org/wiki/Vektorfeld>

Magnetische Feldstärke eines geraden stromdurchflossenen Leiters

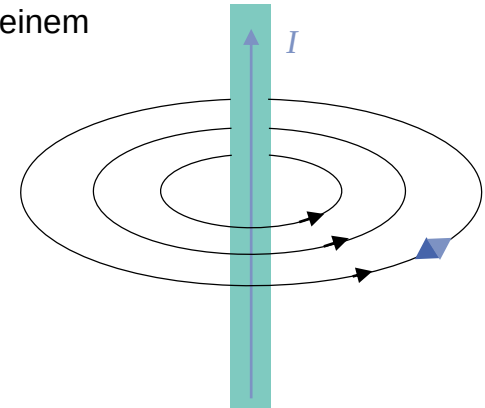


Quellenfelder und Wirbelfelder

Quellenfelder sind Vektorfelder mit einer Quelle (Anfang) und einer Senke (Ende), beispielsweise **elektrostatische Felder** zweier Punktladungen. Die **Divergenz** ist Ursache für Quellenfelder.



Wirbelfelder sind Vektorfelder mit geschlossenen Feldlinien. Sie haben eine Richtung, aber weder Quelle, noch Senke. Ihre Divergenz ist daher Null. Das gilt beispielsweise für alle **Magnetfelder** oder für induzierte **elektrische Wirbelfelder**. Die **Rotation** ist die Ursache für Wirbelfelder. Das kann z.B. der Strom in einem Leiterdraht sein.

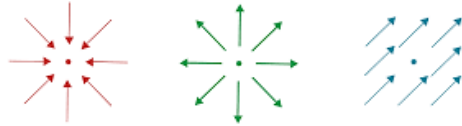


Bildquelle: Vorlesung "Elektromagnetische Felder", Prof. Doppelbauer, KIT

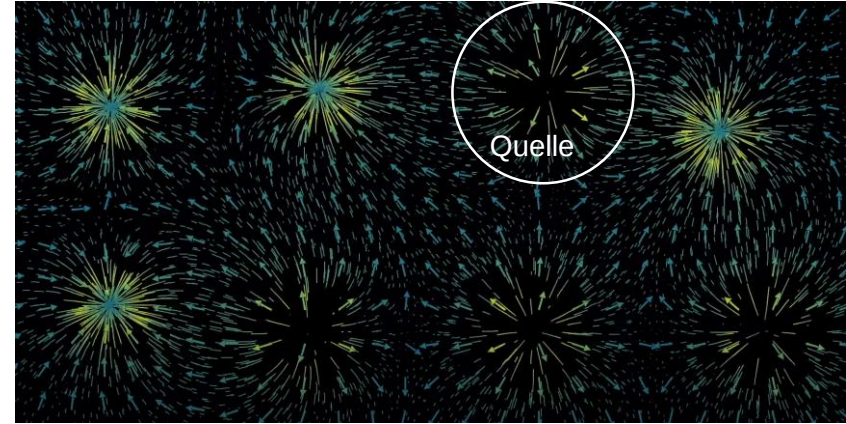
Divergenz eines Vektorfeldes

- Skalarfeld, das sich als Skalarprodukt des Vektorfeldes mit dem Nabla-Operator ergibt
- **Anschauung:** Quelldichte oder Ergiebigkeit des Vektorfeldes, d.h. $\nabla \cdot \mathbf{E} > 0$ für Quellen und $\nabla \cdot \mathbf{E} < 0$ für Senken

$$\nabla \cdot \mathbf{E} < 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} > 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$



- Jeder Einzelterm misst die Quelldichte der Feldanteile, die durch die zur jeweiligen Richtung senkrecht liegenden Randflächen hindurchtreten.



$$\text{div}(\mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{E} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{Nabla-Operator}} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

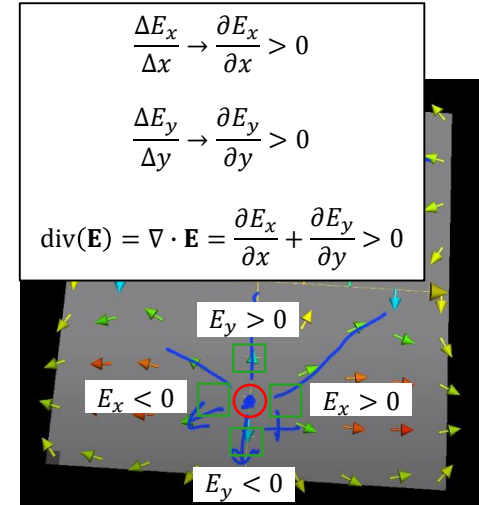
Divergenz eines Vektorfeldes (2D-Beispiel)

- Skalarfeld, das sich als Skalarprodukt des Vektorfeldes mit dem Nabla-Operator ergibt
- **Anschauung:** Quelldichte oder Ergiebigkeit des Vektorfeldes, d.h. $\nabla \cdot \mathbf{E} > 0$ für Quellen und $\nabla \cdot \mathbf{E} < 0$ für Senken

$$\nabla \cdot \mathbf{E} < 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} > 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$



- Jeder Einzelterm misst die Quelldichte der Feldanteile, die durch die zur jeweiligen Richtung senkrecht liegenden Randflächen hindurchtreten.



Im Beobachtungspunkt (○) sollen die Ableitungen betrachtet werden. Wir nähern diese durch Differenzenquotienten zwischen den grünen Bereichen (□). Die Summe der Differenzenquotienten $\frac{\Delta E_x}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta E_y}{\Delta y}$ ist > 0 . Es liegt somit eine Quelle vor!

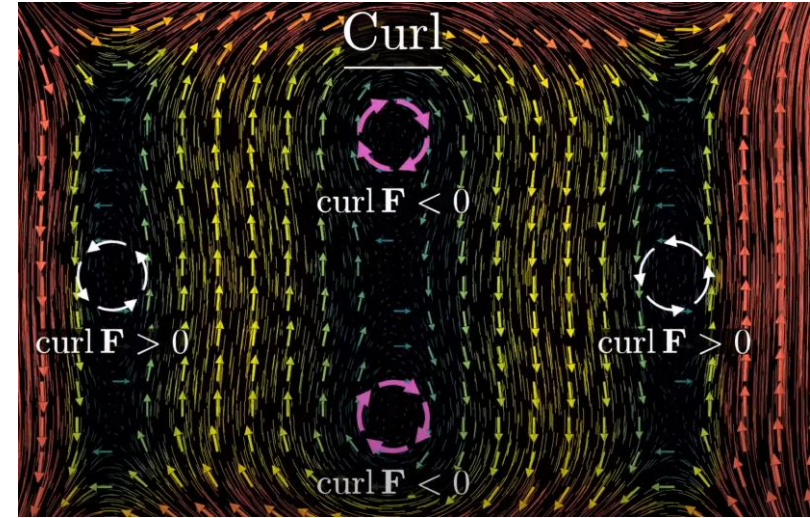
2D-Formel der Divergenz

$$\text{div}(\mathbf{E}) = \nabla \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

Rotation eines Vektorfeldes

- Vektorfeld, das sich als Kreuzprodukt des Vektorfeldes mit dem Nabla-Operator ergibt
- Maß für die Wirbelstärke bzw. die Dichte von Wirbelursachen
- **Anschauung (Wasserströmung):**
„Würde eine an einem Punkt im Vektorfeld fixierte Münze in Rotation versetzt werden?“ (2D)

„Würde ein an einem Punkt im Vektorfeld fixierter Ball in Rotation versetzt werden?“ (3D)



$$\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

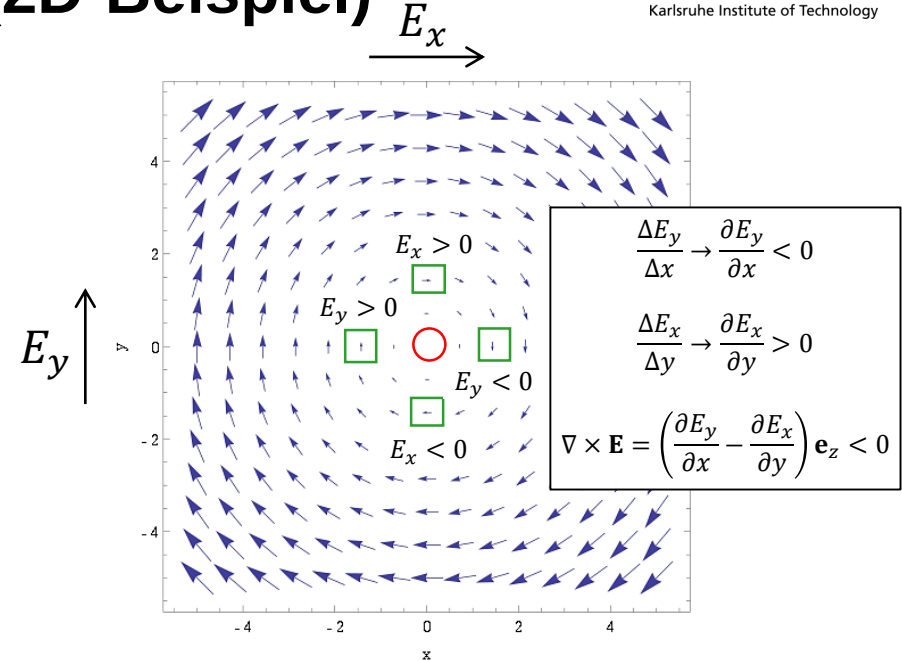
Nabla-Operator

Rotation eines Vektorfeldes (2D-Beispiel)

- Betrachtung zweidimensionaler Vektorfelder erleichtert die Anschauung. Dann gilt:

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

- Das Vorzeichen der Rotation gibt die Drehrichtung an:
 - Uhrzeigersinn $\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} < 0$
 - Gegen den Uhrzeigersinn $\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} > 0$
- Die Rotation zeigt in die Normalrichtung der Fläche mit dem stärksten Wirbel



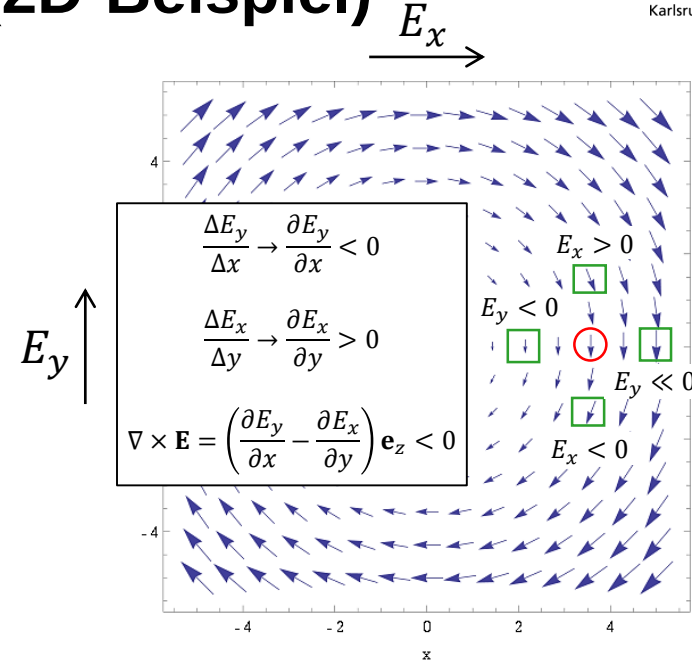
Im Beobachtungspunkt (○) sollen die Ableitungen betrachtet werden. Wir nähern diese durch Differenzenquotienten der grünen Bereiche (□). Die Differenz der Differenzenquotienten $\frac{\Delta E_y}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta E_x}{\Delta y}$ ist $\neq 0$. Das Feld hat einen Wirbel!

Rotation eines Vektorfeldes (2D-Beispiel)

- Betrachtung zweidimensionaler Vektorfelder erleichtert die Anschauung. Dann gilt:

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

- Das Vorzeichen der Rotation gibt die Drehrichtung an:
 - Uhrzeigersinn $\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} < 0$
 - Gegen den Uhrzeigersinn $\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} > 0$
- Die Rotation zeigt in die Normalrichtung der Fläche mit dem stärksten Wirbel



Im Beobachtungspunkt (○) sollen die Ableitungen betrachtet werden. Wir nähern diese durch Differenzenquotienten der grünen Bereiche (□). Die Differenz der Differenzenquotienten $\frac{\Delta E_y}{\Delta x}$ und $\frac{\Delta E_x}{\Delta y}$ ist $\neq 0$. Das Feld hat einen Wirbel!

Rotation eines Vektorfeldes (2D-Beispiel)

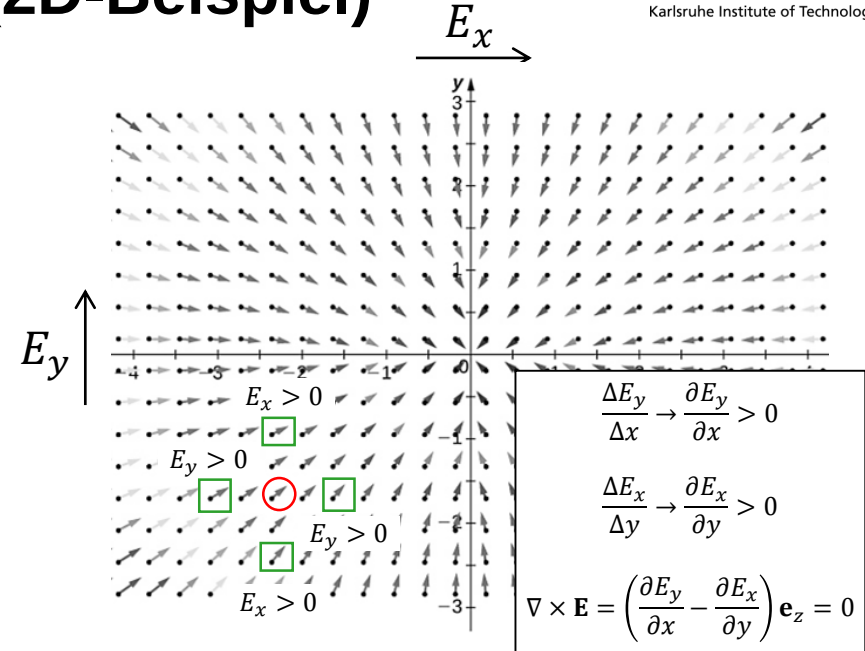
- Betrachtung zweidimensionaler Vektorfelder erleichtert die Anschauung. Dann gilt:

$$\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

- Das Vorzeichen der Rotation gibt die Drehrichtung an:

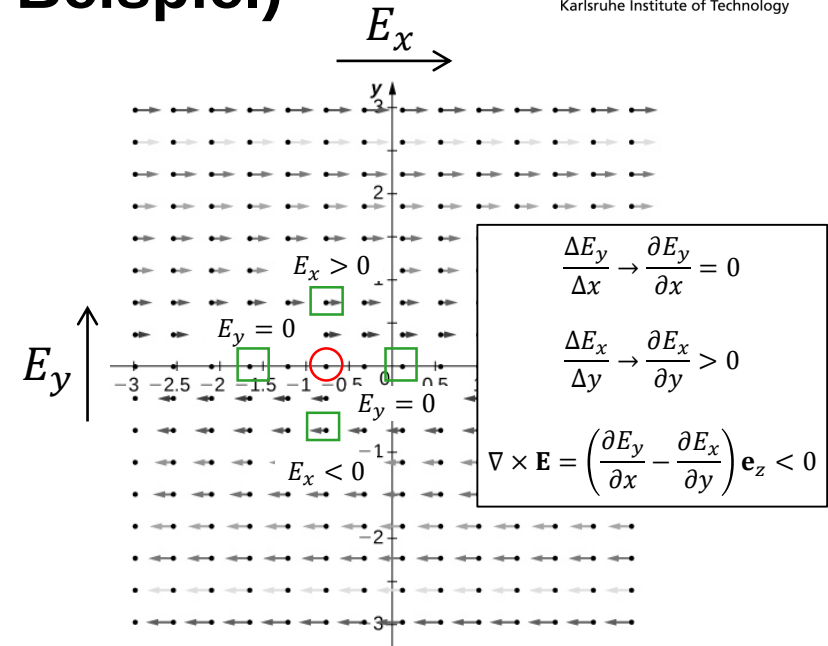
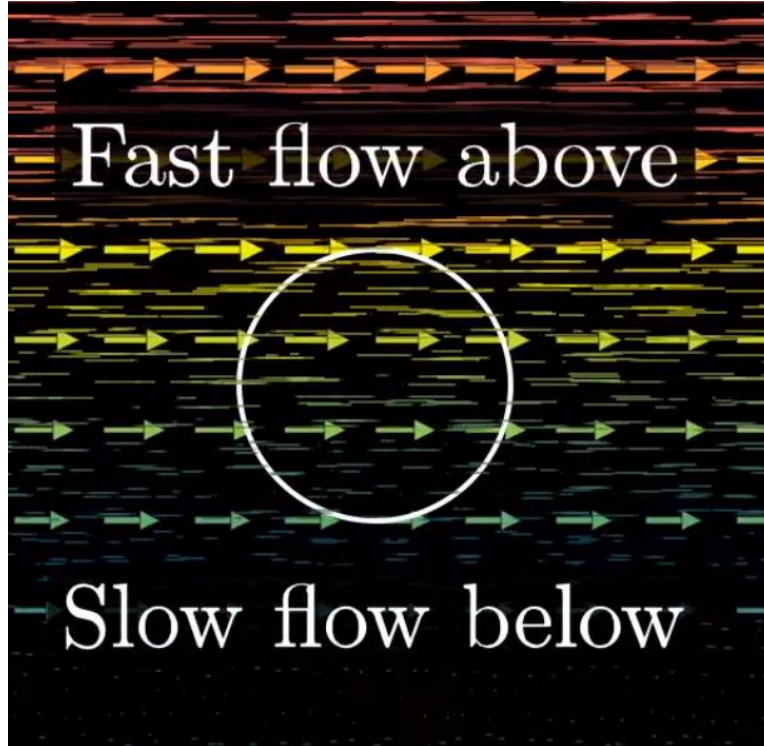
- Uhrzeigersinn $\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} < 0$
- Gegen den Uhrzeigersinn $\text{rot}(\mathbf{E}) = \nabla \times \mathbf{E} > 0$

- Die Rotation zeigt in die Normalrichtung der Fläche mit dem stärksten Wirbel



Im Beobachtungspunkt (○) sollen die Ableitungen betrachtet werden. Wir nähern diese durch Differenzenquotienten im grünen Bereich (□). Das Feld hat keinen Wirbel, da beide Ableitungen das gleiche Vorzeichen und den gleichen Betrag haben.

Rotation eines Vektorfeldes (2D-Beispiel)



Im Beobachtungspunkt (○) sollen die Ableitungen betrachtet werden. Wir nähern diese durch Differenzenquotienten im grünen Bereich (□). Das Feld hat einen Wirbel, auch wenn dieser nicht auf den ersten Blick sichtbar ist.

Der Laplace-Operator (Potentialfeldquellstärke)

Für Skalarfelder:

- Skalarfeld, das die Divergenz des Gradienten enthält
- Anschauung: gibt die „Krümmung“ des Skalarfeldes an

$$\Delta\phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\phi)) = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} \phi(x, y, z) \end{pmatrix} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Nabla-Operator

Für Vektorfelder:

- Wird der Laplace-Operator auf ein Vektorfeld angewandt, so erfolgt die Anwendung komponentenweise unabhängig.

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \Delta A_x \mathbf{e}_x + \Delta A_y \mathbf{e}_y + \Delta A_z \mathbf{e}_z$$

Der Laplace-Operator (Potentialfeldquellstärke)

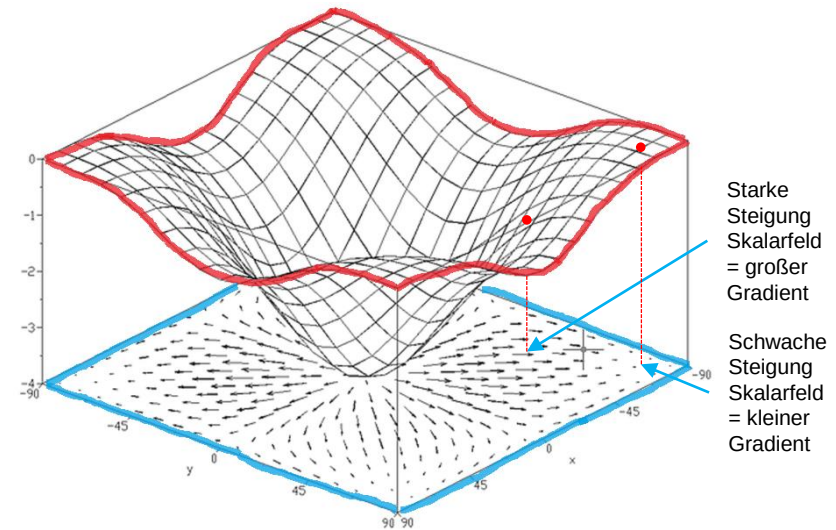
Für Skalarfelder:

- Skalarfeld, das die Divergenz des Gradienten enthält
- Anschauung: gibt die „Krümmung“ des Skalarfeldes an

$$\Delta\phi = \text{div}(\text{grad}(\phi)) = \nabla \cdot (\nabla\phi)$$

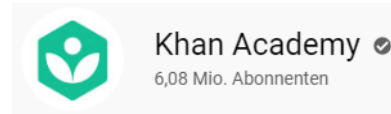
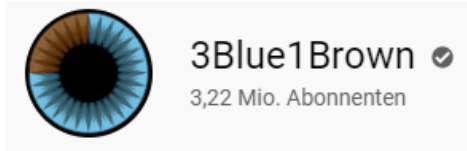
Potentialfeld / Skalarfeld	Maximum	Minimum
Gradient	$\nabla\phi = 0$	$\nabla\phi = 0$
Laplace-Operator	$\Delta\phi < 0$	$\Delta\phi > 0$

Gegeben sei ein **Skalarfeld** ϕ (Potentialfeld), z.B. die Temperatur über einer Fläche. Über der xy -Ebene tragen wir den **Gradienten** (selbst ein Vektorfeld) dieses Skalarfeldes auf.

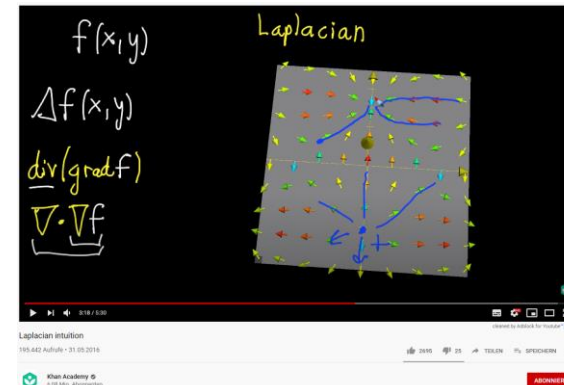
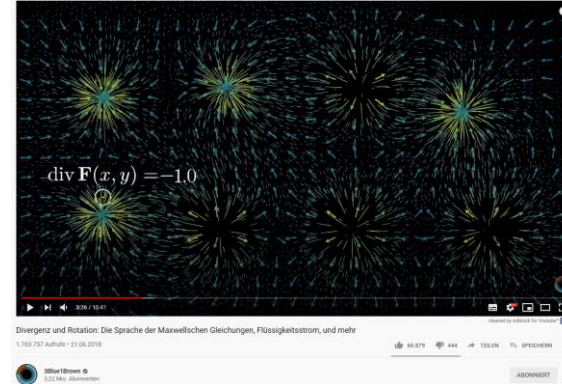


Der Laplace-Operator gibt die Divergenz des Gradienten an, ist also dann groß (klein), wenn ein Minimum (Maximum) des Skalarfeldes vorliegt. Er erinnert damit an die zweite Ableitung.

Das ging alles zu schnell?



- Der Youtube-Kanal 3Blue1Brown bietet jede Menge englischsprachige Videos mit dem Ziel mathematische Konzepte zu visualisieren und verständlich zu machen, u.a. auch zur Fourier-Transformation und den Differentialoperatoren.
- Urheber ist Grant Sanderson, ein Mathe-Absolvent der Stanford University.
- Vor dem Start seines eigenen Kanals war Sanderson für die Khan Academy aktiv.



Der Nabla-Operator

- Operator, der eine kompakte Notation für die Differentialoperatoren Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator erlaubt
- Der Nabla-Operator kann als Vektor interpretiert werden und wird daher in der Literatur auch häufig mit einem Pfeil gekennzeichnet. $\nabla = \vec{\nabla} = \vec{\nabla}$
- Die Darstellung des Operators ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig. In kartesischen Koordinaten gilt

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\text{grad}(\phi) = \nabla \phi$$

Operation wird auf ein **Skalarfeld** angewendet
→ Ergebnis ist ein **Vektorfeld**

$$\text{div}(\mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{A}$$

Operation wird auf ein **Vektorfeld** angewendet
→ Ergebnis ist ein **Skalarfeld**

$$\text{rot}(\mathbf{A}) = \nabla \times \mathbf{A}$$

Operation wird auf ein **Vektorfeld** angewendet
→ Ergebnis ist ein **Vektorfeld**

$$\Delta(\mathbf{A}) = \nabla^2(\mathbf{A})$$

Operation wird auf ein **Skalarfeld** angewendet
→ Ergebnis ist ein **Skalarfeld**
Operation wird auf ein **Vektorfeld** angewendet
→ Ergebnis ist ein **Vektorfeld**

Der Nabla-Operator: Rechenregeln

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \phi) + \phi (\nabla \cdot \mathbf{A})$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot (\nabla \phi) + \phi (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\Delta \mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

$$\text{rot}(\text{grad}(\phi)) = 0$$

$$\text{div}(\text{rot}(\mathbf{A})) = 0$$

$$\text{div}(\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \text{grad}(\phi) + \phi \text{div}(\mathbf{A})$$

$$\text{rot}(\phi \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \text{grad}(\phi) + \phi \text{rot}(\mathbf{A})$$

$$\Delta \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div}(\mathbf{A})) - \text{rot}(\text{rot}(\mathbf{A}))$$

Aus den
Vorlesungen
„Elektromagnetische
Felder“ (EMF) und
„Felder und Wellen“
(FuW) bekannte
Schreibweise.

Die Rechenregeln werden aus Zeitgründen nicht bewiesen.
Wer möchte, kann diese als Hausaufgabe nachprüfen.

Der Nabla-Operator: Rechenregeln

■ Mathematische Herleitung ausgewählter Rechenregeln

1) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

a) mit Nabla-Operator $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Vertauschen der Differenzierungsreihenfolge
Satz von Schwarz
Bedingung: stetig
differenzierbare Fkt.
mehrerer Variablen

b) mit Rotationsformel aus der Formelsammlung und $\text{grad}(\phi) = \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{A}) &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ &= \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]}_0 \vec{e}_x + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right]}_0 \vec{e}_y + \underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right]}_0 \vec{e}_z \end{aligned}$$

3) $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = (\nabla \phi) \cdot \vec{A} + \phi (\nabla \cdot \vec{A})$ Produktregel

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \phi A_x \\ \phi A_y \\ \phi A_z \end{pmatrix} &= \frac{\partial}{\partial x} (\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\phi A_z) = A_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial \phi}{\partial z} + \phi \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z}_{(\nabla \phi) \cdot \vec{A}} + \underbrace{\phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)}_{\phi (\nabla \cdot \vec{A})} \end{aligned}$$

2) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} A_z}_{\text{Stetigkeit}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} A_y}_{\text{Stetigkeit}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} A_x}_{\text{Stetigkeit}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} A_z}_{\text{Stetigkeit}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} A_y}_{\text{Stetigkeit}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} A_x}_{\text{Stetigkeit}} = 0 \end{aligned}$$

b) $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ als neues Vektorfeld

$$\text{rot}(\vec{A}) = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

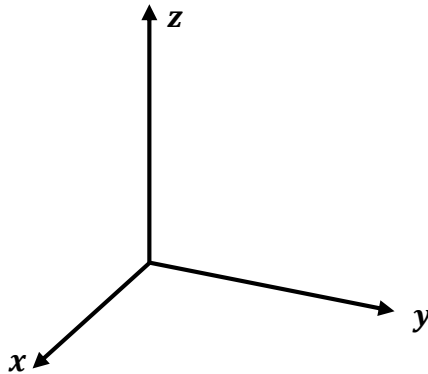
$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} A_z}_{\text{Stetigkeit}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} A_y}_{\text{Stetigkeit}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} A_x}_{\text{Stetigkeit}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} A_z}_{\text{Stetigkeit}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} A_y}_{\text{Stetigkeit}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} A_x}_{\text{Stetigkeit}} = 0 \end{aligned}$$

Koordinatensysteme

Kartesische Koordinaten

$$x, y, z$$

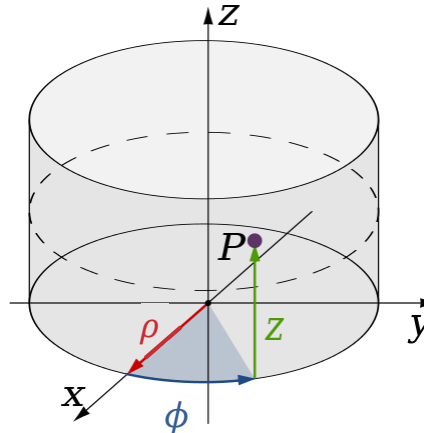
Ausbreitung ebener
Wellen



Zylinderkoordinaten

$$\rho, \phi, z$$

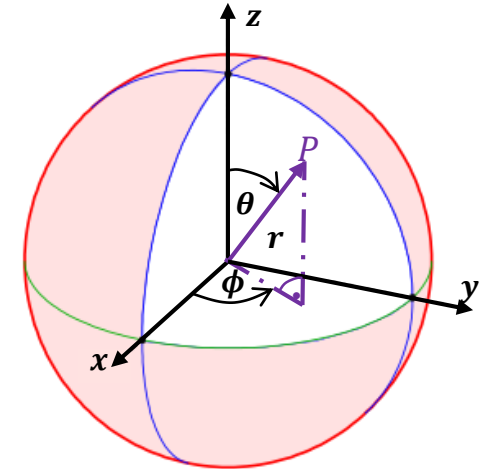
Metalldraht (Antenne)
Spezialfall: unendlich
dünner, unendlich
ausgedehnter Draht



Kugelkoordinaten

$$r, \theta, \phi$$

Ausbreitung von
Kugelwellen



Der Nabla-Operator

- Die Darstellung des Operators ist vom gewählten Koordinatensystem abhängig.

Kartesische Koordinaten

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Zylinderkoordinaten

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{e}_R + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

Kugelkoordinaten

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

Umformung des Nabla-Operators in Zylinderkoordinaten

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

1) Wie sind Zylinderkoordinaten und Kartesische Koordinaten verknüpft?

$$x = R \cdot \cos(\varphi) \quad \text{bzw.} \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = R \cdot \sin(\varphi) \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{bis auf Spezialfälle, die in der Richtung nicht ändern (Radialstrahlrichtung)}$$

$$z = z$$



2) Ersetzen der partiellen Ableitung in ∇ gemäß Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Zunächst: $\frac{\partial R}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ berechnen

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

3) Berechnen der gelben Terme unter Ausnutzung von 1)

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{R \cdot \cos(\varphi)}{R} = \cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2}}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{R \cdot \sin(\varphi)}{R} = \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{R^2} = -\frac{\sin(\varphi)}{R}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos(\varphi)}{R}$$

4) Ersetzen der Einheitsvektoren in ∇

$$\cdot \mathbf{e}_R = \cos(\varphi) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (4) \quad \text{siehe Zeichnung oben für } R=1$$

$$\cdot \mathbf{e}_\varphi = -\sin(\varphi) \mathbf{e}_x + \cos(\varphi) \mathbf{e}_y \quad (4a) \quad \text{denn } \mathbf{e}_\varphi \text{ muss stets senkrecht auf } \mathbf{e}_R \text{ stehen, da}$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \cos(\varphi + 90^\circ) \mathbf{e}_x + \sin(\varphi + 90^\circ) \mathbf{e}_y$$

$$= -\cos(90^\circ - \varphi) \mathbf{e}_x + \sin(90^\circ - \varphi) \mathbf{e}_y$$

$$\text{Sinnwahl} \Rightarrow -\sin(\varphi) \mathbf{e}_x + \cos(\varphi) \mathbf{e}_y$$

5) mit den Gleichungen für $\mathbf{e}_R$ und $\mathbf{e}_\varphi$ haben wir ein LGS mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten, das nach $\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$ aufgelöst werden kann

$$\cos(\varphi) \mathbf{e}_x - \sin(\varphi) \mathbf{e}_y = \cos(\varphi) \mathbf{e}_R - \sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\sin(\varphi) \mathbf{e}_x + \cos(\varphi) \mathbf{e}_y = \sin(\varphi) \mathbf{e}_R + \cos(\varphi) \mathbf{e}_\varphi$$

6) Einsetzen in die Gleichung für ∇ , Umformen und Vereinfachen

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial R} \cos(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin(\varphi) \frac{1}{R} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos(\varphi) \frac{1}{R} \right) \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

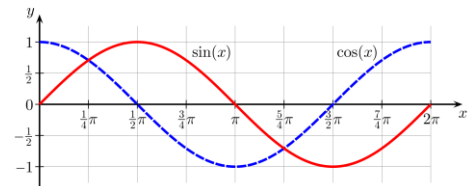
$$= \left(\frac{\partial}{\partial R} \cos(\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin(\varphi) \frac{1}{R} \right) (\cos(\varphi) \mathbf{e}_R - \sin(\varphi) \mathbf{e}_\varphi) + \left(\frac{\partial}{\partial R} \sin(\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos(\varphi) \frac{1}{R} \right) (\sin(\varphi) \mathbf{e}_R + \cos(\varphi) \mathbf{e}_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$= \cos^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R - \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \mathbf{e}_\varphi - \sin^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \mathbf{e}_\varphi + \sin^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \mathbf{e}_\varphi + \cos^2(\varphi) \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{\cos(\varphi) \sin(\varphi)}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$= \left[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right] \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \left[\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right] \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\Rightarrow \nabla = \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z}$$



Bildquelle:

https://de.wikipedia.org/wiki/Sinus_und_Kosinus

Formelsammlung

Tabelle 1: Ortsvektoren

Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
x	$\rho \cos(\phi)$	$r \sin(\vartheta) \cos(\phi)$
y	$\rho \sin(\phi)$	$r \sin(\vartheta) \sin(\phi)$
z	z	$r \cos(\vartheta)$
$\sqrt{x^2 + y^2}$	ρ	$r \sin(\vartheta)$
$\arctan(\frac{y}{x})$	ϕ	ϕ
z	z	$r \cos(\vartheta)$
$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$\sqrt{\rho^2 + z^2}$	r
$\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right)$	$\arctan(\frac{\rho}{z})$	ϑ
$\arctan(\frac{y}{x})$	ϕ	ϕ

siehe
vorherige
Folien

Hinweis:
 $\vartheta = \theta$

Formelsammlung

siehe
vorherige
Folien

Tabelle 4: Nabla-Operator

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
∇	$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$	$\frac{\partial}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$	$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta$

Tabelle 5: Differentialoperatoren

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
$\nabla \psi$	$\frac{\partial \psi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z$	$\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_z$	$\frac{\partial \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$
$\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial(\sin(\vartheta) A_\vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
$\nabla \times \mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x$ $+ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y$ $+ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho$ $+ \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\phi$ $+ \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z$	$\left(\frac{1}{r \sin(\vartheta)} \left[\frac{\partial(\sin(\vartheta) A_\phi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \phi} \right] \right) \mathbf{e}_r$ $+ \left(\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin(\vartheta)} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \right) \mathbf{e}_\vartheta$ $+ \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right] \right) \mathbf{e}_\phi$
$\Delta \psi = \nabla^2 \psi$	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2}$

Formelsammlung

Tabelle 2: **Komponenten eines Vektorfeldes**

Kartesische Koordinaten $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$	Zylinderkoordinaten $A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z$	Kugelkoordinaten $A_r \mathbf{e}_r + A_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + A_\phi \mathbf{e}_\phi$
A_x	$A_\rho \cos(\phi) - A_\phi \sin(\phi)$	$A_r \sin(\vartheta) \cos(\phi) + A_\vartheta \cos(\vartheta) \cos(\phi) - A_\phi \sin(\phi)$
A_y	$A_\rho \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi)$	$A_r \sin(\vartheta) \sin(\phi) + A_\vartheta \cos(\vartheta) \sin(\phi) + A_\phi \cos(\phi)$
A_z	A_z	$A_r \cos(\vartheta) - A_\vartheta \sin(\vartheta)$
$A_x \cos(\phi) + A_y \sin(\phi)$	A_ρ	$A_r \sin(\vartheta) + A_\vartheta \cos(\vartheta)$
$-A_x \sin(\phi) + A_y \cos(\phi)$	A_ϕ	A_ϕ
A_z	A_z	$A_r \cos(\vartheta) - A_\vartheta \sin(\vartheta)$
$A_x \sin(\vartheta) \cos(\phi) + A_y \sin(\vartheta) \sin(\phi) + A_z \cos(\vartheta)$	$A_\rho \sin(\vartheta) + A_z \cos(\vartheta)$	A_r
$A_x \cos(\vartheta) \cos(\phi) + A_y \cos(\vartheta) \sin(\phi) - A_z \sin(\vartheta)$	$A_\rho \cos(\vartheta) - A_z \sin(\vartheta)$	A_ϑ
$-A_x \sin(\phi) + A_y \cos(\phi)$	A_ϕ	A_ϕ

Spalte mit bekannten Feldgrößen

Spalte mit Zielgrößen

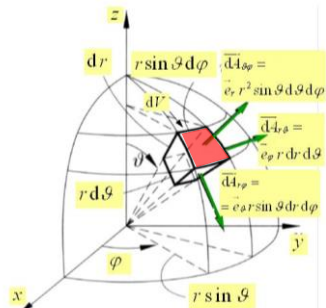
Formelsammlung

Tabelle 3: Linien-, Flächen- und Volumenelemente

	Kartesische Koordinaten	Zylinderkoordinaten	Kugelkoordinaten
ds	$\mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz$	$\mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\phi \rho d\phi + \mathbf{e}_z dz$	$\mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\vartheta r d\vartheta + \mathbf{e}_\phi r \sin(\vartheta) d\phi$
df	$\mathbf{e}_x dy dz + \mathbf{e}_y dx dz + \mathbf{e}_z dx dy$	$\mathbf{e}_\rho \rho d\phi dz + \mathbf{e}_\phi d\rho dz + \mathbf{e}_z \rho d\rho d\phi$	$\mathbf{e}_r r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi + \mathbf{e}_\vartheta r \sin(\vartheta) dr d\phi + \mathbf{e}_\phi r dr d\vartheta$
dv	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\phi dz$	$r^2 \sin(\vartheta) dr d\vartheta d\phi$

- Die Formelsammlung gibt die allgemeinste Form des Flächenelements an. Durch das Skalarprodukt entfallen nicht-relevante Terme, da z.B. $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1$, aber $\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\phi = 0$ gilt. Aus der Anschauung wird jedoch auch schnell klar, warum nur der erste Term des Flächenelements relevant ist.

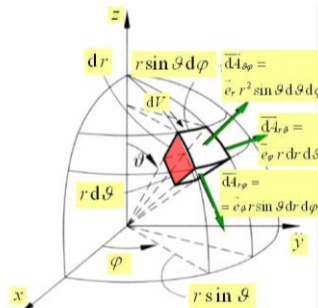
$$d\mathbf{F} = r^2 \sin(\vartheta) d\vartheta d\phi \mathbf{e}_r$$



Normalenvektor des Flächenelements zeigt in Richtung des Radius r
Integration über ϑ, ϕ

Abhängig vom gewählten Radius ergibt sich eine Kugeloberfläche

$$d\mathbf{F} = r dr d\vartheta \mathbf{e}_\phi$$

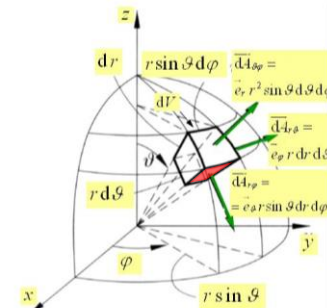


Normalenvektor des Flächenelements zeigt in Richtung von ϕ

Integration über r, ϑ

Abhängig vom gewählten Winkel ϕ ergibt sich ein halber Kugel-querschnitt (für begrenztes r)

$$d\mathbf{F} = r \sin(\vartheta) dr d\phi \mathbf{e}_\vartheta$$



Normalenvektor des Flächenelements zeigt in Richtung von ϑ

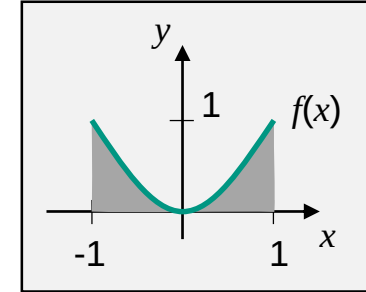
Integration über r, ϕ

Abhängig vom gewählten Winkel ϑ ergibt sich die Kugelgrundfläche oder der Mantel eines Kegels

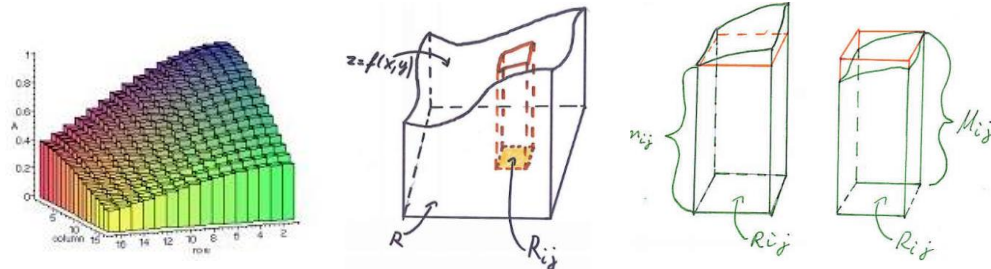
Mehrdimensionale Integralrechnung

- **Integral:** Anschaulich gesehen berechnet man mit dem Integral die Fläche unter einer Kurve (Approximation als Summe von „Rechtecken“).
- **Flächenintegral / Doppelintegral:** Anschaulich gesehen berechnet man das Volumen unterhalb von einer Oberfläche (Approximation als Summe von „Säulen“).
- Ein Spezialfall ist $f(x, y) = 1$, bei dem die auf die Grundebene projizierte Fläche berechnet wird.

$$F(x) = \int f(x) dx$$

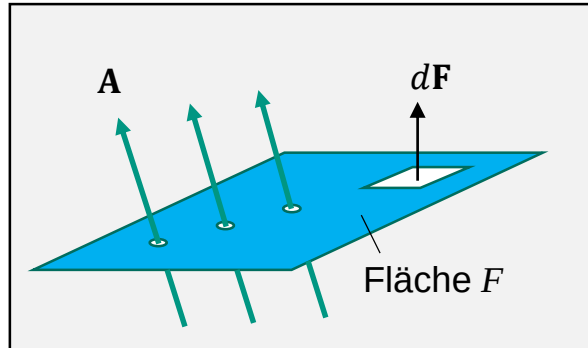


$$F(x) = \iint_F f(x, y) dx dy = \int f(x, y) dF$$



Mehrdimensionale Integralrechnung

- **Volumenintegral / Dreifachintegral:** Erweiterung auf dreidimensionale Funktionen $f(x, y, z)$, z.B. Integration über alle Temperatur- oder Potentialwerte im Raum.
- **(Ober)flächenintegral:** Berechnung der senkrecht durch ein Flächenstück hindurchtretenden Komponente eines Vektorfeldes $\mathbf{A}$



$$F(x) = \iiint f(x, y, z) dx dy dz = \int_V f(x, y, z) dV$$

$$F(x) = \iint \mathbf{A}(x, y) dx dy \mathbf{e}_z = \int_F f(x, y) d\mathbf{F}$$

$$F(x) = \oiint \mathbf{A}(x, y) dx dy \mathbf{e}_z = \oint_F \mathbf{A}(x, y) d\mathbf{F}$$

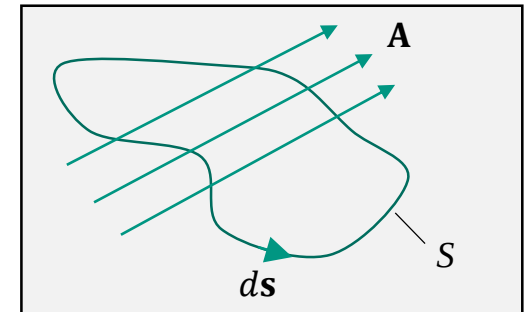
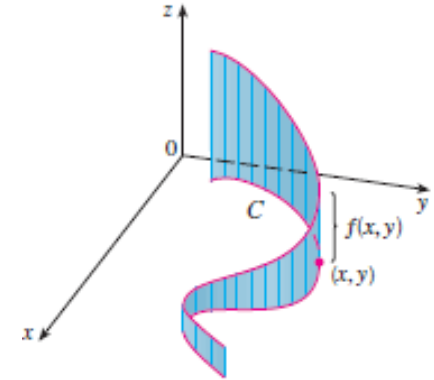
Integration über eine geschlossene Fläche, z.B. die Oberfläche einer Kugel

Normalenvektor der Fläche, über die integriert wird

Mehrdimensionale Integralrechnung

- **Kurvenintegral / Linienintegral:** Berechnung der Fläche unter einer Raumkurve, d.h. der Fläche zwischen der Raumkurve und deren Projektion auf die Grundebene.
- Ein Spezialfall ist $f(x, y, z) = 1$, bei dem die Länge der Raumkurve berechnet wird.
- In EMW meist Integration entlang geschlossener Linien, z.B. entlang eines Kreises oder einer Feldlinie um einen stromdurchflossenen Leiter herum.

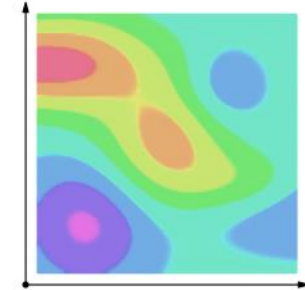
$$\oint_{S=\partial F} \mathbf{A} \, ds$$



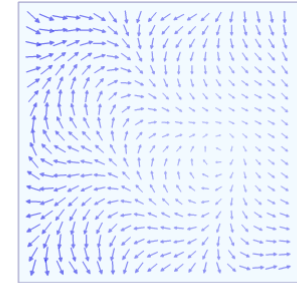
Mehrdimensionale Integralrechnung

- **Kurvenintegral / Linienintegral:** Berechnung der Fläche unter einer Raumkurve
- Ein Spezialfall ist $f(x, y, z) = 1$, bei dem die Länge der Raumkurve berechnet wird.
- In EMW meist Integration entlang geschlossener Linien, z.B. entlang eines Kreises oder einer Feldlinie um einen stromdurchflossenen Leiter herum.

$$\oint_{S=\partial F} \Phi \, ds$$



$$\oint_{S=\partial F} \mathbf{A} \, ds$$



Hinweis: Bitte nutzen Sie die unten stehenden Links zum Abspielen der GIFs.

Integralsätze

Integralsatz von Gauß

Man erzielt das gleiche Ergebnis, wenn man den Fluss durch eine geschlossene Hüllfläche (z.B. eine Kugeloberfläche) berechnet und wenn man alle von der Hülle eingeschlossenen Quellen und Senken aufaddiert.

$$\oint_{O=\partial V} \mathbf{A} \, d\mathbf{F} = \int_V \operatorname{div}(\mathbf{A}) \, dV$$

Integralsatz von Stokes

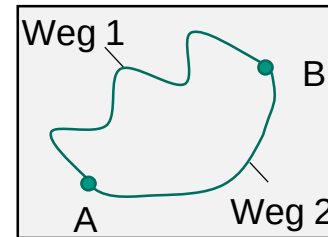
Anschauung nicht direkt vorhanden

$$\oint_{S=\partial F} \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \int_F \operatorname{rot}(\mathbf{A}) \, d\mathbf{F}$$

Linienintegral

Das Wegintegral über den Gradienten eines Skalarfeldes ϕ vom Punkt A zum Punkt B ist gleich der Differenz der Werte der Potentialfunktion an den beiden Punkten A und B unabhängig vom Verlauf des Integrationswegs zwischen den Punkten.

$$\int_A^B \operatorname{grad}(\phi) \, ds = \phi(B) - \phi(A)$$



Größen und Einheiten

Abgeleitete Größe	Einheit	Symbol	Einheit
Elektrisches Potential	Volt	Φ	V
Elektrische Spannung	Volt	U	V
Elektrischer Strom	Ampere	I	A
Elektrische Stromdichte		J	A/m ²
Elektrischer Widerstand	Ohm	R	$\Omega = V/A$
Elektrische Ladung	Coulomb	Q	C = A · s
Raumladungsdichte		ρ	A · s/m ³
Flächenladungsdichte		σ	A · s/m ²
Elektrische Feldstärke		E	V/m = N/C
Dielektrische Verschiebungsdichte		D	A · s/m ²
Magnetische Flussdichte	Tesla	B	T = V · s/m ²

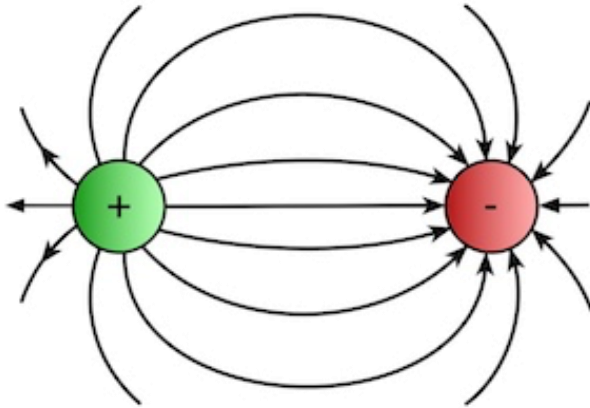
Größen und Einheiten

Abgeleitete Größe	Einheit	Symbol	Einheit
Magnetische Feldstärke		H	A/m
Leistung	Watt	P	W
Arbeit, Energie	Joule	W	J = W · s
Energiedichte		w	J/m ³
Frequenz	Hertz	f	1/s
Kreisfrequenz	Hertz	ω	1/s
Wellenlänge		λ	m
Wellenzahl		k	1/m
Leistung	Watt	P	W

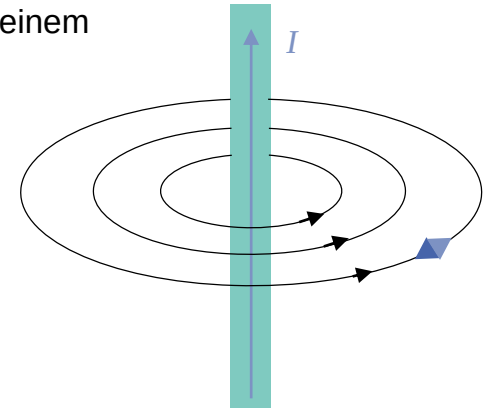
- Elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0 = 8,854... \cdot 10^{-12} \text{ (As)/(Vm)}$
- Magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$
- Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 = 299\,792\,468 \text{ m/s} \approx 2 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Quellenfelder und Wirbelfelder

Quellenfelder sind Vektorfelder mit einer Quelle (Anfang) und einer Senke (Ende), beispielsweise **elektrostatische Felder** zweier Punktladungen. Die **Divergenz** ist Ursache für Quellenfelder.



Wirbelfelder sind Vektorfelder mit geschlossenen Feldlinien. Sie haben eine Richtung, aber weder Quelle, noch Senke. Ihre Divergenz ist daher Null. Das gilt beispielsweise für alle **Magnetfelder** oder für induzierte **elektrische Wirbelfelder**. Die **Rotation** ist die Ursache für Wirbelfelder. Das kann z.B. der Strom in einem Leiterdraht sein.



Bildquelle: Vorlesung "Elektromagnetische Felder", Prof. Doppelbauer, KIT

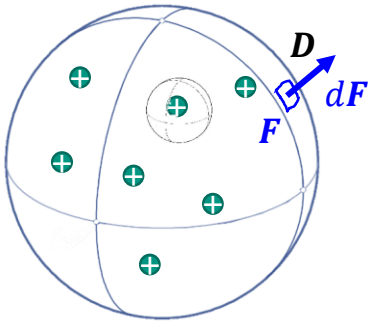
Die Maxwellschen Gleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \mathbf{D} \, d\mathbf{F} = \int_V \rho \, dV = Q$	- Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder. - Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung.
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, d\mathbf{F}$	Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \mathbf{H} \, d\mathbf{s} = \int_F \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \, d\mathbf{F}$	Zeitlich veränderliche elektrische Felder (Verschiebungsstrom) und elektrische Ströme erzeugen magnetische Wirbelfelder
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Gauß	$\oint_{O=\partial V} \mathbf{B} \, d\mathbf{F} = 0$	Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.

Das Gaußsche Gesetz für elektrische Felder

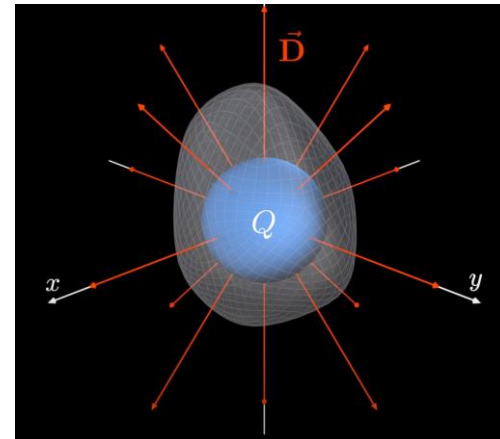
Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	Gauß	$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \rho \, dV = Q$	- Ladungsdichten verursachen elektrische Quellenfelder. - Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist direkt proportional zur im Innern der Oberfläche befindlichen Ladung.

„Satz vom
Hüllenfluss“



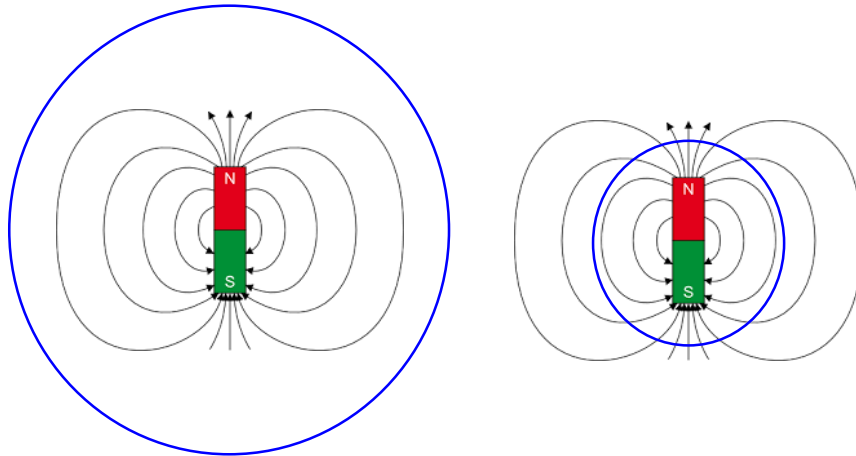
Das Skalarprodukt berechnet das senkrecht durch die Teiloberfläche hindurchtretende Feld. Integration über die gesamte Oberfläche ergibt die Summe des Zu- und Abflusses.

Das Volumenintegral der Kugel entspricht der Summe aller in der Kugel enthaltenen Ladungsanteile.



Das Gaußsche Gesetz für Magnetfelder

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Gauß	$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0$	Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.

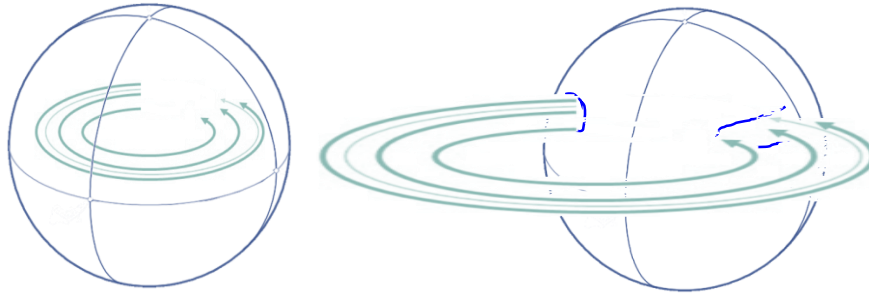


Es sind entweder alle geschlossenen Feldlinien im betrachteten Volumen (z.B. einer Kugel) enthalten oder sämtliche in das Volumen eintretenden Feldlinien verlassen dieses auch wieder an einer anderen Stelle.

2D-Beispiel zum Permanentmagneten

Die Maxwell'schen Gleichungen

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	Gauß	$\oint_{\partial V} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0$	Magnetische Felder sind stets quellenfrei, d.h. Wirbelfelder.

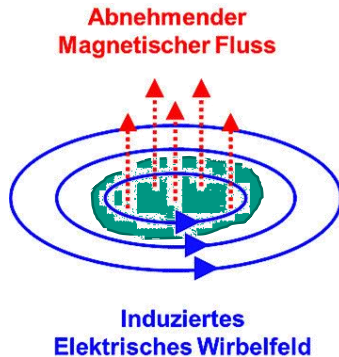


Es sind entweder alle geschlossenen Feldlinien im betrachteten Volumen (z.B. einer Kugel) enthalten oder sämtliche in das Volumen eintretenden Feldlinien verlassen dieses auch wieder an einer anderen Stelle.

3D-Beispiel

Das Induktionsgesetz

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \mathbf{E} d\mathbf{s} = - \int_F \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{F}$	Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen elektrische Wirbelfelder.

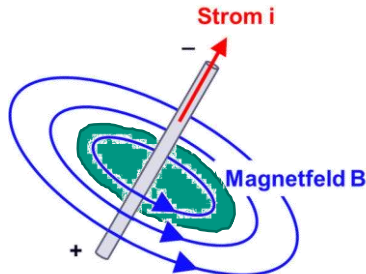


Das Flächenintegral berechnet die zeitliche Änderung des Magnetfeldes, welche auf der grünen Fläche wirksam wird, d.h. senkrecht durch die Fläche hindurchtritt.

Das Wegintegral (oder Linienintegral) der elektrischen Feldstärke entlang des Randes der Fläche ist identisch

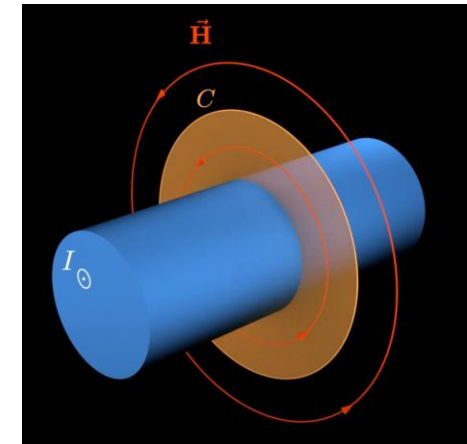
Das Durchflutungsgesetz

Differentielle Form	Integralsatz	Integralform	Interpretation
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Stokes	$\oint_{S=\partial F} \mathbf{H} d\mathbf{s} = \int_F \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{F}$	Zeitlich veränderliche elektrische Felder (Verschiebungsstrom) und elektrische Ströme erzeugen magnetische Wirbelfelder



Das Flächenintegral berechnet den senkrecht durch die Fläche (z.B. die grüne Fläche) tretenden elektrischen Strom.

Das Wegintegral (oder Linienintegral) der magnetischen Feldstärke entlang des Randes der Fläche ist identisch.



Materialgleichungen

- Für **lineare** Materialien gilt:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

- Für **isotrope** Materialien sind ε , μ und κ richtungsunabhängig.
- Für **homogene** Materialien sind ε , μ und κ konstant.
- In EMW behandeln wir nur lineare, isotrope Medien.

- Vakuumpermittivität / elektrische

$$\text{Feldkonstante: } \varepsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

- Relative Permittivität / Permittivität: ε_r

- Vakuumpermeabilität / magnetische

$$\text{Feldkonstante: } \mu_0 \approx 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

- Relative Permeabilität / Permeabilität: μ_r



Im Allgemeinen kann die Permittivität ε_r eine komplexe Größe mit Real- und Imaginärteil sein.

Spezialfälle der Maxwell'schen Gleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellglg.	Zentrale Gleichung	Anmerkungen
Elektrostatik	Stationäre Größen $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ Keine Ströme $\mathbf{J} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$	Poisson-Gleichung $\Delta\phi + \frac{1}{\varepsilon} \nabla\varepsilon \nabla\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ für homogene Materialien ($\nabla\varepsilon = 0$)	- Die DGL hat unendlich viele Lösungen. Die Lösung wird daher erst durch Randbedingungen ($\phi(\infty) = 0$) eindeutig. - Gesucht: elektr. Potential ϕ im gesamten Raum - Variante 1: Raumladung ρ ist bekannt → Coulomb-Integral (Poisson-Integral) als Lösung der Poisson-Gleichung - Spezialfall (teil-)symmetrische Anordnung → „Satz vom Hüllenfluss“ liefert $\mathbf{E}$, Linienintegral dann ϕ - Variante 2: Raumladung ρ ist unbekannt, elektr. Potential ϕ ist an Randstellen bekannt → Separationsansatz, Spiegelungsmethode, Integration, numerische Methoden

Spezialfälle der Maxwell'schen Gleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellglg.	Zentrale Gleichung	Anmerkung
Stationäre Strömungen und Magneto-statik	Stationäre Größen $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ Ohmsches Gesetz $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	Laplace-Gleichung $\Delta \phi + \frac{1}{\kappa} \nabla \kappa \nabla \phi = 0$ Vektorpotential $\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$	- Die Raumladungen, Ströme und damit auch Magnetfelder sind zeitlich konstant. - Im ladungsfreien Raum verschwindet ρ im Vergleich zur Poisson-Gleichung, was die Lösung der DGL vereinfacht. - Bei der Berechnung von statischen Magnetfeldern ergibt sich das Gesetz von Biot-Savart als Pendant zum Coulomb-Integral

$$\Delta \phi = 0$$

für homogene
Materialien ($\nabla \varepsilon = 0$)

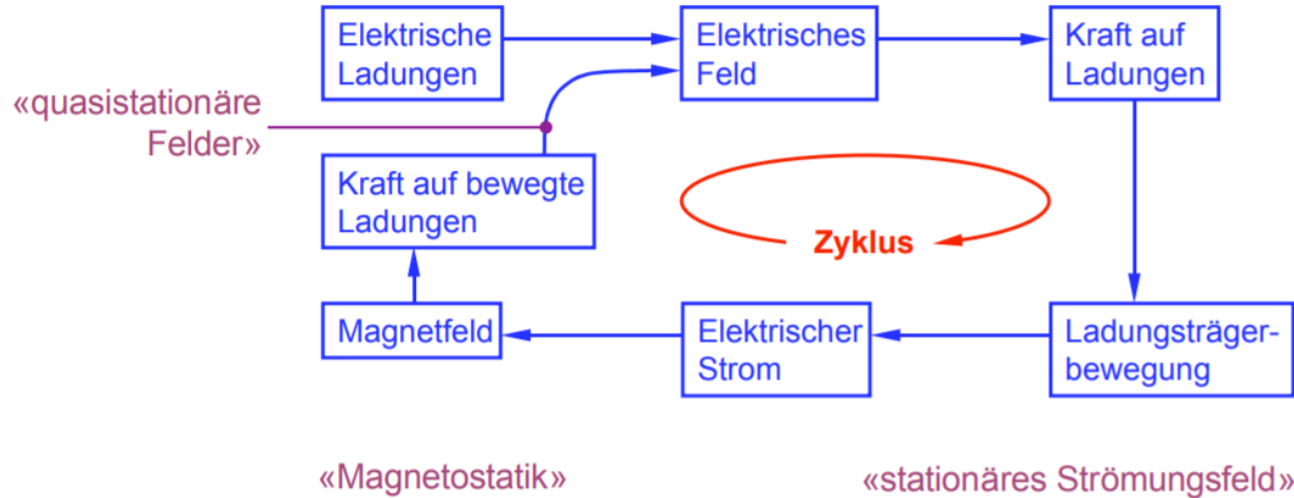
Spezialfälle der Maxwellschen Gleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellglg.	Zentrale Gleichung	Anmerkung
Langsam veränderliche Felder (quasi- stationär)	Vernachlässigbare zeitl. Ableitung der Verschiebungs- dichte $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$	Diffusionsgleichung $\Delta \mathbf{A} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$ $\Delta \phi - \mu\kappa \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ (für $\rho = 0$)	- Nichtstationäre Ladungsträgerbewegungen und zeitlich veränderliche Magnetfelder liegen vor. - Es sind erstmals $\mathbf{E}$-Feld und $\mathbf{B}$-Feld verknüpft. - Dieser Spezialfall ist stets gültig für Metalle (κ groß), siehe Vorlesung 2.

Anmerkung: Das Skalarfeld ϕ und das Vektorfeld $\mathbf{A}$ in den zentralen Gleichungen auf dieser Folie stehen stellvertretend für verschiedene Größen, $\mathbf{A}$ z.B. für das elektrische Feld $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ oder das magnetische Feld $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$.

Spezialfälle der Maxwellschen Gleichungen

«Elektrostatik»



Spezialfälle der Maxwell'schen Gleichungen

Spezialfall	Randbedingungen	Maxwellglg.	Zentrale Gleichung	Anmerkung
Beliebig veränderliche Felder	Zeitl. Ableitung der Verschiebungs- dichte ist nicht vernachlässigbar $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \neq 0$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	Telegraphengleichung $\Delta \mathbf{A} - \mu\kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$ $\Delta \phi - \mu\kappa \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$ (für $\rho = 0$) $\Delta \mathbf{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0$ Wellengleichung für Materialien mit vernachlässigbarer Leitfähigkeit ($\kappa \rightarrow 0$)	- Dieser allgemeinste Fall ist eine wesentliche Grundlage der elektromagnetischen Wellen, da sich auch ohne Leiter bzw. Strom eine Kopplung zwischen elektrischem und magnetischem Feld ergibt. - Elektromagnetische Wellen existieren auch im Vakuum.

Anmerkung: Das Skalarfeld ϕ und das Vektorfeld $\mathbf{A}$ in den zentralen Gleichungen auf dieser Folie stehen stellvertretend für verschiedene Größen, $\mathbf{A}$ z.B. für das elektrische Feld $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ oder das magnetische Feld $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$.

Ausblick auf die EMW-Übung

- Was ist eine elektromagnetische Welle?
- Was passiert, wenn eine elektromagnetische Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei Materialien trifft?
- Wie entsteht eine Fata Morgana?
- Wie können elektromagnetische Wellen erzeugt bzw. abgestrahlt werden (Antenne)?
- Was sind Hohlleiter?
- Wie breitet sich Licht in einer Glasfaser aus?