

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 01

Abgabe bis zum 08.11.2021 um 12:00 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 1:

Gegeben seien die Maxwell'schen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form in einem zeitinvarianten und isotropen linearen Medium $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ bzw. $\mu = \mu(\mathbf{r})$ (in anisotropen Materialien werden diese Größen durch Matrizen beschrieben):

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

- a) Leiten Sie je eine partielle Differentialgleichung für das elektrische und das magnetische Feld her. Nehmen Sie dazu an, dass der Satz von Schwarz gilt, also die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar ist.

Hinweis: Leiten Sie dazu zunächst das Durchflutungsgesetz bzw. das Induktionsgesetz nach der Zeit ab. Formen Sie die Beziehungen anschließend so um, dass Sie die beiden Differentialgleichungen bis auf die Stromdichte $\mathbf{J}$ entkoppeln können.

Zuerst leiten wir das Durchflutungsgesetz und das Induktionsgesetz nach der Zeit ab. Dabei wenden wir den Satz von Schwarz an, d.h. wir vertauschen die Reihenfolge der Ableitungen nach Ort und Zeit, und nutzen die Zeitinvarianz des Mediums aus. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \\ \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

Schreiben wir nun $\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{D}$ bzw. $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$, so ergeben sich die partiellen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) &= -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \\ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) &= \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.\end{aligned}$$

welche wir durch das Einsetzen des Durchflutungsgesetzes und des Induktionsgesetzes bis auf die Leitungsstromdichte $\mathbf{J}$ entkoppeln können:

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}) \right) &= -\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \\ -\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) &= \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},\end{aligned}$$

Durch Umstellen erhalten wir schließlich

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon} (\nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{J}) \right) = 0. \quad (2)$$

Da $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$ gilt, ist Gleichung 1 eine Differentialgleichung, welche ausschließlich von der elektrischen Feldstärke abhängig ist, während in Gleichung 2 noch das die Leitungsstromdichte $\mathbf{J}$ zu eliminieren gilt.

- b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass das Medium nichtleitend und raumladungsfrei ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$ und $\rho = 0$) sowie homogen ($\varepsilon = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$) ist. Vereinfachen Sie die in a) hergeleiteten Differentialgleichungen entsprechend, um die Wellengleichungen für das elektrische bzw. magnetische Feld zu erhalten.

Mit $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, $\rho = 0$, $\varepsilon = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$ vereinfachen sich (1) und (2) zu

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = 0.$$

Ausnutzen der Beziehung $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$, resultiert in

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{1}{\mu} (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}) = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon} (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H}) = 0,$$

was sich wegen $\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ schreiben lässt als

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu} \Delta \mathbf{E} = 0$$

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} - \frac{1}{\varepsilon} \Delta \mathbf{H} = 0.$$

Multiplikation mit $-\mu$ bzw. $-\varepsilon$ liefert schließlich die Wellengleichung für $\mathbf{E}$ bzw. $\mathbf{H}$:

$$\Delta \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (4)$$

- c) Gehen Sie nun außerdem davon aus, dass $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ vollständig durch die komplexen Zeiger

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t)$$

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t)$$

beschrieben werden. Setzen Sie diesen Ansatz in die Wellengleichungen aus b) ein und vereinfachen Sie soweit möglich.

In der komplexen Zeigerschreibweise reduzieren sich die zeitlichen Ableitungen von $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ zu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \exp(j \omega t)}{\partial t} \right) \\ &= j \omega \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \frac{\partial \exp(j \omega t)}{\partial t} \\ &= -\omega^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \exp(j \omega t) \\ &= -\omega^2 \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) .\end{aligned}$$

Das Einsetzen in (3) und (4) führt dann von den Wellengleichungen auf die Helmholtz-Gleichungen

$$\begin{aligned}\Delta \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) + \omega^2 \mu \varepsilon \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= 0 \\ \Delta \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) + \omega^2 \mu \varepsilon \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) &= 0 .\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2:

Eine ebene Welle breitet sich im Vakuum in z -Richtung aus ($\frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} = 0$). In der Vorlesung wurden die Wellengleichungen im Vakuum aus den Maxwellgleichungen hergeleitet:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (7)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} \quad (10)$$

a) Zeigen Sie dass jede Funktion $f(z \pm ct)$ die Wellengleichungen für diesen Fall erfüllt.

Setzen wir $h(z, t) = f(z - ct) + g(z + ct)$ und berechnen die zweiten partiellen Ableitungen nach z und t erhalten wir

$$\frac{\partial h}{\partial z} = f'(z - ct) + g'(z + ct)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = f''(z - ct) + g''(z + ct)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -c f'(z - ct) + c g'(z + ct)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = c^2 f''(z - ct) + c^2 g''(z + ct).$$

Setzen wir nun diese Ableitungen in die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

ein, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned} f''(z - ct) + g''(z + ct) &= \frac{1}{c^2} \left(c^2 f''(z - ct) + c^2 g''(z + ct) \right) \\ &= f''(z - ct) + g''(z + ct) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist damit die Wellengleichung erfüllt.

b) Können sich longitudinale Wellen ausbreiten? (Gehen Sie von $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ und $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho = 0$ aus.)

Ges: Nachweis von $E_z = H_z = 0$

Geg: Welle in komplexer Schreibweise: $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{j(\omega t - kz)}$, $\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = H_0 e^{j(\omega t - kz)}$

Bei der Definition der transversalen, ebenen Welle wurde die skalare elektrische und magnetische Feldamplitude E_0 bzw. H_0 als orthogonal zur Ausbreitungsrichtung z angenommen. Unter der Annahme, dass wir nun auch eine Neigung der Feldamplitude in z -Richtung erlauben, schreiben wir die Feldamplituden als Vektor, sprich $\mathbf{E}_0$ und $\mathbf{H}_0$. Im Folgenden soll untersucht werden, ob diese Amplitudenvektoren immer transversal zur Ausbreitungsrichtung sein müssen.

Dazu setzen wir zunächst den komplexen Wellenansatz in die linke Seite des Induktionsgesetzes ein

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times E_0 e^{j(\omega t - kz)} .$$

Ist ein $\mathbf{A}$ ein differenzierbarer Vektor und ϕ eine differenzierbare skalare Funktion, lässt sich mit der Beziehung $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi (\nabla \times \mathbf{A})$ ¹ die Rotation des elektrischen Feldes wie folgt umformen

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{E}_0 e^{j(\omega t - kz)} = \nabla e^{j(\omega t - kz)} \times \mathbf{E}_0 + e^{j(\omega t - kz)} \underbrace{\nabla \times \mathbf{E}_0}_{=0} .$$

Da wir eine ebene Welle mit konstanter Amplitude in x - und y -Richtung enthält das Vektorfeld $\mathbf{E}_0$ keinen Wirbel. E_0 ist folglich Null und der Term fällt aus der Gleichung raus. Die Exponentialfunktion ist lediglich von der z -Komponente abhängig und so ergibt sich mit der rechten Seite des Induktionsgesetzes

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \nabla e^{j(\omega t - kz)} \times \mathbf{E}_0 \\ &= -j k e^{j(\omega t - kz)} \mathbf{e}_z \times \mathbf{E}_0 \\ &= -j k \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \\ &= -j \omega \mu \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) . \end{aligned}$$

Analog erhalten wir für das Durchflutungsgesetz

$$\begin{aligned} \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) &= -j k \mathbf{e}_z \times \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \\ &= j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) . \end{aligned}$$

Im Kreuzprodukt spannt der z -Einheitsvektor und das elektrische bzw. magnetische Feld eine Ebene auf. Das Ergebnis des Kreuzproduktes zweier Vektoren ist erneut ein Vektor, welcher orthogonal zu dieser Ebene steht. Entsprechend gilt die Gesetzmäßigkeit

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{e}_z , \quad \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) \perp \mathbf{e}_z .$$

Durch Einsetzen des Ansatzes einer ebenen, harmonischen Welle in die Maxwellschen Gleichungen lässt sich zeigen, dass im Vakuum oder in nichtleitenden Materialien nur transversale, ebene Wellen existieren können.

¹Murray R. Spiegel, „Vector Analysis“, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, Seite 58 f., 1959.

Lösung zu Aufgabe 3:

Mit der Fourierreihe lässt sich jede periodische reelwertige Funktion $f(t)$ als eine Überlagerung unendlich vieler orthogonaler Sinus- und Cosinus-Basisfunktionen beschreiben. Wählt man eine endliche Anzahl N an Basisfunktionen lässt sich die Funktion $f(t)$ nur noch approximieren.

$$f(t) \approx f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos(2\pi n t / T) + \sum_{n=0}^N b_n \sin(2\pi n t / T). \quad (11)$$

Die jeweiligen Sinus- oder Cosinus-Schwingungen werden mit den Fourier-Koeffizienten gewichtet und lassen sich wie folgt bestimmen:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi n t / T) dt \quad (12)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n t / T) dt. \quad (13)$$

a) Berechnen Sie den Fourier-Koeffizienten a_n für $f(t) = \cos(2\pi m t / T)$ in den folgenden Fällen:

- $n \neq m, \quad \forall m, n \neq 0.$
- $n = m, \quad \forall m, n \neq 0.$
- $n = m = 0.$

Um welchen Faktor muss a_0 verglichen mit a_n für $n \in \mathbb{N}^+$ gewichtet werden? Wie spiegelt sich das in Gleichung 11 wider?

Für verschiedene Cosinus-Basisfunktionen, also $f(t) = \cos(2\pi m t / T)$ mit $n \neq m$, ist der Fourier-Koeffizient a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left(\cos\left(\frac{2\pi(m+n)t}{T}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(m-n)t}{T}\right) \right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} \frac{T}{2\pi(m+n)} \sin\left(\frac{2\pi(m+n)t}{T}\right) + \frac{1}{2} \frac{T}{2\pi(m-n)} \sin\left(\frac{2\pi(m-n)t}{T}\right) \right]_0^T \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} \frac{T}{2\pi(m+n)} 0 + \frac{1}{2} \frac{T}{2\pi(m-n)} 0 \right] - \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} \frac{T}{2\pi(m+n)} 0 + \frac{1}{2} \frac{T}{2\pi(m-n)} 0 \right] = 0. \end{aligned}$$

Für identische Cosinus-Basisfunktionen, also $f(t) = \cos(2\pi n t / T)$, ist der Fourier-Koeffizient a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{4\pi n t}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} t + \frac{T}{4\pi n} \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi n t}{T}\right) \right]_0^T \\ &= \frac{2}{T} \left[\frac{1}{2} T + 0 \right] - \frac{2}{T} [0 + 0] = 1. \end{aligned}$$

Für identische Cosinus-Basisfunktionen ist der Fourier-Koeffizient a_0 im Sonderfall $n = 0$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T \cos^2\left(\frac{2\pi 0t}{T}\right) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T 1 dt \\ &= \frac{2}{T} [t]_0^T \\ &= \frac{2}{T} [T] - [0] = 2. \end{aligned}$$

Anhand dieser Fälle lässt sich die Funktionsweise der Fourierreihe erkennen. Durch Berechnen des Integrals mit einer Sinus-/Cosinus-Basisfunktion wird der enthaltene Anteil dieser Basisfunktion in der Funktion $f(t)$ ermittelt. Das Integral über das Produkt zweier verschiedener Sinus-Basisfunktionen oder zweier Cosinus-Basisfunktionen ist stets gleich null. Das Produkt zweier gleicher Basisfunktionen hingegen ist stets auf eins normiert. Ausnahme ist hierbei der Fall für a_0 , dessen Integral zwei ergibt. Aus diesem Grund bedarf es bei a_0 um einen zusätzlichen Normierungsfaktor von $1/2$ um ihn auf die restlichen Koeffizienten zu normieren. Andernfalls wäre der Gleichanteil einer Funktion in der Fourierreihe doppelt gewichtet.

- b) Betrachten Sie nun die Formeln zur Berechnung von a_0 und b_0 . Wie lassen sich diese für $n = 0$ vereinfachen? Welche Bedeutung haben a_0 und b_0 für eine Funktion $f(t)$?

Für a_0 folgt mit $\cos(2\pi 0t/T) = \cos(0) = 1$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi 0t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt.$$

Für b_0 folgt mit $\sin(2\pi 0t/T) = \sin(0) = 0$

$$b_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi 0t}{T}\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T 0 dt = 0.$$

b_0 ist daher stets null und ist von keiner Bedeutung für die Funktion $f(t)$. a_0 hingegen ist der Mittelwert (das Integral) der Funktion $f(t)$ über eine Periode T und ist demnach eine Konstante.

- c) Leiten Sie ausgehend von der Gleichung (11) den korrekten Ausdruck der Fourierreihe aus der Vorlesung her. Berücksichtigen Sie dabei die Erkenntnisse der vorherigen Teilaufgaben. Separieren der $n = 0$ Terme in (11) resultiert in

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi 0t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_0 \sin\left(\frac{2\pi 0t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right).$$

Da $\cos(2\pi 0t/T) = \cos(0) = 1$ und $b_0 = 0$ gilt, lässt sich der Ausdruck weiter vereinfachen

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right).$$

Anschließend lässt sich mit der Beziehung

$$a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \arctan(a/b)) & \forall b > 0, \\ \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \arctan(b/a)) & \forall a > 0, \end{cases}$$

die Sinus-Cosinus-Form der Fourierreihe in die Amplituden-Phasen-Form überführen.

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(2\pi n t / T - \arctan(b/a)).$$

- d) Die Funktion $f(t)$ sei nun $f(t) = \sin^4(t)$ mit einer Periode von $T = 2\pi$ s. Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten a_0, b_0, a_2, b_2, a_4 sowie b_4 .

Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregeln für Potenzen einer Winkelfunktion um $f(t)$ umzuschreiben. Des Weiteren lässt sich eine Multiplikation zweier trigonometrischer Funktionen wie folgt umschreiben:

$$\cos(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)) \quad (14)$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)) \quad (15)$$

Mit Hilfe der Rechenregeln für Potenzen von Winkelfunktionen lässt sich $f(t)$ zu

$$f(t) = \sin^4(t) = \frac{1}{8} (3 - 4 \cos(2t) + \cos(4t)) \quad (16)$$

umschreiben. Mit den Gleichungen (12) und (13) lassen sich anschließend die Fourier-Koeffizienten berechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (3 - 4 \cos(2t) + \cos(4t)) \cos(0t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{8} \cos(4t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \left[\frac{3}{8} t - \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{1}{32} \sin(4t) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{2\pi} \left[\frac{3}{8} 2\pi - 0 + 0 \right] - [0 - 0 + 0] = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (3 - 4 \cos(2t) + \cos(4t)) \sin(0t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (3 - 4 \cos(2t) + \cos(4t)) \cos(2t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} \cos(2t) - \frac{1}{4} (\cos(2t+2t) + \cos(2t-2t)) + \frac{1}{16} (\cos(4t+2t) + \cos(4t-2t)) dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} + \frac{7}{16} \cos(2t) - \frac{1}{4} \cos(4t) + \frac{1}{16} \cos(6t) dt \\ &= \frac{2}{2\pi} \left[-\frac{1}{4} t + \frac{7}{32} \sin(2t) - \frac{1}{16} \sin(4t) + \frac{1}{96} \sin(6t) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2}{2\pi} \left[-\frac{1}{4} 2\pi + 0 - 0 + 0 \right] - \frac{2}{2\pi} [0 + 0 - 0 + 0] = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (3 - 4\cos(2t) + \cos(4t)) \sin(2t) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} \sin(2t) - \frac{1}{4} (\sin(2t + 2t) + \sin(2t - 2t)) + \frac{1}{16} (\sin(4t + 2t) + \sin(4t - 2t)) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{7}{16} \sin(2t) - \frac{1}{4} \sin(4t) + \frac{1}{16} \sin(6t) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \left[-\frac{7}{32} \cos(2t) + \frac{1}{16} \cos(4t) - \frac{1}{96} \cos(6t) \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2}{2\pi} \left[-\frac{7}{32} + \frac{1}{16} - \frac{1}{96} \right] - \frac{2}{2\pi} \left[-\frac{7}{32} + \frac{1}{16} - \frac{1}{96} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (3 - 4\cos(2t) + \cos(4t)) \cos(4t) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} \cos(4t) - \frac{1}{4} (\cos(2t + 4t) + \cos(2t - 4t)) + \frac{1}{16} (\cos(4t + 4t) + \cos(4t - 4t)) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{3}{8} \cos(4t) - \frac{1}{4} \cos(6t) + \frac{1}{16} \cos(8t) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \left[\frac{1}{16} t - \frac{1}{8} \sin(2t) + \frac{3}{32} \sin(4t) - \frac{1}{24} \sin(6t) + \frac{1}{128} \sin(8t) \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2}{2\pi} \left[\frac{1}{16} 2\pi - 0 + 0 - 0 + 0 \right] - \frac{2}{2\pi} [0 - 0 + 0 - 0 + 0] = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4 &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{8} (3 - 4\cos(2t) + \cos(4t)) \sin(4t) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3}{8} \sin(4t) - \frac{1}{4} (\sin(2t + 4t) + \sin(2t - 4t)) + \frac{1}{16} (\sin(4t + 4t) + \sin(4t - 4t)) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{3}{8} \sin(4t) - \frac{1}{4} \sin(6t) + \frac{1}{16} \sin(8t) \, dt \\
&= \frac{2}{2\pi} \left[\frac{1}{8} \cos(2t) - \frac{3}{32} \cos(4t) + \frac{1}{24} \cos(6t) - \frac{1}{128} \cos(8t) \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{2}{2\pi} \left[\frac{1}{8} - \frac{3}{32} + \frac{1}{24} + \frac{1}{128} \right] - \frac{2}{2\pi} \left[\frac{1}{8} - \frac{3}{32} + \frac{1}{24} + \frac{1}{128} \right] = 0
\end{aligned}$$

Einsetzen der Fourier-Koeffizienten in die Fourierreihenentwicklung ergibt

$$\begin{aligned}
f(t) &= f_N(t) = \frac{1}{2} \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos(2t) + \frac{1}{8} \cos(4t) \\
&= \frac{1}{8} (3 - 4\cos(2t) + \cos(4t)) .
\end{aligned}$$

Wir erkennen also, dass wir $f(t)$ mit endlich vielen Basisfunktionen exakt reproduzieren können. Abbildung 1 zeigt die jeweiligen Cosinus-Basisfunktionen gemeinsam mit der Überlagerung $f(t)$.

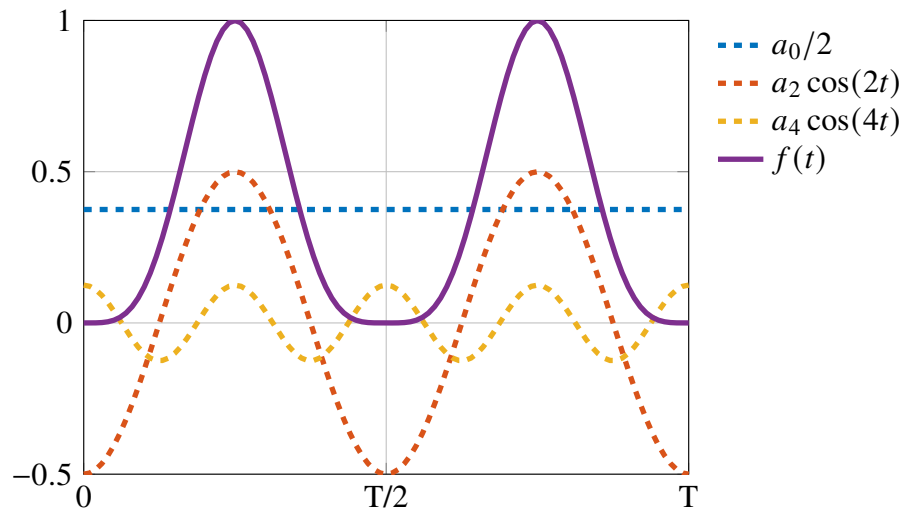


Abbildung 1: Funktion $f(t)$ mit entsprechenden Cosinus-Basisfunktionen.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu