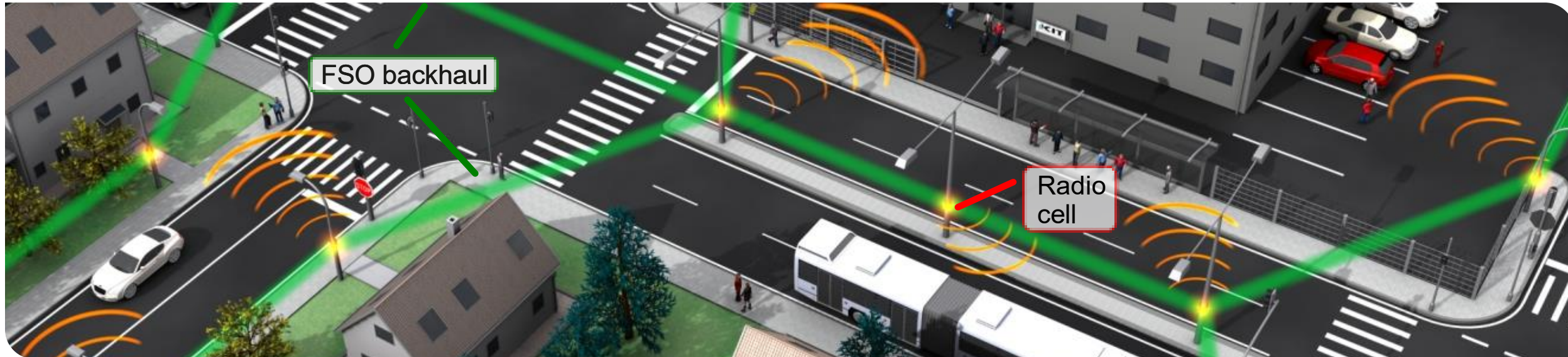


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 2

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Administratives

- Unterlagen zur Vorlesung und Übung sowie Diskussionsforen finden Sie im **ILIAS**-Portal
- Kontaktdaten Übungsleiter
jonas.krimmer@kit.edu
patrick.matala@kit.edu
- Die Übung wird nicht aufgezeichnet
- Übung bietet Bonussystem für die Klausur
- Machen Sie Gebrauch von den Umfragen zu den Vorlesungen!

Oktober	November	Dezember	Januar	Februar
1 Fr	1 Mo ⁴⁴	1 Mi Vorlesung 8	1 Sa	1 Di
2 Sa	2 Di	2 Do	2 So	2 Mi Vorlesung 15
3 So	3 Mi Vorlesung 4	3 Fr	3 Mo ¹	3 Do
4 Mo ⁴⁰	4 Do	4 Sa	4 Di	4 Fr
5 Di	5 Fr	5 So	5 Mi	5 Sa
6 Mi	6 Sa	6 Mo Übung 5 ⁴⁹	6 Do	6 So
7 Do	7 So	7 Di	7 Fr	7 Mo Übung 13 ⁶
8 Fr	8 Mo Übung 1 ⁴⁵	8 Mi Vorlesung 9	8 Sa	8 Di
9 Sa	9 Di	9 Do	9 So	9 Mi Übung 14
10 So	10 Mi Vorlesung 5	10 Fr	10 Mo Übung 9 ²	10 Do
11 Mo ⁴¹	11 Do	11 Sa	11 Di	11 Fr
12 Di	12 Fr	12 So	12 Mi Vorlesung 12	12 Sa
13 Mi	13 Sa	13 Mo Übung 6 ⁵⁰	13 Do	13 So
14 Do	14 So	14 Di	14 Fr	14 Mo ⁷
15 Fr	15 Mo Übung 2 ⁴⁶	15 Mi Vorlesung 10	15 Sa	15 Di
16 Sa	16 Di	16 Do	16 So	16 Mi
17 So	17 Mi Vorlesung 6	17 Fr	17 Mo Übung 10 ³	17 Do
18 Mo Vorlesung 1 ⁴²	18 Do	18 Sa	18 Di	18 Fr
19 Di	19 Fr	19 So	19 Mi Vorlesung 13	19 Sa
20 Mi Vorlesung 2	20 Sa	20 Mo Übung 7 ⁵¹	20 Do	20 So
21 Do	21 So	21 Di	21 Fr	21 Mo ⁸
22 Fr	22 Mo Übung 3 ⁴⁷	22 Mi Vorlesung 11	22 Sa	22 Di
23 Sa	23 Di	23 Do	23 So	23 Mi
24 So	24 Mi Vorlesung 7	24 Fr	24 Mo Übung 11 ⁴	24 Do
25 Mo Übung 0 ⁴³	25 Do	25 Sa	25 Di	25 Fr
26 Di	26 Fr	26 So	26 Mi Vorlesung 14	26 Sa
27 Mi Vorlesung 3	27 Sa	27 Mo ⁵²	27 Do	27 So
28 Do	28 So	28 Di	28 Fr	28 Mo Rosenmontag ⁹
29 Fr	29 Mo Übung 4 ⁴⁸	29 Mi	29 Sa	
30 Sa	30 Di	30 Do	30 So	
31 So		31 Fr	31 Mo Übung 12 ⁵	

Themenübersicht

Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichungen, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Phasen- & Gruppengeschwindigkeit

Poynting-Vektor

- Elektrische und magnetische Felder speichern Energie, z.B. Kondensator als Energiespeicher
- Der Poynting-Vektor

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$$

(Einheit W/m^2) beschreibt Betrag und Richtung der pro Flächenelement und Zeiteinheit abgestrahlten elektromagnetischen Feldenergie

- Das zeitliche Mittel des Poynting-Vektors liefert die pro Flächenelement abgestrahlte Wirkleistung

Poynting-Vektor für zeitharmonische Felder

- Für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit und Phasenverschiebung ϕ zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld

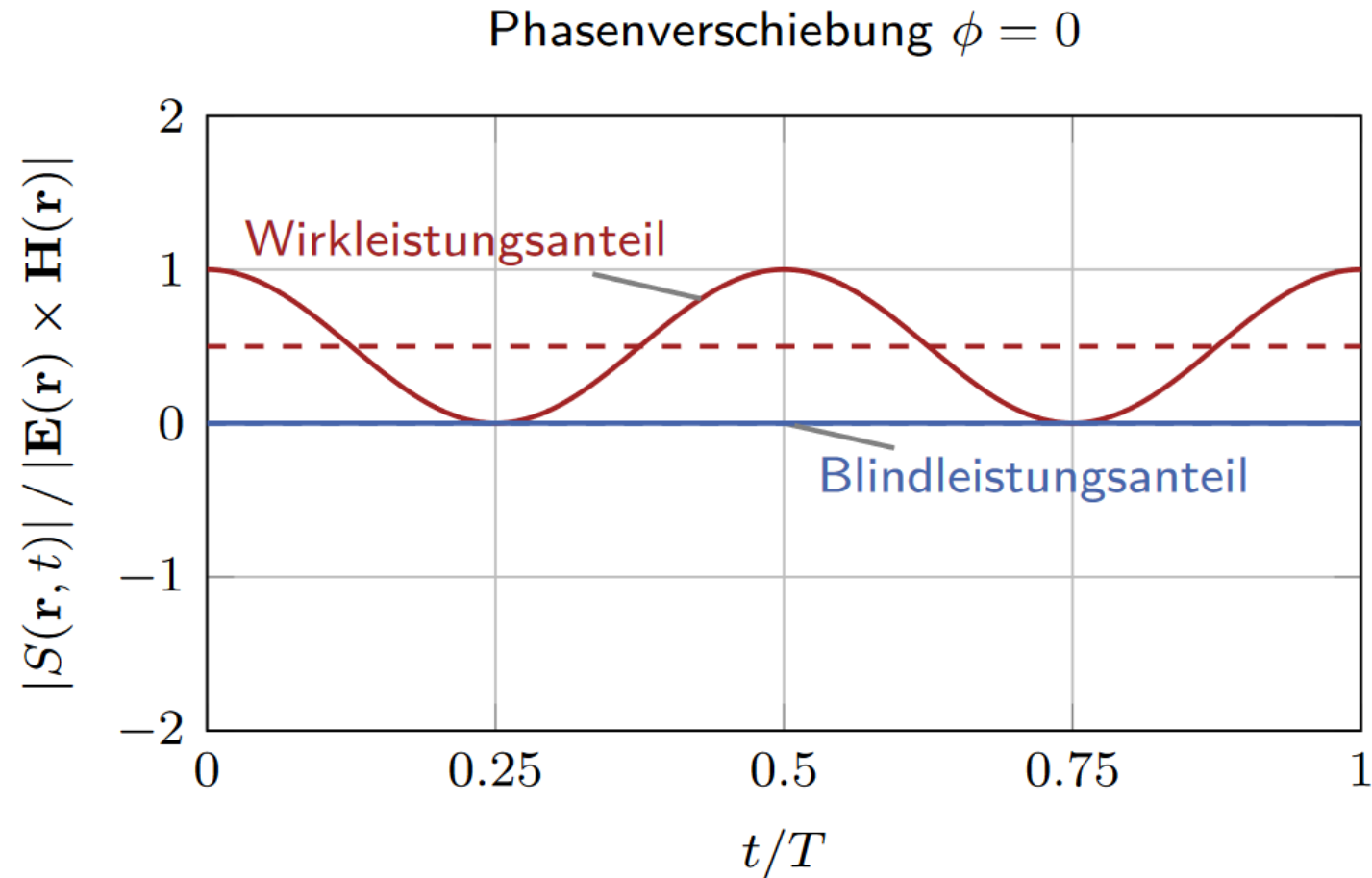
$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cos(\omega t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

ergibt sich der Poynting-Vektor zu

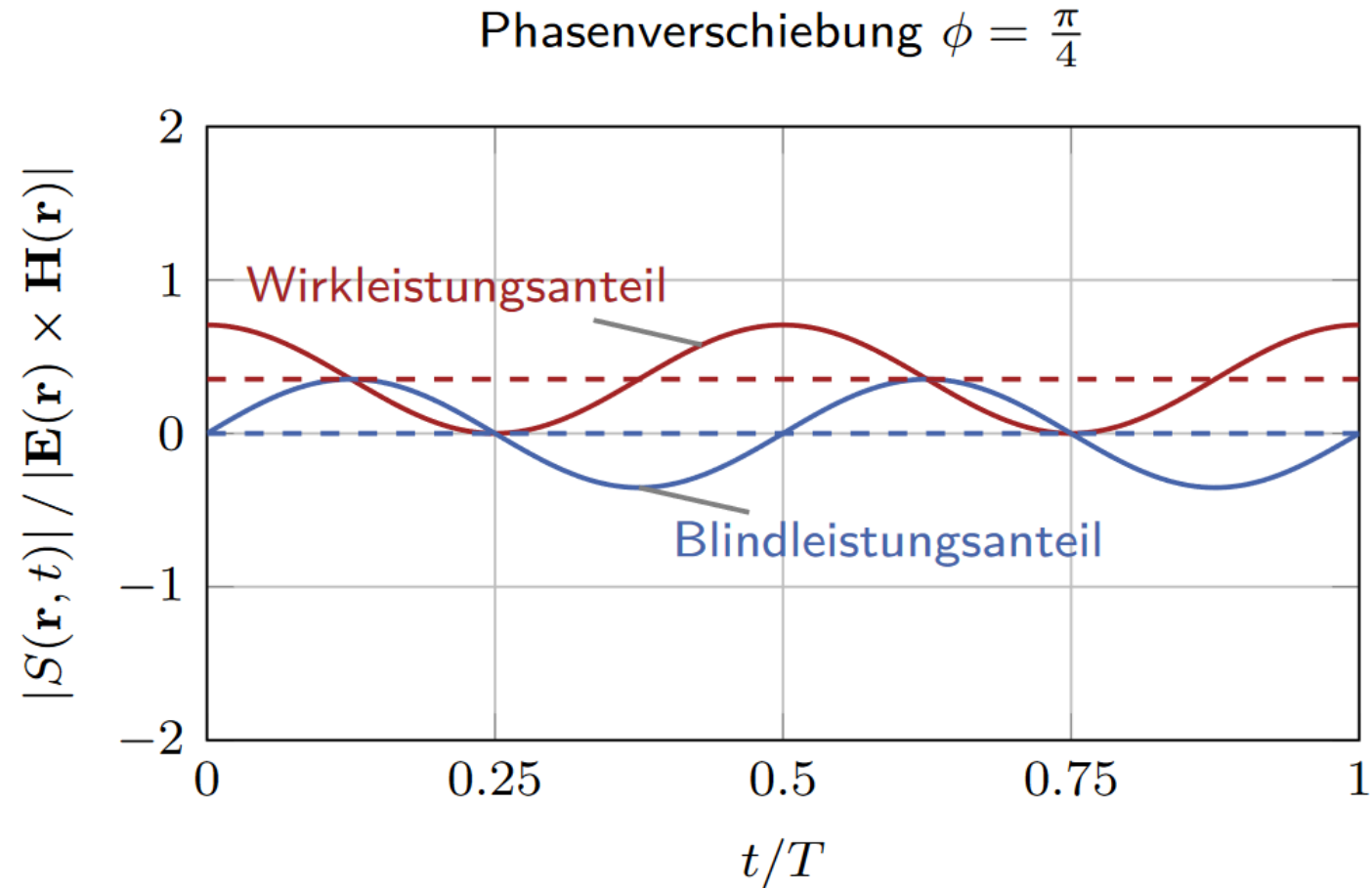
$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}(\mathbf{r})] \left[\underbrace{(1 + \cos(2\omega t)) \cos(\phi)}_{\text{Wirkleistungsanteil}} - \underbrace{\sin(2\omega t) \sin(\phi)}_{\text{Blindleistungsanteil}} \right]$$

- Im zeitlichen Mittel verbleibt nur der **Wirkleistungsanteil** (ohne Cosinus)

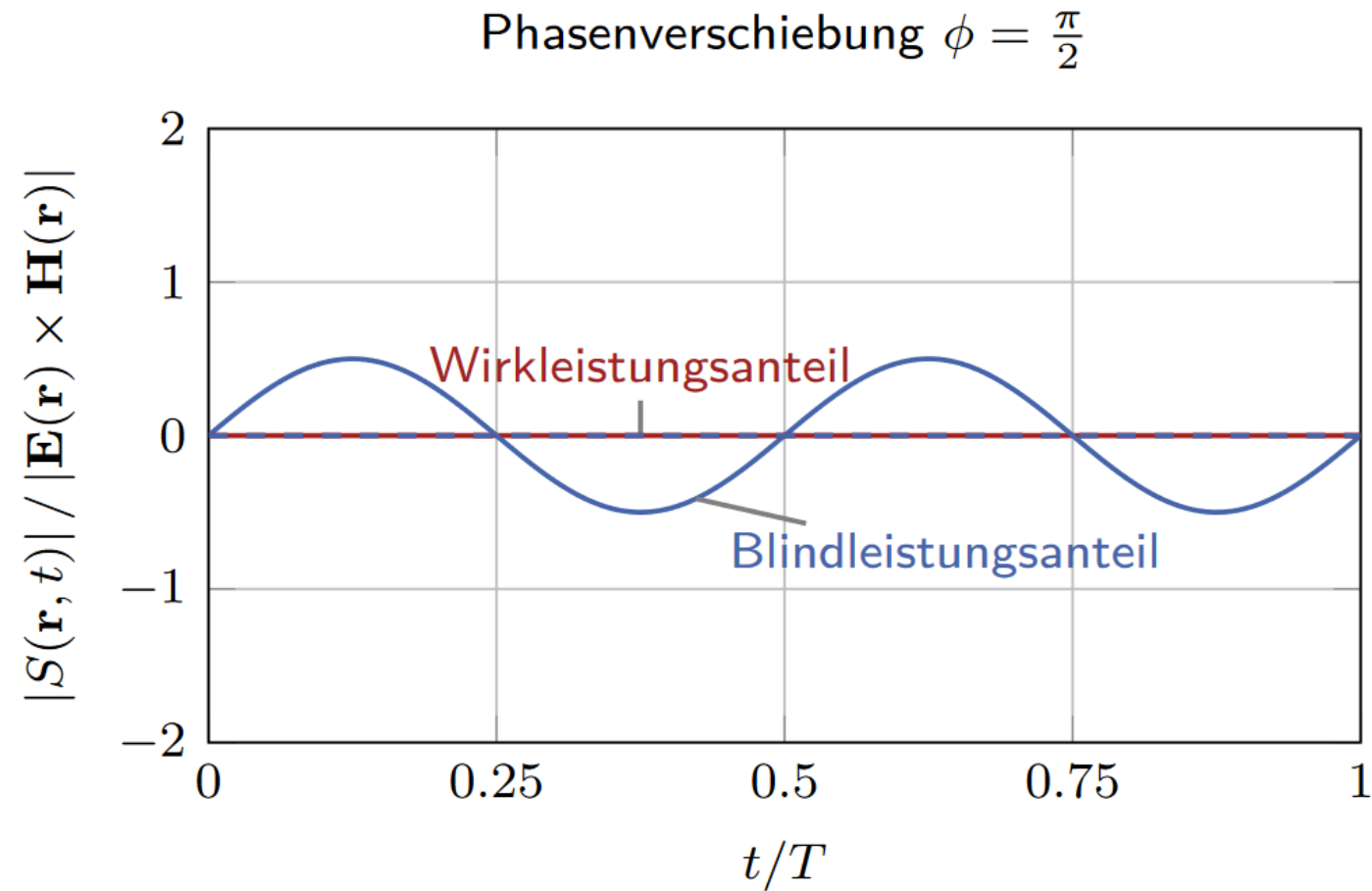
Instantaner Poynting-Vektor bei $\phi = 0$



Instantaner Poynting-Vektor bei $\phi = \pi/4$



Instantaner Poynting-Vektor bei $\phi = \pi/2$



Komplexer Poynting-Vektor

- Drücken wir die zeitharmonischen Felder durch komplexe Zeiger aus

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t)$$
$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}) \exp(j\omega t + j\phi)$$

erhalten wir mit dem komplexen Poynting-Vektor

$$\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} (\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t))$$

- den Wirk- und Blindleistungsanteil direkt durch $\Re\{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\}$ bzw. $\Im\{\underline{\mathbf{S}}(\mathbf{r})\}$

Aufgabe 4

Gegeben sei das magnetische Feld $\underline{\mathbf{H}}(z, t)$ einer harmonischen ebenen Welle im Vakuum, die sich in z -Richtung ausbreitet

$$\underline{\mathbf{H}}(z, t) = H_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_y .$$

- a) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld aus dem Durchflutungsgesetz für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit $\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$.
- b) Berechnen Sie den reellen Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ der sich ausbreitenden Welle. Bestimmen Sie anschließend den zeitlichen Mittelwert über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\mathbf{E} = \Re\{\underline{\mathbf{E}}\}$ und $\mathbf{H} = \Re\{\underline{\mathbf{H}}\}$ gilt.

- c) Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor $\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*)$.
- d) Das elektrische Feld weise nun eine Phasenverschiebung von 90° gegenüber dem magnetischen Feld auf. Wie wirkt sich diese Phasenverschiebung auf den komplexen Poynting-Vektor und den Leistungstransport durch die ebene Welle aus?

Zeitharmonische Maxwell'sche Gleichungen (I)

■ Zeitharmonische Felder in komplexer Zeigerdarstellung

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) \cdot \exp(j\omega t) \text{ bzw. } \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) \cdot \exp(j\omega t)$$
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) = j\omega \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}, t) \text{ bzw. } \frac{\partial}{\partial t} \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}, t) = j\omega \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}, t)$$

■ Resultat: Vereinfachte Maxwell-Gleichungen für lineares, homogenes Medium

$$\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) = j\omega \left(1 - j \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \right) \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\underline{\rho}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) = 0$$

Zeitharmonische Maxwell'sche Gleichungen (II)

- Vereinfachte Maxwell-Gleichungen für lineares, homogenes Medium

$$\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) = j\omega \left(1 - j \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \right) \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) \qquad \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\underline{\rho}}(\mathbf{r})$$

$$\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{E}}}(\mathbf{r}) = -j\omega \mu \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) \qquad \nabla \cdot \underline{\underline{\mathbf{H}}}(\mathbf{r}) = 0$$

- Im Allgemeinen ist auch die Permittivität ε frequenzabhängig, d.h. $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$
- Wir vernachlässigen diese Abhängigkeit, d.h. $\varepsilon(\omega) = \text{const}$, und berücksichtigen ausschließlich die Frequenzabhängigkeit im Zusammenhang mit einem Stromfluss!

Komplexe Wellenzahl

- Aus den zeitharmonischen Maxwell'schen Gleichungen erhalten wir die Helmholtz-Gleichungen

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \text{ bzw. } \Delta \underline{\mathbf{H}} + \underline{k}^2 \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{0}$$

- Dabei ist $\underline{k} = \pm(\beta - j\alpha)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) die komplexe Wellenzahl
 - Leitfähige Medien ($\kappa \neq 0$): $\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - j \frac{\kappa}{\omega \epsilon}}$ komplex
 - Nichtleitende Medien ($\kappa = 0$): $k = \pm \frac{\omega}{c}$ reell
- β ist die Phasen- und α die Dämpfungskonstante ($\rightarrow$ hier nur ohmsche Verluste)
- Trotz $\epsilon(\omega) = \text{const}$ sind β und α frequenzabhängig!

Dispersionsrelation (I)

■ Komplexe Wellenzahl $\underline{k} = \beta - j\alpha$

- Phasenkonstante β : Bestimmt Ausbreitungsgeschwindigkeit & Wellenlänge

$$\beta = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1}$$

- Dämpfungskonstante α : Bestimmt Abnahme Felder durch ohmsche Verluste

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1}$$

Dispersionsrelation (II)

- Dispersionsrelation: Zusammenhang zwischen Frequenz und Phasenkonstante
- Etwa als Umkehrfunktion der Phasenkonstante $\beta(\omega)$ wobei $\beta_r = \frac{1}{2} \sqrt{\mu/\epsilon} \kappa$

$$\omega(\beta) = \frac{c\beta}{\sqrt{1 + \beta_r^2 / \beta^2}}$$

- Wieso die Darstellung als $\omega(\beta)$?
 - Aus der Quantenmechanik wissen wir, dass die Energie eines Elektrons oder eines Photons von der Schwingungsfrequenz f abhängt.
 - Näheres dazu erfahren Sie in den Vorlesungen zu Festkörperelektronik / Bauelemente der Elektrotechnik

Phasen- & Gruppengeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit

- Ausbreitungsgeschwindigkeit von Flächen gleicher Phase

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega(\beta)}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 + \beta_r^2 / \beta^2}}$$

- Bei ebenen Wellen im nichtleitenden Medium gilt $v_{\text{ph}} = c$

Gruppengeschwindigkeit

- Ausbreitungsgeschwindigkeit von Einhüllender des Zeitsignals

$$v_{\text{gr}} = \frac{d\omega(\beta)}{d\beta} = v_{\text{ph}}(\beta) \left(1 + \frac{\beta_r^2}{\beta^2 + \beta_r^2} \right)$$

- Betrachtung als Ausbreitungsgeschw. nur sinnvoll wenn Bandbreite EM-Welle $\ll$ Trägerfrequenz

Zeitharmonische ebene Wellen

- Zeitharmonische ebene Welle, Ausbreitung in +z-Richtung

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \text{ \& } E_z = H_z \equiv 0$$

- Entsprechend:

$$\begin{aligned} \Delta \underline{E}_x + \underline{k}^2 \underline{E}_x &= 0, \longleftrightarrow \Delta \underline{H}_y + \underline{k}^2 \underline{H}_y = 0 \\ \Delta \underline{E}_y + \underline{k}^2 \underline{E}_y &= 0, \longleftrightarrow \Delta \underline{H}_x + \underline{k}^2 \underline{H}_x = 0 \end{aligned}$$

Verknüpfung durch Rechte-Hand-Regel

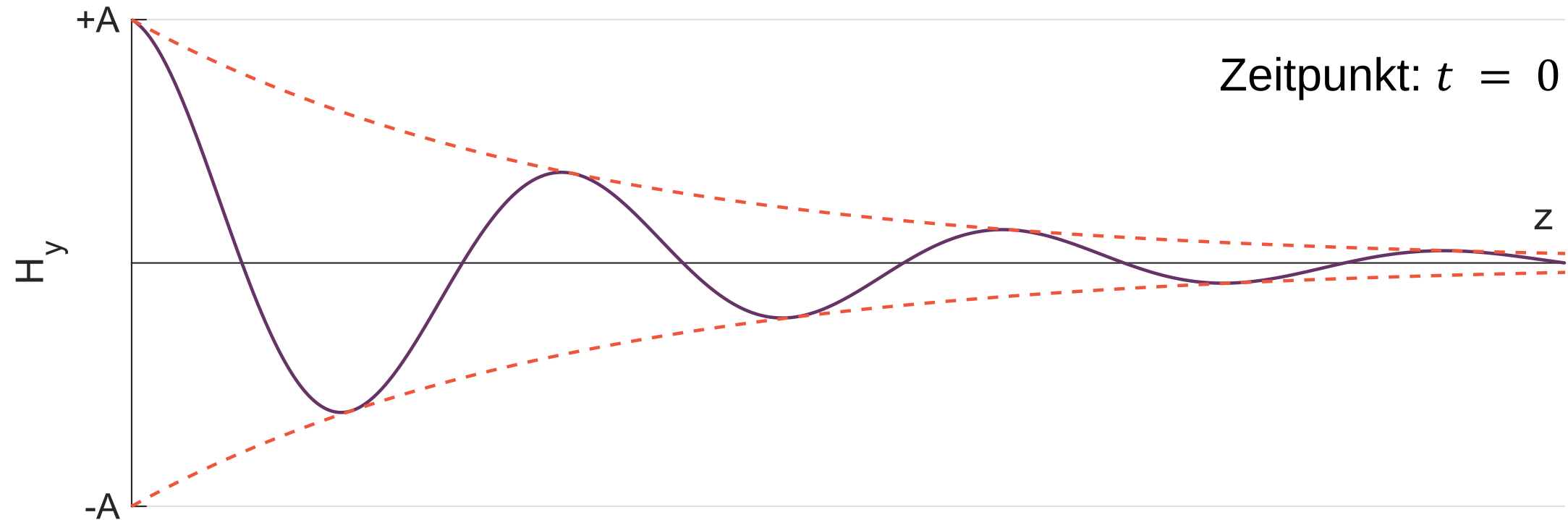
- Lösung z.B. für $\underline{H}_y$:

$$\underline{H}_y(z, t) = A \exp \left(j(\omega t - \underline{k}z) \right) = A \exp(j(\omega t - \beta z) - \alpha z)$$

Exp. Dämpfung

Exponentielle Dämpfung

— H_y - - $\pm A \exp(-\alpha z)$



$$\underline{H}_y(z, t) = A \exp(j(\omega t - \underline{k}z)) = A \exp(j(\omega t - \beta z) - \alpha z)$$

Exp. Dämpfung

Aufgabe 5 (I)

In der Vorlesung haben wir die Ausbreitung harmonischer ebener Wellen in homogenen Medien mit der Leitfähigkeit κ betrachtet. Dazu haben wir die komplexe Wellenzahl $\underline{k}(\omega) = \beta(\omega) - j\alpha(\omega)$ eingeführt, wobei β und α die Phasen- bzw. Dämpfungskonstante sind, welche folgendermaßen definiert sind:

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} + 1} \quad \alpha(\omega) = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1}.$$

Für die Dispersionsrelation (d.h. den Zusammenhang zwischen der Phasenkonstante und der Frequenz) ebener Wellen in homogenen Medien haben wir mit der Materialkonstante $\beta_r = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\mu/\varepsilon}$ den folgenden Ausdruck erhalten, wobei wir angenommen haben, dass die Materialparameter ε , μ und κ frequenzunabhängig sind:

$$\omega(\beta) = \frac{c\beta}{\sqrt{1 + \beta_r^2/\beta^2}}.$$

- Zeigen Sie rechnerisch, welche Näherungen von $\omega(\beta)$ für $\beta \ll \beta_r$ und für $\beta \gg \beta_r$ möglich sind.
- Leiten Sie die Ausdrücke für die Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \frac{\omega(\beta)}{\beta}$ und die Gruppengeschwindigkeit $v_{\text{gr}} = \frac{d\omega(\beta)}{d\beta}$ her. Zeigen Sie rechnerisch, welche Form die beiden Ausdrücke für $\beta \ll \beta_r$ bzw. $\beta \gg \beta_r$ annehmen.

Aufgabe 5 (II)

- c) Berechnen Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit in Luft ($\epsilon \approx \epsilon_0, \kappa = 1 \times 10^{-14} \frac{1}{\Omega \text{m}}$) und in Meerwasser ($\epsilon \approx 90\epsilon_0, \kappa = 5 \frac{1}{\Omega \text{m}}$) bei Frequenzen von $f = 50 \text{ Hz}$ und $f = 500 \text{ THz}$. Gehen Sie von $\mu = \mu_0$ aus.
- d) Nehmen Sie Schwingungsfrequenzen von $1 \text{ Hz} \ll f \ll 1 \times 10^{17} \text{ Hz}$ an und nähern Sie $\alpha(\omega)$ für den Fall schlechter Leiter ($\kappa \sim 1 \times 10^{-14} \frac{1}{\Omega \text{m}}$) und guter Leiter ($\kappa \sim 1 \times 10^6 \frac{1}{\Omega \text{m}}$) bei $\epsilon = \epsilon_0$. Welche Aussagen können Sie damit über die Ausbreitungsfähigkeit ebener Wellen in Materialien mit endlicher Leitfähigkeit treffen?

Hinweis: Eine ebene Welle mit der Kreisfrequenz ω erfährt eine exponentielle Dämpfung gemäß $\exp(-\alpha(\omega)L)$, wenn sie eine Strecke L in einem Medium mit Dämpfungskonstante $\alpha(\omega)$ durchquert.

Datenübertragung mit Wellen (Exkurs)

- Die Trägerwelle mit konstanter Trägerfrequenz
 - Laser: 193.41 THz
 - WLAN: ~2.4 GHz, 5.1 – 5.7 GHz
 - 4G: 0.8 – 2.6 GHz
 - 5G: 3.7 – 3.8 GHz, 26 GHz, > 30 GHz
 - 6G: ~0.25 – 0.33 THz
- Die Einhüllende „moduliert“ die Trägerfrequenz um ein Nutzsignal zu übertragen
 - Puls vorhanden: ‚1‘ gesendet
 - Kein Puls vorhanden: ‚0‘ gesendet
- Der Puls lässt sich wiederum als Superposition einzelner Wellen mit konstanter Frequenz beschreiben (siehe Fourierreihe)

