

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 02

Abgabe bis zum 15.11.2020 um 12:00 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 4:

Gegeben sei das magnetische Feld $\underline{\mathbf{H}}(z, t)$ einer harmonischen ebenen Welle im Vakuum, die sich in z -Richtung ausbreitet

$$\underline{\mathbf{H}}(z, t) = H_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_y.$$

- a) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld aus dem Durchflutungsgesetz für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit $\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$.

Ges: Elektrisches Feld $\underline{\mathbf{E}}$

Geg: Durchflutungsgesetz $\nabla \times \underline{\mathbf{H}} = j \omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}}$

Umformen des Durchflutungsgesetzes führt auf

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= \frac{-j}{\omega \varepsilon} \nabla \times \underline{\mathbf{H}} \\ &= \frac{-j}{\omega \varepsilon} H_0 [\nabla \times (\exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_y)] \\ &= \frac{-j}{\omega \varepsilon} H_0 \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-j}{\omega \varepsilon} H_0 \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z} \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \exp(j(\omega t - k_z z)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{-j}{\omega \varepsilon} H_0 \begin{pmatrix} j k_z \exp(j(\omega t - k_z z)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{k_z}{\omega \varepsilon} H_0 \exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_x. \end{aligned}$$

- b) Berechnen Sie den reellen Poynting-Vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ der sich ausbreitenden Welle. Bestimmen Sie anschließend den zeitlichen Mittelwert über eine Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\mathbf{E} = \Re\{\underline{\mathbf{E}}\}$ und $\mathbf{H} = \Re\{\underline{\mathbf{H}}\}$ gilt.

Ges: Reeller Poynting-Vektor $\mathbf{S}$, sowie der zeitliche Mittelwert $\bar{\mathbf{S}}$

Geg: Elektrisches Feld $\underline{\mathbf{E}}$, magnetisches Feld $\underline{\mathbf{H}}$

Mithilfe der Eulerschen Formel

$$\exp(jx) = \cos(x) + j \sin(x)$$

können wir das elektrische und magnetische Feld schreiben als

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z, t) &= \Re\{\underline{\mathbf{E}}(z, t)\} = \frac{k_z}{\omega\epsilon} H_0 \cos(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_x \\ \mathbf{H}(z, t) &= \Re\{\underline{\mathbf{H}}(z, t)\} = H_0 \cos(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_y.\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ erhalten wir für den Poynting-Vektor

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(z, t) &= \left(\frac{k_z}{\omega\epsilon} H_0 \cos(\omega t - k_z z) \right) \times (\cos(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_y) \\ &= \frac{k_z}{\omega\epsilon} H_0^2 \cos^2(\omega t - k_z z) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 (1 + \cos(2(\omega t - k_z z))) \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

wobei wir $\cos^2(x) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x))$ ausgenutzt haben. Diese Umformung wird uns im Folgenden bei der Berechnung des zeitlichen Mittelwerts $\bar{\mathbf{S}}$ über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ von Nutzen sein. Diesen Mittelwert ermitteln wir gemäß

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}(z) &= \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt \\ &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 \frac{1}{T} \left(\int_0^T 1 + \cos(2(\omega t - k_z z)) dt \right) \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Da der Poynting-Vektor gegenüber den Feldern die doppelte Schwingungsfrequenz aufweist, integrieren wir hier über zwei Perioden von $\cos(2(\omega t - k_z z))$. Entsprechend verschwindet das Integral über den Cosinus (rechnerischer Nachweis siehe unten) und wir erhalten

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{S}}(z) &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 \frac{1}{T} \left(\int_0^T dt \right) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Die ebene Welle transportiert demzufolge Leistung in z -Richtung. *Nachweis:*

$$\begin{aligned}\int_0^T \cos(2(\omega t - k_z z)) dt &= \left[\frac{1}{2\omega} \sin(2(\omega t - k_z z)) \right]_{t=0}^T \\ &= \frac{1}{2\omega} [\sin(2(\omega T - k_z z)) - \sin(-2k_z z)] \\ &= \frac{1}{2\omega} [\underbrace{\sin(4\pi - 2k_z z)}_{=\sin(-2k_z z)} - \sin(-2k_z z)] = 0\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie den komplexen Poynting-Vektor $\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*)$.

Ges: Komplexer Poynting-Vektor $\underline{\mathbf{S}}$

Geg: Elektrisches Feld $\underline{\mathbf{E}}$, magnetisches Feld $\underline{\mathbf{H}}$

Den komplexen Poynting-Vektor erhalten wir gemäß

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}} &= \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^* \\ &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 (\exp(j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_x \times \exp(-j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_y).\end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z$ vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}} &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 \exp(j(\omega t - k_z z)) \exp(-j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist identisch zu dem zeitlichen Mittelwert des reellen Poynting-Vektor $\bar{\mathbf{S}}$. Dieses Resultat ist zu erwarten, da der Realteil des komplexen Poynting-Vektors gerade den Wirkleistungsanteil widerspiegelt.

- d) Das elektrische Feld weise nun eine Phasenverschiebung von 90° gegenüber dem magnetischen Feld auf. Wie wirkt sich diese Phasenverschiebung auf den komplexen Poynting-Vektor und den Leistungstransport durch die ebene Welle aus?

Ges: Einfluss einer Phasenverschiebung zwischen elektrischem und magnetischem Feld auf den komplexen Poynting-Vektor bzw. den Leistungstransport

Geg: Phasenverschiebung von $90^\circ \hat{=} \frac{\pi}{2}$

Zunächst berechnen wir erneut den komplexen Poynting-Vektor, wobei das elektrische Feld gemäß der zusätzlichen Phasenverschiebung mit $\exp(j\frac{\pi}{2})$ multipliziert wird

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{S}} &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 \exp\left(j(\omega t - k_z z) + j\frac{\pi}{2}\right) \exp(-j(\omega t - k_z z)) \mathbf{e}_z \\ &= \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 \exp\left(j\frac{\pi}{2}\right) \mathbf{e}_z \\ &= j \frac{k_z}{2\omega\epsilon} H_0^2 \mathbf{e}_z.\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass der komplexe Poynting-Vektor nun rein imaginär ist. Es wird also nur Blindleistung und keine Wirkleistung von der ebenen Welle transportiert.

Lösung zu Aufgabe 5:

In der Vorlesung haben wir die Ausbreitung harmonischer ebener Wellen in homogenen Medien mit der Leitfähigkeit κ betrachtet. Dazu haben wir die komplexe Wellenzahl $\underline{k}(\omega) = \beta(\omega) - j\alpha(\omega)$ eingeführt, wobei β und α die Phasen- bzw. Dämpfungskonstante sind, welche folgendermaßen definiert sind:

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} + 1} \quad \alpha(\omega) = \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1}.$$

Für die Dispersionsrelation (d.h. den Zusammenhang zwischen der Phasenkonstante und der Frequenz) ebener Wellen in homogenen Medien haben wir mit der Materialkonstante $\beta_r = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\mu/\varepsilon}$ den folgenden Ausdruck erhalten, wobei wir angenommen haben, dass die Materialparameter ε , μ und κ frequenzunabhängig sind:

$$\omega(\beta) = \frac{c\beta}{\sqrt{1 + \beta_r^2/\beta^2}}.$$

- a) Zeigen Sie rechnerisch, welche Näherungen von $\omega(\beta)$ für $\beta \ll \beta_r$ und für $\beta \gg \beta_r$ möglich sind.

Ges: Näherungen von $\omega(\beta)$ für $\beta \ll \beta_r$ und für $\beta \gg \beta_r$

Geg: Dispersionsrelation $\omega(\beta)$

Im Folgenden nehmen wir stets an, dass β und β_r größer null sind. Den Ausdruck für $\omega(\beta)$ können wir umformen zu

$$\omega(\beta) = \frac{c\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + \beta_r^2}}.$$

Dann können wir direkt die Näherungen ablesen: Für ...

... $\beta \ll \beta_r$ gilt

$$\omega(\beta) = \frac{c\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + \beta_r^2}} \approx \frac{c\beta^2}{\sqrt{\beta_r^2}} = \frac{c\beta^2}{\beta_r}.$$

... $\beta \gg \beta_r$ gilt

$$\omega(\beta) = \frac{c\beta^2}{\sqrt{\beta^2 + \beta_r^2}} \approx \frac{c\beta^2}{\sqrt{\beta^2}} = c\beta.$$

- b) Leiten Sie die Ausdrücke für die Phasengeschwindigkeit $v_{\text{ph}} = \frac{\omega(\beta)}{\beta}$ und die Gruppengeschwindigkeit $v_{\text{gr}} = \frac{d\omega(\beta)}{d\beta}$ her. Zeigen Sie rechnerisch, welche Form die beiden Ausdrücke für $\beta \ll \beta_r$ bzw. $\beta \gg \beta_r$ annehmen.

Ges: Phasengeschwindigkeit, Gruppengeschwindigkeit $v_{\text{gr}} = \frac{d\omega(\beta)}{d\beta}$ samt Näherungen für $\beta \ll \beta_r$ bzw. $\beta \gg \beta_r$

Geg: Dispersionsrelation $\omega(\beta)$

Für die Phasengeschwindigkeit erhalten wir

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega(\beta)}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 + \beta_r^2/\beta^2}}.$$

Diesen Ausdruck können wir nähern für ...

... $\beta \ll \beta_r$:

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \beta_r^2/\beta^2}} \approx \frac{c}{\sqrt{\beta_r^2/\beta^2}} = \frac{c\beta}{\beta_r}.$$

... $\beta \gg \beta_r$:

$$v_{\text{ph}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \beta_r^2/\beta^2}} \approx \frac{c}{\sqrt{1}} = c.$$

Für die Gruppengeschwindigkeit erhalten wir

$$\begin{aligned} v_{\text{gr}} &= \frac{d\omega(\beta)}{d\beta} \\ &= \frac{c\sqrt{1 + \beta_r^2/\beta^2} - c\beta \frac{1}{2} \frac{-2\beta_r^2/\beta^3}{\sqrt{1 + \beta_r^2/\beta^2}}}{1 + \beta_r^2/\beta^2} \\ &= \frac{c(1 + \beta_r^2/\beta^2) + c\beta_r^2/\beta^2}{(1 + \beta_r^2/\beta^2)^{3/2}} \\ &= c \frac{1 + 2\beta_r^2/\beta^2}{(1 + \beta_r^2/\beta^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck können wir nähern für ...

... $\beta \ll \beta_r$:

$$v_{\text{gr}} = c \frac{1 + 2\beta_r^2/\beta^2}{(1 + \beta_r^2/\beta^2)^{3/2}} \approx c \frac{2\beta_r^2/\beta^2}{(\beta_r^2/\beta^2)^{3/2}} = c \frac{2\beta_r^2/\beta^2}{\beta_r^3/\beta^3} = 2c \frac{\beta}{\beta_r} = 2v_{\text{ph}} \Big|_{\beta \ll \beta_r}.$$

... $\beta \gg \beta_r$:

$$v_{\text{gr}} = c \frac{1 + 2\beta_r^2/\beta^2}{(1 + \beta_r^2/\beta^2)^{3/2}} \approx c \frac{1}{1^{3/2}} = c = v_{\text{ph}} \Big|_{\beta \gg \beta_r}.$$

- c) Berechnen Sie die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit einer harmonischen ebenen Welle in Luft ($\epsilon \approx \epsilon_0, \kappa = 1 \times 10^{-14} \frac{1}{\Omega \text{m}}$) und in Meerwasser ($\epsilon \approx 90\epsilon_0, \kappa = 5 \frac{1}{\Omega \text{m}}$) bei Frequenzen von $f = 50 \text{ Hz}$ und $f = 500 \text{ THz}$. Gehen Sie von $\mu = \mu_0$ aus.

Ges: Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit in Luft und Meerwasser bei $f = 50 \text{ Hz}$ und $f = 500 \text{ THz}$

Geg: Eigenschaften von Luft: ($\epsilon \approx \epsilon_0, \mu = \mu_0, \kappa = 1 \times 10^{-14} \frac{1}{\Omega \text{m}}$), Eigenschaften von Meerwasser: ($\epsilon \approx 90\epsilon_0, \mu = \mu_0, \kappa = 5 \frac{1}{\Omega \text{m}}$)

Wichtige Anmerkung: Insbesondere die elektrische Permittivität weist in realen Medien eine signifikante Frequenzabhängigkeit auf. Bei einer Frequenz von $f = 500 \text{ THz}$ würden wir in Meerwasser eine deutlich geringeres ϵ von $\epsilon \approx 1.8\epsilon_0$ beobachten. Der Einfachheit halber verzichten wir jedoch auf die Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit der Materialeigenschaften. Würden wir diese Abhängigkeit berücksichtigen, wäre auch die Darstellung der Dispersionsrelation als $\omega(\beta)$ nur bedingt möglich, da die Invertierbarkeit von β nicht gewährleistet ist wenn auch ϵ eine Funktion von ω ist.

Die Ausdrücke für die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit sind in Abhängigkeit von β gegeben. Dementsprechend müssen wir zunächst β für beide Materialien und Frequenzen ermitteln. Wir drücken daher β in Abhängigkeit der gegebenen Größen aus:

$$\beta(f) = \pi f \sqrt{2\mu\epsilon} \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{(2\pi f)^2 \epsilon^2}} + 1.$$

und erhalten so die Werte in Tabelle 1. Berechnen wir nun auch β_r und c , erhalten wir in Luft

Tabelle 1: Angenommene Werte der Phasenkonstante β .

Werte von β [$\frac{1}{m}$]	bei $f = 50$ Hz	bei $f = 500$ THz
in Luft	1.048×10^{-6}	1.048×10^7
in Wasser	3.141×10^{-2}	9.939×10^7

$\beta_r = 1.883 \times 10^{-12} \frac{1}{m}$ bzw. $c = 2.999 \times 10^8 \frac{1}{m}$ und in Wasser $\beta_r = 99.25 \frac{1}{m}$ bzw. $c = 3.161 \times 10^7 \frac{1}{m}$, können wir die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten unter Berücksichtigung der Näherungen aus Teil b) berechnen: Bei $f = 50$ Hz gilt in Luft $\beta_r \ll \beta$ und in Wasser $\beta_r \gg \beta$. Bei $f = 500$ THz gilt in beiden Fällen $\beta_r \ll \beta$. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 2 und 3 dargestellt.

Tabelle 2: Angenommene Werte der Phasengeschwindigkeit v_{ph} .

Werte von v_{ph} [$\frac{m}{s}$]	bei $f = 50$ Hz	bei $f = 500$ THz
in Luft	2.999×10^8	2.999×10^8
in Wasser	1.000×10^4	3.161×10^7

Tabelle 3: Angenommene Werte der Gruppengeschwindigkeit v_{gr} .

Werte von v_{gr} [$\frac{m}{s}$]	bei $f = 50$ Hz	bei $f = 500$ THz
in Luft	2.999×10^8	2.999×10^8
in Wasser	2.001×10^4	3.161×10^7

- d) Nehmen Sie Schwingungsfrequenzen von $1 \text{ Hz} \ll f \ll 1 \times 10^{17} \text{ Hz}$ an und nähern Sie $\alpha(\omega)$ für den Fall schlechter Leiter ($\kappa \sim 1 \times 10^{-14} \frac{1}{\Omega m}$) und guter Leiter ($\kappa \sim 1 \times 10^6 \frac{1}{\Omega m}$) bei $\epsilon = \epsilon_0$. Welche Aussagen können Sie damit über die Ausbreitungsfähigkeit ebener Wellen in Materialien mit guter bzw. schlechter Leitfähigkeit treffen?

Hinweis: Eine ebene Welle mit der Kreisfrequenz ω erfährt eine exponentielle Dämpfung gemäß $\exp(-\alpha(\omega)L)$, wenn sie eine Strecke L in einem Medium mit Dämpfungskonstante $\alpha(\omega)$ durchquert.

Ges: Näherung von α , Ausbreitungsfähigkeit elektromagnetischer Wellen in leitfähigen Materialien

Geg: $1 \text{ Hz} \ll f \ll 1 \times 10^{17} \text{ Hz}$, Leitfähigkeit schlechter Leiter $\kappa \sim 1 \times 10^{-14} \frac{1}{\Omega m}$, Leitfähigkeit guter Leiter $\kappa \sim 1 \times 10^6 \frac{1}{\Omega m}$, Permittivität $\epsilon = \epsilon_0$

Betrachten wir zunächst das Szenario hoher Leitfähigkeit. Dann gilt mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\kappa \sim 1 \times 10^6 \frac{1}{\Omega \text{m}}$, dass $\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \gg 1$ und folglich

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1} \\ &\approx \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} - 1} \\ &\approx \omega \sqrt{\frac{\mu \varepsilon}{2}} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega \varepsilon}} \\ &= \sqrt{\frac{\omega \kappa \mu}{2}}\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die ohmschen Verluste in guten Leitern mit steigender Frequenz zunehmen und bei hohen Frequenzen eine sehr kleine Eindringtiefe der Welle zur Folge haben. Nach dem Zurücklegen von einer Strecke $\frac{1}{\alpha}$ ist die Amplitude bereits auf 36.7 % ($1/e$) abgefallen.

Bei geringer Leitfähigkeit gilt mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ und $\kappa \sim 1 \times 10^{-14} \frac{1}{\Omega \text{m}}$, dass $\frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \ll 1$ und folglich

$$\begin{aligned}\alpha(\omega) &= \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \varepsilon^2}} - 1} \\ &\approx \frac{\omega}{c} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\kappa^2}{2\omega^2 \varepsilon^2}} - 1 \\ &= \frac{\omega \sqrt{\mu \varepsilon}}{2} \frac{\kappa}{\omega \varepsilon} \\ &= \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ll 1.\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass die ohmschen Verluste in schlechten Leitern frequenzunabhängig und vernachlässigbar klein sind. Die Welle breitet sich daher wie im verlustfreien Medium mit $\kappa = 0$ aus.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu