

Elektromagnetische Wellen (EMW)

Übung 3

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel

Institute of Photonics and Quantum Electronics (IPQ), KIT



Administratives

- Unterlagen zur Vorlesung und Übung sowie Diskussionsforen finden Sie im [ILIAS-Portal](#)
- Kontaktdaten Übungsleiter
jonas.krimmer@kit.edu
patrick.matalla@kit.edu
- **Ab dieser Woche ist EMW eine Hybrid-Veranstaltung**
- **Die Übung wird nicht aufgezeichnet**
- Übung bietet Bonussystem für die Klausur
- Nehmen Sie Gebrauch von den Umfragen der Vorlesungen

Oktober	November	Dezember	Januar	Februar
1 Fr	1 Mo	1 Mi Vorlesung 8	1 Sa	1 Di
2 Sa	2 Di	2 Do	2 So	2 Mi Vorlesung 15
3 So	3 Mi Vorlesung 4	3 Fr	3 Mo	3 Do
4 Mo	4 Do	4 Sa	4 Di	4 Fr
5 Di	5 Fr	5 So	5 Mi	5 Sa
6 Mi	6 Sa	6 Mo Übung 5	6 Do	6 So
7 Do	7 So	7 Di	7 Fr	7 Mo Übung 13
8 Fr	8 Mo Übung 1	8 Mi Vorlesung 9	8 Sa	8 Di
9 Sa	9 Di	9 Do	9 So	9 Mi Übung 14
10 So	10 Mi Vorlesung 5	10 Fr	10 Mo Übung 9	10 Do
11 Mo	11 Do	11 Sa	11 Di	11 Fr
12 Di	12 Fr	12 So	12 Mi Vorlesung 12	12 Sa
13 Mi	13 Sa	13 Mo Übung 6	13 Do	13 So
14 Do	14 So	14 Di	14 Fr	14 Mo
15 Fr	15 Mo Übung 2	15 Mi Vorlesung 10	15 Sa	15 Di
16 Sa	16 Di	16 Do	16 So	16 Mi
17 So	17 Mi Vorlesung 6	17 Fr	17 Mo Übung 10	17 Do
18 Mo Vorlesung 1	18 Do	18 Sa	18 Di	18 Fr
19 Di	19 Fr	19 So	19 Mi Vorlesung 13	19 Sa
20 Mi Vorlesung 2	20 Sa	20 Mo Übung 7	20 Do	20 So
21 Do	21 So	21 Di	21 Fr	21 Mo
22 Fr	22 Mo Übung 3	22 Mi Vorlesung 11	22 Sa	22 Di
23 Sa	23 Di	23 Do	23 So	23 Mi
24 So	24 Mi Vorlesung 7	24 Fr	24 Mo Übung 11	24 Do
25 Mo Übung 9	25 Do	25 Sa	25 Di	25 Fr
26 Di	26 Fr	26 So	26 Mi Vorlesung 14	26 Sa
27 Mi Vorlesung 3	27 So	27 Mo	27 Do	27 So
28 Do	28 So	28 Di	28 Fr	28 Mo Rosenmontag
29 Fr	29 Mo Übung 4	29 Mi	29 Sa	
30 Sa	30 Di	30 Do	30 So	
31 So		31 Fr	31 Mo Übung 12	

Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichungen, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Phasen- & Gruppengeschwindigkeit
Übung 3	A6, A7	Polarisation, Hertzsche Dipol

Polarisation einer Welle

- Für ebene Wellen erhalten wir zwei jeweils unabhängige Paare gekoppelter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} & \text{und} & & \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} &= -\varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} & \text{und} & & \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \end{aligned}$$

- Zwei unabhängige Wellen mit H_y , E_x Komponenten und H_x , E_y Komponenten
- Betrachten wir nur die elektrische Feldkomponente, so resultiert für eine harmonische Welle

$$E_x(t) = E_x \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$E_y(t) = E_y \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y)$$

- Mit der normierten Amplitude $E_0^2 = E_x^2 + E_y^2$ und den normierten Verhältnissen $a_x^2 + a_y^2 = 1$
- Wie stark die jeweiligen Wellen angeregt sind wird durch a_x und a_y bestimmt
- Die Polarisation des resultierenden Feldes $\mathbf{E} = E_x + E_y$ beschreibt die Schwingungsrichtung, welche durch das Amplituden- und Phasenverhältnis der transversalen Komponenten bestimmt wird

Aufgabe 6

$$\begin{aligned}E_x(t) &= E_x \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x) \\E_y(t) &= E_y \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y),\end{aligned}$$

wobei folgende Parameter bekannt sind: $E_0 = 22 \text{ V/m}$, $a_x = 1/\sqrt{3}$, $\varphi_x = \pi/3$, $\varphi_y = 0$.

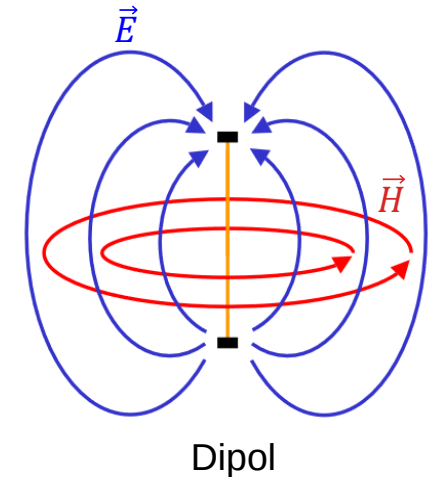
- Ermitteln Sie die fehlende normierte Amplitude a_y sowie die Amplituden E_x und E_y . Formulieren Sie die transversalen Komponenten der reellwertigen elektrischen Felder $E_x(t)$ und $E_y(t)$.
- Formulieren Sie nun die elektrischen Feldkomponenten mit der komplexen Zeigerschreibweise um. Wie lautet der Jones-Vektor $\underline{a}$ der gesamten Welle?
- Skizzieren Sie die Projektion des resultierenden Feldes $\mathbf{E}(t) = E_x(t) \mathbf{e}_x + E_y(t) \mathbf{e}_y$ in einen E_x - E_y Graphen. Um welchen Polarisationszustand handelt es sich unter Annahme der gegebenen Parameter?
- Wie muss die Phase φ_x angepasst werden, um eine linear polarisierte Welle zu erhalten? Welche Parameter müssen wir wählen, um eine zirkular polarisierte Welle zu beobachten?

Hertzscher Dipol

- Idealisierte Darstellung eines Senders von elektromagnetischer Strahlung (Antenne)
- Bewegung der Ladungsträger beispielsweise durch Anlegen einer Wechselspannung initiiert
- Abstrahlung von infinitesimal kleinem Punkt in alle Raumrichtungen → Kugelkoordinaten
- Aufgrund der Rotationssymmetrie ist das elektrische Feld unabhängig vom Azimutalwinkel ϕ

	Elektrostatik	Elektrodynamik
Ladung	Q an Stelle Δs	$\underline{Q}_0 e^{j\omega t}$
Strom	I_0	$\underline{I}(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = j\omega Q_0 e^{j\omega t}$
Elektrisches Potential	$\phi(r, \theta) = \frac{Q\Delta s \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon r^2}$	
Elektrisches Feld	$\mathbf{E} = -\nabla\phi$	$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi$

- Im Allgemeinen ist das elektrische Feld nicht nur vom elektrischen Potential, sondern auch vom magnetischen Vektorpotential $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ abhängig



Hertzscher Dipol – Elektrostatik

- Als Startpunkt gilt die elektrostatische Betrachtung des elektrostatischen Potentials nahe dem Dipol, also für $r \ll \lambda$
- Das elektrostatische Potential in Kugelkoordinaten ist

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{Q \Delta s \cos(\vartheta)}{4\pi\epsilon r^2}$$

- Das elektrische Feld ergibt sich für den elektrostatischen Fall mit $\underline{E} = -\nabla\phi$ und $\underline{Q}_0 = j\omega / I_0$

$$\underline{E}(r, \vartheta) = -\nabla\phi(r, \vartheta) = \frac{I_0 \Delta s}{j4\pi\omega\epsilon r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Für die elektrodynamische Betrachtung muss später das elektrische Feld für kleine Distanzen $r \ll \lambda$ (das Nahfeld) gleich dieser Gleichung sein

Hertzscher Dipol - Elektrodynamik

- Um nun den Fall für zeitlich veränderliche Felder zu betrachten nutzen wir erneut die Maxwellschen Gleichungen als Ausgangslage
- Wir definieren das Vektorpotential (Vektorfeld) als mathematisches Hilfsmittel

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \underline{\mathbf{A}})$$

- Entsprechend folgt für das elektrische Feld

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\underline{\mathbf{H}} = -j\omega(\nabla \times \underline{\mathbf{A}})$$

- Beim Integrieren der Rotation muss die Integrationskonstante c beachtet werden
- Um dem el. Feld im elektrostatischen sowie –dynamischen Fall zu entsprechen muss $c = -\nabla\phi$ gelten (Beachte: Die Rotation eines Gradientenfeldes ist immer Null, daher verschwindet ϕ bei der Rotation)

$$\underline{\mathbf{E}} = -j\omega\underline{\mathbf{A}} - \nabla\phi$$

Hertzscher Dipol – Elektrodynamik (II)

- Schließlich können wir auch das Durchflutungsgesetz $\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon\underline{E}$ mit $\underline{E} = -j\omega\underline{A} - \nabla\phi$ berechnen

$$\nabla \times \underline{H} = \frac{1}{\mu} [\nabla \times (\nabla \times \underline{A})] = \frac{1}{\mu} [\nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}]$$

$$j\omega\varepsilon\underline{E} = \frac{k^2}{\mu} \underline{A} - j\omega\varepsilon\nabla\phi$$

- Da $\underline{A}$ nur ein Hilfsmittel gewesen ist, können wir es mit $1/\mu \nabla \underline{A} = -j\omega\varepsilon\phi$ beliebig eichen
- Wir erhalten so für das magnetische Vektorpotential eine Wellengleichung

$$\Delta \underline{A} + k^2 \underline{A} = 0$$

Hertzscher Dipol – Elektrodynamik (III)

- Zur Lösung dieser Differentialgleichung formulieren wir $\underline{A}$ mit dem Produktansatz von Bernoulli

$$\underline{A}_z(r, \vartheta, \phi) = \underline{A}_0 \underline{R}(r) \underline{Y}(\vartheta, \phi)$$

- Aus der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten folgt eine partielle DGL, welche in eine Winkelgleichung und Radialgleichung separiert und unabhängig davon gelöst werden kann
- Es resultieren verschiedene Lösungen für diskrete Indizes l und m
- Das magnetische Vektorpotential ist anschließend die Linearkombination aller Lösungen

$$\underline{A}(r, \vartheta, \phi) = \sum_{m,l} \underbrace{a_{m,l}}_{\text{unbekannt}} \underbrace{R_{l+\frac{1}{2}}(r)}_{\text{bekannt}} \underbrace{Y_{l,m}(\vartheta, \phi)}_{\text{Zeitl. Änderung}} e^{j\omega t} \mathbf{e}_z \quad \leftarrow \text{Da } \underline{A} \text{ nur in z-Richtung zeigt}$$

- Welche Funktionen mit den Indizes l und m angeregt werden, ist abhängig vom Antennendesign
- Der Hertzsche Dipol (der einfachste Antennentyp) regt lediglich die Grundfunktionen $l = 0, m = 0$ an

$$\underline{A}(r, \vartheta, \phi) = \frac{\mu \Delta s I_0}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} [\cos(\vartheta) \mathbf{e}_r - \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta]$$