

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 03

Abgabe bis zum 22.11.2021 um 12:00 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 6:

Für sich in z -Richtung ausbreitende ebene Wellen in homogenen, linearen Medien liefert die Wellengleichung zwei unabhängige Differentialgleichungen für die x - und y -Komponenten des elektrischen (bzw. magnetischen) Feldes. Diese beiden Komponenten sind folglich unabhängig voneinander und beeinflussen sich (im linearen Medium) nicht gegenseitig. Die Polarisation des resultierenden elektrischen Feldes beschreibt die Schwingungsrichtung, welche durch das Amplituden- und Phasenverhältnis der transversalen Komponenten bestimmt wird. Als Ansatz für diese Transversalkomponenten in $z = 0$ wählen wir

$$E_x(t) = E_x \cos(\omega t + \varphi_x) = E_0 a_x \cos(\omega t + \varphi_x) \quad (1)$$

$$E_y(t) = E_y \cos(\omega t + \varphi_y) = E_0 a_y \cos(\omega t + \varphi_y), \quad (2)$$

wobei folgende Parameter bekannt sind: $E_0 = 22 \text{ V/m}$, $a_x = 1/\sqrt{3}$, $\varphi_x = \pi/3$, $\varphi_y = 0$.

- a) Ermitteln Sie die fehlende normierte Amplitude a_y sowie die Amplituden E_x und E_y . Formulieren Sie die transversalen Komponenten der reellwertigen elektrischen Felder $E_x(t)$ und $E_y(t)$.

Ges: a_y, E_x, E_y

Geg: Gleichung (1) und (2) sowie Parameter $a_x, E_0, \varphi_x, \varphi_y$

Mit der Definition der normierten Amplituden $a_x^2 + a_y^2 = 1$ lässt sich a_y mit

$$a_y = \sqrt{1 - a_x^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

bestimmen. Mit Kenntnis der Amplitudenverhältnisse a_x und a_y sowie der absoluten Amplitude E_0 lassen sich die absoluten Amplituden für die x - und y -Richtung ermitteln

$$E_x = E_0 a_x = \frac{1}{\sqrt{3}} 22 \frac{\text{V}}{\text{m}} \approx 12.7 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$E_y = E_0 a_y = \sqrt{\frac{2}{3}} 22 \frac{\text{V}}{\text{m}} \approx 18.0 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Die elektrischen Feldkomponenten lassen sich schließlich wie folgt formulieren

$$E_x(t) = 12.7 \cos(\omega t + \frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$E_y(t) = 18.0 \cos(\omega t) .$$

- b) Formulieren Sie nun die elektrischen Feldkomponenten mit der komplexen Zeigerschreibweise um. Wie lautet der Jones-Vektor $\underline{\mathbf{a}}$ der gesamten Welle?

Ges: Feldkomponenten in komplexer Zeigerschreibweise, Jones-Vektor $\underline{\mathbf{a}}$

Geg: Reelle Feldkomponenten, $a_x, a_y, \varphi_x, \varphi_y$

Die zeitliche Änderung des Feldes, zuvor beschrieben mit der Kosinus-Funktion, lässt sich in der komplexen Schreibweise mit einer Exponentialfunktion beschreiben. Die transversalen Feldkomponenten ergeben sich so zu

$$\begin{aligned}\underline{E}_x(t) &= E_x e^{j(\omega t + \varphi_x)} = E_0 \underline{a}_x e^{j(\omega t)} \\ \underline{E}_y(t) &= E_y e^{j(\omega t + \varphi_y)} = E_0 \underline{a}_y e^{j(\omega t)}.\end{aligned}$$

Hier beinhalten die komplexen normierten Amplituden $\underline{a}_x$ und $\underline{a}_y$ nicht nur Informationen bzgl. des Amplitudenverhältnisses, sondern auch der Phasenbeziehung der beiden Wellen. Der Jones-Vektor umfasst diese beiden komplexen normierten Amplituden und ist in unserem Fall In Vektorschreibweise bezeichnet man diese als Jones-Vektor, welcher in unserem Fall

$$\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \underline{a}_x \\ \underline{a}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x e^{j\varphi_x} \\ a_y e^{j\varphi_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} e^{j\frac{\pi}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

- c) Skizzieren Sie die Projektion des resultierenden Feldes $\mathbf{E}(t) = E_x(t) \mathbf{e}_x + E_y(t) \mathbf{e}_y$ in einen E_x - E_y Graphen. Um welchen Polarisationszustand handelt es sich unter Annahme der gegebenen Parameter?

Haben die beiden transversalen Feldkomponenten eine Phasendifferenz von $m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$, so

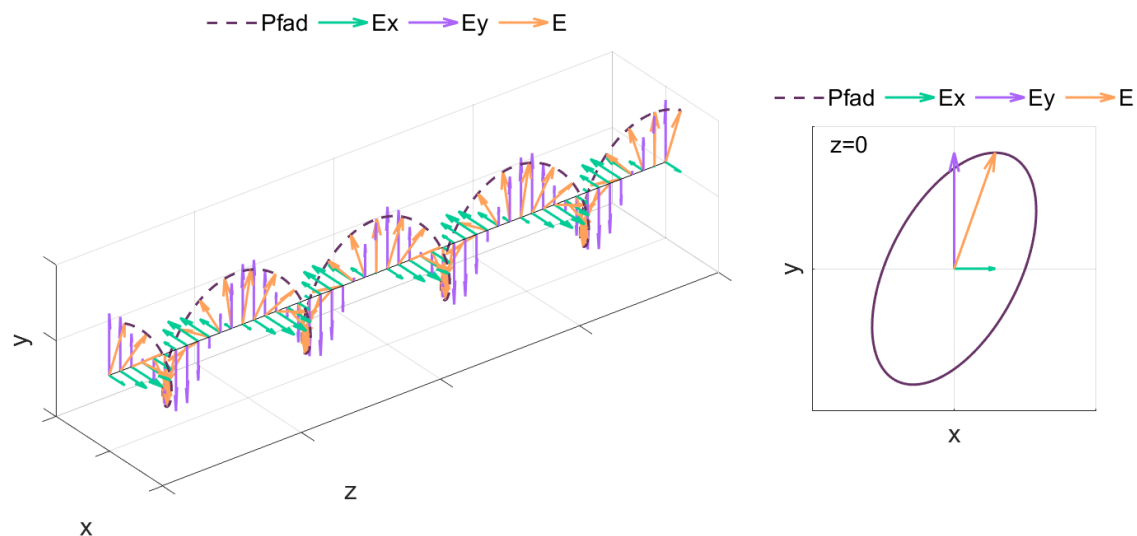


Abbildung 1: Momentaufnahme der elektrischen Feldkomponenten E_x und E_y und dem resultierenden Feld $\mathbf{E} = E_x + E_y$ in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten (links) und in der x - y -Ebene (Draufsicht von z -Richtung) zu einem Zeitpunkt t . Die normierten Amplituden sind $a_x = 1/\sqrt{3}$ und $a_y = \sqrt{2/3}$ und die Phasen sind $\varphi_x = \pi/3$ und $\varphi_y = 0$.

ergibt sich eine lineare Polarisierung. Bei einer Phasendifferenz von einem ungeraden Vielfachen von $m\pi/2$ mit $m = \{1, 3, 5, \dots\}$ und gleich großen Feldamplituden $E_x = E_y$ bzw. $a_x = a_y$ ergibt sich eine zirkuläre Polarisierung. Mit anderen Phasendifferenzen oder ungleichen Amplituden, wie es hier der Fall ist, ergeben sich elliptische Polarisationszustände.

- d) Wie muss die Phase φ_x angepasst werden, um eine linear polarisierte Welle zu erhalten? Welche Parameter müssen wir wählen, um eine zirkular polarisierte Welle zu beobachten?

Für eine lineare Polarisierung wird eine Phasendifferenz von $m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$ benötigt. Angenommen wir können die Phase φ_y nicht beeinflussen, muss φ_x justiert werden. Die nächstliegenden Phasen für eine linear polarisierte Phase ist $\varphi_x = 0$, d.h. die x -Komponente der Welle muss in der x -Ebene um diese Phase verzögert werden.

Lösung zu Aufgabe 7:

Gegeben sei das magnetische Feld eines Hertzschen Dipols der Länge Δs in Kugelkoordinaten. Der Dipol befinde sich im Vakuum.

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \left(j \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\phi.$$

- a) Berechnen Sie das magnetische Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ des Dipols in Kugelkoordinaten.

Hinweis 1: Der Zusammenhang zwischen der magnetischen Flussdichte $\underline{\mathbf{B}}$ und dem magnetischen Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ ist durch $\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$ gegeben.

Hinweis 2: Gehen Sie davon aus, dass in der Gleichung für $\underline{\mathbf{H}}$ der erste Term in der Klammer auf die Winkelkomponente des magnetischen Vektorpotentials $\underline{A}_\vartheta$ und der zweite Term auf dessen Radialkomponente $\underline{A}_r$ zurückzuführen ist.

Das magnetische Vektorpotential berechnet sich mit $\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$, wobei wir ausnutzen, dass der Rotationsoperator auf die φ -Komponente reduziert werden kann, da das magnetische Feld lediglich eine φ -Komponente besitzt. Damit folgt

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{\mathbf{A}} \quad \Longleftrightarrow \quad \underline{\mathbf{H}} = \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \left(j \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\phi = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right] \mathbf{e}_\phi$$

Mit Hilfe von Hinweis 2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial (r \underline{A}_\vartheta)}{\partial r} &= \frac{\mu I_0 \Delta s}{4\pi} (j k) e^{j(\omega t - kr)} \sin(\vartheta) \quad \Longleftrightarrow \\ r \underline{A}_\vartheta &= -\frac{\mu I_0 \Delta s}{4\pi} e^{j(\omega t - kr)} \sin(\vartheta) + \underline{c}_\vartheta \quad \Longleftrightarrow \\ \underline{A}_\vartheta &= -\frac{\mu I_0 \Delta s}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \sin(\vartheta) + \frac{\underline{c}_\vartheta}{r} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} &= \frac{\mu I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \sin(\vartheta) \quad \Longleftrightarrow \\ \underline{A}_r &= \frac{\mu I_0 \Delta s}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \cos(\vartheta) + \underline{c}_r \end{aligned}$$

Setzen wir die Integrationskonstanten zu null, ergibt sich das gesamte magnetische Vektorpotential somit zu

$$\underline{\mathbf{A}}(r, \vartheta, t) = \frac{\mu I_0 \Delta s}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} (\cos(\vartheta) \mathbf{e}_r - \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta)$$

- b) Zerlegen Sie das magnetische Feld in Nah- und Fernfeldanteile und begründen Sie die Zuordnung.

Im Fernfeld verschwinden wegen $\frac{1}{r^3} \ll \frac{1}{r^2} \ll \frac{1}{r}$ für $r \rightarrow \infty$ die Feldanteile, die Terme $\frac{1}{r^3}$ oder $\frac{1}{r^2}$ enthalten. Entsprechend verschwinden für das Nahfeld wegen $\frac{1}{r} \ll \frac{1}{r^2} \ll \frac{1}{r^3}$ für $r \rightarrow 0$ die Feldanteile, die Terme $\frac{1}{r^2}$ oder $\frac{1}{r}$ enthalten. Des Weiteren lässt sich der Exponentialteil mit $\exp(-jkr) \approx 1$ vereinfachen. Folglich lautet der Nah- bzw. Fernfeldanteil

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{H}}_{\text{Nahfeld}} &= \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^2} \sin(\vartheta) e^{j\omega t} \mathbf{e}_\phi \\ \underline{\mathbf{H}}_{\text{Fernfeld}} &= j \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{k}{r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie das elektrische Feld des Dipols im gesamten Raum. Benennen Sie in Ihrer Lösung die Nahfeld- und Fernfeldanteile.

Die elektrische Feldstärke ergibt sich mit Hilfe des Induktionsgesetzes für harmonische Wellen mit $H_r = H_\vartheta = 0$ zu

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \underline{\mathbf{H}}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \left(\frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial(\sin(\vartheta)H_\phi)}{\partial\vartheta} \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \mathbf{e}_\vartheta \right).$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial\vartheta} \left(\frac{I_0\Delta s}{4\pi} \left(j\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin^2(\vartheta) \right) \\ &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \frac{I_0\Delta s}{4\pi} \left(j\frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{j(\omega t - kr)} 2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \\ &= \frac{I_0\Delta s}{j\omega\epsilon 2\pi} \left(j\frac{k}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{j(\omega t - kr)} \cos(\vartheta) \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{I_0\Delta s}{4\pi} \left(jk + \frac{1}{r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin(\vartheta) \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \frac{I_0\Delta s}{4\pi} \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(jk + \frac{1}{r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \frac{I_0\Delta s}{4\pi} \sin(\vartheta) \frac{\partial}{\partial r} \left(jk e^{j(\omega t - kr)} + \frac{1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \frac{I_0\Delta s}{4\pi} \sin(\vartheta) \left(k^2 e^{j(\omega t - kr)} - \frac{1}{r^2} e^{j(\omega t - kr)} - j\frac{k}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right) \\ &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \frac{I_0\Delta s}{4\pi} \sin(\vartheta) \left(k^2 - \frac{1}{r^2} - j\frac{k}{r} \right) e^{j(\omega t - kr)} \\ &= \frac{I_0\Delta s}{j\omega\epsilon 4\pi} \left(-\frac{k^2}{r} + j\frac{k}{r^2} + \frac{1}{r^3} \right) e^{j(\omega t - kr)} \sin(\vartheta) \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Mit derselben Begründung wie in Aufgabenteil b) lässt sich das elektrische Nah- bzw. Fernfeld vereinfachen.

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_{\text{Nahfeld}} &= -j \frac{I_0\Delta s}{\omega\epsilon 4\pi r^3} (2 \cos(\vartheta) \mathbf{e}_r + \sin(\vartheta) \mathbf{e}_\vartheta) e^{j\omega t} \\ \underline{\mathbf{E}}_{\text{Fernfeld}} &= j \frac{I_0\Delta s}{\omega\epsilon 4\pi} \frac{k^2}{r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \mathbf{e}_\vartheta \end{aligned}$$

Für kleine Distanzen und unter Vernachlässigung einer zeitlichen Änderungen des elektrischen Feldes, also $e^{j\omega t=0}$ da $\omega = 0$, entspricht das elektrische Nahfeld dem elektrischen Feld aus der Elektrostatik.

- d) Berechnen Sie die mittlere Leistungsdichte im Nah- und Fernfeld. Was fällt dabei auf?

Für das Nahfeld ergibt sich durch das Kreuzprodukt des magnetischen und elektrischen Feldes eine r - und ϑ -Komponente des Poynting-Vektors.

$$\underline{\mathbf{S}}_{\text{Nahfeld}} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}}_{\text{Nahfeld}} \times \underline{\mathbf{H}}_{\text{Nahfeld}}^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_\vartheta H_\phi^* \\ -E_r H_\phi^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Feldkomponenten ergibt

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{S}}_{r,\text{Nahfeld}} &= \frac{1}{2} \underline{E}_\vartheta \underline{H}_\phi^* \\
 &= -j \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \epsilon} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^3} \sin(\vartheta) e^{j\omega t} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^2} \sin(\vartheta) e^{-j\omega t} \\
 &= -j \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \epsilon} \left(\frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{r^5} \sin^2(\vartheta) \\
 \underline{\mathbf{S}}_{\vartheta,\text{Nahfeld}} &= -\frac{1}{2} \underline{E}_r \underline{H}_\phi^* \\
 &= j \frac{1}{\omega \epsilon} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^3} \cos(\vartheta) e^{j\omega t} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{1}{r^2} \sin(\vartheta) e^{-j\omega t} \\
 &= j \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \epsilon} \left(\frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{r^5} \sin(2\vartheta)
 \end{aligned}$$

Die mittlere Leistungsdichte entspricht dem Realteil des komplexen Poynting-Vektors. Da der Poynting-Vektor rein imaginär ist, wird keine mittlere Leistungsdichte transportiert.

Da im Fernfeld das elektrische Feld lediglich in ϑ -Richtung schwingt und das magnetische Feld lediglich in ϕ -Richtung, breitet sich die Leistung vollständig in radialer Richtung aus, denn $\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r$.

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}} &= \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}}_{\text{Nahfeld}} \times \underline{\mathbf{H}}_{\text{Nahfeld}}^*) = \frac{1}{2} \underline{E}_\vartheta \underline{H}_\phi^* \mathbf{e}_r \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \epsilon} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{k^2}{r} \sin(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \frac{k}{r} \sin(\vartheta) e^{-(\omega t - kr)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{\omega \epsilon} \left(\frac{I_0 \Delta s}{4\pi} \right)^2 \frac{k^3}{r^2} \sin^2(\vartheta)
 \end{aligned}$$

Da der Poynting-Vektor rein reell ist, wird ausschließlich Wirkleistung übertragen. Das Ergebnis für die mittlere Leistungsdichte ist identisch, da der komplexe Poynting-Vektor hier rein reell ist, $\Re\{\underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}}\} = \underline{\mathbf{S}}_{\text{Fernfeld}}$.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu