EMW Übungsblatt 04

Abgabe bis zum 29.11.2021 um 12:00 via ILIAS

Aufgabe 8:

Für das magnetische Vektorpotential eines Hertzschen Dipols gelte:

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z \, \mathbf{e}_z$$
$$\underline{A}_z = \frac{\mu \Delta s \underline{I}_0}{4\pi} \frac{1}{kr} \exp\left(\mathrm{j}\left(\omega t - kr\right)\right)$$

a) Zeigen Sie, dass $\underline{A}_z$ die Wellengleichung erfüllt (beachten Sie die Form des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten) und verwenden Sie die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten, um $\underline{\mathbf{A}}$ darzustellen.

b) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ die magnetische Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$. In welchem Abstand r zum Dipol sind die Anteile des Nah- und des Fernfeldes gleich groß?

Hinweis: Verwenden Sie die in a) ermittelte Darstellung des Vektorpotentials in Kugelkoordinaten.

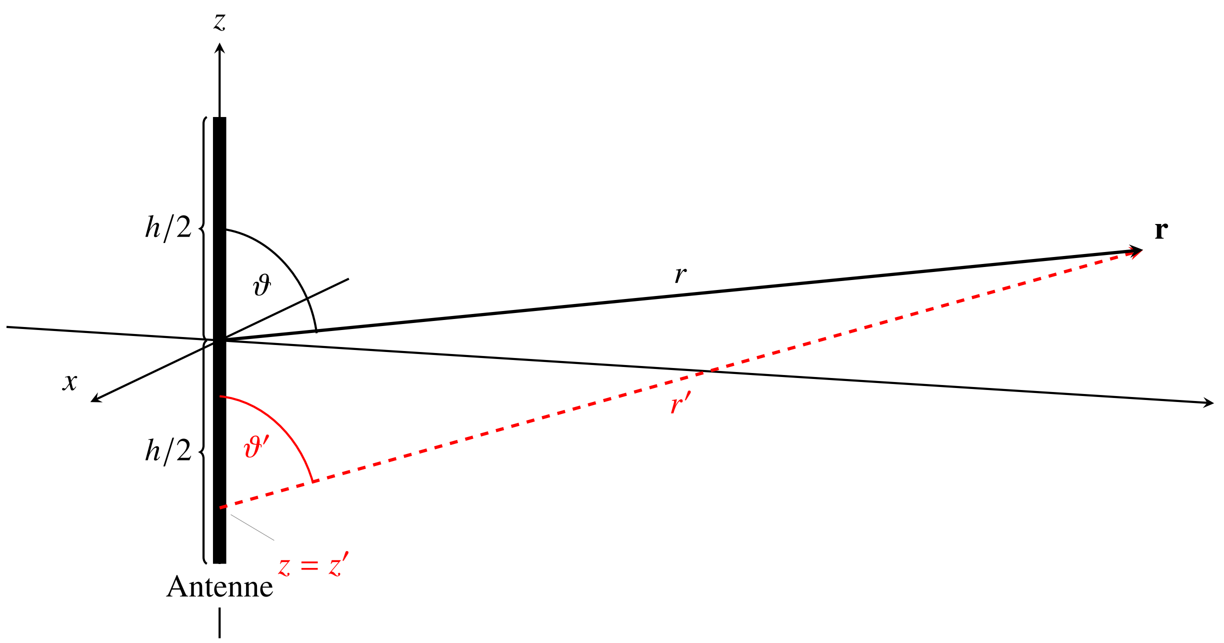

Abbildung 1

Im Folgenden soll das Fernfeld einer linearen Dipolantenne der Höhe h und infinitesimaler Dicke (siehe Abbildung 1) mit der z-abhängigen Stromverteilung

$$\underline{I}(z,t) = I_0 \, \sin(k(h - |z|)) \, \exp\left(\mathrm{j}\,\omega t\right)$$

betrachtet werden. Der Mittelpunkt der Antenne befinde sich im Koordinatenursprung.

c) Ermitteln Sie das elektrische Fernfeld der Dipolantenne. Nehmen Sie dazu an, dass sich das resultierende elektrische Feld aus der Überlagerung der Felder Hertzscher Dipole ergibt, welche entlang der z-Achse bei $z = z'$ angeordnet sind und den Abstand $r' = \|\mathbf{r} - z' \, \mathbf{e}_z\|$

von dem Beobachtungspunkt, der durch den Ortsvektor $\mathbf{r}$ gegeben ist, aufweisen. Wählen Sie dementsprechend den folgenden Ansatz

$$\underline{E}_\vartheta = \mathrm{j}\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{k^2}{\omega\varepsilon}\int_{-h/2}^{h/2}\underline{I}(z',t)\,\frac{\exp\left(-\mathrm{j}\,kr'\right)}{r'}\,\sin\vartheta'\,\mathrm{d}z'\,. \tag{1}$$

Die nachfolgenden Schritte führen Sie durch die Aufgabe.

i) Drücken Sie zunächst r' und $\sin\vartheta'$ in Abhängigkeit von r, z und z' aus. Vereinfachen Sie dabei soweit möglich.

ii) Im Fernfeld gilt $r \gg h$. Begründen Sie anhand der Ergebnisse aus (i), weshalb Sie für alle $z \in [-h/2, h/2]$ die folgenden Näherungen verwenden können

$$\vartheta' \approx \vartheta = \mathrm{const}\,,$$
$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{r'}\,,$$
$$r' \approx r - z'\,\cos\vartheta\,.$$

Gehen Sie insbesondere darauf ein, weshalb wir in der komplexen Exponentialfunktion nicht einfach $r' \approx r$ verwenden können.

iii) Setzen Sie die Näherungen aus (ii) in (1) ein. Verwenden Sie anschließend die Eulersche Formel und daraufhin die Symmetrieeigenschaften des Integranden, um das Integral zu lösen.

Hinweis: Es gilt

$$\int_0^h \sin\left(k(h-z)\right)\,\cos\left(kz\,\cos\vartheta\right)\,\mathrm{d}z = \frac{\cos\left(kh\,\cos\vartheta\right) - \cos(kh)}{k\,\sin^2\vartheta}\,.$$

d) In ausreichend großem Abstand von der Antenne kann $E_\vartheta = \Re\{\underline{E}_\vartheta\}$ durch eine ebene Welle approximiert werden. Dementsprechend gilt für den Poynting-Vektor $S_r \propto E_\vartheta^2$. Skizzieren Sie die Richtcharakteristik $S_r(\vartheta)$ der Dipolantenne für $h = \lambda/2$, $h = \lambda$ und $h = 2\lambda$ in einem Polardiagramm. Gerne können Sie dazu Matlab verwenden und auf die Funktion polarplot zurückgreifen.

Hinweis: Es gilt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu
Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu
Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu