

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 04

Abgabe bis zum 29.11.2021 um 12:00 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 8:

Für das magnetische Vektorpotential eines Hertzschen Dipols gelte:

$$\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z \mathbf{e}_z$$

$$\underline{A}_z = \frac{\mu \Delta s I_0}{4\pi} \frac{1}{kr} \exp(j(\omega t - kr))$$

- a) Zeigen Sie, dass $\underline{A}_z$ die Wellengleichung erfüllt (beachten Sie die Form des Laplace-Operators in Kugelkoordinaten) und verwenden Sie die Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten, um $\underline{\mathbf{A}}$ darzustellen.

Ges: Nachweis, dass $\underline{A}_z$ die Wellengleichung erfüllt, Magnetisches Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_r \mathbf{e}_r + \underline{A}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \underline{A}_\phi \mathbf{e}_\phi$

Geg: Magnetisches Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z \mathbf{e}_z$

Für die Wellengleichung in Kugelkoordinaten erhalten wir

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{A}_z}{\partial \phi^2} + k^2 \underline{A}_z = 0. \quad (1)$$

Allerdings vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial r} \right) + k^2 \underline{A}_z = 0, \quad (2)$$

da $\frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \underline{A}_z}{\partial \phi} = 0$ gilt. Einsetzen führt auf

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{kr} \exp(j(\omega t - kr)) \right) \right) + \frac{k}{r} \exp(j(\omega t - kr)) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(-\frac{1}{kr^2} \exp(j(\omega t - kr)) - j \frac{1}{r} \exp(j(\omega t - kr)) \right) \right) + \frac{k}{r} \exp(j(\omega t - kr)) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{k} \exp(j(\omega t - kr)) - j r \exp(j(\omega t - kr)) \right) + \frac{k}{r} \exp(j(\omega t - kr)) = 0. \quad (5)$$

Mit der Produktregel erhalten wir für die Ableitung von $j r \exp(j(\omega t - kr))$

$$\frac{\partial}{\partial r} (j r \exp(j(\omega t - kr))) = j \exp(j(\omega t - kr)) + k r \exp(j(\omega t - kr)). \quad (6)$$

Einsetzen in die Wellengleichung liefert daher

$$-\frac{1}{r^2} k r \exp(j(\omega t - kr)) + \frac{k}{r} \exp(j(\omega t - kr)) = 0 \quad (7)$$

$$0 = 0. \quad \square \quad (8)$$

Nun zu dem Wechsel zwischen den Einheitsvektoren: Der Formelsammlung entnehmen wir, dass

$$\begin{aligned}\underline{A}_r &= \underline{A}_z \cos \vartheta = \frac{\mu \Delta s I_0}{4\pi} \frac{\cos \vartheta}{kr} \exp(j(\omega t - kr)) \\ \underline{A}_\vartheta &= -\underline{A}_z \sin \vartheta = -\frac{\mu \Delta s I_0}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{kr} \exp(j(\omega t - kr)) \\ \underline{A}_\phi &= 0,\end{aligned}$$

da $\underline{A}_x = \underline{A}_y = 0$.

Anmerkung: In der ursprünglichen Form hätte die Aufgabe nicht die erwarteten Ergebnisse geliefert, denn weder $\underline{A}_r$ noch $\underline{A}_\vartheta$ erfüllen die skalaren Wellengleichungen und es gilt

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{A}_r}{\partial \phi^2} + k^2 \underline{A}_r \neq 0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin(\vartheta) \frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \frac{\partial^2 \underline{A}_\vartheta}{\partial \phi^2} + k^2 \underline{A}_\vartheta \neq 0. \quad (10)$$

- b) Berechnen Sie aus dem Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}}$ die magnetische Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$. In welchem Abstand r zum Dipol sind die Anteile des Nah- und des Fernfeldes gleich groß?

Hinweis: Verwenden Sie die in a) ermittelte Darstellung des Vektorpotentials in Kugelkoordinaten.

Ges: Nachweis, dass $\underline{A}_z$ die Wellengleichung erfüllt, Magnetisches Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_r \mathbf{e}_r + \underline{A}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + \underline{A}_\phi \mathbf{e}_\phi$

Geg: Magnetisches Vektorpotential $\underline{\mathbf{A}} = \underline{A}_z \mathbf{e}_z$

Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke $\underline{\mathbf{H}}$ können wir den Zusammenhang

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{\mathbf{A}}$$

verwenden. Durch Einsetzen des Vektorpotentials aus a) erhalten wir mit dem Rotationsoperator in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}\nabla \times \underline{\mathbf{A}} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial(\sin \vartheta \underline{A}_\phi)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \underline{A}_\vartheta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r \underline{A}_\phi)}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\vartheta \\ &+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

und $\underline{A}_\phi = 0$ sowie $\frac{\partial \underline{A}_{r,\vartheta,\phi}}{\partial \phi} = 0$

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{H}} &= \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r \underline{A}_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial \underline{A}_r}{\partial \vartheta} \right) \mathbf{e}_\phi \\ &= 0 \mathbf{e}_r + 0 \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{\mu} \sin \vartheta \left(j k + \frac{1}{r} \right) \underline{A}_z \mathbf{e}_\phi \\ &= \frac{\Delta s I_0 k}{4\pi} \sin \vartheta \left(j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \exp(j(\omega t - kr)) \mathbf{e}_\phi \\ &= \frac{\Delta s I_0 k^2}{4\pi \omega \epsilon} \frac{1}{Z} \sin \vartheta \left(j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \exp(j(\omega t - kr)) \mathbf{e}_\phi,\end{aligned}$$

wobei wir uns zunutze gemacht haben, dass

$$\frac{\partial(r\bar{A}_\vartheta)}{\partial r} = -\sin\vartheta \frac{\partial(r\bar{A}_z)}{\partial r} = -\sin\vartheta \frac{\mu\Delta s I_0}{4\pi} \frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} \exp(j(\omega t - kr)) = j \sin\vartheta k r \bar{A}_z$$

$$\frac{\partial \bar{A}_r}{\partial \vartheta} = \bar{A}_z \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial \vartheta} = -\sin\vartheta \bar{A}_z.$$

Entsprechend sind die Anteile des Nah- bzw. Fernfelds ($\propto 1/r^2$ bzw. $\propto 1/r$) im Abstand

$$\left| \frac{1}{r^2} \right| = \left| j \frac{k}{r} \right| \iff r = \frac{1}{k}$$

vom Hertzschen Dipol gleich groß.

Hinweis: Diese Ergebnis entspricht bis auf einen fehlenden Faktor k dem Ergebnis aus der Vorlesung. Die Ursache ist, dass sich in die Vorlesungsfolien ein Fehler eingeschlichen hatte, der nun behoben ist: Korrekterweise müsste die z -Komponente des magnetischen Vektorpotentials folgendermaßen definiert sein:

$$\bar{A}_z = \frac{\mu\Delta s I_0 k}{4\pi} \frac{1}{kr} \exp(j(\omega t - kr)). \quad (11)$$

Nur so erhalten wir für das Magnetfeld

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{\Delta s I_0 k^3}{4\pi\omega\epsilon} \frac{1}{Z} \sin\vartheta \left(j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \exp(j(\omega t - kr)) \mathbf{e}_\phi. \quad (12)$$

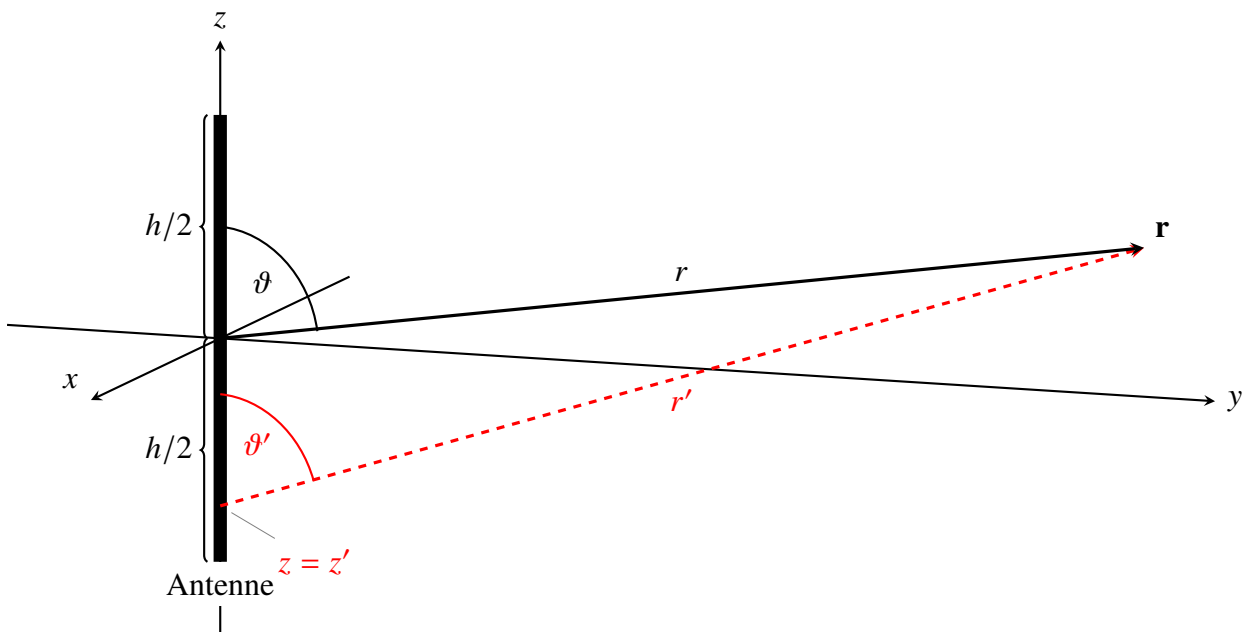


Abbildung 1

Im Folgenden soll das Fernfeld einer linearen Antenne der Höhe h und infinitesimaler Dicke (siehe Abbildung 1) mit der z -abhängigen Stromverteilung

$$\underline{I}(z, t) = \underline{I}_0 \sin(k(h - |z|)) \exp(j\omega t)$$

betrachtet werden. Der Mittelpunkt der Antenne befinde sich im Koordinatenursprung.

- c) Ermitteln Sie das elektrische Fernfeld der Antenne. Nehmen Sie dazu an, dass sich das resultierende elektrische Feld aus der Überlagerung der Felder Hertzscher Dipole ergibt, welche entlang der z -Achse bei $z = z'$ angeordnet sind und den Abstand $r' = \|\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z\|$ von dem Beobachtungspunkt, der durch den Ortsvektor $\mathbf{r}$ gegeben ist, aufweisen. Wählen Sie dementsprechend den folgenden Ansatz

$$\underline{E}_\vartheta = j \frac{1}{4\pi} \frac{k^2}{\omega \varepsilon} \int_{-h/2}^{h/2} \underline{I}(z', t) \frac{\exp(-jkr')}{r'} \sin \vartheta' dz'. \quad (13)$$

Die nachfolgenden Schritte führen Sie durch die Aufgabe.

- i) Drücken Sie zunächst r' und $\sin \vartheta'$ in Abhängigkeit von r , z und z' aus. Vereinfachen Sie dabei soweit möglich.

Ges: r' und $\sin \vartheta'$

Geg: r , z und z'

Da sich die Antenne auf der z -Achse befindet, gilt für r'

$$r' = \|\mathbf{r} - z' \mathbf{e}_z\| = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}. \quad (14)$$

Zudem erhalten wir für $\sin \vartheta'$ mit $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ und

$$\cos \vartheta' = \frac{z - z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2}} = \frac{z - z'}{r'}, \quad (15)$$

dass

$$\sin \vartheta' = \sin \left(\arccos \left(\frac{z - z'}{r'} \right) \right) = \sqrt{1 - \left(\frac{z - z'}{r'} \right)^2}. \quad (16)$$

- ii) Im Fernfeld gilt $r \gg h$. Begründen Sie anhand der Ergebnisse aus (i), weshalb Sie für alle $z' \in [-h/2, h/2]$ die folgenden Näherungen verwenden können

$$\begin{aligned} \vartheta' &\approx \vartheta = \text{const}, \\ \frac{1}{r} &\approx \frac{1}{r'}, \\ r' &\approx r - z' \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Gehen Sie insbesondere darauf ein, weshalb wir in der komplexen Exponentialfunktion nicht einfach $r' \approx r$ verwenden können.

Ges: Nachweis der gegebenen Näherungen

Geg: $z' \in [-h/2, h/2]$ und $r \gg h$

Beginnen wir mit der Näherung von r' :

$$r' = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} \quad (17)$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2zz' + z'^2} \quad (18)$$

$$= \sqrt{r^2 - 2zz' + z'^2} \quad (19)$$

$$= r \sqrt{1 - \frac{2zz'}{r^2} + \frac{z'^2}{r^2}} \quad (20)$$

Da wegen $z' \in [-h/2, h/2]$ und $r \gg h$ auch $\frac{z'}{r} \ll 1$ gilt, können wir den letzten Term in der Wurzel vernachlässigen:

$$r' \approx r \sqrt{1 - 2 \frac{z}{r} \frac{z'}{r}}. \quad (21)$$

Mit $\cos \vartheta = \frac{z}{r}$ und der Taylor-Entwicklung der Wurzel

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} \mp O(x^2) \quad (22)$$

sehen wir zudem, dass

$$r' \approx r \left(1 - \frac{z'}{r} \cos \vartheta \right) = r - z' \cos \vartheta. \quad \square \quad (23)$$

Wieso berücksichtigen wir hier den Term $z' \cos \vartheta$ wenn doch $z' \cos \vartheta \ll r$ gilt? Die Variable r' kommt in dem zu untersuchenden Integral zweimal vor. Einerseits in $\frac{1}{r'}$ und andererseits in $\exp(-jkr')$. Während im ersten Fall für kleine Abweichungen $z' \cos \vartheta$ in guter Näherung gilt, dass

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r + z' \cos \vartheta} = \frac{1}{r} \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{z' \cos \vartheta}{r}}}_{\approx 1} \approx \frac{1}{r}, \quad \square \quad (24)$$

sehen wir im zweiten Fall, dass

$$\exp(-jk(r - z' \cos \vartheta)) = \exp(-jkr) \exp(jkz' \cos \vartheta). \quad (25)$$

Hier genügt bereits die Erfüllung von $kz' \cos \vartheta = \pi$, um eine Änderung des Vorzeichens zu bewirken. Das heißt, nur für

$$z' \ll \frac{\pi}{k \cos \vartheta} = \frac{\lambda}{2 \cos \vartheta} \quad (26)$$

wäre ein Vernachlässigen des Terms $z' \cos \vartheta$ zulässig. Schätzen wir nun noch $\cos \vartheta$ nach oben ab, erhalten wir

$$z' \ll \frac{\lambda}{2} \quad (27)$$

und sehen damit, dass nur für Antennen, welche viel kleiner als die Wellenlänge sind, die Näherung $r' \approx r$ im Allgemeinen gültig wäre. Unter diesen Umständen entspräche das elektrische Feld des Dipols wieder dem des Hertzschen Dipols. Abschließend sehen wir uns die Beziehung für $\cos \vartheta'$ aus (i) an, um $\vartheta \approx \vartheta'$ nachzuweisen:

$$\cos \vartheta' = \frac{z - z'}{r'} \quad (28)$$

$$= \frac{z}{r'} - \frac{z'}{r'} \quad (29)$$

$$\approx \frac{z}{r} - \frac{z'}{r} = \cos \vartheta - \frac{z'}{r}. \quad (30)$$

Wegen $\frac{z'}{r} \ll 1$ erhalten wir damit

$$\cos \vartheta' \approx \cos \vartheta \quad \Longleftrightarrow \quad \vartheta' \approx \vartheta \quad \square \quad (31)$$

- iii) Setzen Sie die Näherungen aus (ii) in (13) ein. Verwenden Sie anschließend die Eulersche Formel und daraufhin die Symmetrieeigenschaften des Integranden, um das Integral zu lösen.

Hinweis: Es gilt

$$\int_0^h \sin(k(h-z)) \cos(kz \cos \vartheta) dz = \frac{\cos(kh \cos \vartheta) - \cos(kh)}{k \sin^2 \vartheta}.$$

Ges: Lösung des Integrals für $\underline{E}_\vartheta$

Geg: Näherungen aus (ii)

Mit den getroffenen Vereinfachungen lässt sich das Integral schreiben als

$$\underline{E}_\vartheta = \frac{1}{4\pi} \frac{I_0 k^3}{\omega \varepsilon} \exp(-jkr) \frac{j}{kr} \sin \vartheta \int_{-h/2}^{h/2} \sin(k(h-|z|)) \exp(jkz' \cos \vartheta) dz'. \quad (32)$$

Nun verwenden wir die Eulersche Formel und erhalten

$$\underline{E}_\vartheta \propto \int_{-h/2}^{h/2} \sin(k(h-|z|)) (\cos(kz' \cos \vartheta) + j \sin(kz' \cos \vartheta)) dz'. \quad (33)$$

Im nächsten Schritt definieren wir die Integrale

$$I_1 := \int_{-h/2}^{h/2} \sin(k(h-|z|)) \cos(kz' \cos \vartheta) dz' \quad (34)$$

$$I_2 := \int_{-h/2}^{h/2} \sin(k(h-|z|)) \sin(kz' \cos \vartheta) dz', \quad (35)$$

Während das Produkt aus zwei gerade Funktionen eine gerade Funktion liefert, hat das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion eine ungerade Funktion zum Ergebnis. Die Funktionen $\sin(k(h-|z|))$ und $\cos(kz \cos \vartheta)$ sind beide gerade. Daher verschwindet das Integral I_1 trotz der symmetrischen Grenzen nicht. Da $\sin(kz \cos \vartheta)$ jedoch eine ungerade Funktion ist, verschwindet das Integral I_2 aufgrund der symmetrischen Grenzen. Wenn wir zudem die Symmetrie von I_1 ausnutzen, erhalten wir mit dem Hinweis

$$I_1 = 2 \int_0^{h/2} \sin(k(h-z)) \cos(kz' \cos \vartheta) dz' \quad (36)$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{kh}{2} \cos \vartheta\right) - \cos\left(\frac{kh}{2}\right)}{k \sin^2 \vartheta}. \quad (37)$$

Einsetzen der Lösung von I_1 liefert schließlich den gesuchten Ausdruck für $\underline{E}_\vartheta$

$$\underline{E}_\vartheta = \frac{1}{4\pi} \frac{I_0 k^3}{\omega \varepsilon} \exp(-jkr) \frac{j}{kr} \sin \vartheta \frac{\cos\left(\frac{kh}{2} \cos \vartheta\right) - \cos\left(\frac{kh}{2}\right)}{k \sin^2 \vartheta} \quad (38)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{I_0 k^2}{\omega \varepsilon} \exp(-jkr) \frac{j}{kr} \frac{\cos\left(\frac{kh}{2} \cos \vartheta\right) - \cos\left(\frac{kh}{2}\right)}{\sin \vartheta}. \quad (39)$$

- d) In ausreichend großem Abstand von der Antenne kann $E_\vartheta = \Re\{E_\vartheta\}$ durch eine ebene Welle approximiert werden. Dementsprechend gilt für den Poynting-Vektor $S_r \propto E_\vartheta^2$. Skizzieren Sie die Richtcharakteristik $S_r(\vartheta)$ der Antenne für $h = \lambda/2$, $h = \lambda$ und $h = 2\lambda$ in einem Polardiagramm. Gerne können Sie dazu Matlab verwenden und auf die Funktion [polarplot](#) zurückgreifen.

Hinweis: Es gilt $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Ges: Richtcharakteristik $S_r(\vartheta)$

Geg: $S_r \propto E_\vartheta^2$ und $h = \lambda/2$, $h = \lambda$ und $h = 2\lambda$

Für die Richtcharakteristik $S_r \propto E_\vartheta^2$ setzen wir an, dass

$$S_r \propto E_\vartheta^2 \propto \left(\frac{\cos\left(\frac{kh}{2} \cos \vartheta\right) - \cos\left(\frac{kh}{2}\right)}{\sin \vartheta} \right)^2 = \left(\frac{\cos\left(\frac{\pi h}{\lambda} \cos \vartheta\right) - \cos\left(\frac{\pi h}{\lambda}\right)}{\sin \vartheta} \right)^2. \quad (40)$$

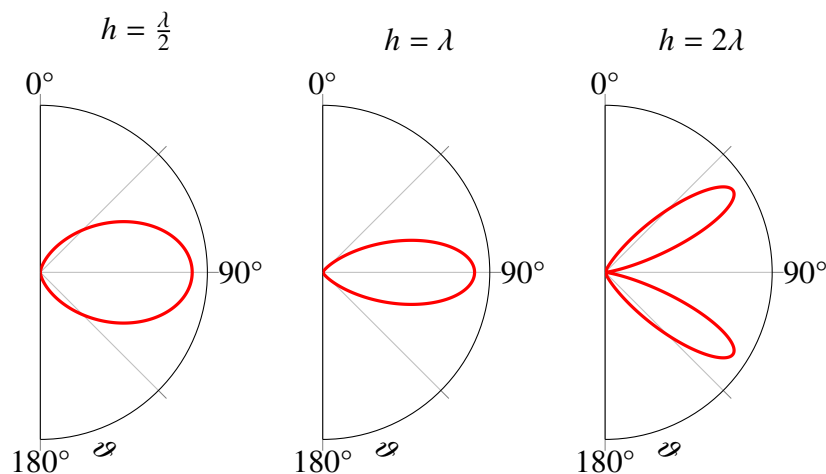


Abbildung 2: Richtcharakteristika für $h = \lambda/2$, $h = \lambda$ und $h = 2\lambda$.

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu