

Elektromagnetische Wellen (EMW)

Übung 5

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Administratives

- Unterlagen zur Vorlesung und Übung sowie Diskussionsforen finden Sie im [ILIAS-Portal](#)
- Kontaktdaten Übungsleiter
jonas.krimmer@kit.edu
patrick.matalla@kit.edu
- Die Übung wird nicht aufgezeichnet
- Das heutige Übungsblatt wird nicht eingesammelt
- Das bereits eingesammelt Übungsblatt ist noch nicht korrigiert
- **Evaluation der Übung im Ilias freigeschaltet
06.12 12:00 Uhr bis 13.12 14:00**

Oktober	November	Dezember	Januar	Februar
1 Fr	1 Mo	1 Mi Vorlesung 8	1 Sa	1 Di
2 Sa	2 Di	2 Do	2 So	2 Mi Vorlesung 15
3 So	3 Mi Vorlesung 4	3 Fr	3 Mo	3 Do
4 Mo	4 Do	4 Sa	4 Di	4 Fr
5 Di	5 Fr	5 So	5 Mi	5 Sa
6 Mi	6 Sa	6 Mo Übung 5	6 Do	6 So
7 Do	7 So	7 Di	7 Fr	7 Mo Übung 13
8 Fr	8 Mo Übung 1	8 Mi Vorlesung 9	8 Sa	8 Di
9 Sa	9 Di	9 Do	9 So	9 Mi Übung 14
10 So	10 Mi Vorlesung 5	10 Fr	10 Mo Übung 9	10 Do
11 Mo	11 Do	11 Sa	11 Di	11 Fr
12 Di	12 Fr	12 So	12 Mi Vorlesung 12	12 Sa
13 Mi	13 Sa	13 Mo Übung 6	13 Do	13 So
14 Do	14 So	14 Di	14 Fr	14 Mo
15 Fr	15 Mo Übung 2	15 Mi Vorlesung 10	15 Sa	15 Di
16 Sa	16 Di	16 Do	16 So	16 Mi
17 So	17 Mi Vorlesung 6	17 Fr	17 Mo Übung 10	17 Do
18 Mo Vorlesung 1	18 Do	18 Sa	18 Di	18 Fr
19 Di	19 Fr	19 So	19 Mi Vorlesung 13	19 Sa
20 Mi Vorlesung 2	20 Sa	20 Mo Übung 7	20 Do	20 So
21 Do	21 So	21 Di	21 Fr	21 Mo
22 Fr	22 Mo Übung 3	22 Mi Vorlesung 11	22 Sa	22 Di
23 Sa	23 Di	23 Do	23 So	23 Mi
24 So	24 Mi Vorlesung 7	24 Fr	24 Mo Übung 11	24 Do
25 Mo Übung 9	25 Do	25 Sa	25 Di	25 Fr
26 Di	26 Fr	26 So	26 Mi Vorlesung 14	26 Sa
27 Mi Vorlesung 3	27 Sa	27 Mo	27 Do	27 So
28 Do	28 So	28 Di	28 Fr	28 Mo Rosenmontag
29 Fr	29 Mo Übung 4	29 Mi	29 Sa	
30 Sa	30 Di	30 Do	30 So	
31 So		31 Fr	31 Mo Übung 12	

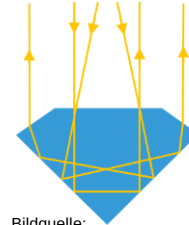
Themenübersicht

Übung	Aufgabe	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichungen, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Phasen- & Gruppengeschwindigkeit
Übung 3	A6, A7	Polarisation, Hertzsche Dipol
Übung 4	A8	Hertzscher Dipol, Dipolantenne
Übung 5	A9	Grenzflächenübergänge

Motivation

■ Technologien basierend auf Reflektion/Beugung an Grenzflächen

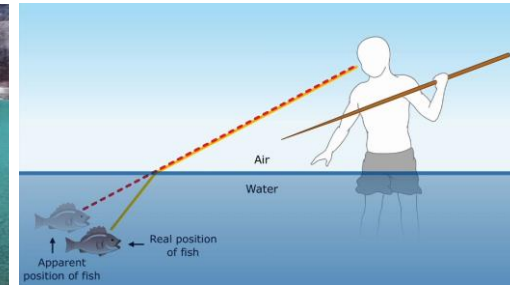
- Metallische Wellenleiter/Hohlleiter zur Signalübertragung
- Lichtwellenleiter/dielektrische Wellenleiter zur Signalübertragung (Glasfaser)
- Reflektion von Funkwellen zur Hinderniserkennung und Ortungsverfahren (Radar)
- Reflektion optischer Wellen zur Hinderniserkennung (Lidar)
- Sensorik, z.B. Regensensor im Automobil
- Geometrische Optik (Linsen, Prismen, etc.)
 - Messtechnik: Mikroskopie
 - Fotografie (Linsen, Polarisationsfilter)
 - Teleskope
 - Brillen, Kontaktlinsen, menschliches Auge



Bildquelle:
[Totalreflexion | LEIFIphysik](#)



Bildquelle:
[Total internal reflection of Chelonia mydas](#)
- [Totalreflexion – Wikipedia](#)



Bildquelle:
[Refraction Lab - Mrs. Munn's Science \(weebly.com\)](#)

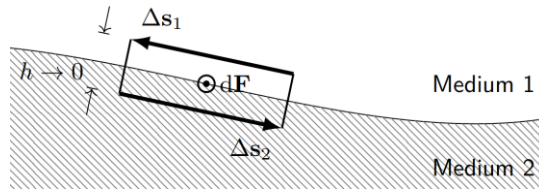
■ Vorkommen in der Natur

- Funkeln von Diamanten, Zuckerkristallen oder Papier durch Totalreflexion
- Spiegelungen im Wasser

Web Apps:
[Apparat für Brechung und Totalreflexion \(fu-berlin.de\)](#)
[Lichtbrechung 1.1.22 \(colorado.edu\)](#)

Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen

Tangentiale Feldkomponenten

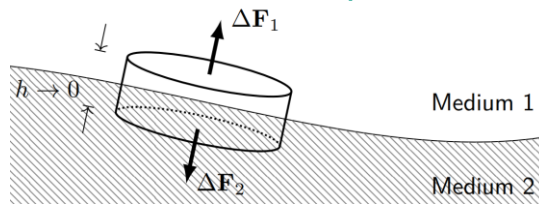


Durchflutungsgesetz $\oint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_F \mathbf{J} \cdot d\mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} \rightarrow H_{t,1} - H_{t,2} = i'$

Oberflächenstrom

Induktionsgesetz $\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_F \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} \rightarrow E_{t,1} - E_{t,2} = 0$

Normale Feldkomponenten



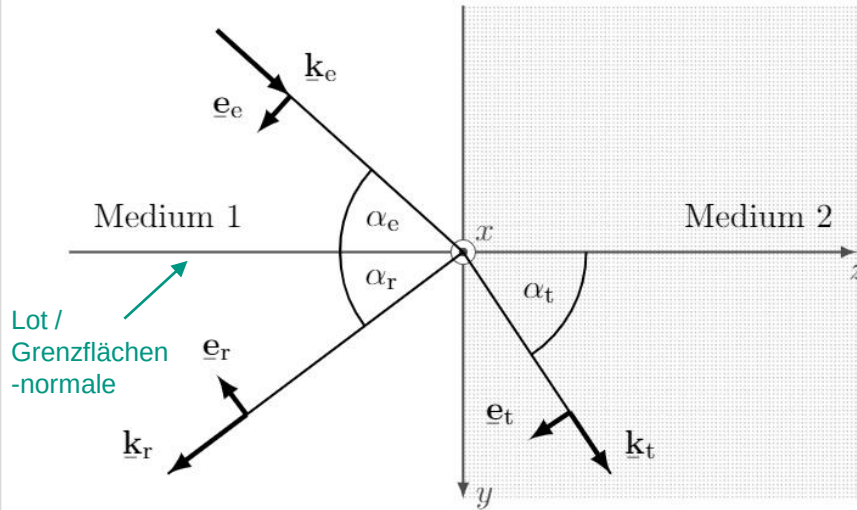
Gaußsches Gesetz $\oint_O \mathbf{D} \cdot d\mathbf{F} = \int_V \rho dV \rightarrow D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma$

Oberflächenladung

$\oint_O \mathbf{B} \cdot d\mathbf{F} = 0 \rightarrow B_{n,1} - B_{n,2} = 0$

- Stetigkeitsbedingung für Tangential- und Normalkomponenten liefern dieselbe Information. Daher im Folgenden Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponenten verwendet
- Bei den Tangential- und Normalkomponenten handelt es sich nicht um vektorielle Größen

Grenzflächenbetrachtungen



An der Grenzfläche zweier Medien werden Wellen teilweise reflektiert. Der übrige Teil der Wellen dringt in das hinter der Grenzfläche liegende Medium ein (Transmission).

Reflexionsgesetz:

$$\alpha_e = \alpha_r$$

(“Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel”)

Snelliussches Brechungsgesetz:

$$\underline{k}_1 \sin(\alpha_e) = \underline{k}_2 \sin(\alpha_t)$$

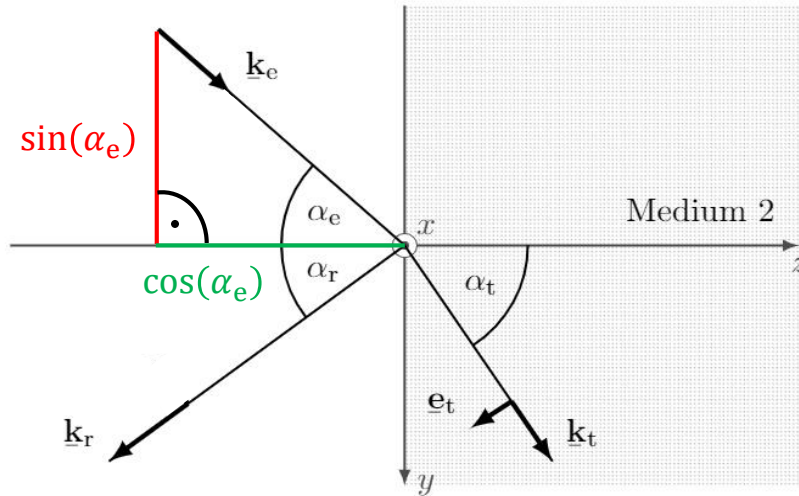


In manchen Büchern wird nicht der Winkel zur Grenzflächennormalen, sondern jener zur Grenzfläche selbst definiert. Dadurch verändern sich auch die weiteren mathematischen Formeln (Brechungsgesetz, Fresnelsche Formeln, usw.).



Vorsicht gelte bei der Wahl des Koordinatensystems! Die Richtung der Koordinatenpfeile sowie die Wahl in welche Richtung die Welle wandert kann die Gleichungen ändern. (vergleiche Vorlesung und Übung)

Grenzflächenbetrachtungen



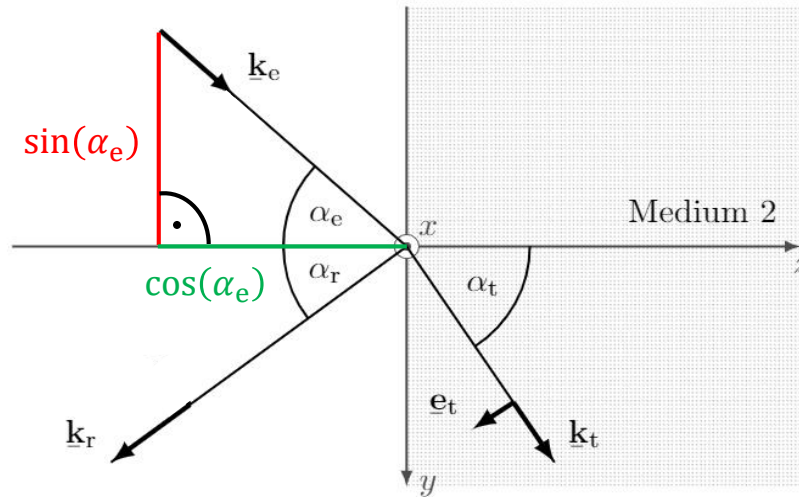
- Für einen Winkel $\alpha_e \neq 0^\circ$ entsprechen die Ausbreitungsrichtung der Welle sowie die Schwingungsrichtung von $\mathbf{E}$ - und $\mathbf{H}$ -Feld nicht notwendigerweise einer Koordinatenachse.
- **Schritt 1.** Einführung von Einheitsvektoren in Richtung der Ausbreitungsrichtung der einfallenden (e), reflektierten (r) und transmittierten Welle (t).

$$\mathbf{e}_{k,e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_e) \\ \cos(\alpha_e) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,r} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_r) \\ -\cos(\alpha_r) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_{k,t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\alpha_t) \\ \cos(\alpha_t) \end{pmatrix}$$

Grenzflächenbetrachtungen



■ Schritt 2.

Einführung eines (komplexen) **Wellenvektors** anstelle der skalaren Wellenzahl

$$\underline{k}_i = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \underline{k}_i \mathbf{e}_{k,i} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z \quad \text{mit } i \in \{e, r, t\}$$

■ Der harmonische Ansatz ergibt dann

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j(\omega t - \underline{k} \cdot \mathbf{r})},$$

mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$.

■ Poynting-Vektor (Ausbreitungsrichtung), **E**-Feld und **H**-Feld bilden weiterhin ein Rechtssystem

Bisher:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(z, t) &= \underline{\mathbf{E}}(z) e^{j(\omega t - kz)} \\ &= \underline{\mathbf{E}}(z) e^{j(\omega t - k_z z)} \end{aligned}$$



Wieso ist $\underline{\mathbf{E}}(z)$ und $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$ komplex, wenn doch die Exponentialfunktion die zeitliche und räumliche beinhaltet? Begründung: Eine Phasenrotation um φ ist in der komplexen Amplitude enthalten (siehe VI. 2, Folie 24.). Ist die Amplitude als reelle Größe $\mathbf{E}(z)$ oder $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ gegeben, wird eine Phasenrotation von $\varphi = 0$ vorausgesetzt.



Die physikalische Ursache der komplexen Wellenzahl wird in Vertiefungsvorlesungen besprochen, z.B. in der Vorlesung „*Optical Waveguides and Fibers*“ am IPQ.

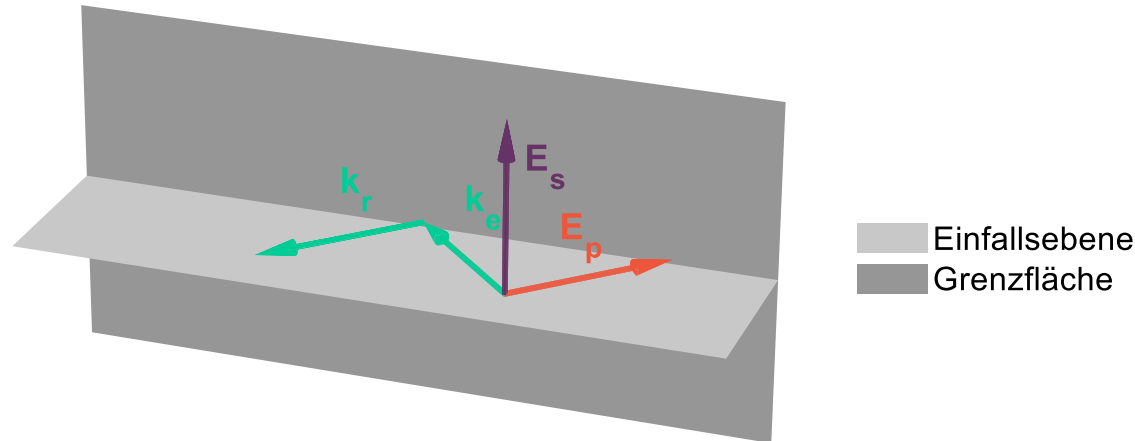
Senkrechte & parallele Polarisation

■ Senkrechte Polarisation:

Schwingungsrichtung E-Feld senkrecht zu
Einfallsebene

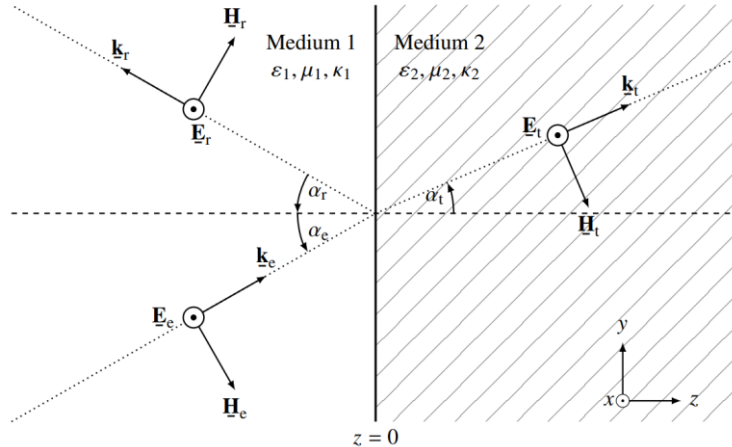
■ Parallele Polarisation:

Schwingungsrichtung E-Feld liegt in
Einfallsebene



Hinweis: Die Einfallsebene ist die Ebene, die die Wellenvektoren $\mathbf{k}_e$ und $\mathbf{k}_r$ enthält. Folglich existieren bei senkrechtem Einfall unendlich viele solcher Ebenen.

Aufgabe 9



$$\underline{E}_e(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_e \exp(j(\omega t - \underline{k}_e \mathbf{r})) \mathbf{e}_x$$

$$\underline{k}_e = k_1 (\sin \alpha_e \mathbf{e}_y + \cos \alpha_e \mathbf{e}_z)$$

$$\underline{E}_r(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_r \exp(j(\omega t - \underline{k}_r \mathbf{r})) \mathbf{e}_x$$

$$\underline{k}_r = k_1 (\sin \alpha_r \mathbf{e}_y - \cos \alpha_r \mathbf{e}_z)$$

$$\underline{E}_t(\mathbf{r}, t) = \underline{E}_t \exp(j(\omega t - \underline{k}_t \mathbf{r})) \mathbf{e}_x$$

$$\underline{k}_t = k_2 (\sin \alpha_t \mathbf{e}_y + \cos \alpha_t \mathbf{e}_z)$$

Tangentele Stetigkeitsbedingungen

$$H_{t,1} - H_{t,2} = i'$$

$$E_{t,1} - E_{t,2} = 0$$

Normale Stetigkeitsbedingungen

$$D_{n,1} - D_{n,2} = \sigma$$

$$B_{n,1} - B_{n,2} = 0$$

Was passiert bei Totalreflexion?

- Für ein dielektrisches Medium ($\kappa = 0$) lässt sich das Snelliussche Brechungsgesetz mit $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ (Wellenzahl in Vakuum) und $n = \sqrt{\mu_r\epsilon_r}$ formulieren zu $n_1 \sin \vartheta_1 = n_2 \sin \vartheta_2$
- Wir betrachten den Fall für welchen genau $\vartheta_2 = 90^\circ \rightarrow \sin \vartheta_2 = 1$ ist, also in der Grenzfläche, der z-Koordinate, liegt (roter Pfeil).

$$n_1 \sin \vartheta_{1,T} = n_2$$

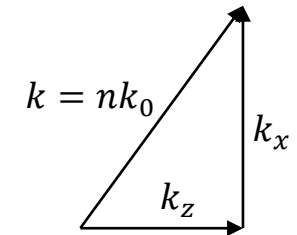
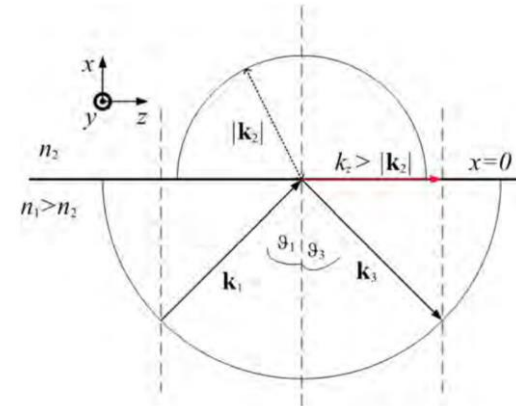
- z-Komponenten des Wellenvektors (es gilt $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$) für $\vartheta_1 > \vartheta_{1,T}$

$$k_{2,z} = k_{1,z} = n_1 k_0 \sin \vartheta_1 > n_2 k_0$$

- Aus $k_{2,x}^2 + k_{2,z}^2 = n_2^2 k_0^2$ lässt sich erkennen, dass $k_{2,x}^2$ negativ sein muss, da $k_{2,z}^2 > n_2^2 k_0^2$ gilt. $k_{2,x}$ ist also rein imaginär $\rightarrow k_{2,x} = \pm j k_{2,x}^{(i)}$
- Einsetzen in transmittierte Welle mit $\mathbf{k} = \mathbf{k}_x + \mathbf{k}_z$

$$\underline{\mathbf{E}}_2(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_2 e^{j(\omega t - \mathbf{k}_2 \mathbf{r})} = \underline{\mathbf{E}}_2 e^{j\omega t} e^{-j k_{2,z} z} e^{-k_{2,x} x}$$

- Der Exponentialterm, welcher $k_{2,x}$ beinhaltet hat kein j mehr und stellt daher keine Phasenrotation dar, sondern einen exponentiellen Abfall des Feldes in x-Richtung! D.h. es wird keine Leistung in x-Richtung transportiert!

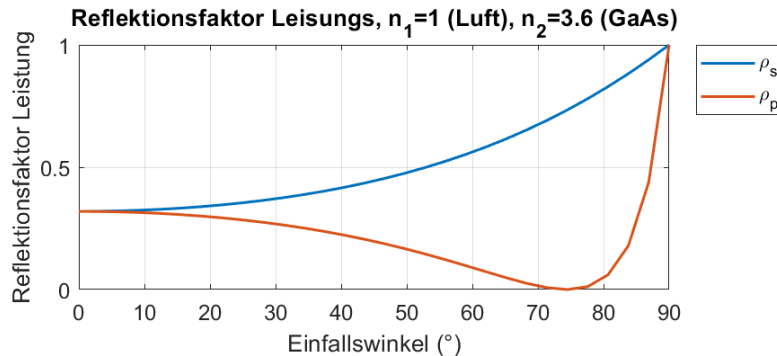


$$k_x^2 + k_z^2 = k^2 = n^2 k_0^2$$

Brewsterscher Polarisationswinkel

- Trifft eine beliebig polarisierte Welle im Brewsterschen Polarisationswinkel auf eine Grenzfläche, so wird nur die senkrecht auf der Einfallsebene stehende Feldkomponente reflektiert.
- Dieser Winkel lässt sich entweder aus den Reflexionsfaktoren der Feldkomponenten herleiten (Vorlesung) oder indem man die Reflexionsfaktoren der Wellenleistung betrachtet.
- Die Feldleistung ist proportional zum Betragsquadrats des Feldes, es gilt demnach

$$\underline{r}_s = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}, \quad \underline{r}_p = \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_2 \cos \alpha_1 + n_1 \cos \alpha_2}, \quad \rho_s = |\underline{r}_s|^2, \quad \rho_p = |\underline{r}_p|^2$$



Bildquelle: [Brewster's angle - Wikipedia](#)