

Lösungsvorschlag zu EMW Übungsblatt 05

Abgabe bis zum 06.12.2021 um 12:00 via ILIAS

Lösung zu Aufgabe 9:

Eine ebene, linear polarisierte elektromagnetische Welle breitet sich in einem Medium 1 aus und trifft unter einem Winkel α_e bei $z = 0$ auf eine Grenzfläche zu einem zweiten Medium (s. Abbildung 1). Das H-Feld liegt in der Einfallsebene und das E-Feld steht orthogonal auf der Einfallsebene. Ein Teil der Welle wird reflektiert, ein Teil wird durchgelassen (transmittiert). Medium 1 hat die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon_1$ und Medium 2 $\varepsilon = \varepsilon_2$. Es gilt überall für die magnetische Permeabilität $\mu = \mu_0$ und für die Leitfähigkeit $\kappa = 0$. Die E-Felder der schräg laufenden Welle lassen sich mit Hilfe des Wellenvektors $\mathbf{k}$ und des Ortsvektors $\mathbf{r}$ wie folgt beschreiben. Der Ortsvektor ist hier als Vektor in kartesischen Koordinaten aufzufassen, d.h. $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$.

Hinlaufende Welle:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_e(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_e \exp(j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_e \mathbf{r})) \mathbf{e}_x \\ \underline{\mathbf{k}}_e &= k_1 (\sin \alpha_e \mathbf{e}_y + \cos \alpha_e \mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

Reflektierte Welle:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_r(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_r \exp(j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_r \mathbf{r})) \mathbf{e}_x \\ \underline{\mathbf{k}}_r &= k_1 (\sin \alpha_r \mathbf{e}_y - \cos \alpha_r \mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

Durchgelassene Welle:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{E}}_t(\mathbf{r}, t) &= \underline{E}_t \exp(j(\omega t - \underline{\mathbf{k}}_t \mathbf{r})) \mathbf{e}_x \\ \underline{\mathbf{k}}_t &= k_2 (\sin \alpha_t \mathbf{e}_y + \cos \alpha_t \mathbf{e}_z)\end{aligned}$$

Hinweis: $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ und $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$.

- a) Weist die Welle senkrechte oder parallele Polarisation auf? Begründen Sie.

Zur Bestimmung der Polarisation muss zunächst die Grenzfläche und Einfallsebene bestimmt werden. Die Grenzfläche ist die Ebene in welcher der Grenzübergang zwischen den beiden Materialien liegt. In unserem Fall ist dies die x - y -Ebene bei $z = 0$. Die Einfallsebene ist die Ebene, welche die Wellenvektoren $\underline{\mathbf{k}}_e$ und $\underline{\mathbf{k}}_r$ enthält und trifft hier auf die y - z -Ebene zu. Da die Schwingungsrichtung des E-Feldes nun senkrecht auf der Einfallsebene steht, liegt in diesem Beispiel eine senkrechte Polarisation vor.

- b) Verwenden Sie für den Fall $t = 0$ und $z = 0$ die Stetigkeitsbedingung der Tangentialkomponente des E-Feldes, um die Reflexions- und Transmissionswinkel zu berechnen.

Die elektrischen Tangentialkomponenten müssen an der Grenzfläche stetig sein. Einsetzen der Feldkomponenten in die Stetigkeitsbedingung $E_1 = E_2$ mit ($t = 0$ und (effektiv) $\mathbf{r} = y \mathbf{e}_y$) ergibt:

$$\underline{E}_e \exp(-j k_1 \sin \alpha_e y) + \underline{E}_r \exp(-j k_1 \sin \alpha_r y) = \underline{E}_t \exp(-j k_2 \sin \alpha_t y)$$

Diese Gleichung ist nichtlinear in y und muss für jeden Punkt in der Grenzfläche, also für alle y , erfüllt sein. Soll die Beziehung $\underline{E}_e + \underline{E}_r = \underline{E}_t$ bei $y = 0$ nun auch für beliebig andere y gelten, folgt daraus, dass alle Exponenten der Exponentialfunktionen identisch sein müssen:

$$-j k_1 \sin \alpha_e y = -j k_1 \sin \alpha_r y = -j k_2 \sin \alpha_t y$$

Daraus folgen dann das Reflexionsgesetz und das Snelliussche Brechungsgesetz:

$$\begin{aligned}\alpha_r &= \alpha_e \\ \sin \alpha_t &= \frac{k_1}{k_2} \sin \alpha_e\end{aligned}$$

- c) Berechnen Sie für den Fall $t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ mit folgendem Zusammenhang das $\underline{\mathbf{H}}$ -Feld:

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{Z} \mathbf{e}_k \times \underline{\mathbf{E}}$$

Hinweis: Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist, gilt z.B. $\mathbf{e}_{k_e} = \sin \alpha_e \mathbf{e}_y + \cos \alpha_e \mathbf{e}_z$.

Mit Kenntnis der Wellenvektor-Komponenten und der elektrischen Feldkomponenten, lässt sich durch das Kreuzprodukt bestimmen, welche Feldkomponenten ungleich Null das magnetische Feld besitzt. Betrachtet man hierzu Abbildung 1, so lässt sich erkennen, dass es sich hier um ein Linkssystem handelt. Aus diesem Grund muss beim Kreuzprodukt die Linke-Hand-Regel verwendet werden (beachten Sie den Unterschied zur Vorlesung). Der Wellenvektor hat nun nur Anteile in y - und z -Richtung. Das E-Feld hingegen nur Anteile in x -Richtung. Das Kreuzprodukt enthält entsprechend nur Anteile in y - und z -Richtung gemäß $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z$. Setzt man nun die jeweiligen elektrischen Feldkomponenten ein erhält man:

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{H}}_e &= \frac{1}{Z} \mathbf{e}_{k_e} \times \underline{\mathbf{E}}_e \\ &= \frac{1}{Z_1} \underline{E}_e \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_e \mathbf{r})) (-\sin \alpha_e \mathbf{e}_z + \cos \alpha_e \mathbf{e}_y) \\ \underline{\mathbf{H}}_t &= \frac{1}{Z_2} \underline{E}_t \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_t \mathbf{r})) (-\sin \alpha_t \mathbf{e}_z + \cos \alpha_t \mathbf{e}_y) \\ \underline{\mathbf{H}}_r &= \frac{1}{Z_1} \underline{E}_r \exp(j(\omega t - \mathbf{k}_r \mathbf{r})) (-\sin \alpha_r \mathbf{e}_z + \cos \alpha_r \mathbf{e}_y)\end{aligned}$$

- d) Unter der Annahme von $t = 0$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ sind die Exponentialterme, welche die räumliche und zeitliche Ausbreitung der Welle beschreiben, gleich eins. Die Stetigkeitsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}E\text{-tangential} &\implies \underline{E}_e + \underline{E}_r = \underline{E}_t \\ H\text{-tangential} &\implies \frac{1}{Z_1} \underline{E}_e \cos \alpha_e - \frac{1}{Z_1} \underline{E}_r \cos \alpha_r = \frac{1}{Z_2} \underline{E}_t \cos \alpha_t \\ E\text{-orthogonal} &\implies \text{nicht vorhanden} \\ B\text{-orthogonal} &\implies -\frac{1}{Z_1} \underline{E}_e \sin \alpha_e - \frac{1}{Z_1} \underline{E}_r \sin \alpha_r = -\frac{1}{Z_2} \underline{E}_t \sin \alpha_t\end{aligned}$$

Die tangentielle Bedingung für das E-Feld ergibt sich aus Aufgabenteil b). Eine orthogonale Bedingung existiert nicht, da kein E-Feld orthogonal zur Grenzfläche vorhanden ist (da senkrechte Polarisation). Die tangentielle und orthogonale Bedingung für das H-Feld lassen sich

ermitteln, indem man in das H-Feld aus Aufgabenteil c) in die tangentiale bzw. orthogonale Stetigkeitsbedingung $H_1 = H_2$ bzw. $B_1 = B_2$ (mit $i' = 0$, da $\kappa = 0$ angenommen) einsetzt. Setzt man nun die Winkelrelationen aus Aufgabenteil a) ein, wird die letzte Gleichung identisch zu der ersten. Es bleibt also folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$E_e + E_r = E_t \quad (1)$$

$$E_e \cos \alpha_e - E_r \cos \alpha_e = \frac{Z_1}{Z_2} E_t \cos \alpha_t \quad (2)$$

Setzt man Gleichung (1) in (2) lässt sich jeweils E_r oder E_t eliminieren und man erhält die gesuchten Felder in Abhängigkeit von E_e

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_t &= \frac{2 \cos \alpha_e}{\frac{Z_1}{Z_2} \cos \alpha_t + \cos \alpha_e} E_e \\ \Rightarrow E_t &= \frac{2 Z_2 \cos \alpha_e}{Z_1 \cos \alpha_t + Z_2 \cos \alpha_e} E_e \\ \Rightarrow E_r &= \left(\frac{2 Z_2 \cos \alpha_e}{Z_1 \cos \alpha_t + Z_2 \cos \alpha_e} - 1 \right) E_e \\ \Rightarrow E_r &= \frac{Z_2 \cos \alpha_e - Z_1 \cos \alpha_t}{Z_2 \cos \alpha_e + Z_1 \cos \alpha_t} E_e \end{aligned}$$

Der Reflexions- bzw. Transmissionsfaktor sind als der Anteil der reflektierten bzw. der transmittierten Welle zu der einfallenden Welle definiert. Es resultiert so

$$\begin{aligned} \underline{t} = \frac{E_t}{E_e} &= \frac{2 Z_2 \cos \alpha_e}{Z_1 \cos \alpha_t + Z_2 \cos \alpha_e} \\ \underline{r} = \frac{E_r}{E_e} &= \frac{Z_2 \cos \alpha_e - Z_1 \cos \alpha_t}{Z_2 \cos \alpha_e + Z_1 \cos \alpha_t} \end{aligned}$$

- e) Der kritische Winkel wird erreicht, wenn $\sin \alpha_e \frac{k_1}{k_2} > 1$. In diesem Fall kann kein reelles α_t die Bedingungen erfüllen. Dies ist jedoch nur möglich, wenn Medium 1 optisch dichter als Medium 2 ist, also $\varepsilon_{r1} \geq \varepsilon_{r2}$. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_e \frac{k_1}{k_2} &> 1 \\ \sin \alpha_e &> \frac{k_2}{k_1} \\ \alpha_{e,\text{kritisch}} &= \arcsin \frac{k_2}{k_1} \end{aligned}$$

Hinweis: Für den Fall $\alpha_e \geq \alpha_{e,\text{kritisch}}$ tritt Totalreflexion auf. Jedoch existiert auch in diesem Fall im zweiten Medium eine exponentiell abfallende Welle, da andernfalls die Stetigkeitsbedingungen verletzt wären. Die Lösung kann mittels eines komplexen Ansatzes für α_t hergeleitet werden. α_t kann dann allerdings nicht mehr als Winkel interpretiert werden. Das Phänomen Totalreflexion findet insbesondere in der optischen Kommunikation Anwendung, da es die Lichtwellenleitung, etwa mithilfe von Glasfasern, ermöglicht.

- f) Beim Übergang von Quarzglas zu Luft ändert sich der Brechungsindex und es ergibt sich als kritischer Winkel:

$$\begin{aligned}\alpha_{e,\text{kritisch}} &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r,\text{Luft}}}{\epsilon_{r,\text{Quarzglas}}}}\right) \\ &= \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{3.7}}\right) \\ &= 31.32^\circ\end{aligned}$$

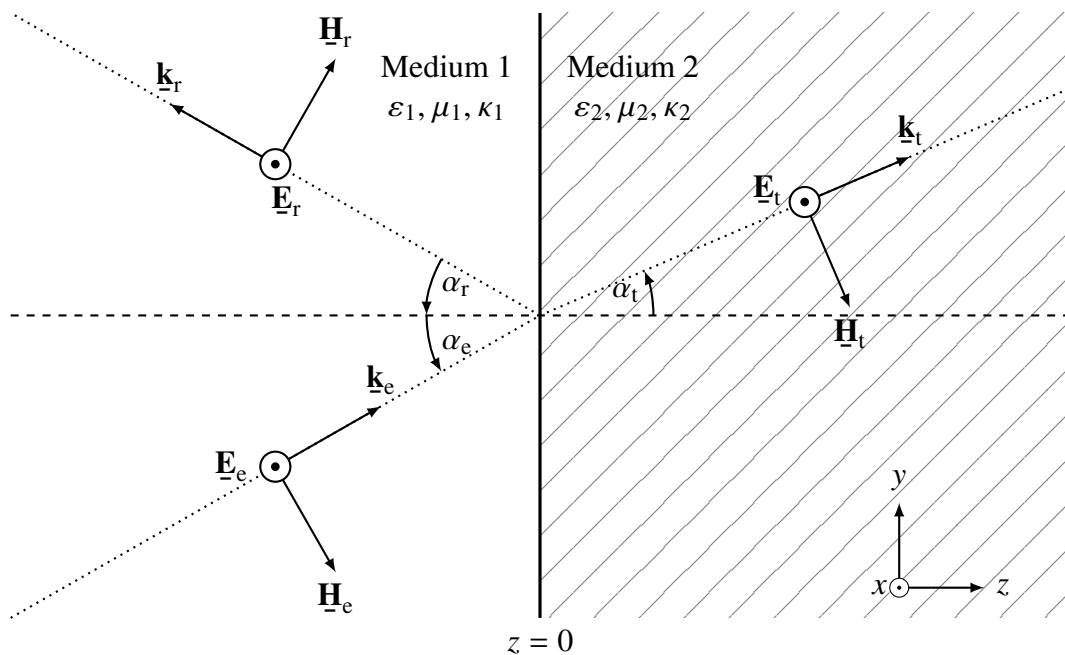


Abbildung 1

Fragen und Anregungen:

Bitte nutzen Sie das ILIAS Forum wann immer es möglich ist. Auf diese Weise können alle, die an der Veranstaltung EMW teilnehmen, von den Antworten sowie der entstehenden Diskussion profitieren. Unabhängig davon erreichen Sie uns bei Bedarf wie folgt

Prof. Dr.-Ing. Sebastian Randel: sebastian.randel@kit.edu

Patrick Matalla: patrick.matalla@kit.edu

Jonas Krimmer: jonas.krimmer@kit.edu