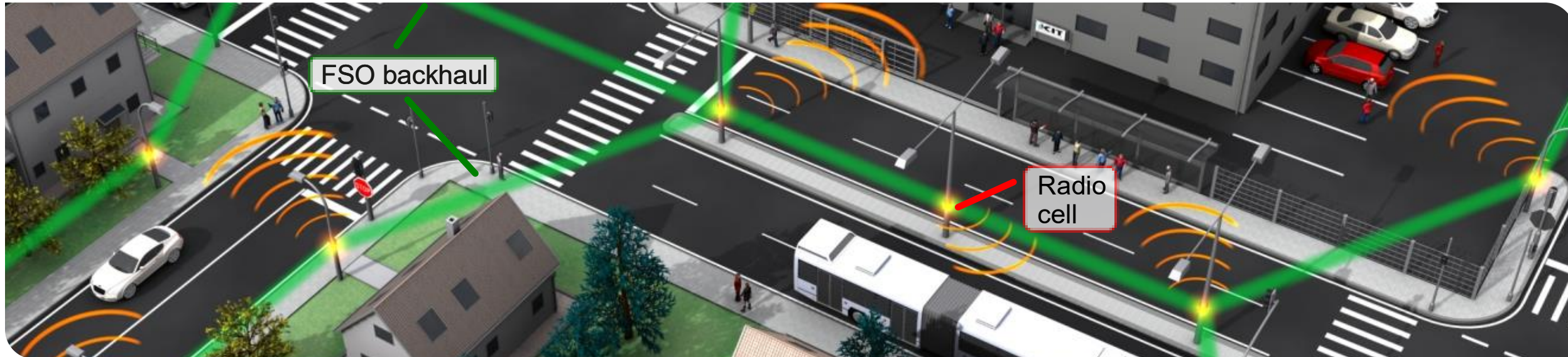


Elektromagnetische Wellen (EMW): Übung 6

Jonas Krimmer, Patrick Matalla und Sebastian Randel



Administratives

- Die Evaluation der Übung endet heute um 14 Uhr.
- Nutzt gerne weiterhin die Umfragen zu den Vorlesungen!
- Die Korrektur des Übungsblatt 2 ist (endlich) abgeschlossen.
- Die Klausur findet am 10. März 2022 von 16 – 18 Uhr statt, ...
- ... die Hörsaalverteilung etc. wird noch bekannt gegeben.

Oktober	November	Dezember	Januar	Februar
1 Fr	1 Mo ⁴⁴	1 Mi Vorlesung 8	1 Sa	1 Di
2 Sa	2 Di	2 Do	2 So Vorlesung 15	2 Mi
3 So	3 Mi Vorlesung 4	3 Fr	3 Mo	3 Do
4 Mo ⁴⁰	4 Do	4 Sa	4 Di	4 Fr
5 Di	5 Fr	5 So	5 Mi	5 Sa
6 Mi	6 Sa	6 Mo Übung 5 ⁴⁹	6 Do	6 So
7 Do	7 So	7 Di	7 Fr	7 Mo Übung 12 ⁶
8 Fr	8 Mo Übung 1 ⁴⁵	8 Mi Vorlesung 9	8 Sa	8 Di
9 Sa	9 Di	9 Do	9 So	9 Mi Fragestunde
10 So	10 Mi Vorlesung 5	10 Fr	10 Mo Übung 8 ²	10 Do
11 Mo ⁴¹	11 Do	11 Sa	11 Di	11 Fr
12 Di	12 Fr	12 So Übung 6 ⁵⁰	12 Mi Vorlesung 12	12 Sa
13 Mi	13 Sa	13 Mo	13 Do	13 So
14 Do	14 So	14 Di	14 Fr	14 Mo ⁷
15 Fr	15 Mo Übung 2 ⁴⁶	15 Mi Vorlesung 10	15 Sa	15 Di
16 Sa	16 Di	16 Do	16 So	16 Mi
17 So	17 Mi Vorlesung 6	17 Fr	17 Mo Übung 9 ³	17 Do
18 Mo Vorlesung 1 ⁴²	18 Do	18 Sa	18 Di	18 Fr
19 Di	19 Fr	19 So	19 Mi Vorlesung 13	19 Sa
20 Mi Vorlesung 2	20 Sa	20 Mo Übung 7 ⁵¹	20 Do	20 So
21 Do	21 So	21 Di	21 Fr	21 Mo ⁸
22 Fr	22 Mo Übung 3 ⁴⁷	22 Mi Vorlesung 11	22 Sa	22 Di
23 Sa	23 Di	23 Do	23 So	23 Mi
24 So	24 Mi Vorlesung 7	24 Fr	24 Mo Übung 10 ⁴	24 Do
25 Mo Übung 0 ⁴³	25 Do	25 Sa	25 Di	25 Fr
26 Di	26 Fr	26 So	26 Mi Vorlesung 14	26 Sa
27 Mi Vorlesung 3	27 Sa	27 Mo ⁵²	27 Do	27 So
28 Do	28 So	28 Di	28 Fr	28 Mo ⁹
29 Fr	29 Mo Übung 4 ⁴⁸	29 Mi	29 Sa	
30 Sa	30 Di	30 Do	30 So	
31 So		31 Fr	31 Mo Übung 11 ⁵	

Themenübersicht

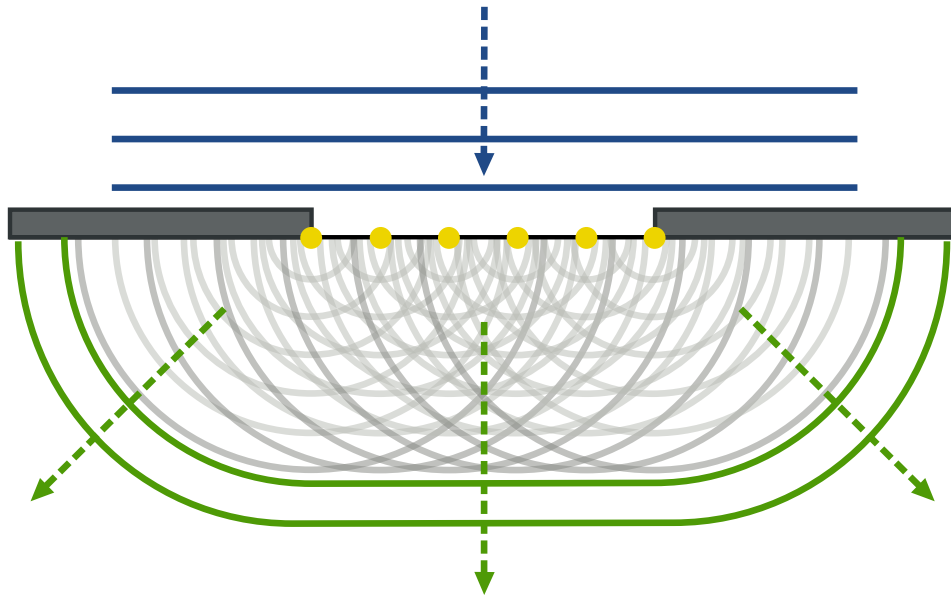
Übung	Aufgaben	Thematik
Übung 0	-	Mathematische und physikalische Grundlagen
Übung 1	A1, A2, A3	Wellengleichungen, ebene Wellen, Fourierreihen
Übung 2	A4, A5	Poynting-Vektor, Phasen- & Gruppengeschwindigkeit
Übung 3	A6, A7	Polarisation, Hertzscher Dipol
Übung 4	A8	Hertzscher Dipol, Dipolantenne
Übung 5	A9	Grenzflächenübergänge
Übung 6	A10, A11	Kirchhoffsches Beugungsintegral, Fresnel Näherung

Einführung

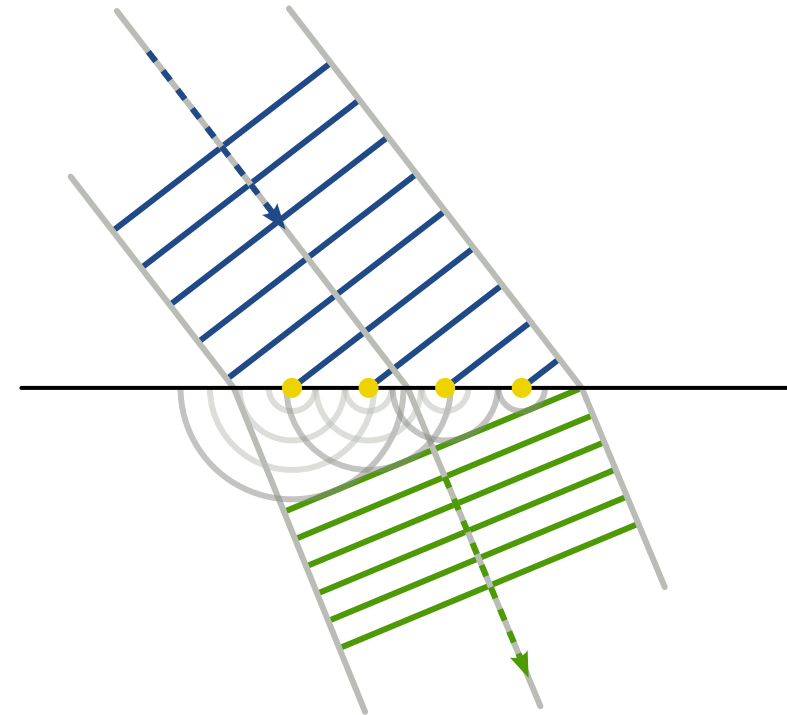
- Bislang haben wir meist ebene Wellen mit unendlicher Ausdehnung in transversaler Richtung betrachtet.
- In der Praxis ist das aber nur selten eine gute Näherung, da die unendliche Ausdehnung und die damit einhergehende unendliche Energie nicht möglich sind.
- Insbesondere interagieren elektromagnetische Wellen bei der Ausbreitung oftmals mit Hindernissen in der Größenordnung der Wellenlänge.
- Wie können wir den Einfluss solcher Hindernisse auf die Wellenausbreitung beschreiben?

Huygenssches Prinzip

- Jede Wellenfunktion mit komplexer Amplitude $\underline{U}(\mathbf{r})$ an einem Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ kann als Überlagerung von Kugelwellen dargestellt werden.



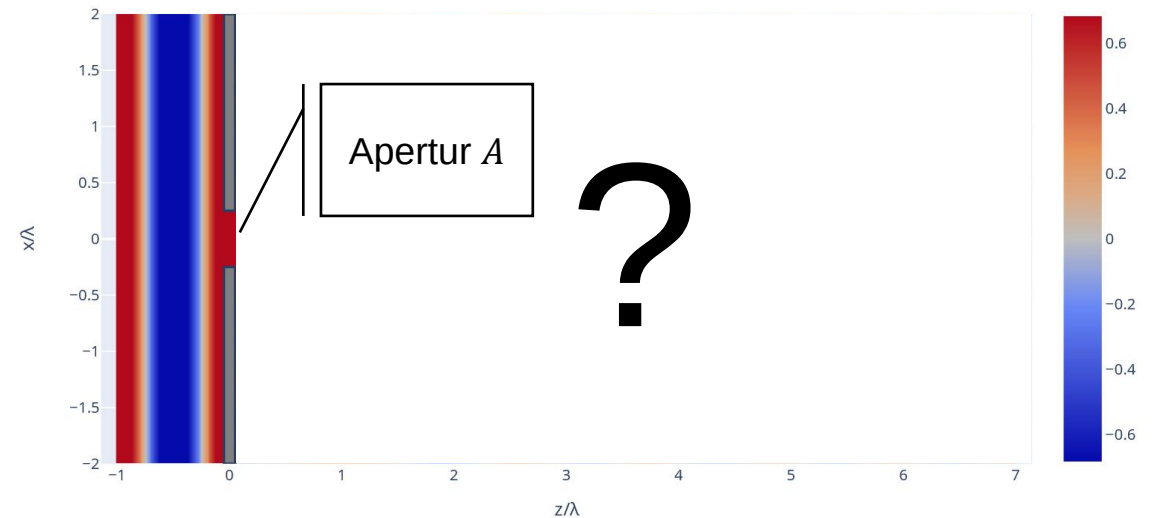
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Refraction_on_an_aperture_-_Huygens-Fresnel_principle.svg, Arne Nordmann (norro, CC BY-SA 3.0 <<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Refraction_-_Huygens-Fresnel_principle.svg, Arne Nordmann (norro, CC BY-SA 3.0 <<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>>, via Wikimedia Commons

Beugungsproblem (I)

- Ebene Welle breitet sich in positive z -Richtung aus
- Trifft bei $z = 0$ auf einen Schirm mit der Apertur A
- Wie sieht die Feldverteilung hinter dem Schirm aus?
- **Annahme:** keine Reflexion, Brechung oder Streuung. Welle ausschließlich durch das Hindernis abgelenkt (=gebeugt).



Beugungsproblem (II)

- Die Apertur wirkt nun als „Quelle“ für das Feld in $z > 0$
- Wellengleichung wird inhomogen → Lösung schwierig
- **Ansatz:** Integration → führt auf Volumenintegral
- Daher Transformation in Oberflächenintegral mit zweiter Greenscher Identität
- Vereinfacht Einbringen des Felds in der Apertur als Randbedingung



Aufgabe 10 a)

Zweite Greensche Identität besagt, dass ...

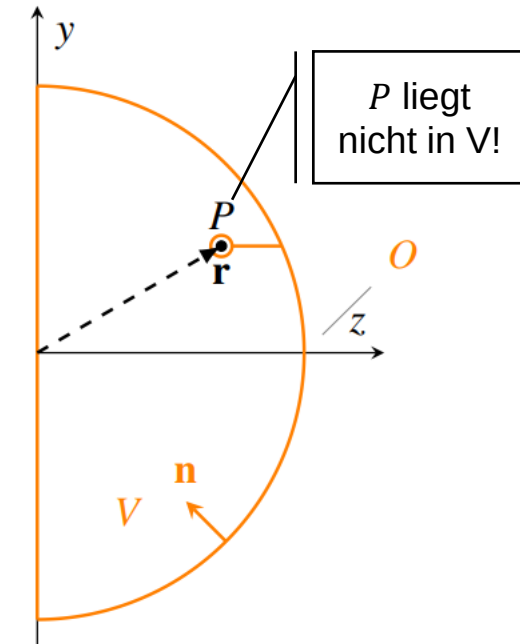
$$-\oint_O \left(\underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dF' = \int_V (\underline{U}(\mathbf{r}') \Delta' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Delta' \underline{U}(\mathbf{r}')) dV', \quad (1)$$

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-j k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{mit} \quad \Delta \psi + k^2 \psi = -\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (2)$$

- a) Nehmen Sie an, dass $\underline{U}$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung darstellt. Zeigen Sie so unter Verwendung von (2), dass das Volumenintegral auf der rechten Seite von (1) verschwindet.

Hinweis: Ist $\underline{U}$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, so gilt $\Delta \underline{U} + k^2 \underline{U} = 0$.

Die Fundamentallösung ψ gibt dabei die Wirkung einer von $\mathbf{r}'$ ausgehenden Kugelwelle in $\mathbf{r}$ an. Rechte Seite von (2): Punktquelle der Kugelwelle



(a) Initiales Integrationsgebiet, in dem der Schlauch durch eine Linie dargestellt ist.

Aufgabe 10 b)-d)

$$-\oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dF' = \oint_H \left(\underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dF'. \quad (3)$$

Im nächsten Schritt möchten wir zeigen, dass das Integral über die Kugelfläche K gerade dem Wert der Wellenfunktion $\underline{U}(\mathbf{r})$ entspricht. Wir schreiben $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Da sich der Punkt P im Mittelpunkt der Kugel befindet, zeigt der Normalenvektor stets in die gleiche Richtung wie der Verbindungsvektor von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{r}'$. Daher gilt $\frac{\partial}{\partial n'} = \frac{\partial}{\partial R}$.

- b) Setzen Sie ψ aus (2) ein und verwenden Sie die zuvor gegebenen Informationen, um den Integranden von

$$-\oint_K \left(\underline{U}(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} - \psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \underline{U}(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right) dF' \quad (4)$$

zu vereinfachen.

- c) Da die Flächennormale zu K ausschließlich in radiale Richtung zeigt, gilt für das Flächenelement dF' in Kugelkoordinaten

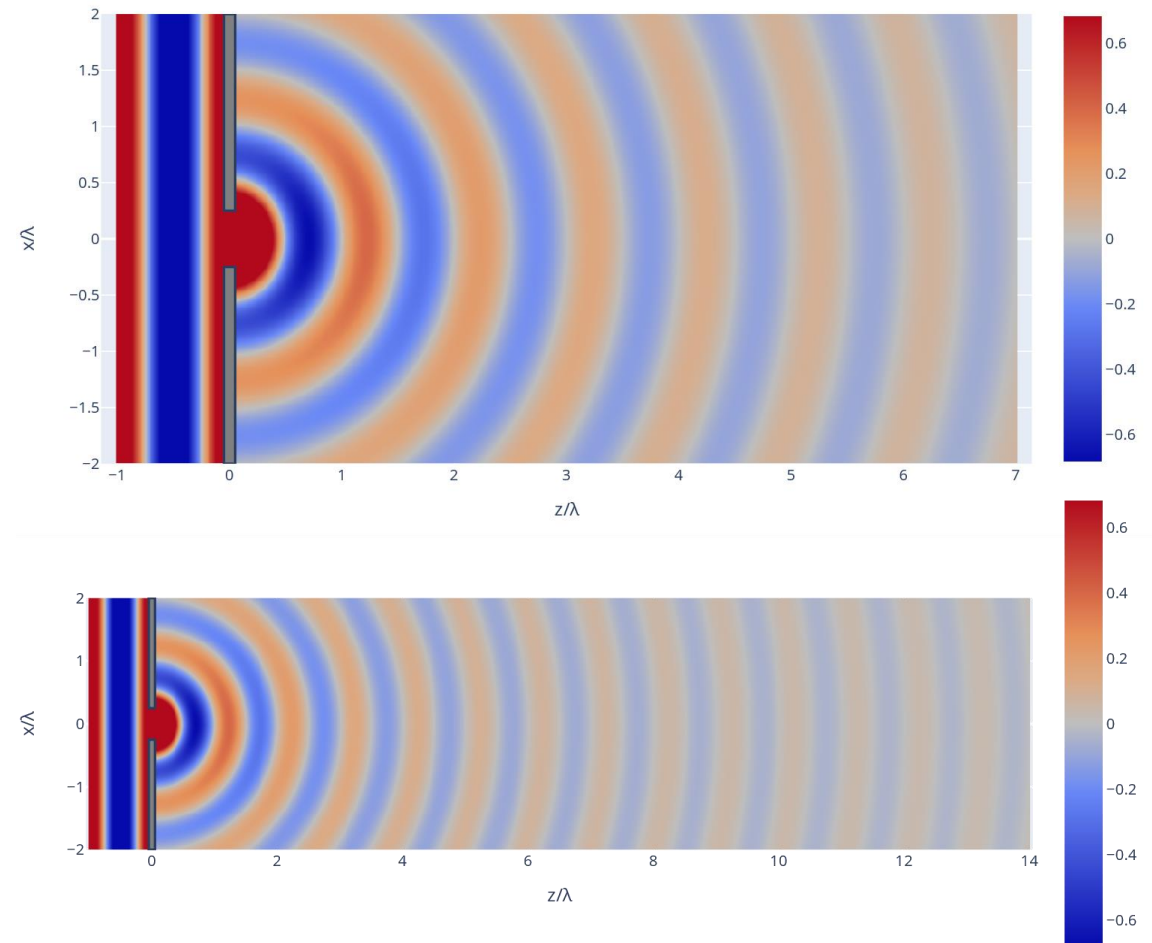
$$dF' = R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\phi,$$

mit $\vartheta \in [0, \pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi)$. Setzen Sie in den vereinfachten Ausdruck von (4) ein. Zeigen Sie anschließend, dass im Grenzübergang $R \rightarrow 0$ das Integral gerade zu $\underline{U}(\mathbf{r})$ wird.

- d) Erklären Sie anschaulich, weshalb das Ergebnis aus Aufgabenteil c) nach dem Huygensschen Prinzip zu erwarten ist.

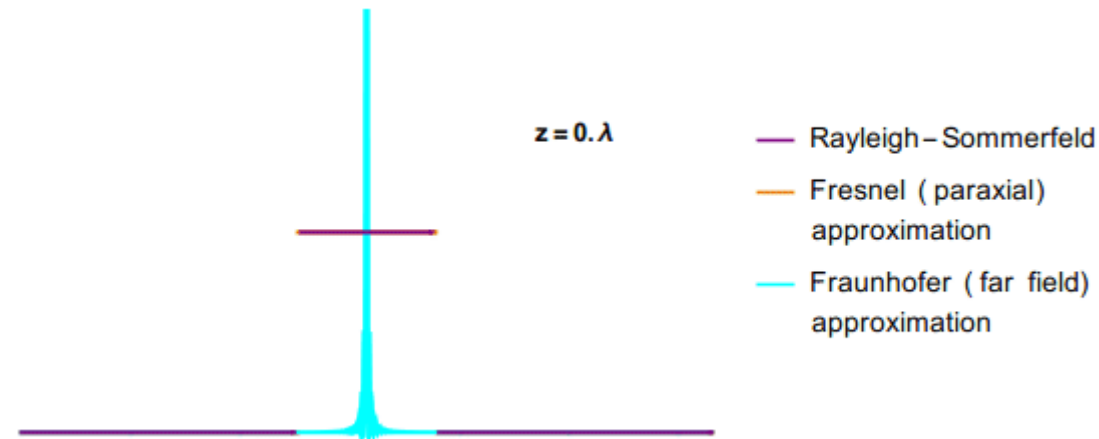
Beugungsproblem: Lösung

- Lösen wir nun die rechte Seite von (3), können wir nun die Feldverteilung für $z > 0$ bestimmen.
- Beispiel: Spaltbreite = Wellenlänge
 - Nah an der Apertur: $\sim$ Kugelwelle
 - Entfernt: $\sim$ Parabolische Wellenfront
 - Große Distanz: $\sim$ Lokal ebene Welle



Näherungen des Beugungsintegrals

- In hinreichender Entfernung (und unter kleinen Winkeln gegenüber der Ausbreitungsachse) können wir das Beugungsintegral vereinfachen:
 - Fresnelsche Näherung
 - Fraunhofer Näherung
- Gültigkeitsbereiche zeigen wir nach der Aufgabe 11



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comparison_Sommerfeld-Fresnel-Fraunhofer.gif. Jacopo Bertolotti, CC0, via Wikimedia Commons

Aufgabe 11

Wir nehmen an, dass eine ebene Welle ausgehend vom Halbraum $z < 0$ auf einen Schirm S mit der Apertur A in der Ebene $z = 0$ trifft. Mithilfe des Kirchhoffschen Beugungsintegrals könnten wir nun die Feldverteilung an jedem Punkt im Halbraum $z > 0$ ermitteln. Für hinreichend große Abstände von der Apertur liefert allerdings bereits die Fresnel Näherung

$$\underline{U}^{(\text{Fresnel})}(\mathbf{r}) = \frac{j \underline{U}_0 \exp(-j k z)}{\lambda r} \iint_A \exp\left(-j k \frac{(x - x')^2 + (y - y')^2}{2z}\right) dx' dy', \quad (5)$$

eine adäquate Integraldarstellung des Beugungsproblems, welche leichter zu behandeln ist als das Kirchhoffsche Beugungsintegral.

a) Gegeben sei die Aperturfunktion

$$g_A(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Verwenden Sie g_A , um die Integrationsgrenzen des Fresnelschen Beugungsintegrals (5) ins Unendliche zu erweitern.

b) Führen Sie nun auch die Raumfrequenzen $\xi = x/\lambda z$ und $\nu = y/\lambda z$ ein, um das Fresnelsche Beugungsintegral in ein Fourierintegral zu überführen.